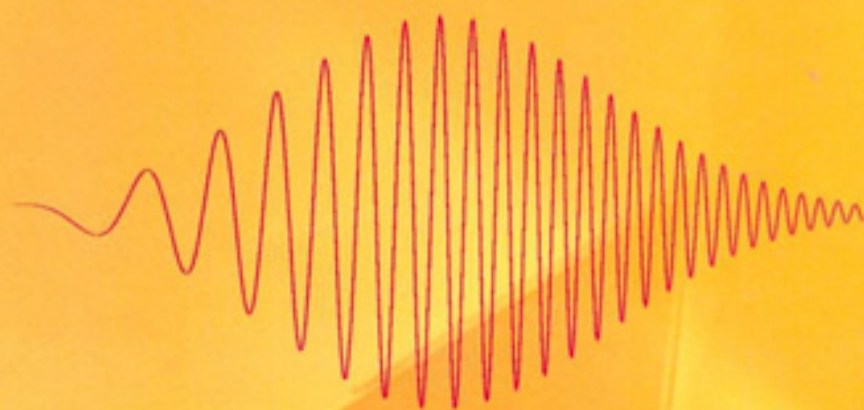


Pierre Pellat-Finet

# Optique de Fourier

Théorie métaxiale  
et fractionnaire



Springer

# **Optique de Fourier**

## **Théorie métaxiale et fractionnaire**

**Springer**

*Paris*

*Berlin*

*Heidelberg*

*New York*

*Hong Kong*

*Londres*

*Milan*

*Tokyo*

Pierre Pellat-Finet

# **Optique de Fourier**

## **Théorie métaxiale et fractionnaire**

 Springer

## **Pierre Pellat-Finet**

Laboratoire de mathématiques et applications des mathématiques

Université de Bretagne-Sud

BP 92116

56321 Lorient Cedex

France

pierre.pellat-finet@univ-ubs.fr

---

ISBN 13 : 978-2-287-99167-7 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France 2009

Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation, la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant les paiements des droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.

L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc., même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.

La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emplois. Dans chaque cas il incombe à l'utilisateur de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

*Maquette de couverture : Jean-François MONTMARCHÉ*



*À la mémoire  
de Roger Pellat-Finet  
mon père  
et de Jean  
mon frère*

# Avant-propos

Ce livre présente l'optique de Fourier de façon originale : il se fonde en effet sur la théorie métaxiale du professeur Georges Bonnet et tient compte des récents apports de la transformation de Fourier fractionnaire. Il n'est pas classique en ce sens qu'il s'écarte du point de vue, universellement adopté, dont l'ouvrage du professeur J. Goodman [97] reste la meilleure expression. Il est né du besoin de disposer d'un texte détaillé qui puisse servir de référence aux recherches (non classiques !) que je mène dans le domaine, afin de m'éviter de devoir rappeler en préambule à chaque nouvelle publication des résultats déjà publiés, mais malheureusement peu connus. Ce n'est pas par goût de l'originalité que j'ai choisi le cadre métaxial, puis fractionnaire, mais bien parce que je suis convaincu des avantages qu'offre la doctrine métaxiale pour décrire la diffraction et ses applications, dans les limites d'une théorie scalaire. J'espère bien que ce livre contribuera à convertir les lecteurs à cette opinion.

L'ouvrage est la transcription de cours d'optique de Fourier donnés depuis une quinzaine d'années dans diverses formations universitaires<sup>1</sup> et écoles d'ingénieurs<sup>2</sup>. Il constitue également la version française, notablement étoffée, d'un livre publié en Colombie [187], dont la majeure partie a accompagné des cours à l'université industrielle du Santander, à l'université du Cauca et à l'université de Pamplona (Colombie), un séminaire à l'université fédérale de Rio de Janeiro, et dernièrement des cours intensifs à l'université d'Antioquia (Medellin) et à l'université catholique du Pérou (Lima), dans le cadre d'une coopération avec l'université Paris-Sud (Orsay). Ces cours m'ont conduit à rechercher une présentation du sujet qui soit didactique et cela devrait, je crois, se refléter dans le texte. C'est aussi dans cette perspective didactique que j'ai inclus des exercices, dont certains proposés comme sujets d'examens dans les formations et institutions déjà mentionnées.

Compte tenu de la toute récente réforme du système universitaire français, les chapitres 1 à 5 peuvent servir de support à un cours de première année de maîtrise de physique (ancienne maîtrise). Quelques éléments choisis dans les

---

<sup>1</sup> Maîtrise de physique à l'université de Bretagne-Sud (UBS, Lorient et Vannes), D.E.A à l'université de Bretagne occidentale et à l'université de Rennes 1, et deuxième année du mastère « Physique, photonique et optique des télécommunications » commun à l'ENSTB et l'ENIB à Brest, l'ENSSAT à Lannion, l'INSA de Rennes et l'UBS.

<sup>2</sup> École nationale supérieure des télécommunications de Bretagne (ENSTB, Brest) et École supérieure d'électricité (Supélec, Rennes).

chapitres 9 et 10, si l'accent est mis sur la cohérence, ou le début du chapitre 8 pour la formation des images, voire le chapitre 7, pour l'étude des faisceaux gaussiens, fournissent des compléments envisageables à ce niveau. Certains approfondissements correspondent davantage à des cours de deuxième année de maîtrise orienté vers l'optique (ancien D.E.A). L'ensemble me paraît encore convenir à des formations d'ingénieurs comportant un enseignement d'optique. Les chapitres se rapportant à la transformation de Fourier fractionnaire s'adressent à des chercheurs qui souhaiteraient poursuivre l'étude de l'optique de Fourier fractionnaire (en suivant la logique métaxiale).

\*  
\* \*

La composition de cet ouvrage résulte de mon propre cheminement en optique et, au moment d'envoyer le texte à l'imprimeur, je me rends compte que mon premier contact avec l'optique de Fourier remonte à plus de trente ans. J'ai bénéficié de ce que j'estime être des circonstances heureuses pour développer l'étude de ce domaine. Ma première chance fut sans doute de découvrir le sujet à travers les cours dispensés à l'École supérieure d'optique par le professeur André Maréchal et par le professeur Serge Lowenthal, sans oublier le cours de microscopie de M. Georges Nomarski, ni les conférences du professeur Joseph Goodman, alors en séjour sabbatique à l'Institut d'optique ! Ce fut une autre chance que de pouvoir mettre immédiatement en pratique ce que je venais d'apprendre, en donnant moi-même un cours d'optique de Fourier à l'université industrielle du Santander (Colombie), où je fus professeur d'optique pendant deux ans. J'enseignais alors la forme classique de la théorie dont j'eus ainsi l'occasion d'approfondir la connaissance, comme il arrive quand on prétend enseigner quelque chose. La troisième chance, la plus déterminante, sans doute préparée par mon parcours antérieur, fut d'obtenir un poste de chercheur à l'université de Toulon et du Var, dans le laboratoire du professeur Georges Bonnet. J'ai ainsi découvert la théorie métaxiale de la bouche même de son inventeur. Et, pur produit de l'École d'optique française, j'ai été enthousiasmé par la vision du professeur Bonnet, si bien que, quelques années plus tard, lorsque je donnai un cours d'introduction à l'optique de Fourier à l'ENST de Bretagne, il me parut naturel de tenter de suivre la voie si magnifiquement ouverte par Georges Bonnet.

Tout cela se ressent certainement dans la présentation adoptée pour le texte, dans le choix des matières et des applications qui y sont abordées. Outre les sujets classiques de l'optique de Fourier (formation des images, transfert de la cohérence, holographie, traitement du signal), j'ai inclus dans le livre des thèmes qui ne sont pas rattachés traditionnellement à ce domaine : résonateurs optiques, faisceaux gaussiens, spectrométrie instrumentale. L'optique de Fourier apparaît ainsi comme un cadre très général, au sein duquel s'expliquent et se modélisent un grand nombre de phénomènes optiques. J'espère que cet effort de synthèse sera apprécié.

L'optique n'est pas une branche isolée de la physique, et le livre sort parfois de ce domaine en montrant comment les techniques de l'optique de Fourier permettent de comprendre, par exemple, quelques propriétés des antennes radio-électriques. En établissant ces parallèles, je suis certain d'être fidèle à l'esprit même qui a guidé Georges Bonnet dans l'élaboration de la doctrine métaxiale. Je crois de plus que cela sera utile aux étudiants et les aidera à acquérir une vue unifiée des problèmes de propagation électromagnétique en espace libre, du moins dans leurs grandes lignes. L'histoire des sciences montre que de tels rapprochements sont souvent fructueux : des progrès accomplis dans une discipline sont suivis de progrès similaires dans une discipline connexe, pour peu qu'on ait pris soin de faire le lien entre les procédés propres à chacune d'elles. J'en veux pour preuve l'optique astronomique actuelle, qui repose sur la méthode de Handbury Brown et Twiss, mise au point en 1954 pour la radio-astronomie – qu'on peut d'ailleurs voir elle-même comme une extension de la méthode de Michelson et Pease de 1921, purement optique –, et sur la technique de synthèse d'ouverture développée pour le radar.

Dans la forme, j'ai cherché à être consistant sur le plan mathématique et la lecture du livre exige une bonne connaissance de la transformation de Fourier. L'étudiant débutant ne doit pas se décourager : l'ouvrage offre aussi un moyen d'acquérir la pratique de cet outil si important en mathématiques et en applications des mathématiques (physique, traitement du signal). Pour réduire les difficultés, la rédaction des calculs est souvent très détaillée, et, préférant la clarté à l'élégance, j'ai eu recours à quelques répétitions.

Chaque fois que je l'ai pu, j'ai accompagné les calculs et la théorie d'explications intuitives – quand j'en avais ! – et j'ai mentionné des considérations techniques pour illustrer comment l'optique de Fourier s'appliquait effectivement à des situations réelles. Je n'ai pas hésité non plus à contredire parfois la doctrine classique quand je pensais avoir meilleure explication. Cela concerne par exemple le transfert de la cohérence par imagerie, ou encore le lien entre le théorème de Zernike et la diffraction. Le lecteur jugera du bien-fondé de ma thèse.

\*  
\* \*

La rédaction de ce livre s'est échelonnée sur de (trop) nombreuses années, et j'ai souvent fait part de mon projet à des collègues et amis qui ont toujours consenti à écouter mes explications sur certains points délicats, ou encore en chantier, favorisant de la sorte la maturation des sujets exposés. Je remercie pour cela Raymond Chevallier, Yves Defosse et Renaud Moignard, alors à l'ENSTB, pour leur écoute et leurs remarques. Des collègues colombiens, avec leur cordialité coutumière, ont joué le même rôle lors de mes séjours dans leur pays : je remercie Yezid Torres, à l'origine de la version castillane (colombienne !) du livre ; Jader Guerrero avec qui j'ai eu des discussions passionnées ; Rafael Torres pour le développement d'applications originales et prometteuses. Je remercie également Guillermo Baldwin (Lima) dont la finesse des questions

a souvent permis un enrichissement des sujets en débat entre nous ; Paulo Ribeiro, de l'université fédérale de Rio de Janeiro, et les membres de son équipe, Marcelo Almeida, Daniel Tasca, Stephen Walborn, de m'avoir fait découvrir les images quantiques, dont je ne doute pas qu'elles offriront de nouvelles applications à l'optique de Fourier.

D'autres collègues m'ont fait part de leurs remarques sur le manuscrit même, dont j'ai la plupart du temps tenu compte. Il va de soi cependant qu'ils ne sont pas responsables de la mauvaise interprétation que j'aurais faite de leurs idées, ni des erreurs qui peuvent encore exister dans mon texte. Ils ne sont pas supposés non plus adhérer nécessairement aux opinions que j'exprime. Pierre-Emmanuel Durand, très critique, et Éric Fogret, très minutieux, sont à l'origine d'un grand nombre d'améliorations de mon texte et je les en remercie. Je remercie Jean-Jacques Bellanger pour ses indications essentielles sur les variables et fonctions aléatoires et pour le temps qu'il a bien voulu consacrer à me les faire comprendre ; Michel Ney pour son éminente expertise sur les antennes ; Denis Battarel, Christian Boisrobert, Yann Boucher et Yves Souche pour leurs remarques générales et leurs conseils. Je suis particulièrement reconnaissant envers Pierre Chavel, de l'Institut d'optique, de m'avoir fait part de ses remarques et de son point de vue critique et stimulant sur l'optique métaxiale et fractionnaire.

De multiples passages de ce livre, notamment les chapitres 9 et 10, son fond théorique même, s'inspirent directement du cours dispensé par le professeur Georges Bonnet à l'université de Toulon et du Var, cours auquel j'ai assisté en 1982–83. Il est certain que je n'aurais pas développé l'optique de Fourier fractionnaire comme je l'ai fait à partir de 1993, que je n'aurais pas écrit ce livre, si je n'avais connu la théorie métaxiale et si le professeur Bonnet ne m'en avait expliqué les grandes lignes de vive voix. Je ne saurais être trop reconnaissant envers le professeur Bonnet de tout ce que mon passage dans son laboratoire a eu d'enrichissant pour moi-même. Je lui adresse mes vifs remerciements et l'assure de mes plus sincères sentiments d'admiration et de respect.

Pierre Pellat-Finet

Guidel, Saint-Marcellin, janvier 2009.

# Table des matières

Avant-propos .....	vii
Table des matières .....	xi
Plan de l'ouvrage et guide de lecture .....	xxiii
Symboles et notations .....	xxvii
Introduction .....	1

---

## Partie I. Diffraction monochromatique

---

<b>1. Le principe de Huygens–Fresnel .....</b>	<b>11</b>
1.1 Diffraction–propagation .....	11
1.2 Formulation intuitive du principe de Huygens–Fresnel .....	13
1.3 Éléments pour une théorie scalaire .....	16
1.3.1 Ondes localement planes .....	16
1.3.2 Éclairement, intensité vibratoire .....	18
1.3.3 Spectre électromagnétique et domaine optique .....	19
1.4 Représentation de l'amplitude du champ .....	20
<b>2. Fréquence spatiale et spectre angulaire .....</b>	<b>21</b>
2.1 Fréquence spatiale .....	21
2.1.1 La notion de fréquence spatiale .....	21
2.1.2 Association des fréquences spatiales et des ondes planes .....	24
2.1.3 Vecteur fréquence angulaire .....	25
2.1.4 Obtention de l'onde plane associée à une fréquence spatiale donnée .....	27
2.2 Spectre angulaire .....	28
2.2.1 La notion de spectre angulaire .....	28
2.2.2 Propagation du spectre angulaire .....	30
2.2.3 Fréquence de coupure. Ondes évanescentes .....	32
2.3 Spectre angulaire et diffraction .....	35
2.3.1 La diffraction comme filtre linéaire .....	35

---

2.3.2	Dispersion par diffraction–propagation . . . . .	36
2.3.3	Diffraction par un écran plan . . . . .	37
2.4	Exercices . . . . .	38
<b>3.</b>	<b>Diffraction métaxiale . . . . .</b>	<b>41</b>
3.1	Émetteurs et récepteurs dans l'approximation métaxiale . . . . .	41
3.1.1	Coordonnées sur un émetteur ou un récepteur sphériques . . . . .	41
3.1.2	Approximation métaxiale . . . . .	42
3.2	Diffraction de Fraunhofer . . . . .	44
3.2.1	Transparence de courbure . . . . .	44
3.2.2	Diffraction de Fraunhofer et transformation de Fourier . . . . .	45
3.3	Transfert général. Diffraction de Fresnel . . . . .	51
3.3.1	Transfert du champ d'un émetteur sphérique quelconque à un récepteur sphérique quelconque . . . . .	51
3.3.2	Diffraction de Fresnel au sens strict . . . . .	53
3.3.3	Diffraction de Fresnel ou diffraction de Fraunhofer ? . . . . .	54
3.4	Émetteur sphérique équivalent . . . . .	55
3.4.1	Source ponctuelle et homogénéité des distributions de Dirac . . . . .	55
3.4.2	Trace d'une onde sphérique sur un plan . . . . .	57
3.4.3	Émetteur sphérique équivalent à un objet plan éclairé par une onde sphérique . . . . .	58
3.5	Composition des opérateurs de transfert du champ . . . . .	59
3.6	Complément : diffraction et filtrage linéaire . . . . .	62
3.6.1	Représentation spatiale . . . . .	62
3.6.2	Représentation fréquentielle . . . . .	63
3.6.3	Description fréquentielle d'une transparence de courbure . . . . .	64
3.6.4	Transfert général . . . . .	65
3.6.5	Trilogie de la diffraction de Fresnel . . . . .	66
3.7	Exercices . . . . .	66
<b>4.</b>	<b>Imagerie cohérente . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1	Le dioptre . . . . .	69
4.1.1	Formule de conjugaison . . . . .	69
4.1.2	Image d'une calotte sphérique tangente au dioptre . . . . .	71
4.1.3	Image d'une calotte sphérique centrée sur le dioptre . . . . .	73
4.1.4	Image d'une calotte sphérique quelconque . . . . .	74
4.1.5	Invariants du dioptre . . . . .	76
4.1.6	Loi du grandissement des rayons pour le dioptre . . . . .	77
4.2	Systèmes centrés . . . . .	77
4.2.1	Image cohérente du champ sur un émetteur sphérique . . . . .	77
4.2.2	Image cohérente d'un émetteur plan à travers un sys- tème à foyers . . . . .	78
4.2.3	Loi du grandissement des rayons . . . . .	79
4.2.4	Application : obtention sur un plan du champ qui existe sur une calotte sphérique . . . . .	81

4.3	Transfert général à travers un système centré . . . . .	82
4.3.1	Décomposition du transfert en une imagerie et un phénomène de diffraction–propagation . . . . .	82
4.3.2	Mise en œuvre pratique . . . . .	83
4.4	Conclusion : image paraxiale, image métaxiale . . . . .	86
4.5	Complément : formules de conjugaison et points cardinaux d’un système centré . . . . .	87
4.5.1	Un autre point de vue sur le dioptre . . . . .	87
4.5.2	Systèmes à foyers et systèmes afocaux . . . . .	89
4.5.3	Système à foyers : formule de conjugaison avec origines en deux points conjugués quelconques . . . . .	91
4.5.4	Système à foyers : formule de conjugaison avec origines aux points principaux (Descartes) . . . . .	92
4.5.5	Foyers . . . . .	93
4.5.6	Lentille mince . . . . .	95
4.6	Exercices . . . . .	96
<b>5.</b>	<b>Figures de diffraction</b> . . . . .	<b>99</b>
5.1	Obtention du spectre d’une amplitude lumineuse . . . . .	99
5.1.1	Modulation spatiale de la lumière . . . . .	99
5.1.2	Montages pratiques . . . . .	101
5.1.3	Observation sur un écran . . . . .	105
5.2	Exemples de diffraction par une ouverture . . . . .	106
5.2.1	Fente illimitée . . . . .	106
5.2.2	Ouverture rectangulaire . . . . .	108
5.2.3	Trous d’Young . . . . .	109
5.2.4	Ouverture circulaire . . . . .	111
5.3	Diffraction par un bord d’écran rectiligne . . . . .	112
5.3.1	Diffraction de Fraunhofer . . . . .	112
5.3.2	Diffraction de Fresnel . . . . .	118
5.4	Spectres de réseaux de diffraction . . . . .	120
5.4.1	Réseaux d’amplitude . . . . .	121
5.4.2	Réseau de phase . . . . .	129
5.4.3	Réseaux de biréfringence . . . . .	130
5.5	Rendement de diffraction d’un réseau . . . . .	134
5.5.1	Définition . . . . .	134
5.5.2	Réseau d’amplitude sinusoïdal . . . . .	134
5.5.3	Réseau d’amplitude en créneaux . . . . .	135
5.5.4	Réseau de phase à deux niveaux . . . . .	136
5.6	Rayonnement des antennes . . . . .	137
5.6.1	Diffraction à l’infini . . . . .	137
5.6.2	Lien avec la théorie des antennes . . . . .	140
5.6.3	Antenne à ouverture rectangulaire . . . . .	142
5.6.4	Antenne à balayage . . . . .	143
5.6.5	Antennes filaires . . . . .	144
5.6.6	Réseau d’antennes filaires . . . . .	146

---

5.7	Apodisation . . . . .	149
5.7.1	Apodisation par atténuation aux bords de la pupille . . .	149
5.7.2	Apodisation d'un réseau par une fenêtre transparente .	151
5.7.3	Réseau d'antennes pondéré . . . . .	153
5.8	Exercices . . . . .	154
<b>6.</b>	<b>Diffraction et transformation de Fourier fractionnaire . . . .</b>	<b>159</b>
6.1	Diffraction de Fresnel et transformation de Fourier fractionnaire	159
6.1.1	Analogie entre la diffraction de Fresnel et la transformation de Fourier fractionnaire . . . . .	159
6.1.2	Expression de la diffraction de Fresnel par une transformation de Fourier fractionnaire . . . . .	160
6.1.3	Observation du champ sur un récepteur donné . . . . .	163
6.2	Transfert réciproque et transfert d'ordre réel . . . . .	167
6.2.1	Transfert réciproque . . . . .	167
6.2.2	Caractérisation géométrique d'un transfert d'ordre réel	169
6.3	Principe de Huygens-Fresnel et composition des transformations de Fourier fractionnaires . . . . .	170
6.3.1	Première approche . . . . .	170
6.3.2	Deuxième méthode . . . . .	173
6.4	Complément : diffraction et transformations de Fourier fractionnaires d'ordre complexe . . . . .	176
6.4.1	Transfert du champ . . . . .	176
6.4.2	Analyse graphique . . . . .	181
6.5	Exercices . . . . .	182
<b>7.</b>	<b>La méthode de la transformation de Fourier fractionnaire .</b>	<b>183</b>
7.1	Le dioptre . . . . .	183
7.1.1	Transfert général . . . . .	183
7.1.2	Formules paraxiales . . . . .	186
7.1.3	Formules métaxiales . . . . .	187
7.1.4	Conclusion . . . . .	188
7.2	Fondements de la théorie des résonateurs optiques . . . . .	188
7.2.1	Convention pour les miroirs . . . . .	189
7.2.2	Longueur d'un résonateur . . . . .	190
7.2.3	Transfert du champ d'un miroir à l'autre . . . . .	191
7.2.4	Modes transversaux . . . . .	195
7.2.5	Modes longitudinaux . . . . .	197
7.2.6	Stabilité d'un résonateur . . . . .	198
7.2.7	Col d'un résonateur . . . . .	199
7.3	Faisceaux gaussiens . . . . .	203
7.3.1	Notion de faisceau gaussien . . . . .	203
7.3.2	Faisceaux gaussiens dans l'espace libre . . . . .	204
7.3.3	Imagerie d'un faisceau gaussien . . . . .	209
7.3.4	Conclusion sur les faisceaux gaussiens . . . . .	213
7.4	Vers l'optique de Fourier fractionnaire . . . . .	213

7.5	Exercices .....	215
<b>8.</b>	<b>Formation des images .....</b>	<b>217</b>
8.1	Imagerie géométrique .....	217
8.1.1	Les limites de l'imagerie géométrique .....	217
8.1.2	Image géométrique, image physique .....	218
8.2	Théorie standard en lumière cohérente .....	219
8.2.1	Pupilles .....	219
8.2.2	Image cohérente d'un émetteur centré sur la pupille d'entrée .....	220
8.2.3	Image cohérente d'un émetteur non centré sur la pupille d'entrée .....	224
8.2.4	Fonction de transfert en lumière cohérente .....	225
8.2.5	Transmission des fréquences spatiales .....	226
8.2.6	Approximation d'un objet éloigné .....	229
8.3	Formation des images en lumière incohérente .....	230
8.3.1	Réponse percussionnelle spatiale incohérente .....	230
8.3.2	Comparaison entre éclairage cohérent et éclairage inco- hérent .....	231
8.3.3	Spectre quadratique .....	234
8.3.4	Fonction de transfert en lumière incohérente .....	234
8.3.5	Exemple d'une pupille circulaire .....	235
8.4	Caractérisation d'un instrument d'optique .....	238
8.4.1	La résolution d'un instrument d'optique .....	238
8.4.2	Résolution et figure de diffraction de la pupille .....	240
8.4.3	Application à la photographie .....	240
8.5	Analyse de la formation des images par la méthode de la trans- formation de Fourier fractionnaire .....	241
8.5.1	Produit de convolution fractionnaire .....	241
8.5.2	Imagerie en lumière cohérente .....	242
8.5.3	Imagerie en lumière incohérente .....	245
8.6	Exercices .....	246

---

## Partie II. Ondes polychromatiques

---

<b>9.</b>	<b>Diffraction polychromatique .....</b>	<b>251</b>
9.1	La notion de signal et ses représentations .....	251
9.2	Représentations d'un signal optique .....	252
9.2.1	Représentation spatio-temporelle .....	252
9.2.2	Représentation mixte. Composante spectrale .....	252
9.2.3	Représentation fréquence totale .....	253
9.2.4	Représentation fréquentio-temporelle .....	253
9.2.5	Losange de Fourier .....	254
9.3	Opérateur linéaire de transfert du champ .....	254

---

9.3.1	Généralité du modèle de transfert du champ . . . . .	254
9.3.2	Le transfert du champ en représentation mixte. Gain complexe . . . . .	255
9.3.3	Le transfert du champ en représentation spatio-temporelle. Réponse percussionnelle . . . . .	256
9.4	Diffraction des ondes polychromatiques . . . . .	257
9.4.1	Forme explicite de la réponse percussionnelle spatio-temporelle . . . . .	257
9.4.2	Justification de l'approximation d'une vitesse de phase constante . . . . .	259
9.4.3	Diffraction de Fraunhofer d'une onde polychromatique . . . . .	261
9.4.4	Chromatisme de diffraction . . . . .	262
9.4.5	Réponse percussionnelle et fonction de transfert temporelles d'une pupille . . . . .	262
9.5	Diffraction et imagerie des ondes de spectre étroit . . . . .	266
9.5.1	Ondes de spectre étroit . . . . .	266
9.5.2	Diffraction de Fresnel des ondes de spectre étroit . . . . .	267
9.5.3	Diffraction de Fraunhofer des ondes de spectre étroit . . . . .	270
9.5.4	Transparence de courbure en spectre étroit . . . . .	270
9.5.5	Imagerie d'un émetteur à spectre étroit . . . . .	271
9.5.6	Conclusion pour les ondes de spectre étroit . . . . .	272
9.6	Exercices . . . . .	272
<b>10.</b>	<b>La cohérence et son transfert . . . . .</b>	<b>273</b>
10.1	Considérations élémentaires sur la cohérence en optique . . . . .	273
10.1.1	Échelles de temps et cohérence . . . . .	273
10.1.2	Superposition de deux vibrations . . . . .	275
10.1.3	Trains d'ondes et cohérence . . . . .	277
10.1.4	Cohérence temporelle et largeur spectrale . . . . .	281
10.1.5	Cohérence spatiale . . . . .	284
10.1.6	Description de la cohérence . . . . .	285
10.2	La cohérence du champ électrique . . . . .	285
10.2.1	Notations. Moyenne temporelle . . . . .	285
10.2.2	Premier ordre . . . . .	286
10.2.3	Deuxième ordre. Cohérence . . . . .	286
10.2.4	Représentation mixte. Densités spectrales . . . . .	287
10.2.5	La notion de cohérence abstraite et ses représentations . . . . .	288
10.2.6	Cohérence spatiale, cohérence temporelle . . . . .	289
10.3	Superposition de deux champs. Interférences . . . . .	290
10.3.1	Formule des interférences. Degré de cohérence temporelle . . . . .	290
10.3.2	Mesure de la cohérence temporelle . . . . .	291
10.4	Transfert de la cohérence . . . . .	293
10.4.1	Filtrage de la cohérence . . . . .	293
10.4.2	Transfert de la cohérence par diffraction . . . . .	295

10.4.3	Exemple : récepteur étendu, spatialement cohérent à spectre large .....	297
10.4.4	Équation d'onde de la cohérence .....	298
10.5	Ondes à spectre étroit .....	300
10.5.1	Cohérence sur la sphère de Fourier .....	300
10.5.2	Transfert de la cohérence par transparence de courbure .....	302
10.5.3	Transfert de la cohérence par diffraction de Fresnel ....	302
10.5.4	Transfert de la cohérence par imagerie .....	303
10.5.5	Transfert de la cohérence par imagerie avec des ouvertures limitées .....	305
10.6	Mesure de la cohérence spatiale .....	307
10.6.1	Le degré de cohérence .....	307
10.6.2	Formule des interférences .....	308
10.6.3	Contraste des franges .....	310
10.7	Émetteur spatialement incohérent .....	310
10.7.1	Transfert de la cohérence sur une sphère cardinale ....	311
10.7.2	Le théorème de Van Cittert–Zernike .....	311
10.7.3	Une application : l'interféromètre stellaire de Michelson	314
10.7.4	Une explication intuitive du théorème Van Cittert–Zernike. Lien avec la diffraction .....	318
10.8	Interférométrie d'intensité .....	321
10.8.1	Intensité vibratoire instantanée .....	321
10.8.2	Source thermique .....	322
10.8.3	Application à la mesure du degré de cohérence .....	326
10.9	Exercices .....	327
<b>11.</b>	<b>Dispersion de groupe .....</b>	<b>329</b>
11.1	Paquet d'ondes, vitesse de groupe et dispersion .....	330
11.1.1	Définitions .....	330
11.1.2	Dispersion de groupe .....	338
11.1.3	Dispersion normale et dispersion anormale .....	338
11.1.4	Choix des paramètres pour décrire la dispersion de groupe .....	340
11.2	Cadre général de l'étude .....	342
11.2.1	Modèle pour l'étude de la dispersion de groupe .....	342
11.2.2	Dispersion et diffraction en spectre étroit .....	342
11.2.3	Fibre optique .....	344
11.2.4	Ligne de transmission .....	347
11.3	Dispersion de groupe d'ordre 2 .....	348
11.3.1	Modulation de fréquence linéaire .....	349
11.3.2	Propagation de l'amplitude complexe .....	349
11.3.3	Enveloppe complexe dans le repère de groupe .....	351
11.3.4	L'enveloppe complexe modulée linéairement .....	352
11.3.5	Propagation de l'enveloppe complexe modulée .....	354
11.3.6	Représentation de la propagation par une transformation de Fourier fractionnaire .....	355

---

11.3.7	Cas particulier : transformation de Fourier . . . . .	357
11.4	Exercices . . . . .	358
<b>12.</b>	<b>Paquets d'ondes gaussiens. Lentilles temporelles . . . . .</b>	<b>359</b>
12.1	Paquets d'ondes gaussiens . . . . .	359
12.1.1	Représentation d'un paquet d'ondes gaussien . . . . .	359
12.1.2	Propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans une ligne de transmission dispersive . . . . .	361
12.1.3	Col temporel . . . . .	361
12.1.4	Correspondances entre paquet d'ondes et faisceau gaussien . . . . .	363
12.1.5	Élargissement temporel d'un paquet d'ondes gaussien . . . . .	364
12.2	Lentilles temporelles . . . . .	365
12.2.1	Centre de courbure temporel . . . . .	366
12.2.2	Lentille temporelle et modulation de fréquence . . . . .	366
12.2.3	Formule de conjugaison d'une lentille temporelle . . . . .	367
12.2.4	Réalisation pratique d'une lentille temporelle . . . . .	367
12.3	Transport d'un paquet d'ondes gaussien . . . . .	368
12.3.1	Transport d'un faisceau gaussien . . . . .	368
12.3.2	Transport d'un paquet d'ondes gaussien par des lentilles temporelles . . . . .	369
12.3.3	Application à la compensation de la dispersion en télé- communications optiques . . . . .	369
12.4	Exercices . . . . .	370

---

### Partie III. Exemples d'applications et perspectives

---

<b>13.</b>	<b>Considérations instrumentales . . . . .</b>	<b>375</b>
13.1	Observation dans le plan focal d'un téléobjectif du spectre d'un objet transparent . . . . .	375
13.1.1	Analyse du problème et solution . . . . .	375
13.1.2	Passage du champ sur la sphère de Fourier au champ dans le plan focal . . . . .	377
13.1.3	Augmentation de la taille du spectre . . . . .	379
13.2	Spectre d'un objet transparent éclairé par un faisceau divergent . . . . .	379
13.2.1	Analyse du problème et solution . . . . .	379
13.2.2	Un autre point de vue . . . . .	382
13.2.3	Passage du champ sur une sphère au champ sur un plan . . . . .	382
13.2.4	Défaut de mise au point de l'image d'un objet cohérent . . . . .	383
13.3	Calculs de courbures de phase . . . . .	384
13.3.1	Courbure de l'image cohérente d'un émetteur sphérique . . . . .	384
13.3.2	Courbure de la sphère de Fourier image . . . . .	385
13.3.3	Phase quadratique dans le plan focal d'un objectif . . . . .	386
13.3.4	Localisation du centre de courbure d'une image . . . . .	386

13.4	Théorie du sténopé .....	388
13.4.1	Chambre noire .....	388
13.4.2	Image géométrique et image physique .....	389
13.4.3	Image formée en éclairage incohérent .....	391
13.5	Spectrométrie instrumentale : spectromètres à réseaux .....	393
13.5.1	Réseau de diffraction .....	393
13.5.2	Formule des réseaux .....	395
13.5.3	Résolution intrinsèque .....	396
13.5.4	L'intervalle spectral libre .....	398
13.5.5	Influence de la largeur des fentes .....	399
13.5.6	Raies spectrales fantômes .....	402
13.6	Exercices .....	404
<b>14.</b>	<b>Propriétés des résonateurs optiques et des faisceaux gaussiens .....</b>	<b>409</b>
14.1	Résonateurs optiques .....	409
14.1.1	Analyse de la stabilité d'un résonateur optique .....	409
14.1.2	Imagerie et stabilité d'un résonateur .....	410
14.1.3	Distance de Rayleigh. Détermination du col du résonateur .....	412
14.2	Faisceaux gaussiens .....	413
14.3	Résonateurs instables .....	414
14.3.1	Trace d'une onde sphérique sur un miroir .....	414
14.3.2	Ondes sphériques résonantes dans un résonateur instable .....	415
14.4	Conclusion .....	418
14.5	Exercices .....	419
<b>15.</b>	<b>Holographie .....</b>	<b>421</b>
15.1	Principes de l'holographie .....	421
15.1.1	Restitution d'une source lumineuse ponctuelle .....	421
15.1.2	Résolution de l'émulsion et champ de vision .....	424
15.1.3	Dimensions de l'hologramme et résolution de l'objet .....	424
15.1.4	Restitution d'un objet étendu .....	425
15.2	Différents types d'hologrammes .....	428
15.2.1	Hologramme de Gabor .....	428
15.2.2	Hologramme de Leith et Upatnieks .....	429
15.2.3	Hologramme de Fourier .....	429
15.3	Applications de l'holographie .....	430
15.4	Modulation de la lumière et supports holographiques .....	431
15.4.1	Émulsion photographique .....	431
15.4.2	Émulsion blanchie. Hologramme de phase .....	436
15.4.3	Effet de la non-linéarité de l'émulsion .....	438
15.4.4	Supports pour l'holographie en temps réel .....	439
15.4.5	Modulateurs de lumière spatiaux .....	441
15.5	Exercices .....	443

<b>16. Traitement du signal optique</b>	445
16.1 Généralités sur le traitement du signal optique	445
16.2 Filtrage optique et corrélation	446
16.2.1 Principe du filtrage optique	446
16.2.2 Filtre de VanderLugt	448
16.2.3 Application au filtrage adapté et à la corrélation	450
16.2.4 Corrélateur en temps réel	451
16.2.5 Corrélateur conjugué	453
16.2.6 Cohérence du signal filtré	455
16.3 Analyse spectrale acousto-optique	456
16.3.1 Modulation acousto-optique	456
16.3.2 Onde acoustique modulée avec porteuse	458
16.3.3 Analyse spectrale temporelle	459
16.4 Exercices	460
<b>17. Perspectives</b>	463
17.1 Développements en optique métaxiale et optique de Fourier fractionnaire	463
17.1.1 Aberrations géométriques	463
17.1.2 Images quantiques	463
17.1.3 Spectre angulaire sphérique	463
17.2 Traitement du signal fractionnaire pour l'optique	464
17.2.1 Holographie numérique, composants diffractants calculés	464
17.2.2 Corrélation fractionnaire	464

---

## Partie IV. Appendices

---

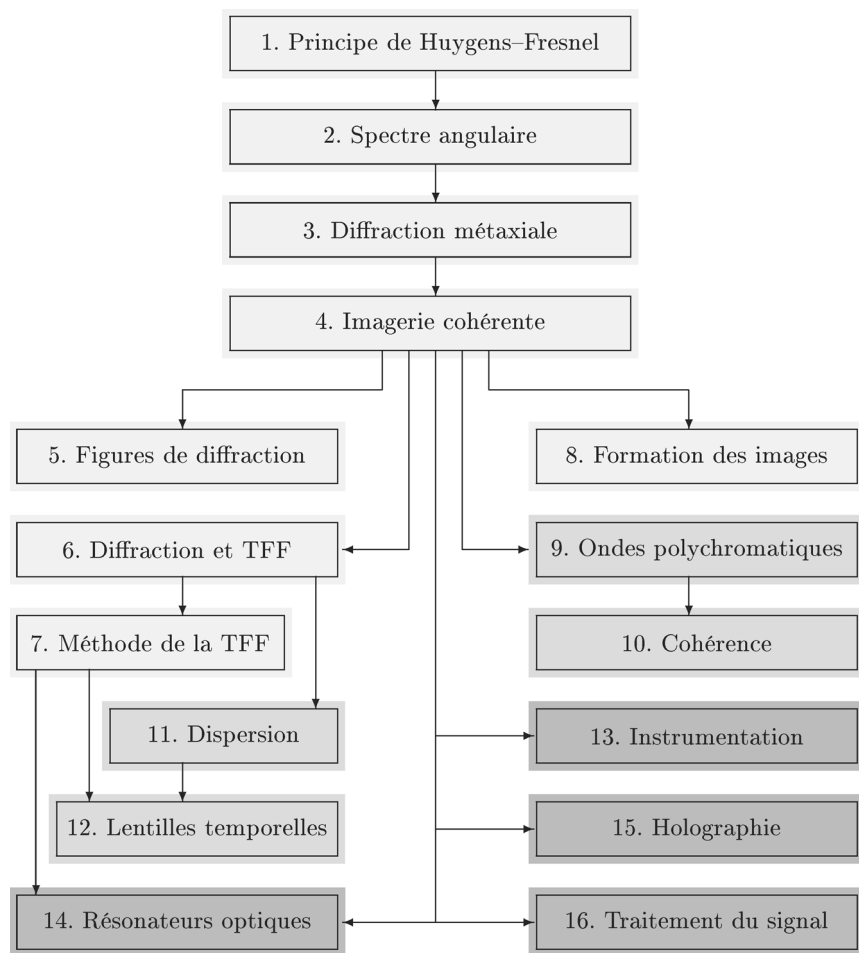
<b>A. Les distributions</b>	467
A.1 Définition, exemples et propriétés	467
A.1.1 Définition	467
A.1.2 Exemples de distributions	467
A.1.3 La distribution de Dirac comme limite de suites de fonctions	468
A.1.4 Propriétés des distributions	469
A.1.5 Produit tensoriel de distributions. Distributions à plusieurs variables	469
A.1.6 Produit de convolution	469
A.1.7 Sous-espaces de distributions	470
A.2 Interprétation des distributions en mesures physiques	471
A.2.1 Champ représenté par une distribution singulière	471
A.2.2 Une solution	471
A.3 Distributions et systèmes linéaires	472
A.3.1 Le problème à résoudre	472

A.3.2	Produit de convolution de Volterra.....	473
A.3.3	Réponse d'un système linéaire à une excitation quel- conque .....	473
<b>B.</b>	<b>La transformation de Fourier .....</b>	<b>475</b>
B.1	Définition .....	475
B.1.1	Transformée de Fourier d'une fonction sommable .....	475
B.1.2	Transformée de Fourier d'une fonction de carré som- mable .....	477
B.1.3	Transformée de Fourier d'une distribution tempérée ...	478
B.2	Propriétés de la transformation de Fourier .....	480
B.3	Transformation de Hankel .....	482
B.4	Transformées de Fourier de quelques fonctions et distributions	483
B.4.1	Transformées de Fourier en dimension 1 .....	483
B.4.2	Transformées de Fourier en dimension 2 .....	484
<b>C.</b>	<b>La transformation de Fourier fractionnaire .....</b>	<b>487</b>
C.1	Première définition.....	487
C.1.1	Fonctions propres de la transformation de Fourier.....	487
C.1.2	Définition de la transformation de Fourier fractionnaire	488
C.2	Deuxième définition : forme intégrale .....	489
C.3	Principales propriétés .....	489
C.4	Transformées de Fourier fractionnaires de quelques fonctions et distributions .....	490
C.5	Transformation de Fourier fractionnaire et oscillateur harmo- nique.....	491
C.6	Commentaires sur l'emploi de la transformation de Fourier fractionnaire en optique .....	493
<b>D.</b>	<b>Champs analytiques et équation de Helmholtz .....</b>	<b>495</b>
D.1	L'équation de Helmholtz .....	495
D.2	La notion de champ analytique .....	495
D.3	L'équation des ondes harmonique .....	497
D.3.1	L'équation des ondes pour les champs analytiques.....	497
D.3.2	L'équation des ondes pour les composantes spectrales .	498
D.3.3	Conséquences pratiques .....	498
<b>E.</b>	<b>Grandeurs et unités radiométriques .....</b>	<b>499</b>
E.1	Grandeurs et unités radiométriques .....	499
E.2	Unités photométriques .....	501
E.3	Lexique bilingue .....	502
<b>F.</b>	<b>Vecteurs aléatoires gaussiens .....</b>	<b>503</b>
F.1	Variables et vecteurs aléatoires gaussiens.....	503
F.1.1	Variable aléatoire .....	503
F.1.2	Variable aléatoire gaussienne à une dimension .....	504

---

F.1.3	Vecteur aléatoire gaussien. Matrice de covariance . . . . .	505
F.1.4	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire gaussien . . . . .	505
F.2	Théorèmes des moments pour un vecteur aléatoire gaussien . . . . .	505
F.2.1	Multi-indice. Indice développé. Multi-paire . . . . .	505
F.2.2	Composantes gaussiennes indépendantes . . . . .	507
F.2.3	Cas général . . . . .	507
F.3	Variables aléatoires gaussiennes à valeurs complexes . . . . .	508
F.3.1	Variable aléatoire complexe . . . . .	508
F.3.2	Vecteur aléatoire gaussien complexe . . . . .	509
F.3.3	Vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire . . . . .	509
F.4	Le théorème <i>central limit</i> . . . . .	510
<b>G.</b>	<b>Fonctions aléatoires</b> . . . . .	<b>511</b>
G.1	Fonctions aléatoires . . . . .	511
G.1.1	Définition . . . . .	511
G.1.2	Moments d'une fonction aléatoire temporelle . . . . .	512
G.1.3	Stationnarité . . . . .	512
G.1.4	Moyenne temporelle, ergodicité . . . . .	513
G.1.5	Fonction aléatoire stationnaire et ergodique . . . . .	514
G.2	Densités spectrales. Théorème de Wiener–Khinchine . . . . .	515
G.2.1	Considérations sur l'analyse spectrale des fonctions aléatoires . . . . .	515
G.2.2	Densité spectrale de puissance d'une fonction aléatoire . . . . .	515
G.2.3	Le théorème de Wiener–Khinchine pour les fonctions aléatoires . . . . .	516
G.2.4	Densités spectrales d'interaction . . . . .	518
G.2.5	Densité spectrale d'interaction et composante spectrale . . . . .	520
<b>H.</b>	<b>Propriétés des cohérences</b> . . . . .	<b>521</b>
H.1	Inégalité de Cauchy–Schwarz . . . . .	521
H.2	Propriétés de la cohérence mutuelle et de la cohérence propre . . . . .	521
<b>I.</b>	<b>Formule de Sellmeier</b> . . . . .	<b>523</b>
<b>Références</b>	. . . . .	<b>525</b>
<b>Index</b>	. . . . .	<b>539</b>

# Plan de l'ouvrage et guide de lecture



## Guide de lecture <sup>1</sup>

Les fondements de la théorie exposée dans ce livre se trouvent pour la plupart dans les quatre premiers chapitres ; leur assimilation paraît indispensable à la lecture de la suite de l'ouvrage.

Outre une formulation pratique du principe de Huygens–Fresnel, le chapitre 1 fixe le cadre de la théorie scalaire dans lequel se situe tout l'ouvrage. La notion de fréquence spatiale (§2.1), celle de spectre angulaire (§2.2), la propagation de ce dernier, sont des éléments fondamentaux, abordés au chapitre 2. L'association entre fréquence spatiale et onde plane (§2.1.2), résumée par la relation (2.11), est un point essentiel de la théorie.

De nombreux développements (presque tous !) reposent sur le théorème 1 (Diffraction de Fraunhofer), exposé au chapitre 3 (§3.2.2), qui constitue un résultat fondamental de la théorie métaxiale. Complété par la notion de transparence de courbure (§3.2.1), il conduit à la relation (3.31) qui résout le problème général de la diffraction–propagation dans un milieu homogène et isotrope. La notion de sphère de Fourier (définition 3.2.1 §3.2.2) est constamment employée par la suite. Celle d'émetteur sphérique équivalent (§3.4) revêt un aspect technique, utile à la compréhension des montages expérimentaux.

Le théorème 2 (Imagerie cohérente, §4.2.1), élément central du chapitre 4, représente un résultat capital. Le paragraphe 4.1, consacré au dioptré sphérique, a pour but de conduire au théorème 2, tout en illustrant les résultats du chapitre 3. Le paragraphe 4.2.2 fournit une justification à l'emploi d'émetteurs et récepteurs sphériques. Le théorème 3 (Loi du grandissement des rayons, §4.2.3) énonce un joli résultat d'optique géométrique, et c'est pour cela qu'il est élevé au rang de théorème. Toutefois son rôle dans la théorie n'est pas fondamental, même s'il est utilisé parfois dans des calculs et s'il rend de grands services en de telles occasions (l'exercice 4.15 en fournit un exemple). Le problème de la diffraction–propagation dans deux milieux homogènes et isotropes séparés par un système optique est résolu au paragraphe 4.3.

Une fois les éléments précédents assimilés, la lecture du livre peut échapper à une progression linéaire, comme l'indique le plan de la page précédente.

Le chapitre 5, qui expose le calcul de l'amplitude du champ et de l'éclairement d'une figure de diffraction, ou encore celui du diagramme de rayonnement d'une antenne, est un chapitre d'applications dont la lecture n'est pas indispensable pour la suite. La plupart des résultats établis dans ce chapitre sont cependant des classiques qu'il est souhaitable de connaître : trous d'Young (§5.2.3), diffraction par une ouverture circulaire (§5.2.4), rendement de diffraction d'un réseau (§5.5), pour n'en citer que quelques-uns.

---

<sup>1</sup> Nous ne donnons pas de guide de lecture des appendices : la consultation de la table des matières, qui indique leur ordre et le titre de chacun d'eux, semble suffisante pour orienter le lecteur. Certains chapitres se terminent par un complément dont la connaissance n'est clairement pas indispensable à la compréhension du texte qui le suit.

Les chapitres 6 et 7 exposent les principes de l'optique de Fourier fractionnaire, en compatibilité avec la théorie métaxiale. Leur lecture n'est pas indispensable à celle de la plupart des chapitres ultérieurs, sauf en quelques endroits qui seront précisés. Il est donc possible de revenir à ces chapitres plus tard ; ne pas les aborder serait cependant passer à côté de l'objectif que s'est fixé l'auteur, qui est de présenter l'optique de Fourier fractionnaire. L'élément clé réside dans le lien établi entre diffraction de Fresnel et transformation de Fourier fractionnaire : il se comprend par la seule lecture du paragraphe 6.1. Les autres paragraphes de ce chapitre ont un caractère technique ; ils sont utiles si on veut vraiment mettre en œuvre la théorie fractionnaire.

Comment lire le chapitre 7 ? Indiquons d'abord les prérequis : paragraphes 6.1 et 6.2.1 (notion de transfert réciproque). Le paragraphe 7.1, indépendant des deux qui le suivent, reprend la théorie du dioptré sphérique, exposée au chapitre 4, mais par la méthode de la transformation de Fourier fractionnaire dont il donne une idée de ce qu'elle est. Les paragraphes consacrés aux résonateurs optiques (§7.2) et aux faisceaux gaussiens (§7.3) sont là pour illustrer cette même méthode. À bien des égards, ils forment un tout (ordonné) et la priorité a intentionnellement été donnée à l'exposé de la méthode, en conformité avec le titre du chapitre. Le lecteur peut toutefois souhaiter connaître et appliquer les propriétés des résonateurs et celles des faisceaux gaussiens sans devoir étudier en détail leur démonstration ! Pour cela la rédaction est volontairement très hiérarchisée et devrait autoriser une lecture à un niveau plus élevé, permettant de dégager les principaux résultats, pour la plupart connus par ailleurs. La théorie des résonateurs optiques et des faisceaux gaussiens est complétée au chapitre 14 ; les résultats établis dans ce chapitre ne sont pas directement liés à la transformation de Fourier fractionnaire (certaines conditions de stabilité par exemple) ou bien représentent des approfondissements assez détaillés (étude des résonateurs instables) : ils sont placés là pour ne pas alourdir le chapitre 7 dont la finalité vient d'être expliquée.

Le chapitre 8 fait suite au chapitre 4 : il aborde l'influence de la pupille d'un instrument d'optique sur la formation d'une image. Il ne pouvait pas être placé avant, parce que la fin du chapitre évoque le rôle de la transformation de Fourier fractionnaire dans la description de la formation des images (§8.5) et se fonde, à ce titre, sur le chapitre 6. La formation d'une image en lumière cohérente se traduit par le théorème 4 (§8.2.2), qui constitue un des résultats centraux de l'optique moderne.

Les chapitres 9 et 10, dont le sujet est l'étude de la propagation de la cohérence – thème capital, lié au caractère spatio-temporel de la diffraction polychromatique –, font eux aussi suite au chapitre 4 et peuvent être abordés après la lecture de celui-ci. Ce n'est pas le cas des chapitres 11 et 12 qui prolongent à la fois les chapitres 6 et 7, mais aussi le chapitre 9. Toutefois, le début du chapitre 11 est relativement indépendant des autres chapitres et ce n'est qu'au paragraphe 11.3.6 qu'est utilisée la transformation de Fourier fractionnaire, et que la connaissance du paragraphe 6.1 est utile. La lecture du chapitre 12 ne semble possible qu'à la suite de celle du paragraphe 7.3.

Pour l'essentiel, les chapitres 13, 15 et 16 font suite au chapitre 4, et au chapitre 7 pour ce qui concerne le chapitre 14, comme il a été dit ; ils sont indépendants les uns des autres. Le paragraphe 15.4, consacré aux dispositifs de modulation de la lumière, a une portée universelle (l'univers étant le livre !). Il a été placé au chapitre 15 pour des raisons qui sont expliquées dans le texte. Sa lecture présente toutefois de l'intérêt en préalable à celle du chapitre 5.

Finalement, on voudra bien constater que les calculs relatifs à la transformation de Fourier fractionnaire, souvent techniques, occupent peu de place dans le livre ; ils ne sont pas indispensables à la lecture d'une grande partie du texte, ni même à la compréhension de nombreux résultats qui relèvent de la seule optique métaxiale, voire même parfois de l'optique de Fourier classique. Ils restent toutefois utiles à qui veut poursuivre dans la voie de l'optique de Fourier fractionnaire, peut-être en deuxième lecture...

# Symboles et notations

## 1 Symboles

Voici, avec leur signification, les symboles utilisés, pour la plupart universellement (dans la mesure du possible), dans ce livre.

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers positifs
$\mathbb{Z}$	Anneau des nombres entiers
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbb{R}^2$	Ensemble des paires de nombres réels
$[a, b]$	Ensemble des nombres réels $x$ tels que $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	Ensemble des nombres réels $x$ tels que $a < x < b$
$x \in A$	$x$ est un élément de $A$
$A \subset B$	$A$ est inclus dans $B$
$\bar{z}$	Complexe conjugué de $z$
$\Re\{z\}$	Partie réelle de $z$
$\mathfrak{s}(a)$	Signe de $a$
$d$	Différentielle
$i$	Nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$
$e$	Base du logarithme népérien ( $e = 2,718\,281\,828\,459\dots$ )
$\text{Ln}$	Fonction logarithme népérien
$\log$	Fonction logarithme de base 10
$n!$	Factorielle $n$
$(2n-1)!!$	Notation condensée de $(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$
$\langle , \rangle$	Crochet de dualité
$\langle \rangle_t$	Moyenne temporelle
${}^tM$	Matrice $M$ transposée
$E$	Espérance mathématique
$P$	Probabilité
$\square$	Fin de preuve (C. Q. F. D., <i>Quod erat demonstrandum</i> )
$\diamond$	Fin d'une remarque ou d'un exemple (si ambiguïté avec la suite)
S.I.	Système d'unités international
$\ell_0$	Unité de longueur ( $\ell_0 = 1\text{ m}$ en S.I.)
$t_0$	Unité de temps ( $t_0 = 1\text{ s}$ en S.I.)
$\times$	Suite d'une expression mathématique (écrite sur plusieurs lignes)
$\times$	Produit vectoriel

---

$\delta$	Différence de chemin optique. Dioptrie
$\delta$	Distribution de Dirac
$\sqcup \sqcup$	Peigne de Dirac
$\Upsilon$	Fonction de Heaviside
$\text{rect}_\ell$	Fonction rectangle de largeur $\ell$ (ou fonction porte)
$\Lambda_\ell$	Fonction triangle de base $2\ell$ (sa hauteur est $\ell$ )
$\text{sinc}$	Fonction sinus cardinal ( $\text{sinc } x = \sin \pi x / \pi x$ )
$\text{sinc}_\ell$	Fonction sinus cardinal de « largeur » $2/\ell$ ( $\text{sinc}_\ell x = \text{sinc } \ell x$ )
$f^{(j)}$	Dérivée d'ordre $j$ de la fonction $f$
$\tilde{f}$	Fonction $f$ symétrisée : $\tilde{f}(x) = f(-x)$ (sauf appendice D)
$\hat{f}$	Transformée de Fourier de $f$
$\check{f}$	Transformée de Fourier inverse de $f$
$U \rightleftharpoons u$	$U$ et $u$ forment une paire de Fourier : $u = \hat{U}$
$\mathcal{F}_\alpha[f]$	Transformée de Fourier fractionnaire d'ordre $\alpha$ de $f$
$f \otimes g$	Produit tensoriel de $f$ et $g$
$f * g$	Produit de convolution de $f$ et $g$
$f *_\alpha g$	Produit de convolution fractionnaire d'ordre $\alpha$ de $f$ et $g$
$f \circledast g$	Corrélation de $f$ et $g$
$\varepsilon_0$	Permittivité du vide (sauf chapitre 7)
$c$	Vitesse de la lumière (dans le vide) : $c = 299\,792\,458$ m/s
$v$	Vitesse de phase dans un milieu homogène et isotrope
$n$	Indice de réfraction ( $n$ désigne parfois un nombre entier)
$V_g$	Vitesse de groupe
$n_g$	Indice de groupe
$\mathbf{k}$	Vecteur d'onde
$k$	Nombre d'ondes ( $k$ désigne parfois un nombre entier, variable)
$\beta$	Constante de propagation (chapitres 11 et 12)
$\lambda_0$	Longueur d'onde dans le vide
$\lambda$	Longueur d'onde
$\tilde{\lambda}$	Longueur d'onde caractéristique d'un spectre étroit
$\nu$	Fréquence (temporelle)
$\tilde{\nu}$	Fréquence caractéristique d'un spectre étroit
$\mathbf{F}$	Fréquence spatiale
$\Phi$	Fréquence angulaire
$f$	Fréquence spatiale longitudinale (chapitre 11)
$\mathcal{A}$	Émetteur ou récepteur sphérique (calotte sphérique)
$\mathcal{F}$	Sphère de Fourier (d'une calotte sphérique)
$R_A$	Rayon de courbure de $\mathcal{A}$ (grandeur algébrique)
$\mathcal{C}_A$	Courbure de $\mathcal{A}$ ( $\mathcal{C}_A = 1/R_A$ )
$U_A$	Amplitude du champ sur $\mathcal{A}$ (onde monochromatique)
$I_A$	Éclairement ou intensité vibratoire sur $\mathcal{A}$
$ E_A\rangle$	Signal champ électrique sur $\mathcal{A}$
$E_A$	Amplitude du champ électrique sur $\mathcal{A}$ (onde polychromatique)
$e_A$	Composante spectrale du champ sur $\mathcal{A}$
$g_a$	Grandissement transversal entre deux points $A$ et $A'$ conjugués

---

$g_s$	Grandissement transversal aux sommets ( $S$ et $S'$ )
$g_c$	Grandissement transversal aux centres ( $C$ et $C'$ )
$g_p$	Grandissement transversal pupillaire
$\mathcal{W}_0$	Col d'un faisceau gaussien
$w_0$	Rayon transversal du col d'un faisceau gaussien
$\zeta_0$	Distance de Rayleigh d'un faisceau gaussien
$\Gamma_A$	Cohérence mutuelle ou cohérence propre sur $\mathcal{A}$
$\gamma_A$	Densité spectrale d'interaction ou de puissance sur $\mathcal{A}$

La typographie permet de distinguer :

- $d$  (différentielle) de  $d$  (distance) ;
- $E$  (espérance mathématique) de  $E$  (amplitude du champ électrique) ;
- $e$  (base du logarithme népérien) de  $e$  (distance ; composante spectrale) ;
- $i$  (nombre imaginaire) de  $i$  (nombre entier variable) ;
- $\delta$  (chemin optique ; dioptrie) de  $\delta$  (distribution de Dirac) ;
- $\times$  (produit vectoriel) de  $\times$  (suite d'une expression écrite sur deux lignes).

## 2 Notations

Les vecteurs sont indiqués par des lettres grasses, par exemple  $\mathbf{r}$ . Le produit scalaire euclidien de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{s}$  est noté  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$  et leur produit vectoriel  $\mathbf{r} \times \mathbf{s}$  (dans  $\mathbb{R}^3$ ).

On utilise souvent un espace vectoriel euclidien de dimension 2. Si on choisit des coordonnées cartésiennes orthogonales  $x$  et  $y$ , on écrit  $\mathbf{r} = (x, y)$  et le module (norme euclidienne) de ce vecteur est  $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . L'élément de surface au point  $\mathbf{r}$  est noté  $d\mathbf{r}$  ( $d\mathbf{r} = dx dy$ ).

Les fréquences spatiales sont représentées comme les éléments (vecteurs) d'un espace vectoriel de dimension 2 : on écrit  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  dont le module est  $F = \|\mathbf{F}\| = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$ . On a aussi  $d\mathbf{F} = dF_x dF_y$ .

Pour les intégrales, on écrit  $\int_{\mathbb{R}}$  ou  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ . L'écriture  $\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  désigne une intégrale double, ce qu'indiquent à la fois  $\mathbb{R}^2$  et l'élément différentiel  $d\mathbf{r}$ .

Dans l'espace affine de dimension 3, on désigne par  $\mathbf{PQ}$  le vecteur d'origine  $P$  et d'extrémité  $Q$ , et par  $PQ$  sa longueur.

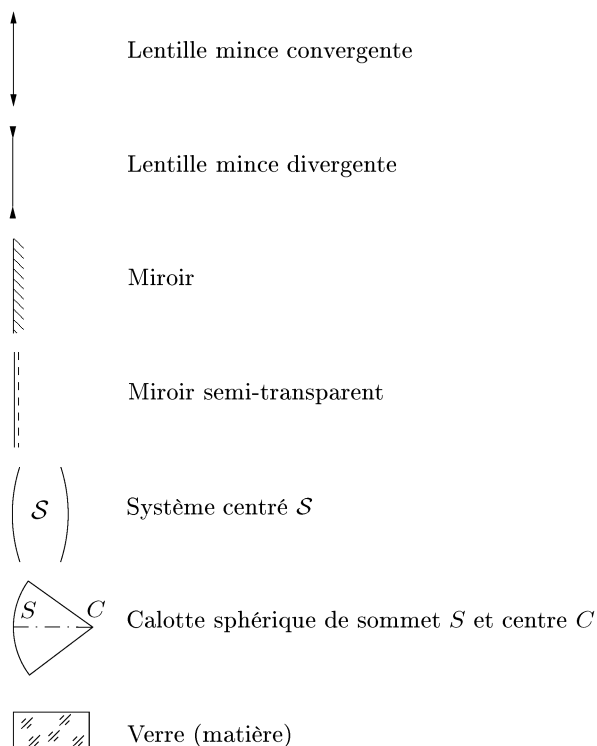
On note  $\overline{AB}$  la mesure algébrique du segment orienté  $AB$ . Conformément aux conventions traditionnellement adoptées en optique en France, les mesures algébriques sont comptées positivement dans le sens de propagation de la lumière (les formules et relations algébriques qu'on écrit sont bien sûr indépendantes de ce choix). Par abus nous disons parfois distance de  $A$  à  $B$  pour mesure algébrique du segment orienté  $AB$ . Il arrive ainsi, abusivement, que la distance d'un point à un autre soit négative.

Si la fonction  $h$  est le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$ , on écrit  $h = f * g$  et  $h(t) = f * g(t)$ . Pour éviter des ambiguïtés, on écrit parfois  $h(t) = [f * g](t)$  ou encore  $h(t) = [f(t') * g(t')](t)$ , la variable  $t'$  étant muette.

Les notations relatives aux distributions et à la transformation de Fourier sont précisées dans les appendices A et B.

### 3 Symboles graphiques

Voici les principaux symboles utilisés pour représenter certains composants optiques. Dans la plupart des figures, s'il n'y a pas de miroir, la lumière se propage de gauche à droite.



# Introduction

L'optique de Fourier doit son nom à l'emploi délibéré de la transformation de Fourier dans la représentation de phénomènes fondés sur la diffraction de la lumière<sup>1</sup>. Inscrite dans les limites d'une théorie scalaire, elle est, traditionnellement, liée à l'optique cohérente et les sujets développés dans ce livre se rattachent à ce thème. Le domaine et les applications usuelles de l'optique de Fourier concernent la formation des images, la résolution des instruments d'optique, le traitement du signal optique, l'holographie, le transfert de la cohérence. Nous verrons comment y inclure la théorie des résonateurs optiques et celle des faisceaux gaussiens ; celle de la dispersion dans les fibres optiques. L'optique de Fourier fournit ainsi un cadre général à la modélisation d'un grand nombre de phénomènes optiques<sup>2</sup>.

Aujourd'hui, l'optique de Fourier constitue une branche classique de l'optique moderne. Son apparition dans les années 1950 résulte de la description de phénomènes optiques à l'aide de la théorie des signaux et systèmes dont les notions et le vocabulaire se sont imposés en optique. L'apparition du laser en 1960 s'est traduite par une nouvelle impulsion pour l'optique cohérente et a donné lieu à de nouvelles applications : holographie, traitement du signal. L'optique de Fourier a atteint désormais une certaine maturité.

Quel est alors l'intérêt d'un nouvel ouvrage sur le sujet ? Deux raisons le suscitent. La première réside dans l'utilité, que nous croyons toujours actuelle, de présenter une théorie originale : la diffraction métaxiale. Inventée dans les

---

<sup>1</sup> Joseph Fourier n'a pas travaillé dans ce domaine de l'optique qui porte son nom. Et si l'on voulait rendre hommage à un contemporain de Fourier qui, lui, a étudié la diffraction, le nom illustre d'Augustin Fresnel viendrait immédiatement à l'esprit [88]. « Optique de Fresnel » ? Ce serait restrictif tant les travaux de Fresnel dépassent le cadre de l'optique de Fourier. De plus, c'est bien la transformation de Fourier qui lie tous les sujets abordés dans ce livre (même si on utilise les intégrales de Fresnel et si certains auteurs parlent parfois de transformation de Fresnel, ce qui illustre d'ailleurs la richesse de l'œuvre de Fresnel). De toutes façons, le terme d'« optique de Fourier » semble désormais consacré par l'usage.

<sup>2</sup> Nous attribuons à l'optique de Fourier un domaine d'étude plus vaste que celui qui lui correspond habituellement et qui se limite à peu près à la description spatiale de la diffraction (c'est-à-dire à la première partie de ce livre et à la plupart des applications de la troisième partie). En particulier, de notre point de vue, l'aspect spatio-temporel de la diffraction relève manifestement de l'optique de Fourier, comme nous le verrons par la suite. Cette remarque ne constitue pas un jugement de valeur sur les ouvrages d'autres auteurs ; elle précise seulement le sujet même de ce livre et la façon dont il doit être entendu.

années 1975–1978 par G. Bonnet [19–24], l’approche métaxiale mérite, de notre point de vue, d’être mise à la portée de ceux qui, étudiants, enseignants, chercheurs ou ingénieurs, s’intéressent à l’optique de Fourier. Outre la synthèse théorique qu’elle représente, la doctrine métaxiale offre, nous espérons le démontrer, un grand avantage pratique pour de nombreuses applications.

La deuxième raison résulte de l’apparition, plus récente, de méthodes de calcul fondées sur la transformation de Fourier fractionnaire, qui se sont considérablement développées depuis 1993 [5, 144, 161, 169, 181–183]. Nous verrons qu’il existe un calcul opérationnel, lié à la transformation de Fourier fractionnaire, particulièrement bien adapté à l’optique métaxiale. Plus généralement, nous montrerons qu’il existe désormais une façon de traiter les problèmes de diffraction métaxiale, et par là-même d’optique cohérente, par la transformation de Fourier fractionnaire, à tel point que nous pourrions parler d’« optique de Fourier fractionnaire ».

La littérature classique relative à l’optique de Fourier [92, 97, 175, 223] ou à l’optique cohérente [85, 147, 157, 168] manque d’éléments portant sur son aspect métaxial ou fractionnaire. En conséquence il nous paraît nécessaire de renouveler la présentation du sujet et de prendre en compte ses récents développements. Ce livre est une tentative originale de présenter l’optique de Fourier sous une forme tout à la fois moderne, synthétique, concrète et riche d’applications potentielles.

\*  
\* \*

Pourquoi cependant une nouvelle approche de l’optique de Fourier ? Pourquoi travailler « en métaxial » ? Car l’objet de la diffraction métaxiale est celui-là même de la théorie classique<sup>3</sup> : exprimer le transfert du champ électromagnétique et de sa cohérence par diffraction, dans un milieu homogène ou à travers un système optique. Dans les deux cas, le cadre est celui d’une théorie scalaire de la diffraction. Toutefois, alors que la théorie classique, conformément au modèle de l’optique géométrique paraxiale, se restreint à des objets<sup>4</sup> plans, l’optique métaxiale considère des émetteurs et récepteurs sphériques<sup>5</sup>. Plus généralement, la théorie métaxiale approche les émetteurs et récepteurs par leur sphère osculatrice<sup>6</sup> en leur sommet et constitue de ce fait une approximation

<sup>3</sup> Nous appelons « classique » la théorie telle qu’elle est développée dans le livre de Goodman [97]. C’est aussi, à peu près, le point de vue adopté par Maréchal et Françon [157]. Pour nous, ce qui est métaxial n’est pas classique. Une récente relecture des notes prises en suivant ses cours, laisse penser que S. Lowenthal exprimait parfois des idées proches du point de vue métaxial.

<sup>4</sup> « Objet » est à prendre ici dans un sens large qui inclut les images, et plus généralement toute surface sur laquelle on cherche à calculer l’amplitude du champ.

<sup>5</sup> Il s’agit, de fait, de calottes sphériques, c’est-à-dire de portions de sphères, ayant (en général) la symétrie de révolution. Une généralisation à des surfaces localement toriques est possible [184].

<sup>6</sup> La sphère osculatrice n’est pas forcément la sphère « la plus proche » d’une portion de surface donnée. Elle ne l’est que localement, au voisinage du sommet (voir la note 3 p. 43).

du deuxième ordre par rapport aux dimensions transversales des objets et aux angles d'ouverture. De là le terme de « métaxial » qui indique qu'on va au-delà du premier ordre qui caractérise l'optique paraxiale<sup>7</sup>.

On sait que le premier ordre ne constitue qu'une approximation et qu'il faut aller au-delà pour prendre en compte les aberrations géométriques des systèmes optiques. On sait également que, pour des raisons de symétrie [156], ces dernières n'interviennent qu'à travers des développements limités ne comportant que des ordres impairs, c'est-à-dire au moins d'ordre 3 (on parle d'aberrations du troisième ordre<sup>8</sup>, du cinquième ordre, etc.). L'ordre 2 est anormal en optique ! Il n'est pas dans la culture de l'opticien ! On ressent cela à la lecture des ouvrages classiques dans lesquels est baptisé de paraxial l'usage de termes de phase quadratique nécessaires à la description du transfert « cohérent » du champ par diffraction. Pour nous, ces termes sont métaxiaux et nous voyons une contradiction à les inclure dans l'approche paraxiale.

Le nœud de la question se perçoit à l'aide d'une brève analyse historique et technique de la formation des images<sup>9</sup>. Même si les propriétés de la lumière partiellement cohérente ont été étudiées et mises à profit depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (travaux d'Abbe) puis tout au long des deux premiers tiers du XX<sup>e</sup> siècle, que ce soit en microscopie (Zernike), en optique astronomique (Michelson), en formation des images (Abbe, Hopkins, Maréchal) et même en holographie (Gabor), il est indéniable que l'apparition du laser en 1960 a donné un élan incomparable à l'optique cohérente, notamment à travers de nouvelles applications (holographie, traitement du signal). Or, tant que l'optique se sert d'objets incohérents, la courbure<sup>10</sup> de ces derniers n'a pas d'influence<sup>11</sup> sur la formation d'une image, et l'optique paraxiale, qui se limite à examiner la formation de l'image plane d'un objet plan, fournit un cadre acceptable à la formation

<sup>7</sup> L'optique géométrique paraxiale, ou optique de Gauss, approche les surfaces objets ou images par des plans et se développe dans les limites du premier ordre par rapport aux dimensions transversales et aux angles d'ouverture.

<sup>8</sup> Nous utilisons cette dénomination, consacrée par l'usage, qui caractérise l'aberration transversale, malgré l'ambiguïté qu'elle introduit pour notre propos. Il existe une classification des aberrations à la fois plus générale et plus précise (classification de Nijboer [156]), qui repose sur la notion d'écart normal aberrant (par rapport à une sphère). Par exemple, l'aberration sphérique dite du « troisième ordre » est caractérisée par un écart normal aberrant du quatrième ordre en fonction du rayon de l'ouverture. De ce point de vue, les calculs des paragraphes 3.2.1 et 3.2.2 ou encore 9.4.1 montrent que l'approximation métaxiale est une approximation du chemin optique d'ordre 2, intermédiaire entre l'approximation paraxiale et celle qui traduit les aberrations.

<sup>9</sup> L'analyse de la formation des images n'est pas aussi restrictive qu'il y paraît : elle nécessite de disposer d'un modèle pour la propagation et inclut *ipso facto* une théorie de la diffraction.

<sup>10</sup> La différence de courbure entre deux surfaces tangentes entre elles engendre une différence de phase entre les champs sur chaque surface. Elle n'affecte pas l'éclairement, grandeur prise en compte en optique incohérente.

<sup>11</sup> Sauf pour les aberrations, mais nous avons vu qu'il fallait aller au moins au troisième ordre pour en tenir compte.

d'une image géométrique<sup>12</sup>. Grosso modo – c'est-à-dire mis à part les travaux évoqués précédemment –, c'était le seul cas qu'il y avait lieu d'examiner avant 1960.

La situation changea en 1960 : il fallut s'intéresser au transfert de l'amplitude du champ, mais aussi de sa phase<sup>13</sup>. Curieusement, les physiciens ont conservé le schéma traditionnel de l'optique paraxiale, en étudiant des transferts plan à plan entre objets et images<sup>14</sup>. Nous verrons que ce modèle, sur lequel repose l'optique de Fourier classique, doit être modifié : sauf cas particulier que nous exposerons, l'image cohérente d'un objet plan (nous disons un émetteur plan) n'est pas sur un plan, mais sur une sphère (calotte sphérique). Étudier le transfert du champ d'un émetteur sphérique<sup>15</sup> vers un récepteur sphérique devient une nécessité logique, à laquelle satisfait la doctrine métaxiale et dont nous déduirons des conséquences fondamentales pour l'imagerie cohérente<sup>16</sup>.

Certes, l'introduction d'émetteurs et de récepteurs sphériques peut paraître, à qui ne connaît pas la théorie métaxiale, comme une abstraction théorique. Il n'en est rien et nous montrerons que de tels émetteurs et récepteurs se rencontrent fréquemment dans la pratique expérimentale et instrumentale. Certes, on peut y voir une façon de manier les termes de phase quadratique qu'on rencontre en diffraction et dont la théorie classique tient d'ailleurs compte (tout en les qualifiant de paraxiaux). De notre point de vue la doctrine métaxiale ne saurait être réduite à cela et c'est une des ambitions de ce livre de le montrer. Nous verrons que rester dans des plans, refuser de se placer sur des sphères, introduit des erreurs d'appréciation dont les conséquences se font sentir dans les calculs mêmes (voir par exemple le transfert de la cohérence par imagerie, chapitre 10).

Ce qui précède veut justifier le recours à la théorie métaxiale du point de vue de l'optique pure. Cependant cette théorie plonge également ses racines dans la théorie du signal et constitue, de ce fait, une synthèse de travaux liant l'optique au signal<sup>17</sup>. C'est essentiellement la cohérence, parce qu'elle introduit

<sup>12</sup> Avant la prise en compte des phénomènes de diffraction dus à l'ouverture limitée des instruments d'optique.

<sup>13</sup> En toute rigueur l'amplitude contient la phase. Nous énumérons les deux pour insister sur la prise en compte de la phase, nécessité de l'optique cohérente.

<sup>14</sup> Certains travaux de Kogelnik [125] sur les résonateurs optiques constituent, à notre sens, une exception. À l'opposé de cette exception, mentionnons l'existence universellement reconnue de la méthode des « matrices  $ABCD$  » qui fait le maximum imaginable pour décrire les résonateurs par les lois de l'optique géométrique paraxiale [126, 216].

<sup>15</sup> Un plan est une sphère de rayon de courbure infini. L'étude des émetteurs sphériques inclut celle des émetteurs plans. L'inverse est faux (en général).

<sup>16</sup> Comme par exemple la conjugaison des sommets et la conjugaison des centres de courbure dont nous verrons qu'elles permettent de comprendre simplement les curieuses propriétés de « conjugaison » des faisceaux gaussiens (chapitre 7).

<sup>17</sup> Si l'apport états-unien est connu et reconnu (citons les travaux de Goodman), tout comme l'apport britannique (Gabor par exemple), l'École française a joué un rôle de pionnière en la matière [24], que ce soit du côté du signal (Blanc-Lapierre, Dumontet) ou du côté de l'optique, avec l'École de Besançon (Duffieux [71], Viénot et leurs successeurs), ou celle de l'Institut d'optique (Maréchal, Françon, Lowenthal).

les phénomènes aléatoires en optique, qui exige le rapprochement avec la théorie du signal et le recours aux méthodes statistiques de cette discipline<sup>18</sup>. La magistrale synthèse réalisée par G. Bonnet parachève cette évolution tout en ouvrant de nouvelles perspectives. L'optique de Fourier acquiert ainsi une dimension supplémentaire et devient une théorie de la propagation de la lumière proprement spatio-temporelle, un fait dont ce livre se veut le reflet.

Reste l'approche fractionnaire. Nous la croyons bien adaptée à l'optique métaxiale sans doute parce qu'elle permet de gérer facilement les termes de phase quadratique – et par conséquent les émetteurs et récepteurs sphériques. Mais une fois encore, son rôle ne saurait se réduire à cela : la méthode de la transformation de Fourier fractionnaire paraît assez générale pour mériter qu'on la décrive, et c'est au fond le but de cet ouvrage. De tout effort de synthèse résulte une économie de moyens qui seule permet le dépassement de la « frontière » que constitue l'état actuel de notre connaissance du monde physique. L'optique de Fourier fractionnaire est en construction : elle constitue pour cette raison un domaine de recherche actif.

\*  
\* \*

La présentation de l'optique métaxiale adoptée dans cet ouvrage est assez différente de celle suivie par l'inventeur de la théorie (G. Bonnet) dans son cours ou ses articles. Il nous a paru plus simple – plus pédagogique ? – d'introduire le plus rapidement possible la transformation de Fourier dans l'expression mathématique des phénomènes de diffraction, et pour cela de commencer par une étude du transfert du champ limitée aux variables d'espace<sup>19</sup> (ce qui revient à examiner d'abord les ondes monochromatiques). Cela concerne toute la première partie du livre et permet de réduire au maximum les aspects fondamentaux de la diffraction, puisque tout est déduit de l'analyse harmonique de l'amplitude du champ et d'une formulation intuitive du principe de Huygens–Fresnel. La diffraction constitue un domaine d'étude très vaste et il n'était pas possible de donner une formulation mathématique du principe de Huygens sans des développements conséquents. La lecture du livre de Goodman [97], de celui de Born et Wolf [29], ou de Nieto-Vesperinas [166], pourra fournir une connaissance plus détaillée des fondements de la théorie scalaire (classique).

Les propriétés temporelles (ou, par dualité, spectrales) de la lumière associent les phénomènes aléatoires au transfert du champ par diffraction. Leur étude fait l'objet de la deuxième partie de l'ouvrage, consacrée d'abord aux propriétés temporelles de la diffraction. La transformation de Fourier y tient encore un rôle central, puisque c'est elle, mais dans le domaine temps–fréquence cette fois-ci, qui permet de passer d'une représentation du champ à une autre.

<sup>18</sup> Ce livre se limite aux aspects statistiques temporels du champ électromagnétique. Les phénomènes liés au *speckle*, dont l'étude relève éminemment de méthodes statistiques [99], n'y sont pas abordés.

<sup>19</sup> Il est possible que cela traduise, inconsciemment sans doute, un réflexe d'opticien, pas toujours très à l'aise avec la cohérence ni la statistique !

La diffraction apparaît comme un filtre linéaire spatio-temporel, que ce soit pour le transfert du champ ou pour celui de la cohérence.

On conçoit dès lors la possibilité d'une approche théorique fondée d'emblée sur la représentation spatio-temporelle d'un signal optique (en général polychromatique) et de sa cohérence. Le transfert par diffraction n'apparaît qu'ensuite, comme un cas particulier de filtrage. C'est l'approche suivie par G. Bonnet dans ses articles. Elle nous paraît plus abstraite et nous croyons que son étude sera facilitée par l'assimilation préalable des résultats établis dans ce livre.

Mentionnons pour terminer qu'un effort particulier a été accompli pour étendre autant que possible la théorie métaxiale – plus précisément son champ d'application –, et cela de plusieurs façons. Tout d'abord en examinant en détails des problèmes classiques d'optique cohérente, comme la formation des images par les systèmes optiques à ouverture limitée (chapitre 8), en montrant sur des exemples l'intérêt technique de l'optique métaxiale (manipulation des phases quadratiques, recherche du centre de courbure des ondes, chapitre 13), ou encore en donnant quelques calculs relatifs au rayonnement des antennes en champ lointain (chapitre 5). Ensuite, en rattachant à l'optique de Fourier des domaines qui ne s'y rapportent pas classiquement : c'est le cas de la spectrométrie instrumentale (chapitre 13). Enfin, à l'aide du calcul fractionnaire, en développant une théorie métaxiale des résonateurs optiques et des faisceaux gaussiens (chapitres 7 et 14), ou encore en synthétisant, dans une même démarche, les aspects spatiaux de la diffraction et ceux temporels de la dispersion – que ce soit dans les lignes de transmission ou en diffraction même, comme cela est exposé aux chapitres 11 et 12.

Première partie

## **Diffraction monochromatique**

L'optique de Fourier se fonde sur une théorie scalaire de la diffraction selon laquelle la propagation d'une onde électromagnétique s'exprime essentiellement – c'est-à-dire à des termes de phase quadratique près – par une transformation de Fourier spatiale (portant sur des variables d'espace). C'est exactement le cas pour la diffraction de Fraunhofer, et la diffraction de Fresnel se ramène à ce schéma, une fois adaptées la courbure de l'émetteur et celle du récepteur, comme le montre l'étude du chapitre 3. Ce résultat sert, au chapitre 4, à dégager les conditions d'obtention de l'imagerie cohérente puis, au chapitre 5, à calculer l'éclairement de figures de diffraction classiques. La notion de fréquence spatiale, introduite au chapitre 2, est omniprésente dans cette partie. Elle sert à l'analyse de la formation des images par les objectifs et à l'étude de la résolution des instruments d'optique (chapitre 8).

La diffraction de Fraunhofer se rencontre quand un champ électromagnétique se propage d'un émetteur sphérique à la sphère de Fourier de ce dernier et elle s'exprime mathématiquement par une transformation de Fourier. Si on observe le champ sur un récepteur intermédiaire, on accomplit, par propagation, une « fraction » de la transformation de Fourier, et il paraît naturel de traduire cela à l'aide d'une transformation de Fourier « fractionnaire ». Ce point de vue fait l'objet du chapitre 6 ; il est développé au chapitre 7 et conduit à une théorie scalaire des résonateurs optiques et des faisceaux gaussiens.

Toute cette partie se rapporte à des transformations de Fourier fractionnaires ou standard ne portant que sur des variables d'espace ou sur leurs variables conjuguées (fréquences spatiales). Les ondes électromagnétiques considérées sont monochromatiques et leur dépendance temporelle n'est pas écrite. De façon générale la propagation, que ce soit la diffraction au sens strict ou la formation des images, est décrite comme un filtre linéaire spatial au sens de la théorie des signaux et systèmes.

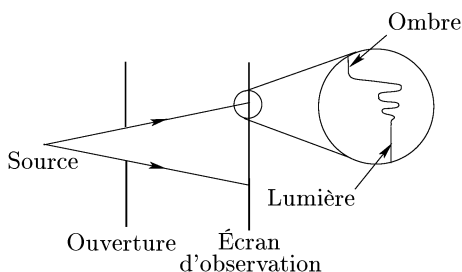
# Chapitre 1

## Le principe de Huygens–Fresnel

Le principe de Huygens–Fresnel est à la base de la théorie de la diffraction des ondes électromagnétiques. Il est une conséquence des équations de Maxwell et peut s'exprimer sous une forme mathématique rigoureuse. Son étude détaillée reste cependant en dehors de l'objectif de cet ouvrage : une formulation intuitive plus directement applicable à l'optique de Fourier suffira ici. On trouve des développements théoriques complémentaires dans un certain nombre d'ouvrages classiques [29, 58, 97, 166, 221].

### 1.1 Diffraction–propagation

Imaginons une source de lumière quasi ponctuelle (et quasi monochromatique), éclairant un écran opaque percé d'une ouverture (fig. 1.1). Sur un deuxième écran (« blanc ») on observe une zone éclairée qui se détache sur un fond sombre, résultat de la projection de l'ouverture par le faisceau lumineux issu de la source. La transition de l'ombre à la lumière n'est pas parfaitement nette : elle comporte de fines franges. Un tel phénomène ne s'explique pas en termes d'optique géométrique, théorie fondée sur la notion de rayon lumineux. Selon cette théorie, les rayons lumineux sont portés par des droites, si le milieu est homogène, et nous devrions observer une figure lumineuse homothétique de l'ouverture : les franges sont inexplicables. Dans la réalité, la source n'est certes pas strictement ponctuelle et on comprend qu'il puisse se créer, sur l'écran d'observation, une zone de pénombre entre l'ombre et la lumière ; mais cela ne rend pas compte des franges effectivement observées, qui s'apparentent à des interférences.



**FIG. 1.1.** Phénomène de diffraction par une ouverture. La transition de l'ombre à la partie éclairée n'est pas brusque et se compose de fines franges. La figure représente schématiquement, dans le cercle, le profil de l'éclairement sur l'écran d'observation, au voisinage de la zone de transition (voir le paragraphe 5.3.2).

Ce qui précède est un exemple de phénomène de diffraction. Un tel phénomène fut décrit pour la première fois<sup>1</sup>, en termes assez précis, par Grimaldi<sup>2</sup> au XVII<sup>e</sup> siècle (*Physico-Mathesis de Lumine Coloribus et Iride*, 1665 [117, 199, 228]). Parallèlement, Huygens bâtissait une théorie ondulatoire de la lumière<sup>3</sup>, sans pour autant, semble-t-il, l'appliquer lui-même à la diffraction [117]. La théorie de Huygens allait à l'encontre de la théorie corpusculaire de Newton<sup>4</sup>; elle connut son triomphe au XIX<sup>e</sup> siècle à la suite des travaux de Fresnel et plus tard de Kirchhoff, précisément en fournissant une explication de la diffraction. La théorie ondulatoire de la lumière reçut enfin une confirmation « définitive » de la part de Maxwell qui l'inclut dans sa théorie électromagnétique<sup>5</sup>. Tout cela à tel point que même l'hypothèse des « quanta de lumière » (les photons), émise en 1905 par Einstein et qui redonnait force au point de vue corpusculaire, ne put ébranler la théorie ondulatoire. Tout au contraire les physiciens durent s'attacher à construire une nouvelle théorie qui pût inclure à la fois les aspects ondulatoires et corpusculaires de la lumière. Ils en vinrent également à attribuer des propriétés ondulatoires à la matière et à concevoir la diffraction de particules massiques (électrons par exemple); cela fut à l'origine du développement de la Mécanique quantique<sup>6</sup>. La notion de diffraction apparaît comme un paradigme de toute théorie ondulatoire.

L'expérience schématisée par la figure 1.1 conduit à définir la diffraction comme un phénomène relatif aux ouvertures qu'on rencontre en optique (on parle de diffraction par un bord d'écran). Cela est quelque peu restrictif : c'est sans doute la conséquence de ce qu'en optique les objets étudiés sont pour la plupart des émetteurs secondaires (ou des sources de lumière secondaires) qui n'émettent pas la lumière par eux-mêmes mais réfléchissent ou diffusent celle émise par une source primaire. Pour donner un exemple, le Soleil est une source primaire alors que la Lune est une source secondaire, qui n'est vue de la Terre que parce qu'elle réfléchit et diffuse la lumière du Soleil (si on s'en tient au spectre visible). Les ouvertures diffringentes sont ainsi des sources secondaires, éclairées par des sources primaires. La situation est en partie différente dans le domaine des hyperfréquences ou de la radio-électricité, puisque, outre les

<sup>1</sup> Selon Born et Wolf [29], Léonard de Vinci aurait mentionné le phénomène bien plus tôt.

<sup>2</sup> Grimaldi a, semble-t-il, observé des phénomènes de diffraction par des fils [230], complémentaires de celui décrit par la figure 1.1.

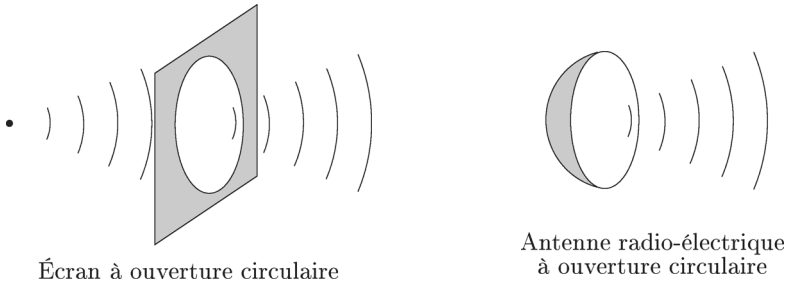
<sup>3</sup> Cette théorie concevait la lumière comme une vibration longitudinale du milieu de propagation, l'éther [60].

<sup>4</sup> Newton avait sans doute un point de vue sur la lumière plus nuancé, qui ne se limitait pas à la seule théorie corpusculaire dont il fut le défenseur [60, 228]. La décomposition de la lumière blanche par un prisme (phénomène de dispersion), la coloration des lames minces (anneaux de Newton) le conduisirent à compléter sa conception corpusculaire par des éléments ondulatoires. Cependant, même sous cette forme, sa théorie s'opposait à celle de Huygens; elle prévoyait par exemple une vitesse (de phase) d'autant plus grande que le milieu de propagation était plus dense [199].

<sup>5</sup> Le *Traité d'électricité et de magnétisme* de Maxwell fut publié en 1873.

<sup>6</sup> Terme qui remplaça l'oxymoron « Mécanique ondulatoire ».

obstacles qui diffractent comme des écrans, il existe des antennes à ouverture, c'est-à-dire des émetteurs ayant des formes variées (rectangulaires, circulaires), qui sont équivalentes aux ouvertures percées dans des écrans opaques en optique. Ainsi le problème de la propagation de la lumière au-delà d'une ouverture circulaire est équivalent<sup>7</sup> à celui de la propagation, en radio-électricité, du champ électromagnétique à partir d'une antenne (source primaire) dont la forme est celle d'un disque (si on suppose le courant électrique d'amplitude homogène sur l'antenne). La répartition spatiale de l'onde qui se propage est la même dans les deux cas. La figure 1.2 illustre cela.



**FIG. 1.2.** Analogie entre diffraction par un bord d'écran circulaire en optique (partie gauche de la figure) et rayonnement d'une antenne à ouverture circulaire (partie droite). (Les ondes se propagent de gauche à droite.)

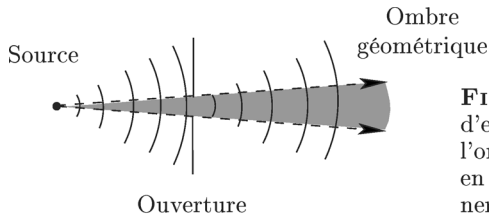
En résumé, le problème de la diffraction par une ouverture, en optique, est comparable à celui de la propagation d'une onde électromagnétique issue d'un émetteur qui a la même forme que l'ouverture. C'est pour cela que nous parlerons de diffraction–propagation, de telle façon qu'un problème de propagation d'une onde électromagnétique en espace libre est, fondamentalement, un problème de diffraction. Nous reviendrons plus loin sur cette question (voir la remarque 2.3.6 p. 37).

## 1.2 Formulation intuitive du principe de Huygens–Fresnel

Pour expliquer la propagation de la lumière, Huygens s'attache à l'état vibratoire de l'onde, à un instant donné, sur une surface d'onde et il imagine que chaque point de cette surface se comporte comme une source secondaire qui réémet la lumière. Si on applique cette propriété à une onde qui arrive sur l'ouverture d'un écran, on explique ainsi<sup>8</sup>, de façon élémentaire, qu'il puisse

<sup>7</sup> Dans certaines limites : l'onde diffractée par une ouverture percée dans un écran dépend aussi de la nature de ce dernier (écran métallique ou diélectrique), de son absorption.

<sup>8</sup> Ce que n'a pas fait Huygens, rappelons-le. Il a surtout appliqué sa théorie à la réfraction, à la réflexion et à la polarisation de la lumière [117, 199].



**FIG. 1.3.** La théorie ondulatoire permet d'expliquer la présence de lumière dans l'ombre géométrique (Huygens). La prise en compte des interférences permet d'affiner le modèle (Fresnel).

y avoir de la lumière dans des régions inaccessibles aux rayons lumineux de l'optique géométrique (fig. 1.3).

Les idées ondulatoires de Huygens furent complétées, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, par Fresnel (1815, 1818) [88] qui pensa à leur adjoindre la possibilité qu'a la lumière d'interférer – propriété démontrée peu avant par Young (1801) – et qui parvint de cette façon à expliquer certains phénomènes de diffraction. Fresnel put calculer le champ diffracté par des obstacles de forme simple, et il est juste d'associer son nom à celui de Huygens quand on traite des fondements de la théorie de la diffraction, tant son apport fut décisif pour fournir un modèle précis des phénomènes<sup>9</sup>.

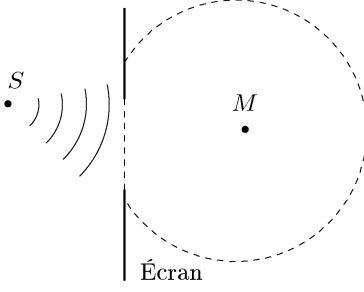
Comme souvent en physique, on baptise un principe ou un théorème du nom du premier auteur qui les a formulés, même s'ils se traduisent de nos jours sous une forme plus moderne que leur forme initiale. C'est le cas par exemple du principe de Fermat, qui a évolué du principe du temps de parcours minimum à celui de chemin optique stationnaire ; c'est aussi le cas du principe de Huygens–Fresnel qui revêt aujourd'hui une forme plus générale que celle donnée par ses deux auteurs. Remarquons encore que ce principe, au sens strict, n'en est plus un puisqu'il se déduit des équations de Maxwell et entre dans le cadre de l'électromagnétisme. Il n'y a cependant aucun inconvénient à continuer à l'appeler principe.

Ainsi, une expression du principe de Huygens–Fresnel assure que si l'on connaît le champ électromagnétique, engendré par une source<sup>10</sup>, en chaque point d'une surface fermée délimitant un volume « intérieur » ne contenant pas la source, alors le champ en tout point de cet intérieur est parfaitement déterminé.

Si, comme c'est souvent le cas en optique, on dispose d'un écran plan, percé d'une ouverture, qui sépare la source  $S$  du point d'observation  $M$  (fig. 1.4), on obtient une surface fermée en complétant l'écran (qui inclut l'ouverture) par une portion de sphère centrée en  $M$ . Puis on fait tendre vers l'infini le rayon de cette sphère : on montre que la contribution du champ sur la sphère au champ en  $M$  tend vers 0, sous la condition connue comme condition de

<sup>9</sup> Fresnel réalisa des expériences de diffraction de la lumière par des fils. La lecture du mémoire qu'il soumit à l'Académie des sciences en 1818, avec le soutien d'Arago, suggéra à Poisson qu'il devait y avoir un point lumineux au centre de l'ombre géométrique engendrée par un petit écran circulaire éclairé par une source ponctuelle, ce qui paraissait une absurdité. Averti, Fresnel fit l'expérience et vérifia l'existence du point lumineux prévu par les calculs de Poisson, fondés sur sa théorie [229, 238].

<sup>10</sup> C'est-à-dire des charges, des courants électriques ou des atomes.

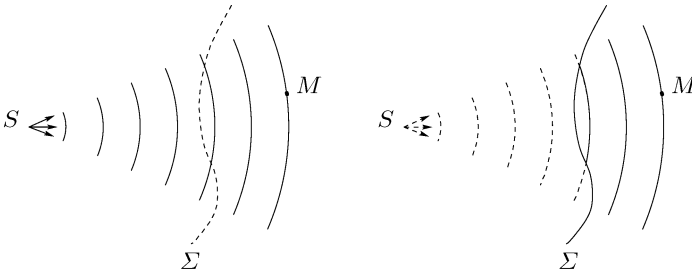


**FIG. 1.4.** Choix d'une surface fermée entourant le point  $M$  où on souhaite connaître le champ électromagnétique. Cette surface est constituée par une partie de l'écran (trait plein épais), l'ouverture diffractante (segment rectiligne en pointillés) et une portion de sphère centrée en  $M$  (en pointillés). Le volume intérieur délimité par la surface ne contient pas la source  $S$ . Le principe de Huygens–Fresnel affirme que le champ en  $M$  est entièrement défini par le champ qui existe sur la surface précédente.

Sommerfeld [97, 221]. Finalement, la connaissance du champ sur l'écran suffit seule à déterminer le champ en  $M$ , c'est-à-dire en un point quelconque situé au-delà de l'écran par rapport à la source [29, 97, 221]. L'écran devrait avoir une étendue infinie, mais en pratique on admet que le champ est nul sur la partie opaque de l'écran et que seul le champ sur l'ouverture importe, c'est-à-dire le champ sur une surface placée entre la source  $S$  et le point  $M$  où s'observe le champ diffracté.

Une forme simplifiée du principe de Huygens–Fresnel, inspirée de ce qui précède et qui est celle que nous utiliserons dans cet ouvrage (chapitre 2), est la suivante. Soit  $S$  une source de lumière et soit  $M$  un point de l'espace. La source engendre en  $M$  un champ électromagnétique. Soit  $\Sigma$  une surface (en pratique limitée) située entre la source et  $M$  (fig. 1.5). Supposons être capables de reproduire sur  $\Sigma$  le champ qu'y engendre  $S$  et enlevons la source. Le principe de Huygens–Fresnel affirme que le champ en  $M$  n'a pas changé.

La propagation d'une onde électromagnétique de la source  $S$  au point  $M$  se conçoit dès lors de deux façons équivalentes : directement, en une seule étape ; ou bien en deux étapes si on introduit une surface intermédiaire arbitraire. Ces deux points de vue auront chacun une traduction mathématique, une fois qu'on aura associé un opérateur à la propagation d'une onde électromagnétique : l'opérateur qui traduit la propagation de  $S$  à  $M$  devra être le composé de deux opérateurs, associés respectivement (a) à la propagation de l'onde de la source



**FIG. 1.5.** Selon le principe de Huygens–Fresnel le champ engendré en  $M$  est le même dans les deux situations présentées : à gauche, la source  $S$  éclaire directement  $M$  ; à droite, on dispose d'une surface  $\Sigma$  sur laquelle le champ est exactement celui qu'aurait engendré la source  $S$ , si elle était présente.

à la surface intermédiaire; et (b) à la propagation de l'onde, de cette même surface à  $M$ .

Nous verrons par la suite comment utiliser le principe de Huygens–Fresnel sous l'une ou l'autre des deux formes précédentes. Cependant nous pouvons d'ores et déjà en citer une application fameuse : l'holographie [91, 97] dont le principe se fonde sur la figure 1.5 (voir le chapitre 15).

## 1.3 Éléments pour une théorie scalaire

### 1.3.1 Ondes localement planes

Nous étudions des ondes qui ont localement la structure d'une onde plane (fig. 1.6). Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  en un point d'une surface d'onde (c'est une surface équiphase) se déduit du vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  de la façon suivante :  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{s}$  (unitaire, perpendiculaire à la surface d'onde<sup>11</sup> et orienté dans le sens de propagation) forment un trièdre rectangle direct et

$$\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z, \quad (1.1)$$

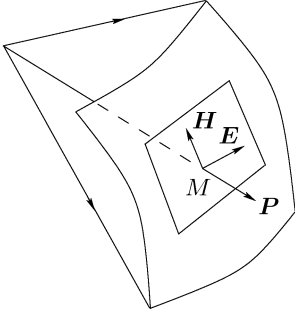
où  $Z$  est l'impédance du milieu de propagation,  $\mu$  sa perméabilité et  $\varepsilon$  sa permittivité. Dans ces conditions, l'onde est caractérisée par le seul vecteur  $\mathbf{E}$  (et la normale à l'onde). C'est ce vecteur que nous considérons désormais. Le choix du vecteur  $\mathbf{E}$  est à la fois historique (c'est  $\mathbf{E}$  qui s'identifie au « vecteur de Fresnel » [40]) et technique : on montre que c'est lui qui a des effets sur les détecteurs quadratiques utilisés en optique<sup>12</sup>.

Tout le livre reste dans le cadre d'une théorie scalaire de la diffraction qui ne prend pas en compte l'aspect vectoriel du champ électromagnétique, c'est-à-dire les phénomènes de polarisation<sup>13</sup>. Le champ électromagnétique est supposé posséder une polarisation fixe qui ne change pas par diffraction. Cela correspond bien à la réalité tant que les détails des objets étudiés sont relativement plus grands que la longueur d'onde (disons une vingtaine de fois, soit typiquement supérieurs à 10  $\mu\text{m}$ ) et suffit à expliquer déjà un grand nombre de phénomènes optiques.

<sup>11</sup> Le milieu est supposé isotrope. Le vecteur  $\mathbf{s}$  est colinéaire au vecteur de Poynting  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ .

<sup>12</sup> Cela est mis en évidence par l'étude d'ondes stationnaires pour lesquelles les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ont des ventres et des nœuds en quadrature : une émulsion photographique est impressionnée seulement sur les ventres du champ  $\mathbf{E}$  et non sur ceux de  $\mathbf{H}$  (qui sont les nœuds de  $\mathbf{E}$ ) [121, 158]. Cela est vrai pour un milieu non magnétique. La question se présente différemment en radio-électricité dans la mesure où on sait détecter le champ  $\mathbf{H}$ , par exemple à l'aide du courant qu'il engendre dans une boucle métallique.

<sup>13</sup> Nous décrivons cependant quelquefois des phénomènes de diffraction liés à la polarisation de la lumière : voir les paragraphes 5.1.1, 5.4.3, 15.4.4. Cela concerne surtout les composants optiques à base de cristaux liquides : écrans plats, modulateurs de lumière spatiaux.



**FIG. 1.6.** Onde localement plane dans un milieu isotrope. Les vecteurs  $\mathbf{E}$  (champ électrique) et  $\mathbf{H}$  (champ magnétique) au point  $M$  sont dans le plan tangent en  $M$  à la surface d'onde. Le vecteur de Poynting  $\mathbf{P}$  est orthogonal au plan tangent.

Une autre façon de considérer les choses consiste à dire qu'on ne s'intéresse qu'à une composante du champ électrique et à supposer qu'il n'y a pas de couplage entre les composantes de ce champ, ni entre elles et celles du champ magnétique (le seul couplage vient de la relation (1.1) et de l'orthogonalité des champs). Ce point de vue autorise la composition des composantes, après qu'elles se sont propagées, de manière à reconstituer le vecteur champ électrique. Cela est fait au paragraphe 5.4.3 ; mais ce n'est qu'une approximation.

Dans une théorie scalaire, l'amplitude du champ électrique associée à une onde monochromatique de fréquence  $\nu$  et considérée au point  $M$  et à l'instant  $t$  s'écrit

$$E(M, t) = U(M) e^{2i\pi\nu t}, \quad (1.2)$$

où  $U(M)$  est l'amplitude complexe du champ électrique (elle se mesure en V/m). Dans la première partie du livre nous n'utiliserons que  $U(M)$ , que nous désignerons comme amplitude du champ (électrique), et n'écrirons pas la partie temporelle de l'amplitude de l'onde (le terme  $\exp[2i\pi\nu t]$  serait en facteur dans toutes les expressions de l'amplitude du champ que nous écrirons). Faire ainsi sera possible tant que nous n'aurons pas à traiter des ondes polychromatiques, qui exigent le recours à l'écriture complète (chapitres 9 et 10, deuxième partie).

La notation complexe est d'usage courant, mais il ne faut pas oublier que le champ électrique « physique » est la partie réelle du champ complexe. Si  $E_r$  est l'amplitude du champ réel, alors

$$E_r(M, t) = \Re\{E(M, t)\}, \quad (1.3)$$

où  $\Re$  signifie « partie réelle ». Tout cela reste valable pour des champs qui ne sont pas nécessairement monochromatiques (notion de champ analytique, voir le paragraphe D.2 p. 495).

Les milieux de propagation considérés dans cet ouvrage sont isotropes et homogènes<sup>14</sup> (et transparents). La vitesse de la lumière (dans le vide) est  $c$  ( $c = 299\,792\,458$  m/s). Nous notons  $v$  la vitesse de phase d'une onde lumineuse monochromatique (fréquence  $\nu$ ) dans un milieu de propagation d'indice de

<sup>14</sup> L'isotropie traduit une invariance par rotation, l'homogénéité une invariance par translation.

réfraction  $n$ . La longueur d'onde est  $\lambda$  dans le milieu de propagation et le nombre d'ondes est  $k = 2\pi/\lambda$ . Le vecteur d'onde est  $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ , où  $\mathbf{s}$  est un vecteur unitaire dans la direction de propagation (perpendiculaire à la surface d'onde). Si  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide, alors  $\lambda_0 = n\lambda$  et  $k = 2\pi n/\lambda_0$ .

### 1.3.2 Éclairement, intensité vibratoire

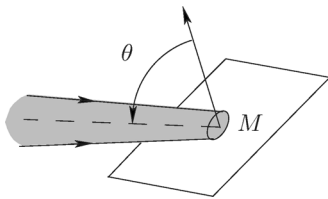
Les détecteurs optiques ne sont pas sensibles directement au champ électrique mais à l'éclairement associé. L'éclairement en un point d'un détecteur éclairé par une onde lumineuse est homogène (d'un point de vue dimensionnel) au module du vecteur de Poynting et se mesure en  $\text{W}/\text{m}^2$  (voir l'appendice E). Il est aussi proportionnel à la moyenne temporelle du carré du module du vecteur champ électrique<sup>15</sup> et vaut, au point  $M$  du détecteur,

$$\mathcal{I}(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n c \langle |E(M, t)|^2 \rangle_t \cos \theta, \quad (1.4)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide ( $\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  [118]),  $c$  la vitesse de la lumière (dans le vide),  $n$  l'indice de réfraction du milieu;  $\langle \rangle_t$  désigne la moyenne temporelle. L'angle  $\theta$  est l'angle que fait la normale au détecteur en  $M$  avec le rayon moyen du faisceau incident en  $M$  (fig. 1.7). La relation (1.4) vaut pour un milieu non magnétique (de perméabilité relative  $\mu_r = 1$ ). Le coefficient  $\varepsilon_0 n c$  est l'inverse de l'impédance<sup>16</sup> du milieu, définie par la relation (1.1).

Pour un champ représenté par l'amplitude de la relation (1.2), la relation (1.4) s'écrit

$$\mathcal{I}(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n c |U(M)|^2 \cos \theta. \quad (1.5)$$



**FIG. 1.7.** L'éclairement au point  $M$  d'un détecteur est proportionnel à  $|U(M)|^2 \cos \theta$ .

<sup>15</sup> Pour cette raison on parle de détecteurs quadratiques. On ne mesure d'autre part que des moyennes temporelles, car les détecteurs optiques sont lents à l'échelle des périodes d'oscillations des ondes lumineuses, de l'ordre de  $10^{-15} \text{ s}$ ; les mesures sont effectuées sur un très grand nombre de périodes.

<sup>16</sup> Cela vaut pour un milieu non magnétique, de perméabilité  $\mu = \mu_0$  (la perméabilité du vide est  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ); si  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\varepsilon_r$  la permittivité relative du milieu ( $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 n^2$ ), on déduit en effet de  $(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2} = 1/c$  que l'impédance du milieu est  $Z = (\mu_0/\varepsilon_0 \varepsilon_r)^{1/2} = 1/(\varepsilon_0 n c)$ . L'impédance du vide est  $Z_0 \approx 377 \Omega$ .

Pour alléger les formules, nous prendrons parfois égal à 1 le coefficient précédent et supposerons l'incidence normale sur le détecteur. Plus précisément, nous définissons l'intensité vibratoire de l'onde au point  $M$  par [135]

$$I(M) = |U(M)|^2. \quad (1.6)$$

L'intensité vibratoire est égale à l'éclairement à un facteur d'obliquité et un coefficient près (respectivement  $\cos \theta$  et  $\varepsilon_0 n c / 2$ ). Son intérêt est de pouvoir être calculée indépendamment de la position ou de l'orientation du détecteur, et plus généralement sur toute surface aérienne (qui n'est pas une surface matérielle).

Une grande partie du livre s'attache au calcul de l'amplitude du champ diffracté dans diverses situations. L'intensité vibratoire associée s'obtient en calculant le carré du module de l'amplitude du champ. Il est entendu que l'éclairement sur un récepteur donné s'en déduirait simplement en tenant compte du facteur d'obliquité et de l'impédance du milieu de propagation. Par la suite nous emploierons souvent le terme d'éclairement, même si nous calculerons seulement l'intensité vibratoire. Nous ferons ainsi pour insister sur la grandeur qui serait effectivement mesurée, espérant éviter de cette manière la grande confusion qui existe à ce propos dans la littérature.

Il ne faut pas confondre en effet l'intensité vibratoire (ni surtout l'éclairement) avec l'intensité définie en photométrie ou radiométrie, laquelle se mesure en W/sr (watts par stéradian), comme il est précisé à l'appendice E. L'intensité vibratoire est en quelque sorte une grandeur « aérienne », comme un éclairement potentiel. Ce qui est détecté, ce qui est mesuré, c'est l'éclairement (ou l'exitance si on se place du point de vue de l'émetteur). Mais pour l'obtenir, il faut intercepter le rayonnement par une surface matérielle.

### 1.3.3 Spectre électromagnétique et domaine optique

Le spectre de la lumière visible correspond à des longueurs d'ondes (dans le vide) allant de  $0,4 \mu\text{m}$  à  $0,78 \mu\text{m}$  environ, c'est-à-dire à des fréquences comprises entre environ  $7,5 \cdot 10^{14}$  Hz (bleu extrême) et  $3,8 \cdot 10^{14}$  Hz (rouge extrême). Le domaine ultra-violet s'étend typiquement de  $0,01 \mu\text{m}$  à  $0,4 \mu\text{m}$  et le domaine infra-rouge (optique) de  $0,78 \mu\text{m}$  à  $1 \text{ mm}$  environ. Ces bandes spectrales constituent le domaine de l'optique. On leur adjoint éventuellement les rayons X, dont les longueurs d'ondes sont situées en deçà de celles du domaine de l'ultra-violet (jusqu'à des longueurs d'ondes de  $0,1 \text{ nm}$ ).

Le spectre des ondes électromagnétiques comprend encore les rayons  $\gamma$  dont les fréquences sont supérieures à celles des rayons X. Au-delà de l'infra-rouge, pour des fréquences allant de  $300 \text{ GHz}$  ( $1 \text{ mm}$  de longueur d'onde dans le vide) à  $300 \text{ MHz}$ , on parle d'hyperfréquences. La radio-électricité relève de fréquences encore plus basses (allant jusqu'à quelques kHz).

## 1.4 Représentation de l'amplitude du champ

Dans ce livre nous appliquons très souvent la transformation de Fourier à l'amplitude du champ, dans des conditions qui seront précisées dans les prochains chapitres. Au plan mathématique, l'écriture de la relation (1.2) suppose implicitement que  $E$  et  $U$  sont des fonctions ; or le cadre fonctionnel est insuffisant pour l'analyse harmonique, puisque des fonctions aussi « simples » que les fonctions sinusoïdales ont pour transformée de Fourier la somme de deux distributions de Dirac (affectées de coefficients appropriés) ; cette constatation fournit un des arguments les plus forts pour justifier l'emploi des distributions en optique : vouloir utiliser la transformation de Fourier sans les distributions, c'est se priver, en pratique, des fonctions circulaires sinus, cosinus et de la fonction exponentielle à argument imaginaire (fonction cissoïdale), c'est-à-dire des ondes planes et des ondes monochromatiques ! Il semble plus raisonnable d'adopter ces modèles, certes modèles limites d'ondes réelles, et de travailler avec les outils mathématiques qui leur sont adaptés.

Le point de vue précédent conduit à représenter l'amplitude du champ électrique, grandeur physique, par une distribution, et plus précisément par une distribution tempérée, de façon à garantir l'existence de la transformée et de l'antécédent de Fourier de l'amplitude du champ. L'appendice A donne des éléments de la théorie des distributions et précise les notations que nous utilisons. L'espace des distributions tempérées, noté  $\mathcal{S}'$  et présenté dans l'appendice B, est très vaste : il contient notamment les fonctions de carré sommable et suffit, en général, aux besoins de la physique et à la représentation des signaux aléatoires (utiles au chapitre 10) [18]. Il est clos pour la transformation de Fourier.

Par conséquent, dans la relation (1.2), les amplitudes  $E$  et  $U$  doivent être considérées, *a priori*, comme des distributions tempérées<sup>17</sup>. Cela pose d'abord un problème d'écriture : tout au long du texte nous emploierons le plus souvent une notation fonctionnelle – la relation (1.2) en est un exemple ; nous continuerons à l'écrire – et des intégrales (notamment pour la transformation de Fourier), tout en sachant que cela n'est pas toujours rigoureux et qu'il serait plus correct d'avoir recours à la notation habituelle utilisée pour les distributions ; le paragraphe 3.5 donne un exemple de ce qu'il serait possible de faire.

Une deuxième difficulté à surmonter réside dans l'interprétation d'une distribution en physique et en mesures physiques. On sait par exemple que le produit de deux distributions n'est pas défini en général, le carré d'une distribution non plus : comment exprimer alors l'éclairement d'un détecteur à l'aide de la relation (1.5) si  $U$  est une distribution ? Une solution est proposée dans l'appendice A.

Enfin, l'étude de la cohérence (chapitre 10) met en œuvre des éléments classiques de la théorie des signaux aléatoires. Dans ce domaine encore, le recours aux distributions fournit des modèles certes idéaux mais qui simplifient grandement l'analyse harmonique des signaux aléatoires.

<sup>17</sup> Par exemple, un point lumineux se représente par une distribution de Dirac.

## Chapitre 2

# Fréquence spatiale et spectre angulaire

Une première façon de résoudre un problème de diffraction repose sur la notion de spectre angulaire et conduit à représenter la diffraction comme un filtrage linéaire, au sens de la théorie des signaux et systèmes. La méthode développée dans ce chapitre peut se qualifier de fréquentielle ; elle illustre un des intérêts de la transformation de Fourier dans l'étude de la diffraction. Soulignons également qu'elle est conforme à la théorie classique.

Avant d'aborder ce chapitre il est utile de lire l'appendice B consacré à la transformation de Fourier.

### 2.1 Fréquence spatiale

#### 2.1.1 La notion de fréquence spatiale

Rapportons l'espace à un système de coordonnées  $(x, y, z)$ , orthonormé. Soit une onde électromagnétique (ou lumineuse) se propageant dans la direction  $z$ . L'amplitude complexe du champ électrique, dans le plan d'équation  $z = 0$ , se représente par la fonction<sup>1</sup>  $U(x, y)$  (théorie scalaire). Si  $\hat{U}$  est la transformée de Fourier de  $U$ , l'analyse harmonique (ou analyse de Fourier) conduit à<sup>2</sup>

$$\hat{U}(F_x, F_y) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) e^{2i\pi(xF_x + yF_y)} dx dy, \quad (2.1)$$

où  $F_x$  et  $F_y$  sont les variables conjuguées de  $x$  et  $y$ . Nous appelons fréquence spatiale la variable vectorielle  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  et nous notons  $F = \|\mathbf{F}\|$  son module<sup>3</sup>. La dimension de  $F$  est l'inverse d'une longueur et son unité le  $\text{mm}^{-1}$  (ou parfois la paire de lignes (ou traits) par millimètre, voir la remarque 2.1.2).

La notation vectorielle fournit une écriture plus condensée de la relation (2.1) sous la forme

$$\hat{U}(\mathbf{F}) = \int_{\mathbb{R}^2} U(\mathbf{r}) e^{2i\pi\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup> Plus généralement l'amplitude du champ se représente par une distribution tempérée comme il est expliqué au paragraphe 1.4.

<sup>2</sup> Si  $U$  est une distribution, une écriture telle que l'intégrale de la relation (2.1) peut se considérer comme symbolique (voir l'appendice A).

<sup>3</sup> Certains auteurs [157] appellent fréquence spatiale le module de  $\mathbf{F}$ .

La transformation de Fourier inverse permet d'écrire<sup>4</sup>

$$U(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{U}(F_x, F_y) e^{-2i\pi(xF_x + yF_y)} dF_x dF_y, \quad (2.3)$$

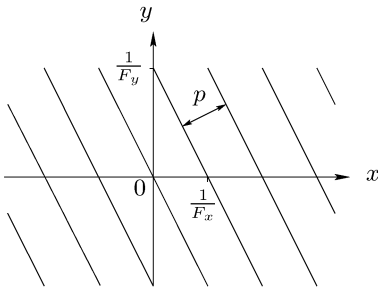
ou encore

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{U}(\mathbf{F}) e^{-2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}} d\mathbf{F}. \quad (2.4)$$

La relation (2.3) montre que  $U(x, y)$  se décompose sur la « base » des fonctions exponentielles de la forme  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$ . Cette dernière fonction représente, à une constante dimensionnelle près, la vibration associée à la fréquence spatiale  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ , et nous en obtenons une représentation schématique en considérant les points  $(x, y)$  du plan d'équation  $z = 0$  qui satisfont  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)] = 1$ . Ce sont des points équiphasés tels que  $xF_x + yF_y = m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), qui se répartissent sur un ensemble de droites parallèles (fig. 2.1), séparées de la distance

$$p = \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \frac{1}{F}. \quad (2.5)$$

La grandeur  $p$  est la période spatiale (ou le pas) de la fonction de base  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$  : c'est le module du vecteur « période spatiale », défini par  $\mathbf{p} = \mathbf{F}/F^2$ .



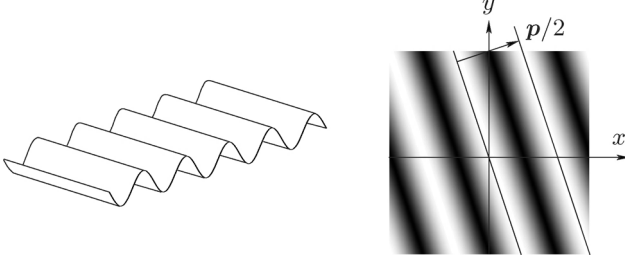
**FIG. 2.1.** L'amplitude de la vibration associée à la fréquence spatiale  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  a des crêtes localisées sur un réseau de droites parallèles. La période spatiale est  $p$ .

Le champ électrique réel est la partie réelle du champ complexe, et l'amplitude du champ réel associé à la fréquence spatiale  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  s'écrit

$$U_r(x, y) = U_0 \cos[2\pi(xF_x + yF_y)], \quad (2.6)$$

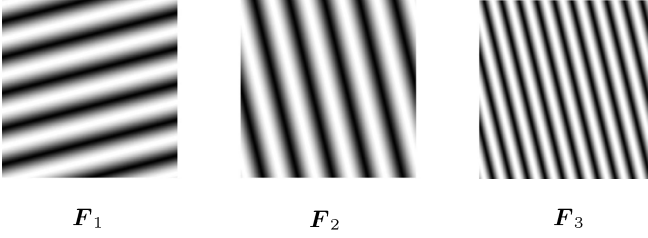
où  $U_0$  est une constante dimensionnelle. Cette amplitude a ses maxima sur le réseau de droites parallèles des points équiphasés déjà mentionnés (fig. 2.1). Une tôle ondulée ou des tuiles (romaines) peuvent donner une image intuitive de l'amplitude du champ (fig. 2.2) : leurs crêtes correspondent aux maxima de la fonction  $\cos[2\pi(xF_x + yF_y)]$ .

<sup>4</sup> Cela est vrai « presque partout », et à condition que  $\widehat{U}$  soit sommable. Cette dernière limitation disparaît dans  $\mathcal{S}'$ , espace des distributions tempérées.



**FIG. 2.2.** À gauche : représentation schématique de l'amplitude associée à une fréquence spatiale sous la forme imagée de « tôle ondulée ». À droite : représentation d'une fonction de la forme  $\cos^2[2\pi(xF_x + yF_y)]$ ; du fait du passage au carré, la période spatiale (vectorielle) de cette fonction est  $p/2$ , où  $p = (F_x/F^2, F_y/F^2)$ .

La figure 2.3 illustre le caractère bidimensionnel (et vectoriel) de la fréquence spatiale. On peut faire varier la période spatiale mais aussi l'orientation des droites.



**FIG. 2.3.** Aspect vectoriel de la fréquence spatiale. Les fréquences  $F_1$  et  $F_2$  ont le même module, mais des orientations différentes :  $F_1 = F_2$ . Les fréquences  $F_2$  et  $F_3$  ont la même orientation, mais des modules différents :  $F_2 < F_3$ .

La relation (2.3) conduit à considérer la répartition du champ dans le plan d'équation  $z = 0$ , donnée par  $U(x, y)$ , comme étant la somme pondérée de répartitions élémentaires similaires aux réseaux de la figure 2.2 et correspondant à diverses périodes et orientations. Le poids attribué à la répartition associée à la fréquence spatiale  $(F_x, F_y)$  est  $\widehat{U}(F_x, F_y)$ .

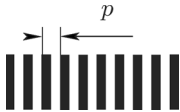
**Fréquences spatiales et détails d'un objet.** L'amplitude du champ  $U$  dans le plan  $x, y$  décrit aussi l'amplitude du champ rayonné par un objet (plan) qui serait placé dans ce plan. Les détails les plus fins de l'objet correspondent à des variations rapides de l'amplitude du champ (fonction des variables spatiales  $x$  et  $y$ ) et se traduisent, dans la décomposition spectrale, par les fréquences spatiales de plus grand module. Transmettre de hautes fréquences spatiales (en module) c'est transmettre les détails les plus fins d'un objet ; pour cette raison, la notion de fréquence spatiale permet d'analyser la résolution des instruments d'optique, comme nous le verrons par la suite (notamment au chapitre 8).

**Remarque 2.1.1.** En S.I. l'amplitude du champ  $U$  se mesure en V/m et par conséquent sa transformée de Fourier spatiale  $\hat{U}$  se mesure en V.m.

**Remarque 2.1.2 (Paire de traits par millimètre).** On utilise parfois la paire de traits par millimètre comme unité de module de la fréquence spatiale. Cela se comprend si on considère une modulation binaire (fig. 2.4). Sachant que la fréquence spatiale fondamentale est l'inverse de la période (spatiale), le recours au mot « paire » vient de ce qu'une période correspond de fait à deux traits adjacents : un trait noir et un trait blanc.

La quantité associée au module d'une fréquence spatiale est la même, que l'unité choisie soit le  $\text{mm}^{-1}$  ou la paire de traits par mm : par exemple 100 paires de traits par mm font  $100 \text{ mm}^{-1}$ .

Les images sont enregistrées notamment dans des émulsions photographiques, captées par des détecteurs électroniques (par exemple les dispositifs à transfert de charges, DTC – *Charge coupled device*, CCD en anglais) ou affichées sur des moniteurs (écrans à tube cathodique, écrans à cristaux liquides, modulateurs de lumière spatiaux) qui sont en général caractérisés par les dimensions du « point élémentaire » qu'ils sont capables de détecter ou d'afficher. Suivant une seule dimension, il faut deux points élémentaires pour obtenir une variation d'éclairement (ou de luminance suivant les cas) correspondant à une période. Ainsi la plus petite période enregistrable (ou affichable) est le double de la dimension du point élémentaire.



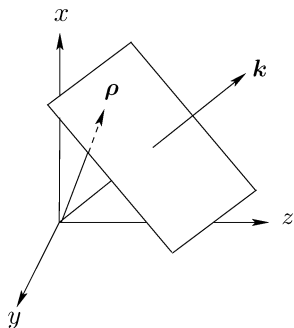
**FIG. 2.4.** Pour une mire binaire, la période  $p$  correspond à une paire de traits : un noir et un blanc. La paire de traits par millimètre est une unité de module de fréquence spatiale.

### 2.1.2 Association des fréquences spatiales et des ondes planes

Un des éléments centraux de la théorie que nous exposons est qu'à une fréquence spatiale donnée la diffraction–propagation fait correspondre une onde plane dont la direction de propagation est parfaitement définie. Pour comprendre cela, rappelons que l'onde plane qui se propage dans la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  (fig. 2.5), dont les cosinus directeurs<sup>5</sup> sont  $\alpha, \beta, \gamma$ , se représente par

$$\exp[-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}] = \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right], \quad (2.7)$$

<sup>5</sup> On a :  $\alpha = \cos \theta_x$ ,  $\beta = \cos \theta_y$  et  $\gamma = \cos \theta_z$ , où  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  sont les angles entre le vecteur  $\mathbf{k}$  et les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . De plus  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ . Le vecteur  $\mathbf{k}$  s'écrit  $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\mathbf{s}$  où  $\mathbf{s}$  est unitaire et orienté dans la direction de propagation. Les cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{s}$ .



**FIG. 2.5.** Plan d'onde de l'onde plane se propageant dans la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . L'amplitude complexe au point  $\boldsymbol{\rho}$  est proportionnelle à  $\exp[-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}]$ ; la phase est constante dans le plan d'onde considéré, lequel est orthogonal au vecteur  $\mathbf{k}$  : un plan d'onde est un plan équiphasé.

si on ne tient pas compte de la dépendance temporelle du champ (terme  $\exp[2i\pi\nu t]$  que nous n'écrivons pas, car nous nous intéressons seulement pour l'instant à la répartition spatiale de l'onde). La relation (2.7) donne l'amplitude du champ créé au point  $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$  par l'onde plane considérée (à un facteur dimensionnel près).

Dans ces conditions, la fréquence spatiale  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  étant donnée, l'amplitude  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$  représente le champ engendré, dans le plan  $z = 0$ , par l'onde plane qui se propage dans la direction définie par

$$\alpha = \lambda F_x, \quad (2.8)$$

$$\beta = \lambda F_y, \quad (2.9)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2} = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad (2.10)$$

en supposant  $1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2 \geq 0$ . Le cas  $1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2 < 0$  fait l'objet du paragraphe 2.2.3.

**Propriété fondamentale.** Il résulte du principe de Huygens–Fresnel que l'onde qui se propage dans la région  $z > 0$  est la même :

- si le plan d'équation  $z = 0$  est éclairé par une onde plane de cosinus directeurs  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , issue de la région  $z < 0$ ;
- si le champ dans le plan  $z = 0$  est le champ associé à la fréquence spatiale  $(F_x, F_y)$  qui satisfait les relations (2.8–2.10).

Ainsi à chaque fréquence spatiale est associée la direction de propagation d'une onde plane parfaitement définie. Nous verrons par la suite comment cela permet d'aborder des problèmes de diffraction (paragraphe 2.3) et d'analyser les systèmes optiques (chapitre 8).

**Remarque 2.1.3.** On rencontre des fréquences spatiales dont les composantes sont négatives. Le changement de signe des composantes d'une fréquence spatiale correspond à un changement du vecteur d'onde de l'onde associée : ce dernier devient le symétrique de ce qu'il était, par rapport à l'axe  $z$ .

### 2.1.3 Vecteur fréquence angulaire

Les relations (2.8–2.10) montrent que  $\gamma$  se déduit de  $\alpha$  et  $\beta$  : connaître ces deux paramètres suffit pour déterminer l'onde plane représentée par la relation

(2.7). Introduisons le vecteur  $\Phi$  de composantes  $(\alpha, \beta)$  dans un espace euclidien de dimension 2, l'espace des fréquences angulaires. Des relations (2.8) et (2.9) on déduit  $(\alpha, \beta) = \lambda(F_x, F_y)$ , c'est-à-dire

$$\Phi = \lambda F. \quad (2.11)$$

Comme  $\gamma$  est le cosinus directeur, relativement à  $z$ , de la direction de propagation de l'onde plane associée à  $F$ , nous avons

$$\gamma = \cos \theta_z, \quad (2.12)$$

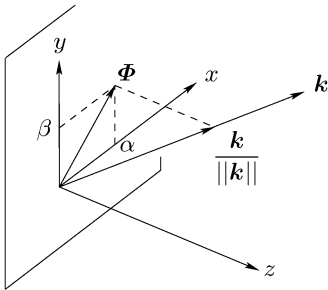
où  $\theta_z$  est l'angle entre  $z$  et  $k$ , et selon la relation (2.10)

$$|\sin \theta_z| = \lambda F = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \|\Phi\| = \Phi. \quad (2.13)$$

Pour les petits angles :  $\Phi \approx |\theta_z|$ .

Le vecteur  $\Phi$  est la fréquence angulaire de l'onde plane associée à la fréquence spatiale  $F$ . La relation<sup>6</sup> (2.11) est importante dans la mesure où elle lie une quantité caractéristique de la structure d'un objet – en l'occurrence une fréquence spatiale – à une quantité caractéristique du rayonnement diffracté par cet objet, à savoir une direction de propagation.

**Interprétation du vecteur fréquence angulaire.** Puisque  $\Phi = (\alpha, \beta)$  et que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les cosinus directeurs du vecteur  $k$  (relatifs à  $x$  et  $y$ ), le vecteur  $\Phi$  est la projection du vecteur unitaire (et sans dimension)  $k/||k||$  sur le plan  $x, y$ , comme le montre la figure 2.6.



**FIG. 2.6.** Interprétation du vecteur  $\Phi$  (« fréquence angulaire ») comme projection du vecteur d'onde  $k$  sur le plan  $x, y$  (après normalisation).

**Exemple 2.1.1.** Un détail de  $2,5 \mu\text{m}$  sur un objet lumineux représente des variations spatiales de l'amplitude du champ correspondant à une fréquence spatiale<sup>7</sup> de module

<sup>6</sup> Dans ses articles [20–23], G. Bonnet écrit la relation (2.11) sous la forme  $\Phi = -\lambda F$ . La présence du signe moins vient du choix de conventions différentes, notamment dans la définition de la transformation de Fourier. Le choix des conventions propres à notre ouvrage est expliqué dans l'appendice B. Cette différence de signe se retrouve par la suite, par exemple dans la relation (3.24) (diffraction de Fraunhofer, théorème 1) ou dans la relation (10.101) (transfert de la cohérence).

<sup>7</sup> Cette fréquence est associée à un pas de  $5 \mu\text{m}$ .

$$F = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}} = 200 \text{ mm}^{-1}. \quad (2.14)$$

À la longueur d'onde  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , ce détail diffracte la lumière sous l'angle

$$\theta_z \approx \Phi = \lambda F = 0,1 \text{ rd} \approx 5^\circ 44'. \quad (2.15)$$

**Remarque 2.1.4.** L'exemple précédent, qui traite d'un détail de  $2,5 \mu\text{m}$ , semble contredire ce que nous avons admis au chapitre 1, à savoir que la théorie scalaire que nous développons était valide si les détails des objets auxquels nous nous intéressons étaient plus grands que  $10 \mu\text{m}$  (c'était un ordre de grandeur). De fait, cette valeur était la condition à respecter pour ne pas avoir à considérer les effets de la polarisation. Elle n'exclut pas de pouvoir associer un angle de diffraction à une fréquence spatiale située au-delà de la limite évoquée. Simplement, dans un tel cas, on peut s'attendre à ce que les amplitudes des ondes diffractées soient liées à la polarisation des champs, et c'est cela dont la théorie scalaire ne peut rendre compte avec précision.

### 2.1.4 Obtention de l'onde plane associée à une fréquence spatiale donnée

En optique, les objets diffractants sont souvent éclairés par une source primaire qui produit une onde plane homogène. On éclaire ainsi des transparences, et le champ qui en émerge s'écrit, au point  $\mathbf{r}$ , sous la forme  $U(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r})$  où  $U_0$  est l'amplitude de l'onde d'éclairage et  $t$  la fonction de transmission<sup>8</sup> de la transparence. Or, de façon élémentaire, par modulation d'amplitude on ne sait fabriquer que des transparences dont la fonction de transmission est réelle et positive :  $t$  est en général une fonction à valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Il n'est pas possible d'obtenir par cette technique une fonction de la forme  $\exp[2i\pi \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{r}]$ . On ne peut même pas produire la fonction  $\cos 2\pi \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{r}$  sur une période<sup>9</sup>. On sait produire

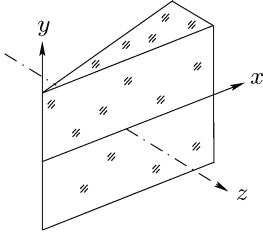
$$t(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (2.16)$$

c'est-à-dire, comme le montre la décomposition de la fonction cosinus en somme de deux fonctions exponentielles, une amplitude complexe et à la fois l'amplitude complexe conjuguée avec, en plus, une constante. En termes d'optique : on sait produire une onde complexe et à la fois son onde conjuguée et une onde homogène se propageant sur l'axe.

Nous verrons par la suite (chapitre 15) que l'holographie permet l'enregistrement d'une onde complexe, sous la forme d'un éclairage modulé (donc sous la forme d'une grandeur réelle positive). Cependant nous verrons également que la restitution de l'onde s'accompagne de la création d'une onde conjuguée et d'une onde homogène (correspondant à un fond homogène).

<sup>8</sup> Voir la relation (5.1) du chapitre 5 pour une définition précise.

<sup>9</sup> L'exercice 2.3 p. 39 montre comment dépasser cette limitation.



**FIG. 2.7.** Si on envoie sur le prisme une onde plane se propageant suivant  $z$ , le champ dans le plan  $x, y$  est celui associé à une fréquence spatiale de module  $(n-1)A/\lambda$  où  $n$  est l'indice du verre et  $A$  l'angle au sommet du prisme.

Le problème de l'obtention d'une amplitude exponentielle complexe a une solution si on admet que  $t$  puisse traduire une transparence de phase<sup>10</sup>. Un prisme d'angle au sommet  $A$  en fournit un exemple. Si  $A$  est petit, et si  $n$  est l'indice du verre qui constitue le prisme (lui-même placé dans l'air, ou le vide), la déviation angulaire produite par le prisme est  $(n-1)A$ , si bien que le prisme est une transparence dont la fonction de transmission est telle que

$$t(x, y) = \exp \left[ -\frac{2i\pi(n-1)Ax}{\lambda} \right], \quad (2.17)$$

à condition que l'arrête du prisme soit parallèle à l'axe  $y$  et qu'elle serve d'origine à l'abscisse  $x$  (fig. 2.7). Si on envoie sur le prisme une onde plane se propageant perpendiculairement au plan  $x, y$ , l'onde émergente est l'onde plane associée à la fréquence spatiale

$$\mathbf{F}_0 = \left( \frac{(n-1)A}{\lambda}, 0 \right). \quad (2.18)$$

Le prisme offre simplement un moyen de changer la direction de propagation de l'onde plane incidente. Cela modifie la fréquence spatiale du champ dans le plan  $x, y$ .

Par la suite, nous parlerons du champ ou de l'onde plane associés à une fréquence spatiale, comme si nous étions effectivement capables de produire un tel champ ou une telle onde, sans revenir à la discussion de ce paragraphe. Souvent il s'agira d'une onde isolée, par la pensée, dans un ensemble comprenant en plus l'onde conjuguée et une onde homogène (fond continu).

## 2.2 Spectre angulaire

### 2.2.1 La notion de spectre angulaire

Au lieu de la fréquence spatiale, on choisit comme grandeur de travail la fréquence angulaire, c'est-à-dire, au fond, les cosinus directeurs  $\alpha$  et  $\beta$ .

<sup>10</sup> Obtenir dans un plan une amplitude sinusoïdale est encore possible par d'autres moyens. Citons l'interférométrie (coin d'air avec un interféromètre de Michelson), ou le filtrage spatial de l'onde produite par une transparence de la forme de celle de la relation (2.16).

Soit une onde se propageant suivant l'axe  $z$ , d'amplitude  $U$  dans le plan d'équation  $z = 0$ , et soit  $\widehat{U}$  la transformée de Fourier de  $U$ . Soit  $V$  la fonction (ou distribution) définie par

$$V(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \widehat{U} \left( \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right). \quad (2.19)$$

La relation (2.3) s'écrit

$$U(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} V(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta. \quad (2.20)$$

Avec des variables vectorielles, la relation (2.19) s'écrit

$$V(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{\lambda^2} \widehat{U} \left( \frac{\boldsymbol{\Phi}}{\lambda} \right), \quad (2.21)$$

et la relation (2.20)

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} V(\boldsymbol{\Phi}) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r} \right] d\boldsymbol{\Phi}. \quad (2.22)$$

La fonction  $V$  représente le spectre angulaire de l'onde considérée, dans le plan  $z = 0$ . Physiquement, le spectre angulaire est l'ensemble des différentes directions de propagation des ondes planes qui composent l'onde incidente sur le plan  $z = 0$  (ou encore l'ensemble des vecteurs d'ondes), comme il résulte de l'interprétation suivante.

**Interprétation : décomposition d'une onde quelconque sur une famille d'ondes planes.** L'analyse harmonique – telle qu'elle est développée dans le paragraphe 2.1 – conduit à représenter l'amplitude du champ  $U(\mathbf{r})$  dans le plan d'équation  $z = 0$ , comme la superposition pondérée d'amplitudes élémentaires (représentées par des fonctions exponentielles à argument imaginaire), les coefficients de pondération étant les valeurs  $\widehat{U}(\mathbf{F})$ . L'association entre fréquences spatiales et ondes planes conduit à un résultat plus général, qui porte sur l'onde incidente sur le plan  $z = 0$  et non seulement sur son amplitude dans ce même plan : toute onde incidente sur le plan  $z = 0$  est la superposition pondérée d'ondes planes, les coefficients de pondération étant donnés par le spectre angulaire. Chaque onde plane a sa propre direction de propagation. Cela reste vrai pour l'onde émise par un objet rayonnant placé dans le plan d'équation  $z = 0$ .

**Remarque 2.2.1.** L'introduction du facteur  $1/\lambda^2$  dans la relation (2.19) qui définit le spectre angulaire se justifie par des raisons dimensionnelles. L'amplitude du champ se mesure en V/m et  $\widehat{U}(F_x, F_y)$  en V.m. Par conséquent  $V(\alpha, \beta)$  se mesure également en V/m : c'est bien l'amplitude du champ d'une onde plane.

Une autre justification vient de la relation (2.11) :  $\Phi = \lambda F$ , dont il résulte<sup>11</sup>  $d\Phi = \lambda^2 dF$ . La relation (2.21) permet d'écrire

$$V(\Phi) d\Phi = \widehat{U}(F) dF. \quad (2.23)$$

Ainsi l'amplitude  $\widehat{U}(F) = \widehat{U}(F_x, F_y)$  est la contribution du domaine fréquentiel  $[F_x, F_x + dF_x] \times [F_y, F_y + dF_y]$  à l'amplitude de l'onde, et  $V(\Phi) = V(\alpha, \beta)$  est la contribution du domaine  $[\alpha, \alpha + d\alpha] \times [\beta, \beta + d\beta]$  (ici  $\times$  représente le produit cartésien de deux ensembles).

**Remarque 2.2.2.** Les bornes de l'intégrale de la relation (2.20) sont infinies, ce qui peut surprendre puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont des cosinus directeurs qu'on peut *a priori* croire bornés (par 1 en valeur absolue). Ce n'est pas toujours le cas :  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être supérieurs à 1 (ce sont alors des cosinus à argument imaginaire, c'est-à-dire des cosinus hyperboliques) ; cela a lieu pour les ondes évanescentes mentionnées au paragraphe 2.2.3. On peut admettre encore que le spectre angulaire est, en pratique, à support borné et qu'il n'y a pas d'inconvénient à l'intégrer sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2.2 Propagation du spectre angulaire

Soit une onde se propageant suivant  $z$ , dont l'amplitude, dans le plan d'équation  $z = 0$ , est  $U(x, y)$  ou bien  $U(x, y, 0)$ . Son spectre angulaire est<sup>12</sup>

$$V_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y, 0) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy, \quad (2.24)$$

et la transformation de Fourier inverse donne (c'est la relation (2.20) adaptée aux notations de ce paragraphe)

$$U(x, y, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} V_0(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta. \quad (2.25)$$

L'amplitude du champ dans le plan  $z$  est  $U(x, y, z)$  ; son spectre angulaire est

$$V_z(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y, z) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy. \quad (2.26)$$

Il en résulte

$$U(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} V_z(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta. \quad (2.27)$$

<sup>11</sup> L'apparition de  $\lambda^2$  dans la forme différentielle vient de ce que les variables sont de dimension 2. De façon détaillée, on a  $\Phi = (\alpha, \beta) = (\lambda F_x, \lambda F_y) = \lambda F$ , et par conséquent  $d\Phi = d\alpha d\beta = \lambda^2 dF_x dF_y = \lambda^2 dF$ .

<sup>12</sup> On pourrait aussi écrire  $V(\alpha, \beta, 0)$ . La description du paragraphe 2.2.1 était générale ; nous indiquons désormais en indice l'abscisse du plan considéré.

La fonction  $U$  satisfait l'équation de Helmholtz<sup>13</sup> ( $\Delta$  est le laplacien)

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (2.28)$$

qui s'écrit, avec  $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$  et en tenant compte de  $k = 2\pi/\lambda$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2 \gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta = 0. \quad (2.29)$$

L'intégrale qui apparaît dans l'équation (2.29) est une intégrale de Fourier et elle est nulle si, et seulement si<sup>14</sup>,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2 \gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) = 0. \quad (2.30)$$

L'équation (2.30) est une équation différentielle en  $z$  dont l'intégration donne (pour  $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ , c.-à-d.  $\gamma^2 \geq 0$ )

$$V_z(\alpha, \beta) = V_0(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} \gamma z \right], \quad (2.31)$$

si on ne garde que l'exponentielle avec le signe moins ( $\gamma \geq 0$ ), celle qui correspond à une onde se propageant vers les  $z$  positifs. Selon la relation (2.10), le paramètre  $\gamma$  s'exprime en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  :  $\gamma = (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$  ; la relation (2.31) montre que la propagation se traduit par un changement de phase pour chacune des composantes du spectre angulaire.

**Remarque 2.2.3.** De la relation (2.31) provient l'intérêt de la notion de fréquence spatiale, qui est le même que celui de fréquence temporelle (en dimension 1). L'importance de cette notion résulte de la linéarité des systèmes rencontrés en optique. Ainsi un filtre linéaire conserve les fréquences et n'introduit qu'une atténuation et un déphasage. Cela revient à dire que les fonctions  $\exp[2i\pi\nu t]$  sont des fonctions propres des systèmes linéaires (temporels). C'est la même chose pour les fréquences spatiales. La diffraction-propagation atténue et déphase l'onde associée à une fréquence spatiale mais sans changer cette fréquence : elle agit comme un filtre linéaire spatial.

Pour ce qui est des instruments d'optique il faut préciser qu'une fréquence spatiale n'est pas vraiment conservée puisque l'instrument introduit un grandissement dans la formation d'une image. Ce grandissement est cependant commun à toutes les fréquences spatiales du spectre angulaire incident sur l'instrument (ce qui n'est pas le cas en général de l'atténuation ni du déphasage) : l'analyse du comportement d'un système en termes de fréquence spatiale reste pertinente (voir le paragraphe 8.2.5).

<sup>13</sup> L'équation de Helmholtz est l'équation des ondes pour les ondes harmoniques (voir l'appendice D).

<sup>14</sup> Selon le cadre fonctionnel adopté, cela résulte de ce que la transformation de Fourier est un automorphisme de  $\mathcal{S}$  (espace des fonctions à décroissance rapide), de  $L_2$  (espace des fonctions de carré sommable) ou encore de  $\mathcal{S}'$  (espace des distributions tempérées).

### 2.2.3 Fréquence de coupure. Ondes évanescentes

Ce qui précède est valable si

$$1 - \alpha^2 - \beta^2 \geq 0. \quad (2.32)$$

Dans le cas contraire, le cosinus directeur  $\gamma$  prend la forme  $\gamma = i\kappa$  où  $\kappa$  est un nombre réel négatif ( $\kappa > 0$  n'est pas réaliste (pour un milieu passif) : il y aurait une amplification de l'onde). L'onde s'atténue très rapidement, en pratique sur un parcours de l'ordre de la longueur d'onde (voir l'exemple 2.2.1) et il s'agit d'une onde évanescente.

La relation (2.32) se traduit en termes de fréquence spatiale à l'aide des relations (2.8) et (2.9) sous la forme

$$1 - \lambda^2(F_x^2 + F_y^2) \geq 0, \quad (2.33)$$

ou encore

$$\frac{1}{\lambda} \geq F, \quad (2.34)$$

de telle sorte que  $1/\lambda$  est le module d'une fréquence de coupure. Le cas évanescent se rencontre si  $F > 1/\lambda$ . Cela signifie qu'une onde électromagnétique de longueur d'onde  $\lambda$  ne peut pas transporter de l'information relative à des détails plus petits que  $\lambda$  (pas sur une grande distance). Les ondes évanescentes ont cependant un intérêt pratique : on parvient à les récupérer en microscopie en champ proche et elles ont justement l'avantage de traduire de fins détails de l'objet observé, situés au-delà de la fréquence de coupure [57, 62].

La limitation mentionnée ici vaut dans le cadre d'une théorie scalaire. Il existe des phénomènes liés à des périodes spatiales inférieures à la longueur d'onde : diffusion de Rayleigh, réseaux de diffraction à pas submicronique [132] dont certains se comportent comme des milieux biréfringents [64, 123].

**Exemple 2.2.1.** Soit un réseau de diffraction correspondant à la fréquence spatiale  $(F_x, F_y) = (1\,000\text{ mm}^{-1}, 1\,000\text{ mm}^{-1})$ . Sa période spatiale est  $0,7\text{ }\mu\text{m}$  et ses traits sont inclinés à  $45^\circ$  des axes  $x$  et  $y$ . On éclaire ce réseau par une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 1\text{ }\mu\text{m}$ . Alors  $1 - \alpha^2 - \beta^2 = -1$ , et pour une distance de propagation  $z = 1\text{ }\mu\text{m}$ , l'amplitude relative de l'onde (par rapport à celle en  $z = 0$ ) est seulement  $\exp[-2\pi] \approx 1,9 \cdot 10^{-3}$ .

**Remarque 2.2.4.** Dans ce paragraphe les milieux sont supposés diélectriques (transparents). Si une onde électromagnétique est incidente sur un milieu métallique, les résultats sont différents : pour un métal réel (non parfait) il existe un effet de peau et la profondeur de peau (caractéristique de la pénétration de l'onde dans le métal) est d'autant plus faible que la fréquence est élevée (exprimée en  $\mu\text{m}$ , elle vaut  $50/\sqrt{\nu}$ , où la fréquence  $\nu$  est exprimée en MHz [236]). Aux fréquences optiques, la profondeur de peau est extrêmement faible ; le milieu métallique se comporte comme un bon miroir.  $\diamond$

L'existence de la fréquence de coupure en  $1/\lambda$  a des conséquences pratiques essentielles : elle fixe le module des fréquences spatiales qui peuvent être « vues » par une onde électromagnétique. À son tour ce dernier fixe la finesse des détails qu'on peut observer ou reproduire. Voici quelques exemples :

1. En microscopie optique, on observe des détails plus fins en lumière bleue qu'en lumière rouge ;
2. Les disques compacts utilisés pour la reproduction musicale ou pour le stockage des données informatiques comportent des micro-cuvettes qui forment une piste en spirale [39]. C'est un faisceau lumineux issu d'une diode laser qui lit le disque. La longueur d'onde de lecture est de  $0,8\text{ }\mu\text{m}$  environ. Il est possible de stocker une plus grande quantité d'information sur la même surface, à condition de réduire la taille des micro-cuvettes : leur lecture exige toutefois une longueur d'onde plus petite puisqu'on augmente leur fréquence spatiale. Cette réduction de la longueur d'onde de lecture est nécessaire pour les *DVD* (*Digital Versatile Disc*) : ils sont lus à une longueur d'onde de  $0,65\text{ }\mu\text{m}$  environ. Le tout récent système *Blu-ray Disc* utilise de la lumière bleue (longueur d'onde de  $0,4\text{ }\mu\text{m}$  environ, à la limite de l'ultra-violet) : grosso modo, on divise par 2 la dimension (linéaire) des cuvettes (par rapport à un disque compact) et multiplie par 4 la capacité (surfactive) de stockage des disques. (On augmente encore la capacité de stockage en superposant plusieurs couches gravées.) ;
3. Certains des circuits intégrés qui sont à la base des progrès considérables des ordinateurs sont obtenus par photolithographie, après photoréduction. Leurs performances augmentent avec le facteur d'intégration. Actuellement, on n'arrive à des résolutions inférieures à  $100\text{ nm}$  que par l'emploi d'un rayonnement ultra-violet, c'est-à-dire de courtes longueurs d'ondes – et parfois de techniques de super-résolution qui permettent un gain supplémentaire. On a d'ailleurs pratiquement atteint aujourd'hui les limites que l'optique peut offrir dans le domaine. Dans un milieu d'indice de réfraction  $n$ , un même rayonnement « porte » des fréquences spatiales supérieures à celle qu'il transporterait dans le vide, puisque  $n\lambda = \lambda_0$  ; cela est utilisé pour la fabrication de circuits intégrés : lors de la photoréduction ceux-ci sont immergés dans un « liquide d'indice » ;
4. Les structures cristallines ne sont pas visibles en microscopie optique classique. Elles ont des périodes de l'ordre du nanomètre et ne diffractent pas la lumière visible : les cristaux paraissent continus ; l'onde lumineuse n'est pas affectée lors de sa traversée du milieu, subissant seulement éventuellement une atténuation homogène. En revanche les cristaux diffractent les rayons X dont les longueurs d'ondes sont justement de l'ordre du nanomètre.

Dans le domaine des hyperfréquences, ou des ondes radio, on sait qu'une surface métallique se comporte souvent comme un (bon) miroir<sup>15</sup> et qu'il existe dans ce cas aussi un phénomène d'ondes évanescentes, sur une distance de l'ordre de la profondeur de peau [236]. La fréquence de coupure en  $1/\lambda$  permet

<sup>15</sup> Le miroir est parfait si le métal est un conducteur parfait.

d'évaluer si une structure métallique périodique se comporte comme une surface continue et réfléchit les ondes électromagnétiques (sans diffraction, c'est-à-dire selon les lois de l'optique géométrique). Voici quelques exemples d'applications :

1. On utilise en radio-astronomie, dans le domaine des hyperfréquences, des miroirs constitués de grillages métalliques. Ceux-ci, tout en étant plus légers qu'elles, se comportent comme des plaques métalliques continues, pour des longueurs d'ondes supérieures au pas du maillage du grillage. À de telles longueurs d'ondes<sup>16</sup>, le miroir paraît continu ;
2. Une cage de Faraday est un ensemble métallique (cuivre), fermé, conçu pour isoler les instruments de mesures du rayonnement électromagnétique extérieur. Ces cages sont constituées de grillages plus ou moins serrés qui réfléchissent les ondes dont les longueurs d'ondes sont supérieures au pas de la grille. (Voir aussi la note 17 de ce chapitre.) ;
3. Une automobile constitue une sorte de cage de Faraday (dans la mesure où sa carrosserie est métallique) qui empêche les ondes électromagnétiques de pénétrer dans l'habitacle (cela protège de la foudre par exemple) ; mais le véhicule comporte des ouvertures de l'ordre du mètre : il est possible de recevoir des communications sur son téléphone mobile à l'intérieur de l'automobile, car les longueurs d'ondes porteuses sont voisines de 15 ou 30 cm – suivant les normes –, et petites devant les dimensions des ouvertures de la carrosserie. En revanche il est souhaitable de disposer d'une antenne extérieure pour recevoir la radio, par exemple en modulation de fréquence (porteuse de l'ordre de 3 m de longueur d'onde, plus grande que les dimensions des ouvertures du véhicule). Pour d'autres longueurs d'ondes (grandes ondes par exemple) la réception est possible, car la profondeur de peau est supérieure à l'épaisseur de la carrosserie ;
4. On a un effet comparable (en sens inverse si on veut) pour les fours à micro-ondes dont la porte est munie d'une grille métallique de pas millimétrique : la lumière passe et permet de voir les aliments qui se réchauffent dans le four ; mais les ondes électromagnétiques qui rayonnent dans le four, qui sont dangereuses pour les êtres humains et dont la longueur d'onde est de l'ordre d'une quinzaine de centimètres, ne traversent pas cette grille<sup>17</sup>.

**Remarque 2.2.5.** En toute rigueur la fréquence  $1/\lambda$  est en dehors du domaine de la théorie scalaire tel que nous l'avons défini. Dans les exemples précédents elle fixe cependant un ordre de grandeur aux périodes spatiales à partir desquelles on observe tel ou tel effet.

<sup>16</sup> Par exemple la longueur d'onde de 21 cm du spectre de l'hydrogène.

<sup>17</sup> **Cache de Faraday.** Les fréquences qui résonnent dans un four à micro-ondes sont relativement proches de celles utilisées en téléphonie mobile. Ainsi un four à micro-onde constitue une bonne cage de Faraday pour la téléphonie mobile. En plaçant son téléphone mobile dans un tel four (sans allumer ce dernier, attention !), on constate qu'il ne sonne pas quand on l'appelle, preuve qu'il ne reçoit plus de signal dans de telles conditions. Il est bien caché !

## 2.3 Spectre angulaire et diffraction

### 2.3.1 La diffraction comme filtre linéaire

Examinons comment la notion de spectre angulaire permet d'aborder un problème de diffraction–propagation. Si l'on dispose de l'amplitude du champ dans le plan d'équation  $z = 0$ , on obtient le spectre angulaire  $V_0$  dans ce plan par analyse harmonique. La propagation se traduit par un déphasage lié à la distance de propagation  $z$  : le spectre angulaire  $V_z$  se déduit de  $V_0$  par multiplication par une fonction de phase. Enfin, la transformation de Fourier inverse appliquée à  $V_z$  donne l'amplitude du champ dans le plan d'abscisse  $z$ .

En pratique, conformément à la relation (2.31), on passe de  $V_0$  à  $V_z$  en multipliant par la fonction  $H_z$  telle que

$$H_z(\alpha, \beta) = \exp \left[ -\frac{2i\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right], \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 \leq 1, \quad (2.35)$$

$$H_z(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > 1. \quad (2.36)$$

La fonction  $H_z$  est la fonction de transfert associée à la propagation à la distance  $z$ . On obtient

$$V_z(\alpha, \beta) = H_z(\alpha, \beta) V_0(\alpha, \beta), \quad (2.37)$$

qui exprime justement que la diffraction est un filtre linéaire.

**Remarque 2.3.1.** De fait (voir le paragraphe 2.2.3),  $H_z(\alpha, \beta)$  n'est pas rigoureusement nul si  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$  ; il existe dans ce cas des ondes évanescentes. Celles-ci ne se propagent pas à grande distance et les négliger revient à supposer  $H_z(\alpha, \beta) = 0$  pour les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  correspondantes.

**Remarque 2.3.2.** On utilise parfois les fréquences spatiales comme variables plutôt que les fréquences angulaires, et on parle de  $H_z(\mathbf{F})$  comme de la fonction de transfert (ce qui correspond d'ailleurs davantage à l'usage habituel de ce terme). En toute rigueur il faudrait adopter également une autre notation pour cette fonction, puisque les variables ont changé.

**Remarque 2.3.3 (Respect du principe de Huygens–Fresnel).** Pour tout  $(\alpha, \beta)$  et quels que soient  $z_1$  et  $z_2$ , il résulte de la relation (2.35) que la fonction  $H_z$  satisfait la relation<sup>18</sup>

$$H_{z_1}(\alpha, \beta) H_{z_2}(\alpha, \beta) = H_{z_1+z_2}(\alpha, \beta), \quad (2.38)$$

qui traduit le principe de Huygens–Fresnel : le phénomène de diffraction du plan d'équation  $z = 0$  au plan d'équation  $z = z_1 + z_2$  est la composition de la diffraction du plan  $z = 0$  au plan  $z = z_1$  (sur une distance  $z_1$ ) avec la diffraction du plan  $z = z_1$  au plan  $z = z_1 + z_2$  (sur une distance  $z_2$ ).

<sup>18</sup> Cela reste vrai dans le cas évanescent, comme conséquence de la relation (2.36).

**Remarque 2.3.4.** L'abscisse  $z$  de  $H_z$  peut être négative, de telle sorte qu'on a un phénomène de diffraction virtuel. Cela est conforme au principe de Huygens-Fresnel tel qu'il est exprimé dans la remarque 2.3.3 (considérer pour cela  $z_2 < 0$  et  $z_1 + z_2 > 0$ ). Ainsi  $z$  n'est pas une distance mais une mesure algébrique (voir p. xxix).

**Remarque 2.3.5 (Diffraction et convolution).** Le chemin suivi pour passer du champ  $U_0$ , dans le plan  $z = 0$ , au champ dans le plan d'abscisse  $z$  est le chemin  $U_0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_z \rightarrow U_z$  du schéma suivant, où «  $\cdot H_z$  » représente la multiplication par  $H_z$  et  $TF$  la transformation de Fourier (avec changement de variable) :

$$\begin{array}{ccc}
 U_0 & \xrightarrow{*h_z} & U_z \\
 TF \downarrow & & \uparrow TF^{-1} \\
 V_0 & \xrightarrow{\cdot H_z} & V_z
 \end{array} \quad (2.39)$$

L'approche est fréquentielle en ce sens que le passage du plan  $z = 0$  au plan d'abscisse  $z$  est décrit par son effet sur le spectre angulaire et s'exprime à l'aide des fréquences spatiales (ou angulaires).

Comme  $V_z$  se déduit de  $V_0$  par une multiplication par  $H_z$ , on s'attend à ce que le transfert direct de  $U_0$  à  $U_z$ , exprimé en variables d'espace, se traduise par une convolution ; c'est ce qu'indique sur le schéma (2.39) le symbole  $*h_z$ , la fonction  $h_z$  étant l'antécédent de Fourier de  $H_z$ . Ce point de vue est repris au chapitre 3 (paragraphe 3.6) et généralisé, sous certaines conditions, aux émetteurs et récepteurs sphériques.

### 2.3.2 Dispersion par diffraction–propagation

La décomposition d'une onde quelconque sur une famille d'ondes planes conduit à considérer cette onde comme un paquet d'ondes spatial. À une certaine distance on obtient l'onde diffractée en recomposant les mêmes ondes planes. Toutefois, comme le montre la relation (2.35), l'effet de la propagation sur une onde plane est un déphasage qui dépend de l'onde plane, de sa direction et de la distance sur laquelle on considère sa propagation. Il en résulte une modification de la recomposition par rapport à la composition initiale, et c'est en cela que se manifeste le phénomène de diffraction–propagation.

Si on reporte les relations  $\alpha = \lambda F_x$  et  $\beta = \lambda F_y$  dans la relation (2.35), on constate que la propagation sur une distance  $z$  se traduit, pour l'onde plane de cosinus directeurs  $(\alpha, \beta)$ , par un déphasage qui dépend du module de la fréquence spatiale. Pour un paquet d'ondes auquel est associé un ensemble de fréquences spatiales, il en résulte une dispersion spatiale. Le phénomène est tout à fait comparable à ce qui se passe pour les paquets d'ondes temporels dans un milieu dispersif (pour lequel l'indice de réfraction dépend de la fréquence temporelle et induit, par propagation, un déphasage propre à chaque fréquence).

**Remarque 2.3.6 (Définition de la diffraction).** Nous pouvons préciser maintenant ce qu'est la diffraction et la distinguer de la seule propagation. Nous dirons qu'il y a diffraction s'il y a modification du spectre angulaire d'une onde par un obstacle ou bien au cours de la propagation. On exclut le changement de direction de propagation par réfraction ou réflexion<sup>19</sup>.

### 2.3.3 Diffraction par un écran plan

Soit  $U_i(x, y)$  l'amplitude du champ d'une onde incidente sur un écran placé dans le plan  $z = 0$ . Il y a une ouverture  $\Sigma$  dans l'écran, caractérisée par la fonction de transmission  $t$ , qui vaut 1 dans l'ouverture et 0 en dehors. L'amplitude du champ émergeant de l'écran est (en  $z = 0$ )

$$U(x, y) = U_i(x, y) t(x, y), \quad (2.40)$$

et son spectre angulaire est le produit de convolution  $V_0 = V_i * \widehat{t}$ , où  $V_i$  est le spectre angulaire de l'onde incidente.

Ce qui précède reste valable pour des fonctions plus générales : la fonction  $t$  peut être n'importe quelle application de  $\Sigma$  dans  $[0, 1]$ , ou même une fonction à valeurs complexes (cas des objets de phase), ou encore une distribution.

**Exemple 2.3.1 (Ouverture rectangulaire).** Soit une onde plane qui éclaire, à l'incidence normale, une ouverture rectangulaire de côtés  $L$  et  $H$ , percée dans un écran plan (fig. 2.8).

Nous désignons par  $\text{rect}_\ell(x)$  la fonction qui vaut 1 si  $|x| \leq \ell/2$ , et 0 sinon<sup>20</sup>. L'amplitude du champ immédiatement après l'écran est

$$U(x, y) = U_0 \text{rect}_L(x) \text{rect}_H(y), \quad (2.41)$$

où  $U_0$  est un facteur dimensionnel.

Le spectre angulaire de  $U$  est<sup>21</sup>

$$V_0(\alpha, \beta) = \frac{U_0 L H}{\lambda^2} \frac{\sin \frac{\pi L \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi L \alpha}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi H \beta}{\lambda}}{\frac{\pi H \beta}{\lambda}}. \quad (2.42)$$

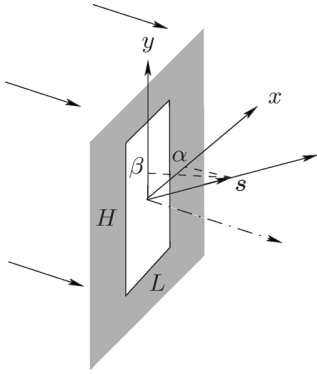
L'onde diffractée est composée d'ondes planes. Pour  $\alpha = 0 = \beta$ , on a l'onde plane qui se propage suivant  $z$ , et c'est cette onde qui a l'amplitude la plus grande. Il n'y a pas d'ondes dans les directions  $\alpha = \lambda/L$  (quel que soit  $\beta$ ), ni dans les directions qui satisfont  $\beta = \lambda/H$ .

Le spectre angulaire étant un ensemble de directions de propagation, on « l'observe » en principe à l'infini. En pratique, un objectif convergent ramène

<sup>19</sup> Encore qu'il soit concevable de voir une réfraction ou une réflexion spéculaire comme l'ordre 0 d'un phénomène de diffraction !

<sup>20</sup> Nous écrivons aussi  $\text{rect}(x/\ell) = \text{rect}_\ell(x)$ .

<sup>21</sup> Il y a une simplification possible par  $LH/\lambda^2$  dans l'expression de  $V_0$ . Nous ne la faisons pas, pour faire apparaître explicitement des fonctions  $\sin x/x$ .



**FIG. 2.8.** Diffraction par une ouverture rectangulaire. À chaque fréquence spatiale  $(F_x, F_y)$  de l'ouverture correspond une onde plane qui se propage dans la direction du vecteur  $\mathbf{s}$ , unitaire, de cosinus directeurs  $\alpha = \lambda F_x$  et  $\beta = \lambda F_y$ .

le spectre angulaire à distance finie, dans son plan focal image : chaque direction de propagation est focalisée en un point de ce plan. Nous reviendrons sur cette question au chapitre 5 (la figure 5.9 p. 109 montre la figure de diffraction d'une ouverture rectangulaire ; elle donne le module au carré du spectre angulaire de l'onde diffractée, si on y remplace  $\xi$  par  $\alpha$  et  $\eta$  par  $\beta$ ).

Si l'onde incidente arrive sur l'écran de telle sorte que la normale à l'onde fasse l'angle  $\theta_0$  avec  $x$  et soit perpendiculaire à l'axe  $y$ , l'amplitude du champ incident dans le plan  $x, y$  est de la forme<sup>22</sup>

$$U_i(x, y) = U_0 \exp \left[ -\frac{2i\pi x \theta_0}{\lambda} \right]. \quad (2.43)$$

Le spectre angulaire de l'onde diffractée s'obtient à partir du spectre angulaire de la relation (2.42) par convolution avec  $\delta(\alpha - \theta_0)$  ; il s'écrit

$$V_0(\alpha, \beta) = \frac{U_0 L H}{\lambda^2} \frac{\sin \frac{\pi L(\alpha - \theta_0)}{\lambda}}{\frac{\pi L(\alpha - \theta_0)}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi H \beta}{\lambda}}{\frac{\pi H \beta}{\lambda}}. \quad (2.44)$$

Il y a « translation » du spectre de  $\theta_0$  (pour la variable  $\alpha$ ). Comme le spectre angulaire se rapporte à des angles, une translation angulaire est, de fait, une rotation dans l'espace. Autrement dit, une rotation de l'onde incidente se traduit par la même rotation du spectre angulaire (cela est seulement vrai pour de petits angles).

## 2.4 Exercices

**Exercice 2.1 (Lois de Descartes<sup>23</sup>).** Établir les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction d'un dioptré plan à partir de la notion de fréquence

<sup>22</sup> Si  $\theta_0$  est petit. Une expression plus précise est  $U_0 \exp[-2i\pi x \sin \theta_0 / \lambda]$ . Il convient de remplacer  $\theta_0$  par  $\sin \theta_0$  dans la relation (2.44).

<sup>23</sup> En anglais, prononcer *Snell*.

spatiale et de celle de spectre angulaire. (Indication : comparer, sur le dioptre, les traces des ondes incidente, réfléchie et transmise.)

**Exercice 2.2.** On éclaire, sous incidence normale, une transparence plane avec une onde plane monochromatique d'amplitude  $U_0$ . La fonction de transmission de la transparence est  $t(x, y) = (1 + \cos 2\pi F_0 x)/2$ .

Quel est le spectre angulaire de l'onde qui émerge de la transparence ?

**Exercice 2.3 (Transparence sinusoïdale).** La fonction de transmission d'une transparence  $\mathcal{T}_1$  s'écrit  $t_1(x, y) = |\cos 2\pi F_0 x|$ , où  $F_0$  est une constante. Soit une lame de verre dont l'épaisseur est donnée par

$$e(x) = e_0, \quad \text{si } x \in \left[ \frac{4q-1}{4F_0}, \frac{4q+1}{4F_0} \right], \quad q \in \mathbb{Z},$$

$$e(x) = e_0 + e_1, \quad \text{si } x \in \left[ \frac{4q+1}{4F_0}, \frac{4q+3}{4F_0} \right], \quad q \in \mathbb{Z}.$$

où  $e_0$  et  $e_1$  sont des constantes. Cette lame de verre constitue une transparence  $\mathcal{T}_2$  de fonction de transmission  $t_2$ , en créneaux.

On superpose les deux transparences de façon à constituer une transparence  $\mathcal{T}$  dont la fonction de transmission est  $t = t_1 t_2$ . On éclaire l'ensemble par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , d'amplitude  $U_0$ .

1. Quelle doit être la valeur de  $e_1$  pour que le déphasage entre deux créneaux voisins de  $\mathcal{T}_2$  soit égal à  $\pi$  ?
2. Donner l'expression de  $t(x, y)$  quand  $e_1$  remplit la condition précédente.
3. Quel est le spectre angulaire de l'onde qui émerge de la transparence  $\mathcal{T}$  ?

**Exercice 2.4 (Spectre angulaire d'une onde sphérique).** Soit  $g$  une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ , et soient  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires correspondantes. La fonction  $g$  est une fonction radiale (elle a la symétrie de révolution) si elle dépend seulement de  $r$  (et non de  $\theta$ ). Nous écrivons indifféremment  $g(r)$  ou  $g(x, y)$ . La transformée de Fourier  $\widehat{g}$  de  $g$  a également la symétrie de révolution. Avec des coordonnées polaires  $(F, \psi)$  dans le plan de Fourier, nous écrivons  $G(F)$  la transformée de Fourier de  $g$ .

La transformée de Fourier d'une fonction de deux variables à symétrie de révolution s'identifie à sa transformée de Hankel (ou de Fourier-Bessel, voir l'appendice B) ainsi définie pour la fonction  $g$

$$\widehat{g}(\mathbf{F}) = G(F) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi F r) r \, dr,$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0. Nous utiliserons parfois la notation  $G = \text{T.H.}[g]$ .

La transformation de Hankel est sa propre transformation inverse : si  $G$  est la transformée de Hankel de  $g$ , alors

$$g(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} G(F) J_0(2\pi r F) F \, dF.$$

1. Donner l'expression du laplacien (noté  $\Delta$ ) d'une fonction radiale, en coordonnées polaires (dimension 2). Montrer :  $\text{T.H.}[\Delta g(r)](F) = -4\pi^2 F^2 G(F)$ .
2. Soient  $S$  et  $T$  les transformées de Hankel des fonctions  $s$  et  $t$ . Montrer que

$$\int_0^{+\infty} r s(r) \overline{t(r)} dr = \int_0^{+\infty} F S(F) \overline{T(F)} dF.$$

Soit  $K(F)$  la transformée de Hankel de  $1/r$ . Montrer qu'elle vérifie

$$\int_0^{+\infty} (F K(F) - 1) \exp[-\pi F^2] dF = 0.$$

3. Soient  $h$  et  $g$  deux fonctions telles que

$$h(r) = e^{-ikr}, \quad g(r) = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

où  $k$  est un nombre réel positif (on fera  $k = 2\pi/\lambda$  quand il faudra appliquer le résultat à une onde sphérique de longueur d'onde  $\lambda$ ). On désigne par  $H$  et  $G$  les transformées de Hankel de  $h$  et  $g$ . Montrer que

$$\frac{\partial G(F)}{\partial k} = -iH(F).$$

En utilisant la question 1, établir une équation différentielle que doit satisfaire  $G$ . En déduire  $G$ .

4. On considère une onde sphérique se propageant vers les  $z$  positifs et convergeant au point de coordonnées  $(0, 0, a)$ . Quel est le spectre angulaire de l'amplitude du champ dans le plan d'équation  $z = 0$  ?
5. Quel est le spectre angulaire de la même onde dans le plan  $z = 2a$  ?
6. En comparant les champs dans les plans  $z = 0$  et  $z = 2a$ , montrer que le passage par le foyer (c'est-à-dire le point de convergence) se traduit par un déphasage de  $\pi$ .

**Exercice 2.5 (Spectre angulaire et faisceau gaussien).** Soit une onde se propageant suivant l'axe  $z$  et dont l'amplitude du champ dans le plan  $x, y$  (d'équation  $z = 0$ ) s'écrit

$$U(x, y) = U_0 \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right],$$

où  $w_0$  et  $U_0$  sont des constantes dimensionnelles.

1. Calculer le spectre angulaire de l'onde dans le plan  $z = 0$ .
2. Calculer le spectre angulaire dans le plan  $z = a$ .
3. Faire une approximation à l'ordre 2 du spectre angulaire précédent et en déduire l'expression de l'amplitude du champ dans le plan  $z = a$ .

# Chapitre 3

## Diffraction métaxiale

Nous nous proposons d'exprimer le transfert du champ par diffraction à l'aide des variables d'espace. Les calculs qui suivent sont des calculs approchés, limités au deuxième ordre par rapport aux variables d'ouverture des systèmes et des dimensions transversales des émetteurs et des récepteurs ; cela constitue l'approximation métaxiale. Une des originalités de la théorie métaxiale, développée par G. Bonnet [19–24], réside dans l'emploi d'émetteurs et de récepteurs sphériques (et pas seulement plans) dont la nécessité devrait apparaître logique par la suite. La transformation de Fourier tient encore un rôle central dans ce chapitre.

### 3.1 Émetteurs et récepteurs dans l'approximation métaxiale

#### 3.1.1 Coordonnées sur un émetteur ou un récepteur sphériques

Pour des raisons qui apparaîtront peu à peu, nous considérons des émetteurs et des récepteurs sphériques. De fait, il s'agit de calottes sphériques ayant la symétrie de révolution autour d'un axe<sup>1</sup>. Ces émetteurs ou récepteurs peuvent être de véritables émetteurs ou récepteurs, en ce sens qu'ils émettent ou détectent la lumière, mais il est avantageux de les considérer plus généralement comme des émetteurs ou récepteurs aériens, pas nécessairement matérialisés, réels ou virtuels, comme il est habituel en optique. Ce sont des surfaces sur lesquelles on définit l'amplitude du champ. Ainsi une même surface sphérique peut être à la fois émettrice ou réceptrice selon le point de vue adopté.

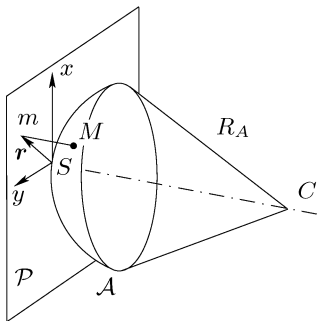
Une calotte sphérique  $\mathcal{A}$  a un centre de courbure, disons  $C$ , et un sommet ou pôle  $S$  (fig. 3.1). Le rayon de courbure de la sphère est la grandeur « algébrique » définie par

$$R_A = \overline{SC}. \quad (3.1)$$

Le signe du rayon de courbure indique de quel côté est tournée la concavité de la calotte sphérique.

---

<sup>1</sup> Il est possible d'étendre la théorie à des portions de tores [184].



**FIG. 3.1.** Coordonnées cartésiennes sur une calotte sphérique  $\mathcal{A}$ . Les coordonnées du point  $M$  sont celles de sa projection  $m$  sur le plan  $\mathcal{P}$ , tangent à  $\mathcal{A}$  en son sommet.

Nous adoptons par ailleurs la convention selon laquelle une mesure algébrique est positive si elle est orientée suivant le sens de propagation de la lumière (voir p. xxix). Cela ne pose pas de problème tant que nous n'avons pas de miroir sur le trajet de la lumière. (Nous traitons de miroirs au chapitre 7.)

Comment repérer un point sur une calotte sphérique? Soit  $\mathcal{A}$  une calotte sphérique de sommet  $S$  et soit  $\mathcal{P}$  le plan tangent à  $\mathcal{A}$  en  $S$  (fig. 3.1). Choisissons des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{P}$ . Soit  $M$  un point de  $\mathcal{A}$  dont la projection orthogonale sur  $\mathcal{P}$  est  $m$ . Nous désignons par  $\mathbf{r}$  le vecteur  $\overrightarrow{Sm}$ . Les coordonnées  $(x_m, y_m)$  de  $m$  dans le plan  $\mathcal{P}$  définissent sans ambiguïté le point  $M$  sur  $\mathcal{A}$  (si  $\mathcal{A}$  est moins qu'une demi-sphère). Ainsi les coordonnées de  $m$  dans le plan  $\mathcal{P}$  servent aussi de coordonnées pour le point  $M$ .

Pour les amplitudes des champs, nous adoptons la notation suivante

$$U(M) = U_A(x_m, y_m) = U_A(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

pour le champ en  $M$ , et

$$U(m) = U_P(x_m, y_m) = U_P(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

pour le champ en  $m$ . Les points  $M$  et  $m$  ont les mêmes coordonnées; cependant les amplitudes des champs en  $M$  et  $m$  ne doivent pas être confondues: l'amplitude du champ en  $M$  est l'amplitude au point de coordonnées  $(x_m, y_m)$ , mais sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}$  (indiqué par l'indice  $A$ ); l'amplitude du champ en  $m$  est l'amplitude au point de coordonnées  $(x_m, y_m)$ , mais dans le plan tangent (d'où l'indice  $P$ ).

Par la suite nous n'écrivons plus l'indice  $m$  et notons  $\mathbf{r} = (x, y)$ . La norme de ce vecteur est  $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , et nous notons  $d\mathbf{r} = dx dy$ .

### 3.1.2 Approximation métaxiale

L'approximation métaxiale est une approximation développée au deuxième ordre<sup>2</sup> par rapport aux paramètres d'ouverture (dimensions transversales et

<sup>2</sup> D'où le terme de « métaxial » inventé par G. Bonnet pour exprimer que sa théorie est développée « au-delà » du premier ordre, caractéristique des calculs de l'optique géométrique « paraxiale » (optique de Gauss).

angles). La nécessité d'aller au deuxième ordre est cohérente avec l'emploi d'émetteurs et de récepteurs sphériques. Plus précisément, l'approximation métaxiale consiste à admettre les conditions suivantes :

- les émetteurs et les récepteurs sont approchés par des calottes sphériques. Un plan est une sphère de rayon de courbure infini : les émetteurs ou récepteurs plans sont des cas particuliers d'émetteurs ou récepteurs sphériques et sont considérés à ce titre dans la théorie exposée ;
- les ouvertures sont modérées. Cela signifie que les dimensions transversales des émetteurs et des récepteurs sont petites devant les distances d'observation et les rayons de courbure. Par exemple, pour un point  $\mathbf{r}$  d'un émetteur  $\mathcal{A}$  de rayon de courbure  $R_A$ , on suppose

$$||\mathbf{r}|| \ll |R_A| ; \quad (3.4)$$

- les angles des « rayons lumineux » avec l'axe d'un émetteur ou d'un récepteur sont modérés. Par exemple, l'approximation de la fonction cosinus à l'ordre 2 ( $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ) est précise à 1,7 % près pour  $\theta = 20^\circ$  ;
- les calculs (approchés) sont développés au deuxième ordre par rapport aux paramètres d'ouverture et aux angles, conformément aux points précédents.

**Hypothèses sur les milieux de propagation.** Comme mentionné au chapitre 1, les milieux de propagation sont isotropes, homogènes et linéaires. Par la suite (deuxième partie) il sera nécessaire de supposer les systèmes optiques et les milieux de propagation stationnaires dans le temps (au moins à l'échelle de la vitesse de propagation des signaux).

**Remarque 3.1.1.** Il résulte des approximations précédentes que, quelle que soit sa forme, un émetteur (ou un récepteur) est approché par sa sphère osculatrice en son sommet. Cette sphère est tangente à l'émetteur en son sommet et son rayon de courbure est celui de l'émetteur en ce même point<sup>3</sup>. De fait, les approximations que nous ferons sont de type parabolique, et il serait sans doute plus rigoureux d'utiliser des émetteurs et des récepteurs paraboloidaux. Mais les sphères sont plus maniables ! D'autre part, les dioptries qu'on rencontre en optique sont sphériques en général<sup>4</sup>. Et surtout, les ondes de référence, qui servent à évaluer les aberrations, l'écart au stigmatisme, sont des ondes sphériques. Pour uniformiser la représentation des surfaces, il nous semble plus pratique de travailler avec des sphères, et cela est équivalent à travailler avec des paraboloides, dans la limite du deuxième ordre.

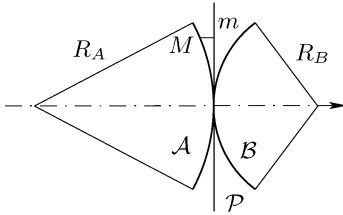
<sup>3</sup> La sphère osculatrice ne dépend que de la courbure de l'émetteur en son sommet. Pour un émetteur d'extension transversale limitée, il peut exister une sphère plus proche de lui, sur l'ensemble de son ouverture, que sa sphère osculatrice ; c'est le cas pour un paraboloïde. (La notion de proximité de deux surfaces se définit par exemple à l'aide une distance quadratique moyenne.)

<sup>4</sup> Il est vrai que les dioptries et miroirs asphériques sont de plus en plus fréquemment utilisés en optique instrumentale.

## 3.2 Diffraction de Fraunhofer

### 3.2.1 Transparence de courbure

Soient deux calottes sphériques  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  tangentes en leur sommet (fig. 3.2). Les rayons de courbure de ces calottes sont respectivement  $R_A$  et  $R_B$ . Les coordonnées sont les mêmes sur  $\mathcal{A}$  et sur  $\mathcal{B}$  puisque ces deux sphères ont un plan tangent commun  $\mathcal{P}$ .



**FIG. 3.2.** Si les calottes sphériques  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont tangentes, on passe du champ sur  $\mathcal{A}$  au champ sur  $\mathcal{B}$  par une transparence de courbure.

La situation étudiée ici se rencontre par exemple quand  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux calottes sphériques aériennes, éclairées par une même onde, et il s'agit d'établir une relation entre l'amplitude du champ engendré par l'onde sur  $\mathcal{A}$  et celle du champ engendré sur  $\mathcal{B}$ .

Cherchons la relation entre l'amplitude du champ au point  $M$  de  $\mathcal{A}$  et celle du champ au point  $m$ , la projection de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  (coordonnées  $(x, y) = \mathbf{r}$ ). Au deuxième ordre <sup>5</sup>

$$\overline{Mm} = -\frac{r^2}{2R_A}, \quad (3.5)$$

où  $r^2 = x^2 + y^2$ . La différence de chemin  $\overline{Mm}$  correspond à une différence de phase  $\varphi$  telle que <sup>6</sup>

$$\varphi = \frac{2\pi\overline{Mm}}{\lambda} = -\frac{\pi r^2}{\lambda R_A}, \quad (3.6)$$

si bien que <sup>7</sup>

$$U_P(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{i\pi r^2}{\lambda R_A} \right]. \quad (3.7)$$

La même relation vaut entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{P}$  si on remplace  $R_A$  par  $R_B$ . Il en résulte

<sup>5</sup> Le premier terme négligé est d'ordre 4 en  $r$ .

<sup>6</sup> Si  $n$  est l'indice de réfraction du milieu de propagation, la différence de chemin optique est  $\delta = n \overline{Mm}$ ; la différence de phase est  $\varphi = 2\pi\delta/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide) et cette relation conduit à la relation (3.6), compte tenu de  $\lambda_0 = n\lambda$ .

<sup>7</sup> Le terme de phase est  $\exp[-i\varphi]$ . Le signe dans l'exponentielle est liée au choix de la dépendance temporelle, de la forme  $\exp[2i\pi\nu t]$ , adoptée au chapitre 1.

$$U_B(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right]. \quad (3.8)$$

On dit que le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$ , exprimé par la relation (3.8), s'effectue par transparence de courbure. « Transparence », parce que les amplitudes des champs sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  se différencient seulement par un terme de phase quadratique qui disparaît si on considère l'éclairement (proportionnel au carré du module de l'amplitude du champ) : il n'y a aucune atténuation de l'onde entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Et « de courbure », parce que la transparence traduit une adaptation des courbures.

**Remarque 3.2.1.** Les rayons de courbure étant algébriques, la relation (3.8) reste vraie dans toutes les situations imaginables. Si on l'inverse, on trouve

$$U_A(\mathbf{r}) = U_B(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) r^2 \right], \quad (3.9)$$

et il faut comprendre que cette expression est encore la relation (3.8), les amplitudes  $U_A$  et  $U_B$ , les rayons  $R_A$  et  $R_B$ , étant en quelque sorte « muets ».

**Remarque 3.2.2.** Une transparence de courbure n'a aucun effet sur une onde. Elle traduit seulement la relation qui existe entre l'amplitude du champ sur deux sphères tangentes. Considérons ainsi une onde qui engendre sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}$  un champ d'amplitude  $U_A$ . Cette même onde engendre sur  $\mathcal{B}$ , tangente à  $\mathcal{A}$ , un champ d'amplitude  $U_B$ . Eh bien ! les amplitudes  $U_A$  et  $U_B$  sont liées par une transparence de courbure. En particulier, il ne faut pas confondre une transparence de courbure avec une lentille mince qui transforme une onde sphérique en une autre, et qui opère également par l'intermédiaire d'un terme de phase quadratique (voir le paragraphe 4.5.6 et la remarque 4.5.3 p. 95).

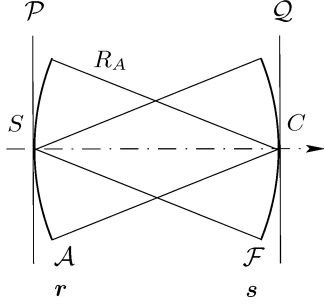
### 3.2.2 Diffraction de Fraunhofer et transformation de Fourier

Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur de rayon de courbure  $R_A$ , de sommet  $S$  et centre  $C$  (fig. 3.3). Supposons connaître l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  et cherchons l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{F}$  qui admet  $C$  comme sommet et  $S$  comme centre (on dit que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$  sont des calottes sphériques confocales<sup>8</sup>). Les variables spatiales sont  $\mathbf{r}$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{s}$  sur  $\mathcal{F}$ .

L'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{P}$ , tangent à  $\mathcal{A}$  en  $S$ , est liée à celle du champ sur  $\mathcal{A}$  par une transparence de courbure. Le rayon de courbure du plan  $\mathcal{P}$  étant infini, pour  $R_B = R_P = \infty$ , la relation (3.8) donne<sup>9</sup>

<sup>8</sup> La raison en est que si on imagine ces calottes sphériques réfléchissantes, elles constituent alors deux miroirs sphériques partageant leur foyer. On sait en effet que le foyer d'un miroir sphérique est à mi-distance du sommet et du centre. Il existe d'autres configurations confocales pour des miroirs sphériques (voir par exemple l'exercice 7.2 p. 215). La configuration considérée ici est symétrique.

<sup>9</sup> La relation (3.10) n'est autre que la relation (3.7). Nous la déduisons de la relation (3.8) pour illustrer l'emploi de la notion de transparence de courbure.



**FIG. 3.3.** Éléments pour le calcul du transfert de l'amplitude du champ de l'émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  au récepteur  $\mathcal{F}$  (sphères confocales symétriques).

$$U_P(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{i\pi r^2}{\lambda R_A} \right]. \quad (3.10)$$

De même, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}$  s'exprime en fonction de l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{Q}$  tangent à  $\mathcal{F}$  en son sommet  $C$  par la relation

$$U_F(\mathbf{s}) = U_Q(\mathbf{s}) \exp \left[ \frac{i\pi s^2}{\lambda R_A} \right], \quad (3.11)$$

puisque le rayon de courbure de  $\mathcal{F}$  est  $R_F = -R_A$ .

Pour exprimer la propagation du spectre angulaire du plan  $\mathcal{P}$  au plan  $\mathcal{Q}$  (fig. 3.3), la fonction de transfert à prendre en compte est celle qui correspond à la distance de propagation  $z = R_A$ ; avec la fréquence spatiale comme variable, elle prend la forme (voir la relation (2.35) p. 35)

$$H_{R_A}(\mathbf{F}) = \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} R_A \sqrt{1 - \lambda^2 F^2} \right], \quad (3.12)$$

et la relation (2.37) s'écrit

$$\hat{U}_Q(\mathbf{F}) = \hat{U}_P(\mathbf{F}) H_{R_A}(\mathbf{F}), \quad (3.13)$$

où  $\hat{U}_Q$  et  $\hat{U}_P$  sont les transformées de Fourier respectives de  $U_Q$  et  $U_P$ .

L'approximation du deuxième ordre de  $H_{R_A}(\mathbf{F})$  est

$$H_{R_A}(\mathbf{F}) = \exp \left[ -\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \exp [i\pi \lambda R_A F^2], \quad (3.14)$$

si bien que, dans les limites de l'approximation métaxiale, les transformées de Fourier des amplitudes des champs sur  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  vérifient

$$\hat{U}_Q(\mathbf{F}) = \hat{U}_P(\mathbf{F}) \exp \left[ -\frac{2i\pi R_A}{\lambda} \right] \exp [i\pi \lambda R_A F^2]. \quad (3.15)$$

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{Q}$  se déduit de la relation (3.15) par transformation de Fourier inverse; elle s'exprime à l'aide d'un produit de convolution. Pour écrire correctement ce dernier, introduisons la fonction  $f_a$ , où  $a$  est un nombre réel, définie par

$$f_a(\mathbf{F}) = \exp[-i\pi a F^2], \quad (3.16)$$

et telle que (voir le tableau B.3 p. 485)

$$f_{-1/a}(\mathbf{r}) \rightleftharpoons i a f_a(\mathbf{F}), \quad (3.17)$$

où  $\rightleftharpoons$  indique que les deux fonctions forment une paire de Fourier (celle de droite est la transformée de Fourier de celle de gauche).

La relation (3.15) conduit à

$$U_Q(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp\left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda}\right] U_P * f_{1/\lambda R_A}(\mathbf{s}), \quad (3.18)$$

soit plus explicitement

$$U_Q(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp\left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda}\right] \int_{\mathbb{R}^2} U_P(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_A} \|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2\right] d\mathbf{r}. \quad (3.19)$$

Les relations (3.10) et (3.11) permettent d'écrire, après développement du terme  $\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2$  qui apparaît dans la relation (3.19),

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp\left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda}\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{\lambda R_A}\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.20)$$

soit encore

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \exp\left[-\frac{2i\pi R_A}{\lambda}\right] \widehat{U}_A\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A}\right). \quad (3.21)$$

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}$  se déduit de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  essentiellement par une transformation de Fourier (et changement de variable).

**Définition 3.2.1 (Sphère de Fourier).** *La sphère  $\mathcal{F}$  s'appelle la sphère de Fourier de la sphère  $\mathcal{A}$ . (Le sommet de l'une est le centre de l'autre.)*

Examinons le terme  $T = \exp[-2i\pi R_A/\lambda]$  qui figure dans les relations (3.20) et (3.21). Soit  $v$  la vitesse de phase de l'onde lumineuse dans le milieu de propagation. Si  $\nu$  est la fréquence de l'onde, le terme  $T$  s'écrit

$$T = \exp\left[-\frac{2i\pi R_A \nu}{v}\right] = \exp[-2i\pi \nu \tau], \quad (3.22)$$

où  $\tau$  est le temps de propagation de l'onde de l'émetteur  $\mathcal{A}$  jusqu'à sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  (pôle à pôle). Comme l'onde considérée est monochromatique, le terme  $T$  est une constante ; il traduit le retard de la vibration en  $C$  par rapport à celle en  $S$  (ce retard est le même pour tous les points de  $\mathcal{F}$  par rapport à tous les points de  $\mathcal{A}$ ). Pour alléger, nous n'écrirons plus le terme<sup>10</sup>  $T$ . Il faudra cependant nous en souvenir et le réintroduire quand nous traiterons des ondes polychromatiques puisque  $T$  dépend de la fréquence (voir le chapitre 9). Ne pas écrire  $T$  revient à adopter la convention suivante.

<sup>10</sup> Le terme  $T$  n'a pas d'influence sur l'éclairement de la figure de diffraction, puisqu'il est de module unité. Ainsi certains résultats seront corrects sans qu'il soit nécessaire de tenir compte de  $T$ .

**Règle 1 (Origine du temps).** Si  $D$  est la distance séparant le pôle (sommet) d'un émetteur au pôle d'un récepteur et  $v$  la vitesse de phase des ondes dans le milieu de propagation, l'origine du temps sur le récepteur est choisie translatée de  $D/v$  par rapport à l'origine du temps sur l'émetteur.

La distance  $D$  (mesure algébrique) qui sépare le sommet de l'émetteur du sommet du récepteur est la distance de diffraction. Dans ce qui précède cette distance est  $D = R_A$ . Compte tenu de la règle 1, nous écrivons désormais la relation (3.20) sous la forme

$$\begin{aligned} U_F(\mathbf{s}) &= \frac{i}{\lambda R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{\lambda R_A} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{\lambda D} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

et la relation (3.21)

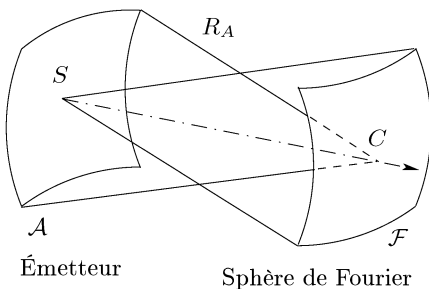
$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \hat{U}_A \left( \frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A} \right) = \frac{i}{\lambda D} \hat{U}_A \left( \frac{\mathbf{s}}{\lambda D} \right). \quad (3.24)$$

Nous dirons que  $U_F$  est la transformée de Fourier « optique » de  $U_A$ . On passe de  $U_A$  à  $U_F$  en effectuant les trois opérations suivantes :

- 1° Transformation de Fourier (au sens mathématique) : elle fournit  $\hat{U}_A(\mathbf{F})$  ;
- 2° Changement de variable : changement de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{s}/\lambda D$  ;
- 3° Multiplication par  $i/\lambda D$ .

Nous énonçons :

**Théorème 1 (Diffraction de Fraunhofer).** Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur sphérique monochromatique (longueur d'onde  $\lambda$ ), de sommet  $S$  et centre  $C$  (son rayon de courbure est  $R_A = \overline{SC}$ ), et soit  $\mathcal{F}$  sa sphère de Fourier, c'est-à-dire la calotte sphérique centrée en  $S$  et de sommet  $C$ . Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  s'obtient par une transformation de Fourier optique. Plus précisément, avec des variables  $\mathbf{r}$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{s}$  sur  $\mathcal{F}$ , le transfert de l'amplitude du champ s'exprime – à un terme de phase constant près – par les relations (3.23) ou (3.24).



**FIG. 3.4.** Diffraction de Fraunhofer, transformation de Fourier optique. On passe de l'amplitude du champ sur l'émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  à celle du champ sur  $\mathcal{F}$  essentiellement par une transformation de Fourier ; pour cette raison  $\mathcal{F}$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ . (Schéma emprunté à G. Bonnet.)

La figure 3.4 illustre le théorème 1. La situation représentée est celle d'un phénomène de diffraction de Fraunhofer [157]. Historiquement, un tel phénomène a été observé près du centre de courbure d'une onde sphérique<sup>11</sup>. Le résultat établi ici est valable près du centre de courbure d'un émetteur sphérique.

**Remarque 3.2.3 (Atténuation de l'onde).** Le facteur  $1/R_A$  (ou  $1/D$ ) qui intervient devant l'intégrale des relations (3.24) ou (3.23) est un facteur d'atténuation de l'onde. On sait en effet que le champ électromagnétique s'atténue de façon inversement proportionnelle à la distance de propagation.

**Remarque 3.2.4 (Quadrature).** Suivant la règle 1, un terme de phase est omis dans les relations (3.24) ou (3.23) dans lesquelles on a toutefois laissé le terme  $i$ . Ce terme indique que la lumière diffractée est en quadrature par rapport à la lumière directe, un fait expérimental connu, mis à profit dans la technique du contraste de phase [82, 85] (voir l'exercice 16.2 p. 461); son maintien dans l'expression de l'amplitude diffractée est ainsi justifié.

**Remarque 3.2.5 (Diffraction à l'infini).** Quand  $\mathcal{A}$  est un plan, la sphère  $\mathcal{F}$  tend vers l'infini et le phénomène de diffraction de Fraunhofer devient un phénomène de diffraction à l'infini.

**Remarque 3.2.6 (Ordre de l'approximation).** De fait, dans le calcul approché qui conduit à la relation (3.21) puis aux relations (3.24) ou (3.23), le premier terme négligé est d'ordre 4 par rapport aux paramètres d'ouverture, de telle sorte que le théorème 1 est valable au troisième ordre.

**Remarque 3.2.7 (Les limites de l'analyse harmonique dans la description de la diffraction).** On peut être surpris, par exemple dans la relation (3.23), par le domaine d'intégration,  $\mathbb{R}^2$ , qui d'une certaine façon est trop vaste et déborde le domaine de validité de l'approximation métaxiale. L'émetteur  $\mathcal{A}$  est fini, ce qui signifie que  $U_A(\mathbf{r})$  est nul dès que  $r$  dépasse une certaine valeur. Il n'y a pas d'inconvénient à intégrer sur  $\mathbb{R}^2$ . Cela pose cependant le problème de la pertinence physique de l'analyse de Fourier appliquée aux signaux réels, puisque si  $U_A$  est à support borné, sa transformée de Fourier, mathématiquement, ne l'est pas; pourtant le champ sur la sphère de Fourier est, lui aussi, à support borné. La représentation des champs réels (physiques) dans le cadre de l'analyse de Fourier est nécessairement une représentation approchée. La précision de cette approximation dépend de l'étendue du support de l'amplitude  $U_A$ . Elle dépend aussi de la résolution du détecteur, dans la mesure où celui-ci ne percevrait pas de différence entre des champs qui ne se distingueraient que par des détails trop fins. Les trop hautes fréquences (spatiales) ne sont pas détectées. Nous savions déjà qu'elles n'étaient pas transportées par une onde électromagnétique si elles étaient supérieures à  $1/\lambda$  (en module), conformément

<sup>11</sup> Fraunhofer l'observait près du foyer image d'une lunette astronomique, l'objet étant une étoile à l'infini. Voir la figure 3.7 p. 54.

à la relation (2.34). Pour ces deux raisons, même si du point de vue mathématique le spectre (angulaire) d'une onde est à support non borné, la partie qui se propage et celle qui est détectée sont à support borné.

**Remarque 3.2.8 (Réciprocité de la sphère de Fourier. Sphère de Fourier virtuelle).** La relation entre l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{A}$  et celle sur sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  est réciproque. En effet, si nous prenons la transformation de Fourier inverse de chaque membre de la relation (3.24) nous obtenons<sup>12</sup>

$$U_A(\lambda R_A \mathbf{F}) = -\frac{i}{\lambda R_A} \check{U}_F(\mathbf{F}), \quad (3.25)$$

où  $\check{U}_F$  est la transformée de Fourier inverse de  $U_F$ . Un changement de variable et le fait que  $R_A = -R_F$  conduisent à

$$U_A(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda R_F} \check{U}_F\left(-\frac{\mathbf{r}}{\lambda R_F}\right), \quad (3.26)$$

c'est-à-dire

$$U_A(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda R_F} \hat{U}_F\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda R_F}\right). \quad (3.27)$$

La relation (3.27) n'est rien d'autre que la relation (3.24) dans laquelle on a échangé les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$ . Ainsi  $\mathcal{F}$  est l'émetteur et  $\mathcal{A}$  le récepteur, un récepteur virtuel : la distance de diffraction est  $D = \overline{CS} = R_F < 0$  ; la lumière se propage de gauche à droite et le schéma de la figure 3.4 reste valable.

En conclusion, si  $\mathcal{F}$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ , la sphère  $\mathcal{A}$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{F}$ .

Si un émetteur a un rayon de courbure positif<sup>13</sup>, sa sphère de Fourier est réelle et le transfert du champ s'effectue par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier, conformément au théorème 1 (la situation est celle de la figure 3.4, où  $\mathcal{A}$  est l'émetteur). Si le rayon de courbure est négatif, la sphère de Fourier est virtuelle et le transfert du champ s'envisage de deux manières : au moyen d'une transformation de Fourier inverse – c'est la relation (3.26) – ou bien d'une transformation de Fourier mais avec une distance de propagation négative<sup>14</sup> – c'est la relation (3.27) – ; ce dernier point de vue est conforme au théorème 1 (la situation est encore celle de la figure 3.4, comme expliqué plus haut,  $\mathcal{F}$  étant l'émetteur).

<sup>12</sup> S'agissant d'une transformation de Fourier à deux dimensions, l'homothétie sur la variable est à prendre en compte conformément à la relation (B.32) p. 481.

<sup>13</sup> Ou plus précisément, suivant le sens de propagation de la lumière.

<sup>14</sup> La distance de propagation est égale au rayon de courbure de l'émetteur. Parler de distance négative est abusif. Il s'agit plutôt d'une mesure algébrique. Cela est expliqué p. xxix.

### 3.3 Transfert général. Diffraction de Fresnel

#### 3.3.1 Transfert du champ d'un émetteur sphérique quelconque à un récepteur sphérique quelconque

Soit un émetteur  $\mathcal{A}$  de sommet  $S$ , de rayon de courbure  $R_A$ , et soit un récepteur  $\mathcal{B}$  de sommet  $S'$ , de rayon  $R_B$ , situé à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$  ( $D = \overline{SS'}$ , fig. 3.5).

Soit  $\mathcal{A}'$  la sphère de sommet  $S$  centrée en  $S'$  (son rayon est  $D$ ) et soit  $\mathcal{F}$  sa sphère de Fourier, laquelle est la sphère de sommet  $S'$  et centrée en  $S$  (son rayon de courbure est  $-D$ ).

Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  se décompose en trois étapes : d'abord une transparence de courbure de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$  ; puis une transformation de Fourier (optique) de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{F}$  ; enfin une transparence de courbure de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{B}$ . Explicitement nous avons

$$U_B(\mathbf{s}) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] U_F(\mathbf{s}), \quad (3.28)$$

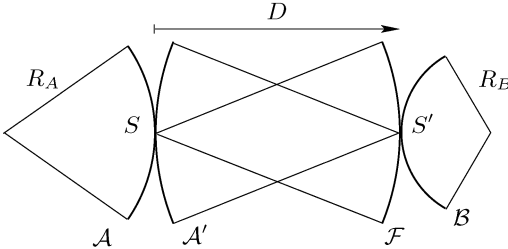
puisque le rayon de courbure de  $\mathcal{F}$  est  $R_F = -D$ . Le transfert de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{F}$  est un phénomène de diffraction de Fraunhofer (distance de propagation  $D$ ) qui s'écrit

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_{A'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.29)$$

Enfin, comme le rayon de  $\mathcal{A}'$  est égal à  $D$ , nous avons

$$U_{A'}(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] U_A(\mathbf{r}). \quad (3.30)$$

Le résultat de la composition des trois opérations précédentes s'exprime sous la forme



**FIG. 3.5.** Le transfert général par diffraction d'un émetteur quelconque  $\mathcal{A}$  vers un récepteur quelconque  $\mathcal{B}$  est le produit d'une transparence de courbure de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$ , d'une transformation de Fourier optique de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{F}$ , et d'une autre transparence de courbure de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{B}$ .

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \quad (3.31)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

**Remarque 3.3.1.** Nous avons utilisé deux opérateurs pour traduire le transfert de l'amplitude du champ dans le cas général : transparence de courbure et transformation de Fourier. Le rôle de cette transformation est clair : c'est elle qui fait passer du voisinage de  $S$  au voisinage de  $S'$ . Les transparences de courbure sont là pour assurer des adaptations de courbure « locales ».

**Remarque 3.3.2 (Éclairement sur le récepteur).** Le terme de phase quadratique qui figure devant l'intégrale de la relation (3.31) n'intervient pas dans l'éclairement sur  $\mathcal{B}$  puisque celui-ci est proportionnel à  $|U_B(\mathbf{s})|^2$ . Cela signifie que l'éclairement sur  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire la figure de diffraction sur  $\mathcal{B}$  (voir le chapitre 5), ne dépend pas de la courbure du récepteur (dans les limites de l'approximation métaxiale). Bien sûr, ce terme de phase quadratique a parfois son importance en optique cohérente, quand il s'agit de travailler avec l'amplitude du champ.

**Remarque 3.3.3 (Diffraction entre deux plans. Convolution).** On trouve dans les textes « classiques » [97] l'expression du transfert du champ entre deux plans  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Elle se déduit de la relation (3.31), si on prend  $R_A$  et  $R_B$  infinis, et s'écrit

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} s^2 \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.32)$$

L'intégrale de la relation (3.32) est un produit de convolution :

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} \|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2 \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.33)$$

Ce résultat est conforme à la remarque 2.3.5 et au graphe (2.39) p. 36. Il est généralisé au paragraphe 3.6.

**Remarque 3.3.4 (Transformation de Fresnel).** L'opération qui fait passer de  $U_A$  à  $U_B$  selon la relation (3.32) – ou (3.33) – est parfois baptisée transformation de Fresnel.

**Remarque 3.3.5.** La relation (3.31) se synthétise sous la forme

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.34)$$

où

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right]. \quad (3.35)$$

La fonction (ou distribution)  $h_{BA}$  est le gain complexe du transfert du champ par diffraction de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  (nous adoptons la dénomination du chapitre 9) ; pour des ondes monochromatiques,  $h_{BA}$  joue le rôle d'une réponse percutieuse portant sur les seules variables spatiales : nous la désignons parfois sous le nom de réponse percutieuse spatiale. Cette formulation inclut la forme intégrale de la diffraction de Fraunhofer comme cas particulier ( $D = R_A = -R_B$ ).

**Remarque 3.3.6.** La fonction  $h_{BA}$  est une « densité » surfacique : l'unité S.I. de  $h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  est le  $\text{m}^{-2}$ .

**Remarque 3.3.7 (Diffraction à distance finie).** En théorie classique [97] on parle souvent de « diffraction à distance finie » pour un phénomène représenté par la relation (3.32), par opposition à la diffraction à l'infini (Fraunhofer) mentionnée dans la remarque 3.2.5. En toute rigueur cette dénomination n'a pas lieu d'être en théorie métaxiale puisque la diffraction de Fraunhofer s'observe tout aussi bien à distance finie [157]. Malgré tout, nous adopterons souvent cette terminologie à propos d'un phénomène représenté par la relation (3.31), nous conformant ainsi à un usage très répandu (voir toutefois le paragraphe 3.3.2).

**Remarque 3.3.8.** Jusqu'à présent nous avons utilisé des notations intégrales et supposé implicitement que les amplitudes des champs étaient des fonctions intégrables. Or la fonction  $h_{BA}$  est seulement localement sommable et cela laisse penser qu'il est parfois nécessaire d'avoir recours à une notation plus rigoureuse et d'admettre que les amplitudes des champs, comme la réponse percutieuse d'un système (ou son gain complexe), puissent être des distributions.

Conformément à ce qui est expliqué dans l'annexe A (§A.3), nous écrivons parfois la relation (3.34) sous la forme

$$U_B(\mathbf{s}) = \langle h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}), U_A(\mathbf{r}) \rangle. \quad (3.36)$$

Cette écriture est valide si  $h_{BA}$  est une distribution et  $U_A$  une fonction. Elle est encore valide (sous forme symbolique) si  $h_{BA}$  est un noyau et  $U_A$  une distribution : elle traduit alors un produit de convolution de Volterra comme il est expliqué au paragraphe A.3. Nous en verrons un usage au paragraphe 3.5.

### 3.3.2 Diffraction de Fresnel au sens strict

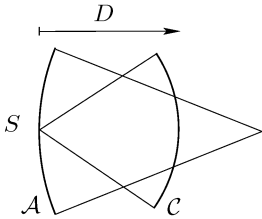
On a un phénomène de diffraction de Fresnel<sup>15</sup> quand on observe le champ diffracté sur une sphère  $\mathcal{C}$  centrée sur l'émetteur  $\mathcal{A}$  (fig. 3.6), la sphère  $\mathcal{C}$  étant

<sup>15</sup> Il arrive qu'on confonde parfois la diffraction de Fresnel avec le cas général exposé au paragraphe précédent, c'est-à-dire avec la diffraction à distance finie (voir la remarque 3.3.7). Nous ferons souvent cette confusion par la suite, comme nous l'avons déjà indiqué.

distincte de la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$  : le sommet de  $\mathcal{C}$  reste à une certaine distance du centre de  $\mathcal{A}$  ( $D \neq R_A$ ). La sphère  $\mathcal{C}$  est une sphère « cardinale »<sup>16</sup>, et son rayon de courbure est  $-D$ . L'amplitude du champ sur  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation

$$U_C(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.37)$$

qui se déduit de la relation (3.31) en remplaçant  $R_B$  par  $-D$ .

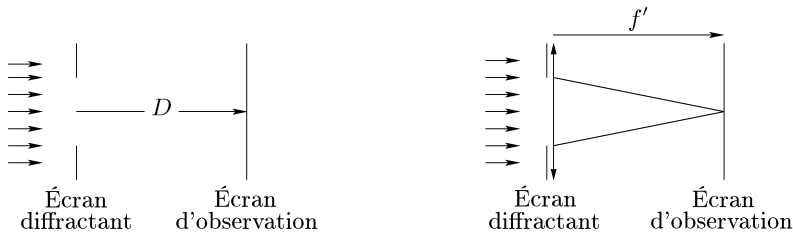


**FIG. 3.6.** Diffraction de Fresnel. On observe le champ diffracté sur une sphère cardinale  $\mathcal{C}$  centrée sur l'émetteur  $\mathcal{A}$ , mais distincte de sa sphère de Fourier.

### 3.3.3 Diffraction de Fresnel ou diffraction de Fraunhofer ?

La meilleure façon de décider si un phénomène de diffraction est de Fresnel ou de Fraunhofer consiste peut-être à se fonder sur son expression mathématique. Si le transfert du champ par diffraction se traduit par une transformation de Fourier, il s'agit d'un phénomène de Fraunhofer. S'il y a un terme de phase quadratique sous l'intégrale, c'est un phénomène de Fresnel<sup>17</sup>. La présence d'un éventuel terme de phase quadratique devant l'intégrale ne change rien à ce qui précède (voir la relation (3.31) p. 52), car un tel facteur ne change pas l'éclairement détecté (proportionnel au carré du module de l'amplitude du champ), conformément à la remarque 3.3.2 p. 52.

La distinction entre les deux types de phénomènes est à la fois historique et expérimentale (fig. 3.7). La diffraction de Fraunhofer s'observe près du centre



**FIG. 3.7.** Diffraction de Fresnel (à gauche) et diffraction de Fraunhofer (à droite).

<sup>16</sup> On appelle sphère cardinale toute sphère centrée sur l'émetteur.

<sup>17</sup> D'où la notion de transformation de Fresnel (voir la remarque 3.3.4).

de courbure d'une onde convergente<sup>18</sup> (en pratique près du foyer d'un objectif) et celle de Fresnel près d'un écran (sans élément optique entre l'ouverture diffringente et le plan d'observation) [40].

Il existe une continuité de passage entre un phénomène de diffraction de Fresnel et un de Fraunhofer, comme cela devrait ressortir des développements du chapitre 6. Par exemple, dans l'expression mathématique de la diffraction par un écran plan, si on augmente la distance de cet écran à l'écran d'observation, le terme de phase quadratique sous l'intégrale tend vers 1, ce qui signifie que le phénomène de diffraction, qui est de type « Fresnel », tend vers un phénomène de type « Fraunhofer ».

### 3.4 Émetteur sphérique équivalent

La théorie métaxiale fait abondamment référence à des émetteurs et récepteurs sphériques, alors qu'en optique on utilise (ou croit utiliser) la plupart du temps des objets ou des détecteurs plans. Y-a-t-il donc un intérêt pratique à l'emploi de sphères ? Nous allons voir que, contrairement à ce qu'on pourrait penser *a priori*, les émetteurs (ou récepteurs) sphériques sont très courants, ce qui ajoute à leur intérêt théorique.

#### 3.4.1 Source ponctuelle et homogénéité des distributions de Dirac

L'amplitude d'une onde sphérique monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , qui diverge à partir de l'origine  $O$  d'un système de coordonnées s'écrit, à la distance  $D$  de l'origine ( $D > 0$ ), sous la forme

$$U(D) = \frac{aU_0}{D} \exp[-ikD], \quad (3.38)$$

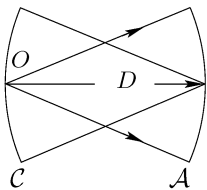
où  $k$  est le nombre d'ondes ( $k = 2\pi/\lambda$ ),  $U_0$  une constante dimensionnelle (homogène à l'amplitude d'un champ électrique) et  $a$  une constante homogène à une longueur. Le facteur  $\exp[2i\pi\nu t]$  est omis.

La relation (3.38) est valable si  $D$  est supérieur à quelques dizaines de longueurs d'ondes [40]. La théorie métaxiale considère seulement une portion de l'onde précédente : à la distance  $D$ , la surface d'onde est réduite à une calotte sphérique (fig. 3.8). Le terme  $\exp[-ikD]$  est lui-même omis selon la règle 1. Ainsi l'amplitude du champ engendré par l'onde précédente sur la sphère  $\mathcal{A}$  de centre  $O$  et de rayon<sup>19</sup>  $-D$ , est

$$U_A(s) = \frac{aU_0}{D}. \quad (3.39)$$

<sup>18</sup> Cela inclut la diffraction « à l'infini » : si l'écran diffractant est plan, son centre de courbure est à l'infini. Voir la remarque 3.2.5 p. 49.

<sup>19</sup> Le rayon de  $\mathcal{A}$  est  $-D$ , car  $D$  est la distance de  $O$  (le centre de courbure de  $\mathcal{A}$ ) au sommet de  $\mathcal{A}$ .



**FIG. 3.8.** L'amplitude du champ émis par le point lumineux  $O$  se représente, sur l'émetteur  $\mathcal{C}$ , par une distribution de Dirac. Le rayon de courbure de  $\mathcal{C}$  est choisi arbitrairement, en particulier égal à  $D$ , distance de  $O$  à  $\mathcal{A}$ .

D'autre part, on comprend intuitivement que le champ au foyer  $O$  de l'onde se représente par une distribution de Dirac, sous la forme  $bU_0 \delta(\mathbf{r})$ , où  $b$  est une constante qui reste à définir. Cela se confirme si on applique le théorème 1 à la sphère  $\mathcal{C}$  passant par  $O$  et de rayon  $D$ , dont  $\mathcal{A}$  est la sphère de Fourier (fig. 3.8). L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est la transformée de Fourier « optique » du champ sur  $\mathcal{C}$ . En écrivant l'amplitude du champ sur  $\mathcal{C}$  sous la forme<sup>20</sup>

$$U_C(\mathbf{r}) = bU_0 \delta(\mathbf{r}), \quad (3.40)$$

on obtient

$$U_A(\mathbf{s}) = \frac{ibU_0}{\lambda D}. \quad (3.41)$$

Pour retrouver la relation (3.39) il faut choisir  $b = -i\lambda a$ . Il reste une constante arbitraire dans le choix de  $a$  et  $b$ . Nous choisissons

$$b = \ell_0^2, \quad (3.42)$$

où  $\ell_0$  est l'unité de longueur ( $\ell_0 = 1$  m en S.I.).

**Règle 2 (Représentation d'une source ponctuelle).** *Une source ponctuelle placée à l'origine des coordonnées d'un émetteur sphérique, émettant une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $U_0$ , se représente par la distribution  $\ell_0^2 U_0 \delta(\mathbf{r})$ , où  $\ell_0$  est l'unité de longueur du système d'unités employé, indépendamment du rayon de courbure de l'émetteur.*

**Remarque 3.4.1.** La règle précédente rend homogène la « variable » de la distribution de Dirac. Cela résulte de

$$\ell_0^2 \delta(\mathbf{r}) = \delta\left(\frac{\mathbf{r}}{\ell_0}\right). \quad (3.43)$$

Exprimée sous la forme  $\delta(\mathbf{r})$ , la distribution de Dirac est une densité surfacique (parce qu'elle s'applique à un vecteur de dimension 2) : multipliée par le carré d'une longueur, elle est « sans dimension », comme l'est  $\delta(\mathbf{r}/\ell_0)$ .

Rendre homogène la distribution de Dirac permet de conserver l'homogénéité des grandeurs dans certains calculs que nous rencontrerons (voir par exemple la remarque 5.2.2 p. 107, ou la relation (10.138) p. 309).

<sup>20</sup> Cela est vrai quel que soit le rayon de courbure de la sphère  $\mathcal{C}$  ; c'est la distribution de Dirac qui rend cela possible. Le rayon de  $\mathcal{C}$  est choisi égal à  $D$  de façon à ce que  $\mathcal{C}$  soit la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ . La méthode suivie s'applique, quelle que soit  $\mathcal{A}$ .

**Remarque 3.4.2.** Le choix d'une distribution de Dirac pour représenter un point lumineux ne prétend pas décrire avec exactitude une onde en son foyer. Nous renonçons à décrire l'onde près de son foyer, car cela dépasse le cadre d'une théorie scalaire de la diffraction. La distribution de Dirac est un bon modèle qui permet les calculs de l'amplitude du champ créé par l'onde, dès qu'on est assez loin du foyer (quelques dizaines de longueurs d'ondes).

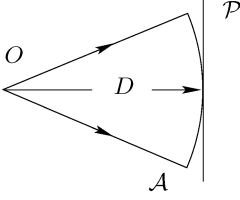
### 3.4.2 Trace d'une onde sphérique sur un plan

L'amplitude produite par une source ponctuelle sur une sphère centrée sur elle est une constante ; il est parfois suffisant, pour certains calculs, de choisir cette constante égale à 1 et de normaliser ainsi l'amplitude, ce que nous ferons dans ce paragraphe<sup>21</sup>.

Cherchons quelle est l'amplitude du champ engendré par une source ponctuelle  $O$ , sur un plan  $\mathcal{P}$  situé à la distance  $D$  de la source (fig. 3.9). Pour cela introduisons la sphère  $\mathcal{A}$  tangente à  $\mathcal{P}$  et centrée sur la source ; son rayon de courbure est  $-D$  et par conséquent l'amplitude du champ sur  $\mathcal{P}$  (déduite de celle sur  $\mathcal{A}$  par transparence de courbure) est

$$U_P(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} r^2 \right], \quad (3.44)$$

car l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est une constante, choisie égale à 1.



**FIG. 3.9.** L'amplitude du champ engendré par l'onde sphérique sur le plan  $\mathcal{P}$  est proportionnelle à un terme de phase quadratique.

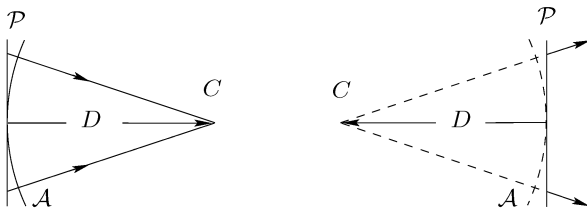
De façon équivalente, imaginons qu'il existe sur un plan  $\mathcal{P}$  un champ dont l'amplitude soit

$$U_P(\mathbf{r}) = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda D} r^2 \right], \quad (3.45)$$

et introduisons la sphère  $\mathcal{A}$  tangente à  $\mathcal{P}$  et de rayon  $D$ . Par transparence de courbure, on calcule que l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  vaut 1 : c'est l'amplitude du champ d'une onde convergeant au centre de courbure de  $\mathcal{A}$  (foyer de l'onde sphérique), c'est-à-dire au point  $C$  situé à la distance  $D$  du plan  $\mathcal{P}$ . La figure 3.10 illustre la situation en fonction du signe de  $D$ .

L'amplitude de la relation (3.45) est la trace, sur le plan  $\mathcal{P}$ , d'une onde sphérique convergeant à la distance  $D$  de  $\mathcal{P}$  ( $D$  est algébrique).

<sup>21</sup> À la suite de ce qui est fait au paragraphe précédent, on pourrait introduire la constante  $i\ell_0^2 U_0 / \lambda D$  où  $D$  est la distance de la source à la sphère, mais cela ne modifierait pas le résultat obtenu.



**FIG. 3.10.** Sur le plan  $\mathcal{P}$ , une amplitude de phase quadratique, de la forme  $\exp[i\pi r^2/\lambda D]$ , est celle du champ engendré par une onde sphérique qui converge au point  $C$  situé à la distance (mesure algébrique)  $D$  de  $\mathcal{P}$ . Si  $D > 0$ , le point  $C$  est réel, comme sur le schéma de gauche. Si  $D < 0$ , le point  $C$  est virtuel : l'onde diverge à partir de  $C$ , comme sur le schéma de droite.

### 3.4.3 Émetteur sphérique équivalent à un objet plan éclairé par une onde sphérique

Soit une transparence plane  $\mathcal{T}$  (par exemple une diapositive) de fonction de transmission<sup>22</sup>  $t$ , c'est-à-dire dont le coefficient de transmission (en amplitude) au point  $\mathbf{r}$  est  $t(\mathbf{r})$  (avec  $0 \leq t(\mathbf{r}) \leq 1$  ; plus généralement,  $t(\mathbf{r})$  est un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1). Si  $\mathcal{T}$  est éclairée par une onde convergeant à la distance  $D$  de  $\mathcal{T}$ , l'amplitude incidente sur  $\mathcal{T}$  est celle donnée par la relation (3.45), et l'amplitude émergente est

$$U_T(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda D} r^2 \right]. \quad (3.46)$$

Si  $\mathcal{A}$  est la sphère tangente à  $\mathcal{T}$  et de rayon  $D$  (fig. 3.11), l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  se réduit à

$$U_A(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}). \quad (3.47)$$

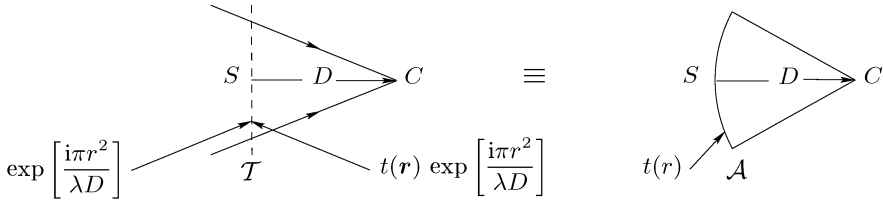
La « distance »  $D$  est algébrique : si on éclaire un objet plan  $\mathcal{T}$  par une onde divergente issue d'un point situé à la distance  $D$  de  $\mathcal{T}$  ( $D < 0$ ), on montre que cet objet est équivalent à un émetteur sphérique de rayon  $D$ , centré sur le foyer de l'onde, et sur lequel l'amplitude du champ vaut  $t$  (voir le schéma de droite de la figure 3.10 où l'objet  $\mathcal{T}$  serait placé dans le plan  $\mathcal{P}$ ).

Nous énonçons le résultat suivant (illustré par la figure 3.11) :

**Proposition 3.4.1 (Émetteur sphérique équivalent).** *Un objet plan, de fonction de transmission  $t$ , éclairé par une onde sphérique convergeant<sup>23</sup> à la distance  $D$  de l'objet, est équivalent à un émetteur sphérique tangent au plan de l'objet, de rayon de courbure  $D$ , centré au foyer de l'onde et sur lequel l'amplitude du champ est égale à la fonction  $t$  (à un facteur dimensionnel près).*

<sup>22</sup> Si  $U_i(\mathbf{r})$  est l'amplitude de l'onde incidente au point  $\mathbf{r}$  de la transparence et  $U_t(\mathbf{r})$  celle de l'onde transmise, le coefficient de transmission au point  $\mathbf{r}$  est  $t(\mathbf{r})$  tel que  $U_t(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r})$ . Voir le chapitre 5, relation (5.1).

<sup>23</sup> Le mot « convergeant » est à prendre dans un sens large : une onde divergente est une onde convergeant virtuellement.



**FIG. 3.11.** Émetteur sphérique équivalent. La transparence plane  $\mathcal{T}$ , éclairée par une onde convergeant en  $C$ , est équivalente à un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  centré en  $C$ . L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est égale à la fonction de transmission de  $\mathcal{T}$ , à un facteur dimensionnel près.

En conclusion, ce qui compte n'est pas tant la forme réelle d'un objet mais plutôt la façon dont il est éclairé. Quand on travaille en éclairage convergent, et cela est fréquent dans les montages expérimentaux, on introduit naturellement des émetteurs sphériques. Ainsi, un émetteur sphérique n'est pas seulement une notion théorique : on rencontre un tel émetteur chaque fois qu'on éclaire un objet plan par une onde sphérique. Un émetteur plan s'obtient en éclairant un objet plan par une onde plane.

Ce qui précède s'adapte pour transformer des récepteurs sphériques, tels qu'ils apparaissent en théorie métaxiale, en récepteurs plans et vice versa. Pour obtenir en pratique un éclairage convergent, ou pour compenser une courbure, on utilise un objectif ; des exemples explicites sont fournis aux paragraphes 4.2.4, 13.1 et 13.2.

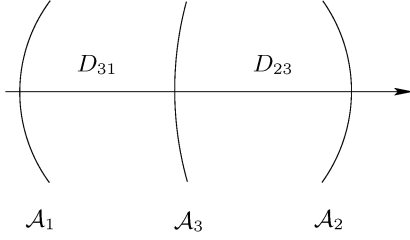
### 3.5 Composition des opérateurs de transfert du champ

Il s'agit de montrer que la théorie métaxiale, bien que ne constituant qu'une approximation (d'ordre 2), est compatible avec le principe de Huygens–Fresnel.

Soit  $\mathcal{A}_1$  un émetteur sphérique et soit  $\mathcal{A}_2$  un récepteur sphérique à la distance  $D_{21}$ . Soit  $\mathcal{A}_3$  une calotte sphérique intermédiaire<sup>24</sup>, située à la distance  $D_{31}$  de  $\mathcal{A}_1$ . La distance de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  est  $D_{23}$ , telle que  $D_{21} = D_{23} + D_{31}$ . Selon le principe de Huygens–Fresnel (chapitre 1) le transfert du champ de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_2$  doit être la composition du transfert de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$  et du transfert de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  (pris dans cet ordre, fig. 3.12). Plus précisément, si nous désignons par  $\mathcal{H}_{j\ell}$  l'opérateur de transfert de  $\mathcal{A}_\ell$  vers  $\mathcal{A}_j$ , avec  $(j, \ell) = (2, 1), (2, 3)$ , ou  $(3, 1)$ , le principe de Huygens–Fresnel impose d'avoir (loi de composition des opérateurs)

$$\mathcal{H}_{21} = \mathcal{H}_{23} \circ \mathcal{H}_{31}. \quad (3.48)$$

<sup>24</sup> Nous employons le terme de calotte sphérique intermédiaire par commodité. Le résultat obtenu dans ce paragraphe est vrai quelles que soient les positions relatives de  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$  ; ces calottes sphériques sont réelles ou virtuelles suivant les cas. Par exemple si  $\mathcal{A}_3$  est placé avant  $\mathcal{A}_1$  (pour la lumière, c'est-à-dire à gauche sur la figure 3.12), le transfert de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$  est virtuel.



**FIG. 3.12.** Selon le principe de Huygens–Fresnel, le transfert direct de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_2$  est équivalent à la composition des transferts de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$  et de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$ .

Spatialement, avec la variable  $\mathbf{r}_j$  sur la sphère  $\mathcal{A}_j$ , l'opérateur  $\mathcal{H}_{j\ell}$  se traduit par (voir la remarque 3.3.8 et la relation (3.36) p. 53)

$$U_j(\mathbf{r}_j) = \langle h_{j\ell}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_\ell), U_\ell(\mathbf{r}_\ell) \rangle, \quad (3.49)$$

où  $h_{j\ell}$  est le gain complexe (ou la réponse percussionnelle spatiale) du transfert de l'amplitude du champ, donné par la relation (3.35) et qui s'écrit ici

$$h_{j\ell}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_\ell) = \frac{i}{\lambda D_{j\ell}} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_\ell\|^2}{D_{j\ell}} + \frac{r_j^2}{R_j} - \frac{r_\ell^2}{R_\ell} \right) \right]. \quad (3.50)$$

La question est de savoir si cette formulation de la diffraction–propagation et la relation (3.50) (qui résulte d'un calcul approché à l'ordre 2) sont compatibles avec la composition des opérateurs, exprimée par la relation (3.48).

Pour éviter des écritures impropres, qui résulteraient du fait que la fonction  $h_{j\ell}$  est seulement localement sommable, nous écrivons le transfert de l'amplitude du champ à l'aide des notations de la théorie des distributions : la relation (3.49) se situe dans ce cadre.

Le rayon de  $\mathcal{A}_j$  est noté  $R_j$ . Si  $U_j$  est l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}_j$ , soit  $V_j$  définie par

$$V_j(\mathbf{r}) = \exp \left[ \frac{i\pi r^2}{\lambda R_j} \right] U_j(\mathbf{r}). \quad (3.51)$$

Pour alléger les écritures nous utilisons également

$$g_{j\ell}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D_{j\ell}} \exp \left[ -\frac{i\pi r^2}{\lambda D_{j\ell}} \right]. \quad (3.52)$$

Le transfert du champ de  $\mathcal{A}_\ell$  à  $\mathcal{A}_j$ , exprimé par la relation (3.49), et l'expression explicite de  $h_{j\ell}$  – relation (3.50) –, conduisent à<sup>25</sup>

$$V_j(\mathbf{r}_j) = \langle g_{j\ell}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_\ell), V_\ell(\mathbf{r}_\ell) \rangle = g_{j\ell} * V_\ell(\mathbf{r}_j), \quad (3.53)$$

puis par transformation de Fourier

$$\widehat{V}_j = \widehat{g}_{j\ell} \widehat{V}_\ell. \quad (3.54)$$

<sup>25</sup> La relation (3.53) n'est qu'une autre forme de la relation (3.31) adaptée aux notations de ce paragraphe.

Ainsi le transfert direct de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_2$  s'exprime, sous forme fréquentielle, par  $\widehat{V}_2 = \widehat{g}_{21} \widehat{V}_1$ , et la composition des transferts de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$  et de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  conduit à

$$\widehat{V}_2 = \widehat{g}_{23} \widehat{V}_3 = \widehat{g}_{23} \widehat{g}_{31} \widehat{V}_1. \quad (3.55)$$

Le principe de Huygens–Fresnel est respecté si  $\widehat{g}_{21} = \widehat{g}_{23} \widehat{g}_{31}$ . Vérifions qu'il en est bien ainsi. Pour cela, nous utilisons ( $a$  est un nombre réel)

$$\frac{1}{ia} \exp \left[ \frac{i\pi r^2}{a} \right] \rightleftharpoons \exp[-i\pi a F^2], \quad (3.56)$$

et obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{23}(\mathbf{F}) \widehat{g}_{31}(\mathbf{F}) &= \exp[i\pi\lambda D_{23} F^2] \exp[i\pi\lambda D_{31} F^2] = \exp[i\pi\lambda D_{21} F^2] \\ &= \widehat{g}_{21}(\mathbf{F}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nous concluons que l'approximation métaxiale est compatible avec le principe de Huygens–Fresnel.

Terminons par l'écriture explicite de la composition des champs (à l'aide des variables d'espace). Les calculs précédents permettent d'écrire

$$V_2(\mathbf{r}_2) = \langle g_{23}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \langle g_{31}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), V_1(\mathbf{r}_1) \rangle \rangle, \quad (3.58)$$

dont il résulte

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{r}_2) &= \exp \left[ -\frac{i\pi r_2^2}{R_2} \right] V_2(\mathbf{r}_2) \\ &= \exp \left[ -\frac{i\pi r_2^2}{R_2} \right] \left\langle g_{23}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \langle g_{31}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \exp \left[ \frac{i\pi r_1^2}{R_1} \right] U_1(\mathbf{r}_1) \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \exp \left[ -\frac{i\pi r_2^2}{R_2} \right] \exp \left[ \frac{i\pi r_3^2}{R_3} \right] g_{23}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \right. \\ &\quad \left. \langle \exp \left[ -\frac{i\pi r_3^2}{R_3} \right] \exp \left[ \frac{i\pi r_1^2}{R_1} \right] g_{31}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), U_1(\mathbf{r}_1) \rangle \right\rangle \\ &= \langle h_{23}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \langle h_{31}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1), U_1(\mathbf{r}_1) \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Finalement

$$\begin{aligned} \langle h_{21}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), U_1(\mathbf{r}_1) \rangle &= U_2(\mathbf{r}_2) \\ &= \langle h_{23}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \langle h_{31}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1), U_1(\mathbf{r}_1) \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (3.60)$$

La relation (3.60) traduit la composition des opérateurs de champs sous la forme spatiale.

**Remarque 3.5.1.** Quand l'écriture intégrale est licite, la relation (3.60) prend la forme

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{r}_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} h_{21}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) U_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h_{23}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \left( \int_{\mathbb{R}^2} h_{31}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) U_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right) d\mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (3.61)$$

**Remarque 3.5.2.** L'expression trouvée, au chapitre 2, pour la propagation du spectre angulaire est compatible avec le principe de Huygens–Fresnel, conformément à la remarque 2.3.3 p. 35. La démonstration du théorème 1 repose pour sa part sur une approximation de la fonction de transfert de la propagation à l'ordre 2. La forme approchée de cette fonction est encore compatible avec le principe de Huygens–Fresnel ; elle s'écrit en effet, pour la distance  $z$ , sous la forme (déduite de la relation (3.14) p. 46),

$$H_z(\alpha, \beta) = \exp \left[ -\frac{2i\pi z}{\lambda} \right] \exp \left[ \frac{i\pi z}{\lambda} (\alpha^2 + \beta^2) \right], \quad (3.62)$$

ce qui conduit à

$$H_{z_1}(\alpha, \beta) H_{z_2}(\alpha, \beta) = H_{z_1+z_2}(\alpha, \beta), \quad (3.63)$$

quels que soient  $(\alpha, \beta)$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .

La compatibilité de la composition des opérateurs de transfert du champ avec le principe de Huygens–Fresnel, objet de ce paragraphe, repose sur cette propriété de l'approximation de la fonction de transfert à l'ordre 2, et étend le résultat aux émetteurs et récepteurs sphériques.

## 3.6 Complément : diffraction et filtrage linéaire

Conformément à ce qui a été vu au paragraphe 2.3.1, la diffraction est un filtre linéaire et le chapitre 2 en constitue une description fréquentielle. Par dualité, il existe une description en termes de variables d'espace et on s'attend à ce que la diffraction se traduise par une relation de convolution. Les conditions pour qu'il en soit ainsi sont examinées dans ce paragraphe : elles conduisent à une autre façon de décomposer le transfert du champ d'un émetteur sphérique quelconque vers un récepteur quelconque.

### 3.6.1 Représentation spatiale

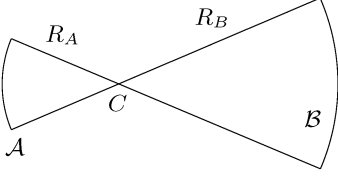
Selon les relations (3.34) et (3.35), le transfert du champ par diffraction d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$  se met sous la forme

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.64)$$

où

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right]. \quad (3.65)$$

Est-il possible d'écrire l'intégrale de la relation (3.64) comme un produit de convolution ?



**FIG. 3.13.** Le transfert du champ entre deux sphères concentriques est un filtrage linéaire : il s'exprime par un produit de convolution.

Supposons que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  aient le même centre de courbure  $C$  (fig. 3.13) : la distance de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  est  $D = R_A - R_B$ , et

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} \left( \frac{R_A}{R_B} s^2 + \frac{R_B}{R_A} r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \right) \right]. \quad (3.66)$$

Si  $\kappa = R_B/R_A$ , la relation (3.66) s'écrit

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi\kappa}{\lambda D} \left\| \frac{\mathbf{s}}{\kappa} - \mathbf{r} \right\|^2 \right]. \quad (3.67)$$

Soit  $h_{BA}^\#$  la fonction définie par

$$h_{BA}^\#(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi\kappa}{\lambda D} r^2 \right], \quad (3.68)$$

de telle sorte que

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = h_{BA}^\# \left( \frac{\mathbf{s}}{\kappa} - \mathbf{r} \right). \quad (3.69)$$

La relation (3.64) s'écrit

$$U_B(\mathbf{s}) = h_{BA}^\# * U_A \left( \frac{\mathbf{s}}{\kappa} \right). \quad (3.70)$$

La relation (3.70) montre que le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  est un filtrage linéaire spatial puisqu'il se traduit par une convolution. Nous énonçons :

**Proposition 3.6.1.** *Pour une onde monochromatique, le transfert du champ par diffraction entre deux sphères concentriques est un filtrage linéaire spatial.*

**Remarque 3.6.1 (Filtrage linéaire entre deux plans).** Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des plans, on a  $\kappa = 1$ . On retrouve le résultat mentionné dans la remarque 3.3.3 p. 52, conformément à la remarque 2.3.5 p. 36.

### 3.6.2 Représentation fréquentielle

Par transformation de Fourier, la relation (3.70) conduit à la relation

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = \kappa^2 \widehat{h_{BA}^\#}(\kappa \mathbf{F}) \widehat{U}_A(\kappa \mathbf{F}). \quad (3.71)$$

Pour une écriture explicite nous utilisons encore la relation (3.56) et obtenons

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = \kappa \exp[i\pi\lambda\kappa D F^2] \widehat{U}_A(\kappa\mathbf{F}). \quad (3.72)$$

La relation (3.72) est l'expression fréquentielle du transfert du champ entre deux sphères concentriques ; elle traduit un filtrage linéaire. Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des plans, alors  $\kappa = 1$ , et la relation précédente n'est autre qu'une approximation à l'ordre 2 de la relation (2.37). Comme cette dernière, la relation (3.72) se réduit essentiellement au produit du spectre par une fonction de transfert. Elle s'applique cependant à une situation plus générale, puisque valable pour des calottes sphériques (concentriques).

**Remarque 3.6.2 (Déphasage de  $\pi$  lors du passage au foyer).** Supposons  $R_A/R_B = \kappa < 0$ , ce qui signifie que le centre  $C$ , commun aux sphères  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , est situé entre elles. Supposons que le champ sur  $\mathcal{A}$  soit homogène, d'amplitude  $U_0$ , ce qui correspond à une onde sphérique convergeant en  $C$ . Pour  $U_A(\mathbf{r}) = U_0$ , la relation (3.72) devient

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = \frac{1}{\kappa} U_0 \delta(\mathbf{F}), \quad (3.73)$$

compte tenu de la propriété suivante de la distribution de Dirac (dimension 2)

$$\delta(\kappa\mathbf{F}) = \frac{1}{\kappa^2} \delta(\mathbf{F}). \quad (3.74)$$

Quand  $\kappa < 0$ , par transformation de Fourier inverse, la relation (3.73) devient

$$U_B(\mathbf{s}) = -\frac{U_0}{|\kappa|} = e^{i\pi} \frac{U_0}{|\kappa|}. \quad (3.75)$$

Pour aller de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$ , l'onde est passée par son foyer (son centre de courbure) et elle a subi un déphasage de  $\pi$ .

L'expérience de Meslin met en évidence le déphasage de  $\pi$  ; elle consiste à produire des interférences à partir des deux images d'une source formées par des bilentilles de Billet décalées longitudinalement [29, 40].

### 3.6.3 Description fréquentielle d'une transparence de courbure

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux calottes sphériques tangentes, de rayons respectifs  $R_A$  et  $R_B$ . Soit  $\Delta$  tel que

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}. \quad (3.76)$$

Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  s'effectue par transparence de courbure et s'exprime sous la forme

$$U_B(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda\Delta} r^2 \right], \quad (3.77)$$

soit encore, par transformation de Fourier

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = -i\lambda\Delta[f_{-\lambda\Delta} * \widehat{U}_A](\mathbf{F}), \quad (3.78)$$

où la fonction  $f_{-\lambda\Delta}$  est telle que

$$f_{-\lambda\Delta}(\mathbf{F}) = \exp[i\pi\lambda\Delta F^2]. \quad (3.79)$$

### 3.6.4 Transfert général

Nous nous intéressons de nouveau au transfert du champ d'un émetteur quelconque  $\mathcal{A}$ , de rayon de courbure  $R_A$ , vers un récepteur quelconque  $\mathcal{B}$ , de rayon  $R_B$ , situé à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$ , mais nous allons l'exprimer sous forme fréquentielle. Ce transfert se décompose en un filtrage linéaire spatial de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}^*$ , la sphère tangente à  $\mathcal{B}$  et concentrique à  $\mathcal{A}$  (fig. 3.14), puis d'une transparence de courbure de  $\mathcal{A}^*$  à  $\mathcal{B}$ .

Le rayon de  $\mathcal{A}^*$  est  $R_{A^*} = R_A - D$ , et pour exprimer le transfert par filtrage de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}^*$  nous utilisons

$$\kappa = \frac{R_A - D}{R_A}. \quad (3.80)$$

Soit  $\Delta$  tel que

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A - D}. \quad (3.81)$$

Sous forme fréquentielle, le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}^*$  s'exprime par

$$\widehat{U}_{A^*}(\mathbf{F}) = \kappa \exp[i\pi\lambda\kappa D F^2] \widehat{U}_A(\kappa\mathbf{F}), \quad (3.82)$$

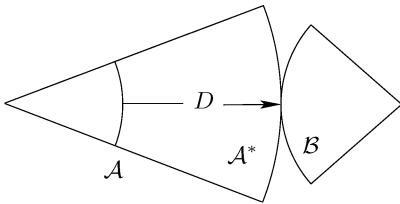
et celui de  $\mathcal{A}^*$  à  $\mathcal{B}$  par

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = -i\lambda\Delta[f_{-\lambda\Delta} * \widehat{U}_{A^*}](\mathbf{F}). \quad (3.83)$$

Pour exprimer la composition des deux opérations précédentes, introduisons la fonction dilatée de  $\kappa$  de  $\widehat{U}_A$ , définie par

$$\theta_\kappa \widehat{U}_A(\mathbf{F}) = \widehat{U}_A(\kappa\mathbf{F}). \quad (3.84)$$

Nous obtenons



**FIG. 3.14.** Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  se décompose en un filtrage linéaire de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}^*$  et une transparence de courbure de  $\mathcal{A}^*$  à  $\mathcal{B}$ .

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = -i\lambda\Delta\kappa [f_{-\lambda\Delta} * (f_{-\lambda\kappa D} \theta_\kappa \widehat{U}_A)](\mathbf{F}). \quad (3.85)$$

Une forme intégrale explicite de la relation (3.85) est

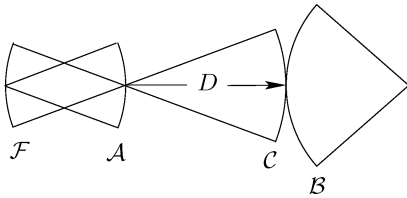
$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = -i\lambda\Delta\kappa \int_{\mathbb{R}^2} \exp[i\pi\lambda\Delta\|\mathbf{F} - \mathbf{F}'\|^2] \exp[i\pi\lambda\kappa D\mathbf{F}'^2] \widehat{U}_A(\kappa\mathbf{F}') d\mathbf{F}'. \quad (3.86)$$

### 3.6.5 Trilogie de la diffraction de Fresnel

La figure 3.15 montre une autre façon de passer d'un émetteur quelconque  $\mathcal{A}$  à un récepteur quelconque  $\mathcal{B}$ ; elle se résume par la proposition 3.6.2 qui suit, dans laquelle diffraction de Fresnel signifie transfert général (distance finie). Les calculs explicites sont proposés en exercice (voir l'exercice 3.5 p. 67).

**Proposition 3.6.2 (Trilogie de la diffraction de Fresnel – G. Bonnet [23, 24]).** *Un phénomène de diffraction de Fresnel d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  vers un récepteur sphérique  $\mathcal{B}$  se décompose en trois opérations successives :*

- 1° *Une transformation de Fourier optique (spatiale) de l'émetteur vers sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$ , équivalente à une diffraction de Fraunhofer ;*
- 2° *Un filtrage spatial entre  $\mathcal{F}$  et une sphère cardinale  $\mathcal{C}$  (c'est-à-dire centrée sur l'émetteur) tangente au récepteur ;*
- 3° *Une transparence de courbure entre la sphère cardinale  $\mathcal{C}$  et le récepteur sphérique  $\mathcal{B}$ .*



**FIG. 3.15.** Trilogie de la diffraction de Fresnel. Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  se décompose en une transformation de Fourier de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  (diffraction de Fraunhofer), suivie d'un filtrage linéaire de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{C}$ , puis d'une transparence de courbure de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$ .

## 3.7 Exercices

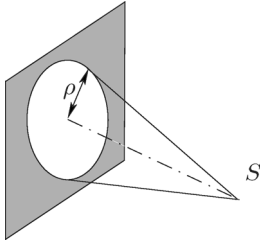
**Exercice 3.1 (Principe de Babinet<sup>26</sup>).** Deux transparences planes  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont complémentaires<sup>27</sup> si leurs fonctions de transmission respectives  $t_1$  et  $t_2$  sont telles que  $t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1$ , pour tout point  $(x, y)$ .

Montrer que les figures de diffraction de Fraunhofer des deux transparences sont identiques, sauf au centre du champ d'observation.

<sup>26</sup> Il s'agit d'une forme « scalaire » (et simplifiée) du principe de Babinet. On montre en effet que le principe de Babinet fait intervenir à la fois le champ électrique et le champ magnétique, donc le caractère vectoriel des ondes électromagnétiques, notamment si les écrans complémentaires sont métalliques [29, 53, 119].

<sup>27</sup> On parle aussi d'écrans complémentaires.

**Exercice 3.2 (Diffraction par une ouverture circulaire. Zones de Fresnel).** *Partie d'examen de DEA, université de Bretagne occidentale, Brest, 1996.* Soit une ouverture circulaire de diamètre  $2\rho$  percée dans un écran opaque et éclairée par une onde plane d'amplitude  $U_0$  (fig. 3.16).



**FIG. 3.16.** Éléments pour l'étude de la diffraction par une ouverture circulaire et la définition des zones de Fresnel.

1. Montrer que l'amplitude du champ en un point  $S$  situé à la distance  $D$  sur l'axe de l'écran est proportionnelle à  $1 - \exp[-i\pi\rho^2/\lambda D]$ . Quelle valeur de  $\rho$  donne-t-elle une amplitude nulle en  $S$ ? une amplitude maximale?
2. Même question pour une ouverture annulaire comprise entre les diamètres  $2\rho_1$  et  $2\rho_2$ . Comment choisir  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pour obtenir une amplitude maximale en  $S$ ?
3. Comment peut-on augmenter l'amplitude du champ en  $S$  (plus exactement son module)?

**Exercice 3.3.** Montrer que le transfert de l'amplitude du champ entre deux plans, qui s'exprime par la relation (3.32), satisfait la composition des opérateurs de champs.

**Exercice 3.4.** Soient deux sphères concentriques  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dont les rayons de courbure sont de même signe (ce qui signifie que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont du même côté du centre de courbure). On note  $D = R_A - R_B$  et suppose  $D > 0$  ( $D$  est la distance de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$ ). Calculer l'amplitude du champ sur  $\mathcal{B}$  quand le champ sur  $\mathcal{A}$  est homogène ( $U_A = U_0$ , une constante).

**Exercice 3.5.** Faire les calculs explicites du transfert du champ d'un émetteur quelconque  $\mathcal{A}$  vers un récepteur quelconque  $\mathcal{B}$  en utilisant la trilogie de la diffraction de Fresnel (proposition 3.6.2). Retrouver la relation (3.85).

**Exercice 3.6.** Proposer une alternative à la trilogie de la diffraction de Fresnel, telle qu'elle est exposée au paragraphe 3.6.5, en permutant les opérations de transformation de Fourier, de filtrage linéaire et de transparence de courbure. Préciser les sphères auxiliaires qui interviennent dans cette décomposition.

**Exercice 3.7.** Retrouver la loi de composition des opérateurs de transfert du champ pour des émetteurs et récepteurs concentriques, en suivant la méthode fréquentielle du paragraphe 3.6.

**Exercice 3.8 (Onde cylindrique et déphasage par passage au foyer).**

1. Retrouver le déphasage de  $\pi$  subi par une onde sphérique au passage de son foyer en appliquant deux fois la diffraction de Fraunhofer.
2. Au lieu d'une onde sphérique, on considère une onde cylindrique.
  - a) Montrer que le « foyer » de l'onde devient une ligne focale.
  - b) Montrer que l'onde cylindrique subit un déphasage de  $\pi/2$  par passage à son foyer.

**Exercice 3.9 (Vérification expérimentale de l'existence du déphasage).** L'expérience de Meslin [29, 40] offre un moyen de vérifier l'existence du déphasage de  $\pi$  par passage au foyer. Montrer qu'on obtient encore cela à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder en plaçant un objectif convergent sur un des deux bras de l'appareil. Faire les calculs correspondants.

# Chapitre 4

## Imagerie cohérente

Après l'étude du transfert du champ par diffraction dans un milieu isotrope et homogène, il est naturel d'examiner ce qui se passe si l'émetteur et le récepteur sont dans deux milieux distincts, séparés par un dioptre, ou plus généralement par un système centré. Un cas particulier concerne le transfert du champ d'un émetteur vers son image cohérente (c.-à-d. en amplitude et en phase). Nous établissons les lois de l'imagerie cohérente et montrons que les formules de conjugaison de l'optique géométrique paraxiale se déduisent de la diffraction métaxiale. La conservation de la phase dans le processus d'imagerie cohérente se traduit par des relations typiquement métaxiales et justifie le recours à des émetteurs et récepteurs sphériques.

### 4.1 Le dioptre

L'étude du dioptre est menée à partir de cas particuliers qui conduisent à la formulation des conditions d'imagerie cohérente pour un émetteur sphérique quelconque. Par imagerie cohérente nous entendons que l'image est une copie homothétique de l'objet, en amplitude et en phase : le facteur d'homothétie est le grandissement transversal (paraxial). Nous admettons que le champ sur l'image puisse être égal au champ sur l'objet à un coefficient multiplicatif près, à condition que ce coefficient soit le même pour tous les points de l'objet (ou de l'image).

#### 4.1.1 Formule de conjugaison

Soit  $\mathcal{D}$  un dioptre sphérique, c'est-à-dire une calotte sphérique séparant deux milieux isotropes et homogènes d'indices de réfraction respectifs  $n$  et  $n'$  (fig. 4.1). Les longueurs d'ondes du rayonnement dans les deux milieux sont  $\lambda$  et  $\lambda'$  et satisfont  $n\lambda = n'\lambda'$ . Soit  $R_D$  le rayon de courbure de  $\mathcal{D}$ , et soit  $O$  son sommet. Soit  $S$  un point lumineux situé sur l'axe du dioptre, dans l'espace objet (indice  $n$ ). La distance<sup>1</sup> de  $O$  à  $S$  est  $d$  (c'est de fait une mesure algébrique :  $d = \overline{OS}$ ). Soit  $S'$  un point de l'espace image, sur l'axe du dioptre et soit  $d' = \overline{OS'}$ .

---

<sup>1</sup> Nous adoptons ici les habitudes de l'optique géométrique paraxiale en prenant la distance – de fait une mesure algébrique – du dioptre vers l'objet. Puisque l'objet est l'émetteur et la surface du dioptre le récepteur,  $d$  est l'opposée de la distance de diffraction habituelle, telle qu'elle est utilisée par exemple au paragraphe 3.3.

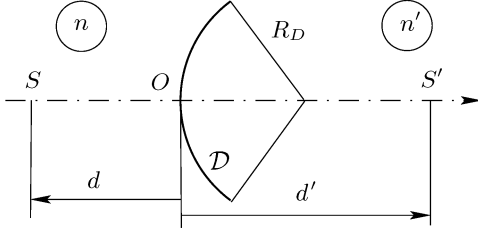


FIG. 4.1. Le dioptr sphérique.

Pour calculer l'amplitude du champ sur  $\mathcal{D}$ , considérons la calotte sphérique  $\mathcal{A}$  tangente à  $\mathcal{D}$  et centrée en  $S$  (son rayon de courbure est  $d$ ). L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est une constante, choisie égale à 1 pour alléger les écritures. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{D}$  se déduit de celle sur  $\mathcal{A}$  par une transparence de courbure et s'exprime sous la forme

$$U_{D-}(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_D} - \frac{1}{d} \right) r^2 \right]. \quad (4.1)$$

(L'indice  $D_-$  indique qu'il s'agit du champ sur la face antérieure du dioptr, immédiatement avant la réfraction.) Une méthode similaire conduit à écrire l'amplitude du champ sur  $\mathcal{D}$  qui correspond à une onde sphérique convergeant en  $S'$ , sous la forme (l'indice  $D_+$  indique qu'il s'agit du champ sur la face postérieure du dioptr)

$$U_{D+}(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda'} \left( \frac{1}{R_D} - \frac{1}{d'} \right) r^2 \right]. \quad (4.2)$$

Le point  $S'$  est l'image de  $S$  à travers le dioptr si l'onde sphérique issue de  $S$  se transforme en une onde sphérique convergeant vers  $S'$ , ce qui a lieu si  $U_{D-}(\mathbf{r}) = U_{D+}(\mathbf{r})$ , quel que soit  $\mathbf{r}$ . (On dit aussi que  $S$  et  $S'$  sont deux points conjugués.) En tenant compte de  $n\lambda = n'\lambda'$ , cela s'écrit

$$n' \left( \frac{1}{d'} - \frac{1}{R_D} \right) = n \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R_D} \right). \quad (4.3)$$

La relation (4.3) prend la forme

$$\frac{n'}{d'} = \frac{n}{d} + \frac{n' - n}{R_D}, \quad (4.4)$$

qui est une formule de conjugaison du dioptr sphérique (de type formule de Descartes).

**Remarque 4.1.1.** Si  $R_D \neq 0$ , le dioptr est un système à foyers : ses distances focales objet ( $f$ ) et image ( $f'$ ) sont telles que

$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R_D}. \quad (4.5)$$

(Voir le paragraphe 4.5.)

**Remarque 4.1.2 (L'optique géométrique est incluse dans la théorie de la diffraction).** Comme annoncé en introduction de ce chapitre, la formule de conjugaison du dioptré, relation (4.4), se déduit de la théorie de la diffraction, c'est-à-dire de la théorie électromagnétique de la lumière ; c'est ce qui vient d'être décrit. On démontre de la même manière la formule de conjugaison d'un miroir sphérique. La définition du grandissement transversal, qui sera donnée au paragraphe 4.1.4, complète la formule de conjugaison. Il est ainsi concevable de déduire de l'étude du dioptré et du miroir sphériques les propriétés d'un système centré quelconque, succession de dioptrés et de miroirs : on utilise pour cela les méthodes classiques de l'optique géométrique paraxiale. Ainsi l'optique géométrique paraxiale est incluse dans la théorie de la diffraction. Ce point sera repris plus en détail au paragraphe 4.5. L'exercice 2.1 a montré que les lois de Descartes se déduisaient de la notion de spectre angulaire ; c'est bien toute l'optique géométrique qui se déduit de la diffraction.

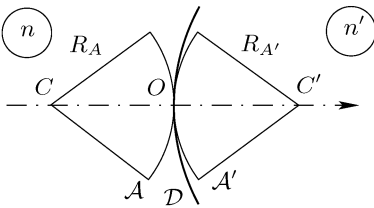
#### 4.1.2 Image d'une calotte sphérique tangente au dioptré

La formule de conjugaison (4.4) montre que  $O$ , le sommet du dioptré, est sa propre image (si  $d = 0$ , alors  $d' = 0$ ). Par conséquent, si une sphère a pour sommet  $O$ , sa sphère image admet également le point  $O$  pour sommet ; cette propriété simplifie la recherche de la position de la sphère image dans ce cas.

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  deux calottes sphériques tangentes à  $\mathcal{D}$ , de centres de courbure respectifs  $C$  et  $C'$ , de rayons  $R_A$  et  $R_{A'}$  (fig. 4.2). Supposons  $\mathcal{A}$  dans l'espace objet et  $\mathcal{A}'$  dans l'espace image. Si  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide, l'emploi de deux transparences de courbure permet d'écrire<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} U_{A'}(\mathbf{r}) &= U_D(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi n'}{\lambda_0} \left( \frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R_D} \right) r^2 \right] \\ &= U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda_0} \left( \frac{n-n'}{R_D} - \frac{n}{R_A} + \frac{n'}{R_{A'}} \right) r^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est l'image cohérente de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  si le terme de phase quadratique de la relation (4.6) vaut 1, quel que soit  $\mathbf{r}$ , et cela conduit à



**FIG. 4.2.** L'image d'une calotte sphérique  $\mathcal{A}$  tangente au dioptré est la sphère  $\mathcal{A}'$ , tangente au dioptré, dont le centre de courbure est le conjugué du centre de courbure de  $\mathcal{A}$ .

<sup>2</sup> Nous remplaçons dans les expressions des transparences de courbure  $\lambda$  par  $\lambda_0/n$  et  $\lambda'$  par  $\lambda_0/n'$ .

$$\frac{n'}{R_{A'}} = \frac{n}{R_A} + \frac{n' - n}{R_D}, \quad (4.7)$$

qui n'est rien d'autre que la relation de conjugaison du dioptre pour les points  $C$  et  $C'$ , puisque  $OC = R_A$  et  $OC' = R_{A'}$ .

En conclusion, une calotte sphérique  $\mathcal{A}'$ , tangente au dioptre, est l'image cohérente<sup>3</sup> de la calotte sphérique  $\mathcal{A}$ , tangente au dioptre, si le centre de courbure de  $\mathcal{A}'$  est l'image paraxiale du centre de  $\mathcal{A}$ . On a

$$U_{A'}(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}). \quad (4.8)$$

**Remarque 4.1.3.** La relation (4.8) ne tient pas compte du coefficient de transmission du dioptre, qui, selon les formules de la réflexion et de la réfraction de Fresnel [29, 40, 84], dépend de l'angle d'incidence. Sous les hypothèses métaxiales, l'incidence est pratiquement normale et le coefficient de transmission est pratiquement constant, si bien que la relation (4.8) se remplace par

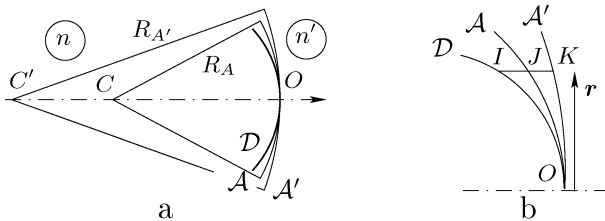
$$U_{A'}(\mathbf{r}) = \tau U_A(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

où  $\tau$  est le coefficient de transmission de Fresnel à incidence normale, tel que

$$\tau = \frac{2n}{n + n'}. \quad (4.10)$$

**Remarque 4.1.4.** La figure 4.2 (comme la figure 4.5) montre un schéma de principe qui n'est pas réaliste mais qui permet de bien séparer les calottes sphériques  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ . La figure 4.3–a montre un cas réel. Les points  $C$  et  $C'$  sont par exemple les points de Weierstrass (ou d'Young) du dioptre sphérique. Si  $n > n'$ , le point objet  $C$  est réel et le point image  $C'$  est virtuel. La calotte sphérique  $\mathcal{A}$  est, optiquement, dans l'espace objet, même si, géométriquement, elle est au-delà du dioptre.

Il arrive que les calottes sphériques  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  de la figure 4.3–a sont des surfaces d'ondes : le point  $O$  leur étant commun, tous les points de ces calottes



**FIG. 4.3.** (a) Cas réel d'imagerie de deux sphères tangentes au dioptre. (b) Le chemin optique  $[JIK]$  est nul.

<sup>3</sup> Nous disons aussi que l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est l'image de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$ .

doivent être en phase. C'est d'ailleurs ce que traduit la relation (4.8) pour deux points conjugués. Il n'est possible de satisfaire cette relation que si le chemin optique entre deux points conjugués est nul (puisqu'il doit être égal à sa valeur en  $O$ ). La figure 4.3-b montre comment cela se réalise dans la situation de la figure 4.3-a : le chemin optique  $[JI]$  est négatif. Puisque le point  $J$  est dans l'espace objet, on a  $[JI] = n \overline{JI}$ . On a aussi  $[IK] = n' \overline{IK}$ . Comme  $n > n'$ , les longueurs des segments doivent satisfaire l'inégalité  $IJ < IK$  de façon à obtenir  $[JK] = n \overline{JI} + n' \overline{IK} = 0$ .

#### 4.1.3 Image d'une calotte sphérique centrée sur le dioptré

Soit  $\mathcal{C}$  un émetteur sphérique à la distance  $d$  de  $\mathcal{D}$ , centré en  $O$  et de sommet  $S$  :  $\overline{OS} = d$  (fig. 4.4). Son rayon de courbure est  $-d$ . Soit  $\mathcal{F}$  la sphère de Fourier de  $\mathcal{C}$  ; elle est centrée en  $S$  et son rayon est  $d$ . Ainsi  $\mathcal{F}$  est tangente à  $\mathcal{D}$ . Comme  $d$  est l'opposée de la distance habituellement choisie pour exprimer le transfert du champ par diffraction d'un émetteur vers sa sphère de Fourier, nous avons ici, avec des coordonnées  $\mathbf{s}$  sur  $\mathcal{F}$  et selon le théorème 1, p. 48,

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{-i}{\lambda d} \widehat{U}_C\left(-\frac{\mathbf{s}}{\lambda d}\right). \quad (4.11)$$

L'image de  $\mathcal{F}$  est la sphère  $\mathcal{F}'$  tangente à  $\mathcal{D}$  et centrée en  $S'$ , l'image paraxiale de  $S$  (c'est ce qui est démontré au paragraphe précédent). Le point  $S'$  est à la distance  $d'$  de  $O$ , telle que

$$\frac{n'}{d'} = \frac{n}{d} + \frac{n' - n}{R_D}. \quad (4.12)$$

Soit  $\mathcal{C}'$  la sphère de sommet  $S'$ , centrée sur  $\mathcal{D}$ . La sphère  $\mathcal{C}'$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{F}'$  et son rayon de courbure est  $-d'$ . Avec des coordonnées  $\mathbf{r}$  sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathbf{r}'$  sur  $\mathcal{C}'$ , l'amplitude du champ sur  $\mathcal{C}'$  est

$$\begin{aligned} U_{C'}(\mathbf{r}') &= \frac{i}{\lambda' d'} \widehat{U}_{F'}\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda' d'}\right) = \frac{i}{\lambda' d'} \widehat{U}_F\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda' d'}\right) \\ &= \frac{\lambda d}{\lambda' d'} \widehat{U}_C\left(-\frac{\lambda d}{\lambda' d'} \mathbf{r}'\right) = \frac{n' d}{n d'} U_C\left(\frac{n' d}{n d'} \mathbf{r}'\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

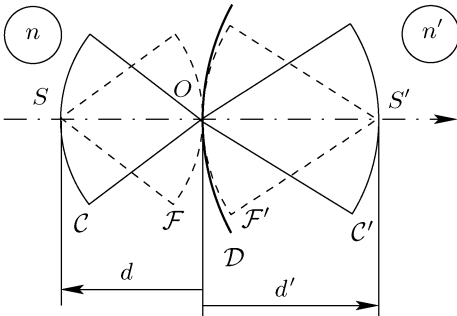


FIG. 4.4. L'image de la calotte sphérique  $\mathcal{C}$ , centrée sur le dioptré, est la sphère  $\mathcal{C}'$ , centrée elle aussi sur le dioptré, et dont le sommet  $S'$  est le conjugué du sommet  $S$  de  $\mathcal{C}$ .

La relation (4.13) montre que  $C'$  est l'image cohérente de  $C$ . Le grandissement transversal (ou latéral) pour les sommets (notion paraxiale) est  $g_s$ , défini par  $\mathbf{r}' = g_s \mathbf{r}$ ; il vaut

$$g_s = \frac{nd'}{n'd}. \quad (4.14)$$

La correspondance entre les champs sur  $C$  et  $C'$  s'écrit (au coefficient de transmission près, voir la remarque 4.1.3)

$$U_{C'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_C\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s}\right). \quad (4.15)$$

En conclusion, l'image d'une calotte sphérique centrée sur le dioptré est une calotte sphérique elle aussi centrée sur le dioptré et dont le sommet est l'image paraxiale du sommet de la calotte objet.

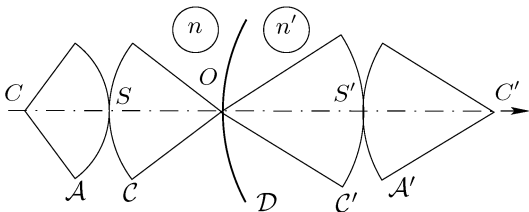
#### 4.1.4 Image d'une calotte sphérique quelconque

Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur sphérique de rayon de courbure  $R_A$ , de sommet  $S$  et de centre  $C$ , situé dans l'espace objet (fig. 4.5). Soit  $d = \overline{OS}$ . Soit la sphère  $\mathcal{C}$  tangente à  $\mathcal{A}$  et centrée en  $O$  : son sommet est  $S$  et son rayon est  $-d$ . L'amplitude du champ sur  $\mathcal{C}$  se déduit de celle du champ sur  $\mathcal{A}$  en appliquant une transparence de courbure sous la forme

$$U_C(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{i\pi n}{\lambda_0} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right]. \quad (4.16)$$

Soit  $C'$  l'image cohérente de  $C$  : elle passe par  $S'$  avec  $d' = \overline{OS'}$ ; les distances  $d$  et  $d'$  satisfont la relation (4.12) qui exprime la conjugaison de  $S$  et  $S'$ . Les relations (4.13) et (4.16) conduisent à écrire l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$ , tangente à  $C'$  et de rayon  $R_{A'}$  (son centre est  $C'$ ), sous la forme

$$\begin{aligned} U_{A'}(\mathbf{r}') &= U_{C'}(\mathbf{r}') \exp \left[ -\frac{i\pi n'}{\lambda_0} \left( \frac{1}{R_{A'}} + \frac{1}{d'} \right) r'^2 \right] \\ &= \frac{n'd}{nd'} U_A\left(\frac{n'd}{nd'} \mathbf{r}'\right) \exp \left[ \frac{i\pi n}{\lambda_0} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{R_A} \right) \frac{n'^2 d^2}{n^2 d'^2} r'^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{i\pi n'}{\lambda_0} \left( \frac{1}{R_{A'}} + \frac{1}{d'} \right) r'^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$



**FIG. 4.5.** Image cohérente d'une calotte sphérique quelconque  $\mathcal{A}$  par un dioptré. Il y a double conjugaison : conjugaison des sommets  $S$  et  $S'$ ; conjugaison des centres de courbure  $C$  et  $C'$ .

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est l'image cohérente de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  si le terme de phase quadratique de la relation (4.17) vaut 1, quel que soit  $\mathbf{r}'$ , et cela a lieu si

$$\frac{d'}{n'} \left( 1 + \frac{d'}{R_{A'}} \right) = \frac{d}{n} \left( 1 + \frac{d}{R_A} \right). \quad (4.18)$$

Si  $q = \overline{OC}$  et  $q' = \overline{OC'}$ , alors  $R_A = q - d$  et  $R_{A'} = q' - d'$ , et la relation (4.18) s'écrit

$$n' \left( \frac{1}{d'} - \frac{1}{q'} \right) = n \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{q} \right). \quad (4.19)$$

D'autre part, la relation (4.12) s'applique à  $S$  et  $S'$  qui sont conjugués, et de la relation (4.19) résulte

$$\frac{n'}{q'} = \frac{n}{q} + \frac{n' - n}{R_D}, \quad (4.20)$$

qui signifie que  $C'$  est l'image paraxiale de  $C$ .

La relation entre l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  et sur son image  $\mathcal{A}'$ , déduite de la relation (4.17), s'écrit

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s} \right), \quad (4.21)$$

où  $g_s$  est le grandissement transversal aux sommets ; il est donné par la relation (4.14).

Ce qui précède s'énonce ainsi :

**Proposition 4.1.1 (Imagerie cohérente à travers un dioptré).** *L'amplitude du champ sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}'$  est l'image cohérente, à travers un dioptré sphérique, de l'amplitude du champ sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}$  si, et seulement si, le sommet et le centre de courbure de  $\mathcal{A}'$  sont les images paraxiales respectives du sommet et du centre de courbure de  $\mathcal{A}$ . L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est liée à celle sur  $\mathcal{A}$  par la relation (4.21), où  $g_s$  est le grandissement transversal aux sommets (entre l'objet et son image).*

**Remarque 4.1.5.** La sphère  $\mathcal{A}$  passe par  $S$  et son image  $\mathcal{A}'$  doit nécessairement passer par  $S'$ , l'image de  $S$  : il est logique d'imposer *a priori* à  $\mathcal{A}'$  d'être tangente à la sphère  $\mathcal{C}$  ; c'est ce que nous avons fait. L'unicité de la sphère image  $\mathcal{A}'$  en résulte. Le même raisonnement a été implicitement utilisé au paragraphe 4.1.3.

**Remarque 4.1.6.** Les cas étudiés aux paragraphes 4.1.2 et 4.1.3 entrent clairement dans le cadre de la proposition 4.1.1, puisque le dioptré est sa propre image. Par exemple, le centre de courbure d'une sphère centrée sur le dioptré est sa propre image et par conséquent c'est le centre de courbure de la sphère image.

**Remarque 4.1.7.** La remarque 4.1.3 s'applique encore ici.

**Remarque 4.1.8.** On sait qu'un dioptré réfléchit en partie l'onde incidente, le coefficient de réflexion de Fresnel sous incidence normale étant [84, 119]

$$r = \frac{n - n'}{n + n'} . \quad (4.22)$$

Le dioptré se comporte comme un miroir partiel auquel s'adaptent les résultats précédents (voir par exemple l'exercice 4.2).

#### 4.1.5 Invariants du dioptré

Avec les notations antérieures, la formule de conjugaison du dioptré sphérique s'écrit

$$\frac{n'}{d'} - \frac{n}{d} = \frac{n' - n}{R_D} . \quad (4.23)$$

Le deuxième membre de cette relation est une constante (en ce sens qu'il ne dépend pas de la position de l'objet ni de celle de l'image) et par conséquent le premier membre est aussi une constante. Quel que soit l'objet, il existe une relation fixe entre la position de l'objet et celle de l'image.

**Définition 4.1.1 (Invariant de Gauss du dioptré).** *Soit un dioptré sphérique qui sépare deux milieux d'indices  $n$  et  $n'$  ; si  $d$  est la distance du sommet du dioptré au sommet d'un objet (émetteur sphérique) et  $d'$  la distance du sommet du dioptré au sommet de l'image de l'émetteur, la quantité*

$$\frac{n'}{d'} - \frac{n}{d} \quad (4.24)$$

*est l'invariant de Gauss du dioptré ; c'est une constante.*

La relation (4.19) montre qu'il existe un autre invariant pour le dioptré, indépendamment de l'objet et de sa courbure.

**Définition 4.1.2 (Invariant métaxial du dioptré – G. Bonnet).** *Soit un dioptré sphérique qui sépare deux milieux d'indices  $n$  et  $n'$  ; si  $d$  est la distance du sommet du dioptré au sommet d'un émetteur sphérique et  $q$  la distance du sommet du dioptré au centre de courbure de l'émetteur, la quantité*

$$\frac{n}{d} - \frac{n'}{q} \quad (4.25)$$

*est indépendante du milieu (objet ou image) ; c'est l'invariant métaxial du dioptré.*

**Remarque 4.1.9.** La définition de l'invariant de Gauss et celle de l'invariant métaxial d'un dioptré sphérique s'appliquent à un dioptré plan (voir l'exercice 4.1).

### 4.1.6 Loi du grandissement des rayons pour le dioptre

**Définition 4.1.3 (Grandissement des rayons de courbure).** *Si la sphère  $\mathcal{A}'$ , de rayon de courbure  $R_{A'}$ , est l'image de  $\mathcal{A}$ , de rayon  $R_A$ , le grandissement des rayons est (par définition)*

$$g_r = \frac{R_{A'}}{R_A}. \quad (4.26)$$

Soit  $\mathcal{A}'$  l'image cohérente de  $\mathcal{A}$  à travers un dioptre. Le grandissement transversal aux sommets est

$$g_s = \frac{nd'}{n'd}. \quad (4.27)$$

Les centres de courbure étant conjugués, il existe un grandissement (transversal) aux centres qui s'écrit, avec les notations déjà utilisées,

$$g_c = \frac{nq'}{n'q}. \quad (4.28)$$

Le grandissement des rayons est alors

$$g_r = \frac{R_{A'}}{R_A} = \frac{q' - d'}{q - d} = \frac{nq'd'}{n'qd} = \frac{n'}{n} g_s g_c. \quad (4.29)$$

(On obtient la troisième égalité à l'aide de l'invariant métaxial.) La relation  $g_r = g_s g_c n'/n$  constitue la loi du grandissement des rayons de Bonnet pour le dioptre. Nous l'énoncerons formellement pour les systèmes centrés généraux (Théorème 3, p. 80).

## 4.2 Systèmes centrés

### 4.2.1 Image cohérente du champ sur un émetteur sphérique

Un système centré (lentille, objectif) est formé d'une succession de dioptries ou de miroirs (systèmes catadioptriques) ayant un axe commun<sup>4</sup>, et avant de chercher à étendre aux systèmes centrés les résultats établis pour le dioptre, il faudrait étudier le miroir sphérique ; il est clair toutefois que l'étude menée pour le dioptre se transpose telle quelle (exercice 4.2) : nous admettons donc que l'imagerie cohérente par un miroir impose la conjugaison des sommets et des centres de courbure d'un émetteur et de son image.

Soit un système centré et un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  dans l'espace objet. À cet émetteur correspond une suite d'images à travers les dioptries (ou miroirs) successifs, la dernière image étant l'image de  $\mathcal{A}$  à travers le système centré. À

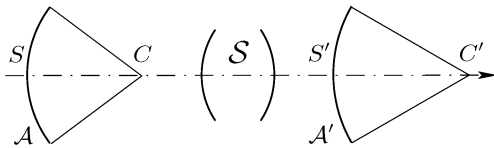
<sup>4</sup> Cet axe peut être une ligne brisée si le système comporte des miroirs plans.

chaque traversée d'un dioptré (ou réflexion sur un miroir) il y a double conjugaison des centres et des sommets. Cette double conjugaison reste valable pour la succession des dioptres et donc pour le système centré. À chaque conjugaison à travers un des dioptres constituant le système correspond un grandissement transversal ; le grandissement transversal du système (pour la conjugaison considérée) est le produit des grandsissements transversaux des conjugaisons successives (voir l'exercice 4.5).

Nous énonçons (voir fig. 4.6) :

**Théorème 2 (Imagerie cohérente – G. Bonnet).** *L'amplitude du champ sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}'$  est l'image cohérente de l'amplitude du champ sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}$  à travers un système centré si, et seulement si, le sommet et le centre de courbure de  $\mathcal{A}'$  sont les images paraxiales respectives du sommet et du centre de courbure de  $\mathcal{A}$ . Si  $g_s$  est le grandissement transversal aux sommets (entre objet et image), alors*

$$U_{\mathcal{A}'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_{\mathcal{A}}\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s}\right). \quad (4.30)$$



**FIG. 4.6.** Imagerie cohérente à travers un système centré quelconque  $\mathcal{S}$ . Il y a double conjugaison des sommets et des centres de courbure entre la sphère objet  $\mathcal{A}$  et son image cohérente  $\mathcal{A}'$ .

**Remarque 4.2.1.** La remarque 4.1.3 s'applique à la relation (4.30).

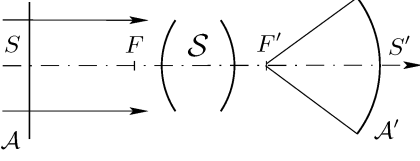
**Remarque 4.2.2.** Historiquement, le théorème 2 se trouve dans un article de Kogelnik [125] mais limité aux miroirs sphériques (cet article se rapporte aux résonateurs optiques pour lesquels il est nécessaire de rechercher quelle est l'image cohérente du champ sur un miroir à travers l'autre miroir formant le résonateur). La forme générale, valable pour tout système centré, semble être un des apports de G. Bonnet.

#### 4.2.2 Image cohérente d'un émetteur plan à travers un système à foyers

Soit un système centré à foyers  $\mathcal{S}$  (objectif de microscope, objectif photographique, ...) et un émetteur plan  $\mathcal{A}$  de sommet  $S$  (fig. 4.6). Le centre de courbure de  $\mathcal{A}$  est à l'infini et son image est le foyer image  $F'$  du système. L'image de  $\mathcal{A}$  est la calotte sphérique  $\mathcal{A}'$  de sommet  $S'$  (l'image paraxiale de  $S$ ) et de centre  $F'$ . Il en résulte que l'image cohérente (en amplitude et en phase) d'un objet plan à travers un système à foyers n'est pas un plan mais une sphère. Nous avons là une des raisons pour lesquelles nous devons utiliser

des sphères : il n'est pas possible, en imagerie cohérente, de travailler plan-plan (avec un système à foyers).

On montre que seul un système afocal donne une image cohérente plane d'un émetteur plan (voir l'exercice 4.4).



**FIG. 4.7.** L'image cohérente d'un émetteur plan  $\mathcal{A}$  à travers un système centré à foyers est une calotte sphérique  $\mathcal{A}'$  centrée sur le foyer image du système.

### 4.2.3 Loi du grandissement des rayons

La loi du grandissement des rayons, établie pour un dioptré (paragraphe 4.1.6), s'étend aux systèmes centrés composés de dioptrés ou de miroirs.

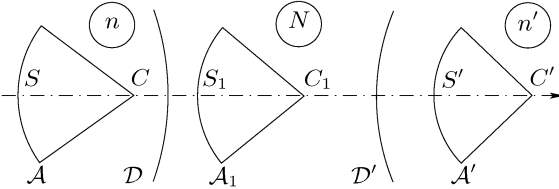
Démontrons-la pour deux dioptrés  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  constituant un système centré  $\mathcal{S}$  (fig. 4.8). Les indices successifs sont  $n$ ,  $N$  et  $n'$ . L'émetteur est  $\mathcal{A}$  (sommet  $S$  et centre  $C$  dans l'espace objet) : son image est  $\mathcal{A}_1$  dans l'espace intermédiaire (sommet  $S_1$  et centre  $C_1$ ) et  $\mathcal{A}'$  (sommet  $S'$  et centre  $C'$ ) à travers l'ensemble des deux dioptrés. La calotte sphérique  $\mathcal{A}'$  est aussi l'image de  $\mathcal{A}_1$  à travers le dioptré  $\mathcal{D}'$ . La loi du grandissement des rayons pour l'imagerie de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_1$  à travers le dioptré  $\mathcal{D}$  s'écrit

$$\frac{R_{A_1}}{R_A} = g_{r1} = \frac{N}{n} g_{s1} g_{c1}, \quad (4.31)$$

où  $g_{s1}$  est le grandissement transversal pour la conjugaison de  $S$  et  $S_1$ , et  $g_{c1}$  le grandissement pour la conjugaison de  $C$  et  $C_1$ .

Pour l'imagerie de  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}'$  à travers  $\mathcal{D}'$ , si  $g_{s2}$  est le grandissement transversal pour la conjugaison de  $S_1$  et  $S'$ , et  $g_{c2}$  le grandissement pour la conjugaison de  $C_1$  et  $C'$ , le grandissement des rayons s'écrit

$$\frac{R_{A'}}{R_{A_1}} = g_{r2} = \frac{n'}{N} g_{s2} g_{c2}. \quad (4.32)$$



**FIG. 4.8.** Schéma de principe du passage à travers deux dioptrés successifs pour démontrer la loi du grandissement des rayons de Bonnet pour un système centré. L'émetteur  $\mathcal{A}$  a pour images successives  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}'$ .

Le grandissement entre  $S$  et  $S'$  est  $g_s = g_{s1} g_{s2}$ , et celui entre  $C$  et  $C'$  est  $g_c = g_{c1} g_{c2}$  (voir l'exercice 4.5). Pour le grandissement des rayons entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ , il en résulte

$$g_r = \frac{R_{A'}}{R_A} = g_{r1} g_{r2} = \frac{n'}{n} g_s g_c. \quad (4.33)$$

Nous généralisons et énonçons :

**Théorème 3 (Loi du grandissement des rayons de Bonnet).** *Dans les conditions du théorème 2, si  $g_s$  est le grandissement transversal aux sommets et  $g_c$  le grandissement transversal aux centres de courbure, et si  $n$  et  $n'$  sont les indices de réfraction respectifs du milieu objet et du milieu image, le grandissement des rayons de courbure (entre sphère objet et sphère image) est*

$$g_r = \frac{n'}{n} g_s g_c. \quad (4.34)$$

**Remarque 4.2.3.** Traditionnellement, en optique paraxiale, on utilise la notion de grandissement longitudinal (ou axial). C'est en principe une notion différentielle<sup>5</sup> de la forme

$$g_z = \frac{dz'}{dz}, \quad (4.35)$$

où  $z$  est suivant l'axe du système (c'est la direction de propagation) et où  $dz'$  est la variation de la position de l'image pour une variation  $dz$  de la position de l'objet. Si  $g_y$  est le grandissement transversal pour une position de l'objet, le grandissement axial pour cette même position est [156]

$$g_z = \frac{n'}{n} g_y^2. \quad (4.36)$$

Il s'agit là d'une relation classique de l'optique de Gauss qui n'est, de fait, qu'un cas particulier de la loi de Bonnet. En effet, si le centre de courbure de l'émetteur tend vers le sommet de ce dernier, le centre de courbure de l'image tend vers le sommet de l'image et par conséquent le grandissement transversal aux centres,  $g_c$ , tend vers le grandissement transversal aux sommets  $g_s$ , de telle sorte qu'à la limite, le grandissement des rayons tend vers  $(n'/n)g_s^2$ . Mais  $g_s$  n'est rien d'autre que le grandissement transversal pour la position de l'objet en optique paraxiale, et le grandissement des rayons est l'équivalent du grandissement longitudinal. La loi exprimée par la relation (4.36) est un cas limite de la loi de Bonnet.

**Remarque 4.2.4 (Grandissement longitudinal pour des distances finies).** La loi du grandissement des rayons se généralise en loi du grandissement longitudinal pour des distances finies. Soient  $A$  et  $C$  deux points de l'axe optique

<sup>5</sup> Sous cette forme, cette notion n'a de sens que loin des foyers.

d'un système centré, dont les images paraxiales sont  $A'$  et  $C'$ . Le grandissement axial pour cette double conjugaison est

$$g_z = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{n'}{n} g_a g_c, \quad (4.37)$$

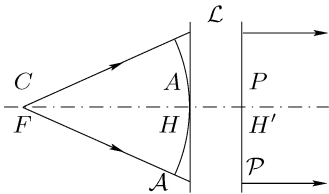
où  $g_a$  est le grandissement transversal de la conjugaison  $(A, A')$  et  $g_c$  celui de la conjugaison  $(C, C')$ . Pour démontrer ce résultat, il suffit de considérer la sphère  $\mathcal{A}$  de sommet  $A$  et centre  $C$  et son image cohérente  $\mathcal{A}'$  de sommet  $A'$  et centre  $C'$ , puis d'appliquer la loi du grandissement des rayons de Bonnet.

L'exercice 4.7 établit un lien entre la loi du grandissement des rayons et une forme particulière de la relation de Lagrange–Helmholtz [68].

#### 4.2.4 Application : obtention sur un plan du champ qui existe sur une calotte sphérique

Nous avons vu au paragraphe 3.4 qu'une transparence plane éclairée par une onde divergente (ou convergente) était équivalente, en théorie métaxiale, à un émetteur sphérique tangent à la transparence et centré sur le foyer de l'onde. Nous examinons maintenant le problème voisin d'obtenir sur un plan  $\mathcal{P}$  le champ qu'on a sur une calotte sphérique  $\mathcal{A}$  (même amplitude et même phase). Pour fixer les idées, supposons que  $\mathcal{A}$  soit une calotte sphérique convexe, par rapport à la direction de propagation (fig. 4.9). Il s'agit de former une image plane de  $\mathcal{A}$ , et pour cela nous utilisons un objectif  $\mathcal{L}$ . Le théorème 2 indique que l'image du centre  $C$  de  $\mathcal{A}$  doit être à l'infini. Ce sera le cas si  $C$  se confond avec le foyer objet  $F$  de l'objectif. Le sommet  $P$  de  $\mathcal{P}$  est l'image (paraxiale) du sommet de  $\mathcal{A}$ . Si nous souhaitons un grandissement transversal de 1 entre le champ sur  $\mathcal{A}$  et le champ sur  $\mathcal{P}$ , le point  $A$  doit se confondre avec le point principal objet<sup>6</sup>  $H$  de  $\mathcal{L}$ , et  $P$  se confond alors avec le point principal image  $H'$ . Dans ces conditions, les amplitudes des champs sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{P}$  sont égales :  $U_P(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r})$ .

Le paragraphe 13.1.2 explique comment obtenir un grandissement différent de 1, et le paragraphe 13.2.3 comment utiliser un objectif divergent si  $\mathcal{A}$  est concave.



**FIG. 4.9.** L'objectif  $\mathcal{L}$ , représenté par ses points principaux  $H$  et  $H'$  et son foyer objet  $F$ , permet d'obtenir sur le plan  $\mathcal{P}$  la même amplitude du champ que sur la calotte sphérique  $\mathcal{A}$ .

<sup>6</sup> La notion de point principal d'un système centré, comme celle de foyer, déjà utilisée, est suffisamment connue pour que nous l'employions dès à présent sans la définir au préalable. Nous introduirons toutefois logiquement ces notions au paragraphe 4.5.

### 4.3 Transfert général à travers un système centré

#### 4.3.1 Décomposition du transfert en une imagerie et un phénomène de diffraction–propagation

Après l'examen du transfert du champ par imagerie, se pose le problème plus général du transfert du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$  (rayon  $R_A$ ), situé dans l'espace objet d'un système centré (indice  $n$ ), vers un récepteur quelconque  $\mathcal{B}'$  de l'espace image (indice  $n'$ ). La question se résoud en faisant intervenir la sphère  $\mathcal{A}'$ , image cohérente de  $\mathcal{A}$  à travers le système (fig. 4.10). Le transfert de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}'$  est la composition du transfert par imagerie cohérente de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$  et du transfert par diffraction de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{B}'$ . Si  $g_a$  est le grandissement transversal dans l'imagerie de  $\mathcal{A}$  (grandissement aux sommets), le premier de ces deux transferts se traduit par

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_a} U_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_a} \right). \quad (4.38)$$

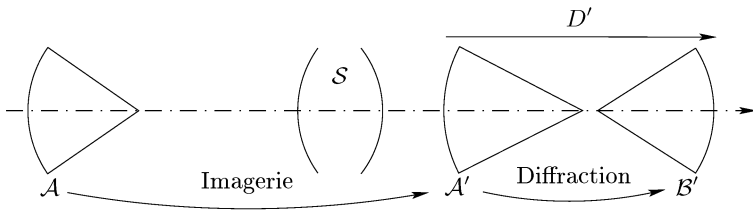
Si  $D'$  est la distance du sommet de  $\mathcal{A}'$  au sommet de  $\mathcal{B}'$ , si  $R_{A'}$  est le rayon de courbure de  $\mathcal{A}'$  et  $R_{B'}$  celui de  $\mathcal{B}'$ , alors

$$U_{B'}(\mathbf{s}') = \frac{i}{\lambda' D'} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda'} \left( \frac{1}{R_{B'}} + \frac{1}{D'} \right) s'^2 \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda' D'} \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}' \right] \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda'} \left( \frac{1}{D'} - \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2 \right] U_{A'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4.39)$$

où  $\lambda'$  est la longueur d'onde dans l'espace image ( $n\lambda = n'\lambda'$ ). Le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}'$  s'écrit enfin

$$U_{B'}(\mathbf{s}') = \frac{i}{\lambda' D' g_a} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda'} \left( \frac{1}{R_{B'}} + \frac{1}{D'} \right) s'^2 \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda' D'} \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}' \right] \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda'} \left( \frac{1}{D'} - \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2 \right] U_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_a} \right) d\mathbf{r}'. \quad (4.40)$$

Un autre point de vue est envisageable : il fait intervenir la sphère  $\mathcal{B}$ , l'antécédente de  $\mathcal{B}'$  à travers le système centré (ce qui signifie que  $\mathcal{B}'$  est l'image de  $\mathcal{B}$ ,



**FIG. 4.10.** Une première façon de décrire le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}'$  à travers le système centré  $\mathcal{S}$ . Ce transfert résulte de la composition d'une imagerie cohérente de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$  et d'un phénomène de diffraction en milieu homogène de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{B}'$  (pris dans cet ordre).

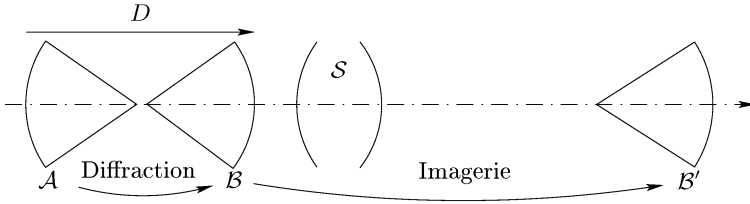
fig. 4.11). Le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}'$  est la composition du transfert par diffraction de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  et de celui, par imagerie cohérente, de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Si  $R_B$  est le rayon de courbure de la calotte  $\mathcal{B}$  et si  $D$  est la distance du sommet de  $\mathcal{A}$  au sommet de  $\mathcal{B}$ , alors

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.41)$$

Si  $g_b$  est le grandissement transversal pour l'imagerie de  $\mathcal{B}$ , on obtient finalement

$$U_{B'}(\mathbf{s}') = \frac{1}{g_b} U_B \left( \frac{\mathbf{s}'}{g_b} \right) = \frac{i}{\lambda D g_b} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) \frac{s'^2}{g_b^2} \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D g_b} \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r} \right] \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.42)$$

Les relations (4.40) et (4.42) sont bien sûr équivalentes. La preuve est proposée en exercice (exercice 4.15).



**FIG. 4.11.** Une deuxième façon de décrire le même transfert que celui de la figure 4.10. On compose un phénomène de diffraction de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  avec une imagerie cohérente de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

#### 4.3.2 Mise en œuvre pratique

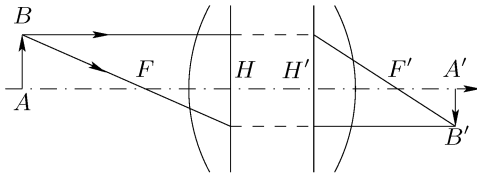
L'expérience acquise lors de l'enseignement de l'imagerie cohérente nous conduit à préciser les choses suivantes, pourtant élémentaires, et à insister sur la généralité des résultats obtenus aux paragraphes précédents (imagerie cohérente et transfert général). Les éléments d'optique géométrique que nous utilisons sont suffisamment connus [156] pour être cités sans démonstration (le paragraphe 4.5 comporte la démonstration des formules de conjugaison).

La force du théorème d'imagerie cohérente est d'être applicable à tout système centré, quels que soient les éléments qui le composent. Or tout système centré est soit afocal, soit un système à foyers (ce résultat bien connu est démontré au paragraphe 4.5.2).

Tout système à foyers se ramène au schéma canonique<sup>7</sup> de la figure 4.12 où  $F$  est le foyer objet,  $F'$  le foyer image,  $H$  le point principal objet (sur l'axe) et  $H'$  le point principal image<sup>8</sup> [77, 156]. La figure montre comment construire l'image (paraxiale) d'un objet  $AB$ , et en particulier comment déterminer la position de l'image  $A'$  à partir de celle de l'objet  $A$ . Pour le calcul, on utilise par exemple la formule de conjugaison de Newton

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f f', \quad (4.43)$$

où  $f$  est la distance focale objet ( $f = \overline{HF}$ ) et  $f'$  la distance focale image ( $f' = \overline{H'F'}$ ).



**FIG. 4.12.** Schéma canonique d'un système centré à foyers et construction de principe d'une image.

Si le système est afocal, il se réduit en général<sup>9</sup> à la succession deux systèmes à foyers (objectif et oculaire par exemple), le foyer image du premier système étant confondu avec le foyer objet du second. Nous considérons encore une telle décomposition comme canonique.

Dans ces conditions, la recherche de l'image cohérente d'un émetteur  $\mathcal{A}$ , de sommet  $A$  et centre  $C$ , est immédiate si on dispose du schéma canonique du système (et sait comment situer l'émetteur par rapport au système). Il n'y a que deux conjugaisons à calculer : celle du sommet  $A$  et celle du centre de courbure  $C$ , que le système soit un dioptré, une lentille simple ou un objectif zoom comportant une quinzaine de lentilles réparties en divers groupes ! L'optique cohérente métaxiale utilise les résultats de l'optique géométrique paraxiale.

En présence d'un système complexe (composé), la méthode préconisée consiste d'abord à réduire le système à ses éléments canoniques. Rappelons la formule de Gullstrand<sup>10</sup> [156]

$$D = D_1 + D_2 - \frac{e}{N} D_1 D_2, \quad (4.44)$$

<sup>7</sup> Dessiné, par convention, pour un système convergent. La position des foyers est inversée si le système est divergent. De même, il arrive que la position des points principaux soit inversée. Cela ne change rien au principe de construction d'une image, tel qu'il ressort de la figure 4.12.

<sup>8</sup> Il existe d'autres points cardinaux : points nodaux, anti-principaux, anti-nodaux. Sauf cas particulier, ils ont moins d'intérêt pour nous.

<sup>9</sup> Une lame à faces parallèles n'entre pas dans ce schéma. On la traite pour ce qu'elle est : la succession de deux dioptrés plans. Un système de transport d'image est une succession de systèmes afocaux qu'on traite comme telle.

<sup>10</sup> Allvar Gullstrand, prix Nobel de physiologie et médecine en 1911 pour ses travaux d'optique physiologique.

qui donne la vergence<sup>11</sup>  $D$  d'un système centré composé d'un premier système de vergence  $D_1$  et d'un deuxième de vergence  $D_2$ ,  $N$  étant l'indice de réfraction du milieu qui sépare les deux systèmes et  $e$  « l'interstice », c'est-à-dire la distance (mesure algébrique) du point principal image du premier système au point principal objet du second.

Cette formule s'applique plusieurs fois de suite pour réduire un système composé par exemple de plusieurs lentilles. Exécuté « à la main », le procédé est fastidieux, sauf pour un nombre réduit de composants (deux ou trois éléments). Il existe des méthodes matricielles équivalentes pour traiter la question de façon systématique ; leur emploi est encore fastidieux (au-delà de deux ou trois éléments). Il existe surtout des programmes informatiques permettant d'effectuer ces opérations.

Une fois les éléments cardinaux du système connus, et la sphère objet située par rapport à eux (position du sommet  $A$ , position du centre  $C$ ), on calcule la position des images  $A'$  et  $C'$ , dont on déduit la sphère image, puis le grandissement transversal entre  $A$  et  $A'$  (grandissement aux sommets). Une méthode alternative consiste à calculer les images successives de  $A$  et  $C$  à travers les différents éléments qui composent le système, avec l'avantage que cette façon de faire s'applique à un système afocal (par exemple à un système de transport d'image). Là encore les moyens informatiques aident beaucoup. La sphère image connue, la relation (4.30) donne enfin le transfert de l'amplitude du champ de l'objet à son image. La question de l'imagerie cohérente d'un émetteur à travers un système complexe est alors résolue. On voudra bien remarquer qu'il est inutile de calculer le transfert du champ à travers chaque élément du système.

La méthode se transpose au transfert général étudié au paragraphe 4.3.1. En résumé, le calcul du transfert du champ par diffraction à travers un système centré composé de plusieurs éléments, comporte les étapes suivantes :

- 1° Réduction du système centré à son schéma canonique, selon les méthodes de l'optique géométrique paraxiale ;
- 2° Calcul de la position de l'image paraxiale du sommet de l'émetteur et de celle de l'image de son centre de courbure. Calcul du grandissement transversal de la conjugaison aux sommets ;
- 3° Application du théorème 2 pour obtenir l'image cohérente de l'émetteur ;
- 4° Expression de la diffraction–propagation de l'image cohérente de l'émetteur au récepteur.

On peut inverser l'ordre des opérations, conformément à l'étude du paragraphe 4.3.1, et chercher l'antécédent du récepteur à travers le système (évidemment ce n'est plus la même imagerie, ni la même diffraction, qu'il faut prendre en compte). Il est inutile (et souvent fastidieux, voire impraticable), nous l'avons déjà dit, d'examiner le transfert du champ par diffraction à travers chacun des éléments qui composent le système.

Des exemples sont donnés au chapitre 13.

<sup>11</sup> La vergence est  $D = n'/f' = -n/f$ , où  $n$  est l'indice de l'espace objet et  $n'$  celui de l'espace image. La vergence se mesure en dioptries :  $1\delta = 1\text{ m}^{-1}$ . La vergence d'un système afocal est nulle.

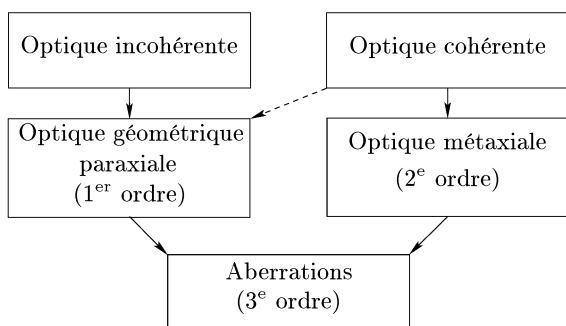
## 4.4 Conclusion : image paraxiale, image métaxiale

L'optique métaxiale joue vis-à-vis de l'optique cohérente le rôle que joue l'optique paraxiale pour l'optique incohérente et, comme elle, fournit un cadre pour l'analyse de la formation d'une image par un système centré.

Tant qu'on travaille avec l'éclairement, comme en optique incohérente, la courbure des objets et des images n'importe pas<sup>12</sup> : il est suffisant d'utiliser des objets plans et de développer une approximation du premier ordre par rapport aux paramètres d'ouverture et aux dimensions transversales des objets. Les rayons lumineux considérés restent voisins de l'axe optique, d'où le terme d'approximation paraxiale.

L'optique métaxiale et l'optique paraxiale permettent de déterminer la position de l'image quand on connaît celle de l'objet : le sommet de l'image métaxiale (cohérente) est bien là où le prévoit l'optique paraxiale (incohérente). Toutefois, la conservation de la phase entre l'objet et son image, exigée par l'imagerie cohérente, impose une condition supplémentaire sur la courbure de l'objet et sur celle de l'image (ou de façon équivalente sur la position de leur centre de courbure) ; pour traduire cela il faut avoir recours à une approximation du deuxième ordre, une approximation métaxiale.

La situation est résumée par la figure 4.13.



**FIG. 4.13.** L'optique métaxiale joue pour l'optique cohérente le rôle que tient l'optique géométrique paraxiale vis-à-vis de l'optique incohérente. La prise en compte des aberrations fait intervenir des termes d'ordres supérieurs dans les approximations (nous avons indiqué ici symboliquement le 3<sup>e</sup> ordre ; en termes d'écart aberrant, il s'agit du 4<sup>e</sup> ordre comme il est précisé dans l'introduction de ce livre). La flèche en pointillés qui relie l'optique cohérente à l'optique paraxiale correspond à l'optique de Fourier classique, laquelle reste dans un schéma d'imagerie plan à plan, malgré la prise en compte de termes de phase quadratique (du deuxième ordre).

La condition supplémentaire que nous venons de mentionner – conjugaison des centres de courbure – est une condition géométrique. Une analyse plus

<sup>12</sup> À moins de s'intéresser aux aberrations, mais cela suppose, des développements limités menés à l'ordre 4 (en termes d'écart normal aberrant), au-delà de l'approximation métaxiale.

profonde montre que la véritable image physique fait intervenir la diffraction d'une autre façon encore, essentiellement par l'intermédiaire de la pupille de l'instrument : autrement dit, il faut tenir compte de l'ouverture limitée des systèmes optiques, et cela fera l'objet du chapitre 8.

## 4.5 Complément : formules de conjugaison et points cardinaux d'un système centré

Conformément à la remarque 4.1.2 p. 71, les formules de conjugaison des systèmes centrés sont des conséquences de la théorie de la diffraction, puisque c'est le cas pour un dioptre (ou un miroir) et qu'un système centré est une succession de dioptres (ou de miroirs). Il est cependant instructif de déduire directement les formules de conjugaison des systèmes centrés des lois de l'imagerie cohérente, et non des formules du dioptre : c'est l'objet de ce paragraphe.

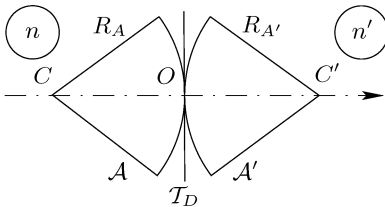
### 4.5.1 Un autre point de vue sur le dioptre

Soit de nouveau la situation de principe de la figure 4.2, où un dioptre  $\mathcal{D}$ , séparant deux milieux isotropes et homogènes d'indices  $n$  et  $n'$ , forme l'image  $\mathcal{A}'$  (rayon  $R_{A'}$ ) d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  (rayon  $R_A$ ) tangent au dioptre en son sommet.

Même s'ils ne sont pas dans les mêmes espaces optiques, on peut chercher à relier les champs sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ . Si ces deux calottes sphériques étaient seules, et parce qu'elles sont tangentes, on passerait de l'amplitude du champ sur l'une au champ sur l'autre par une transparence de courbure. Toutefois, à cause de la présence du dioptre, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est égale à celle du champ sur  $\mathcal{A}$ , précisément parce que les deux sphères sont conjuguées. Le dioptre compense en quelque sorte la transparence de courbure qui existe « géométriquement » entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  : il se représente mathématiquement par la fonction de transmission ( $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide)

$$T_A(\mathbf{r}) = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda_0} \left( \frac{n'}{R_{A'}} - \frac{n}{R_A} \right) r^2 \right], \quad (4.45)$$

et graphiquement comme l'indique la figure 4.14, sous la forme d'une transparence, notée  $T_D$ .



**FIG. 4.14.** Représentation d'un dioptre par une transparence plane  $T_D$  dont la fonction de transmission est donnée par la relation (4.45).

Le procédé se généralise à une sphère quelconque  $\mathcal{B}$  (sommet  $S$  et rayon  $R_B$ ) et à son image cohérente  $\mathcal{B}'$  (sommet  $S'$ , rayon  $R_{B'}$ ) à travers le dioptre (fig. 4.15). La propagation du champ de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est vue comme une « boîte noire », notée  $\mathcal{T}_D$ , dont l'effet est celui du dioptre. Pour trouver la fonction de transmission associée, décomposons le transfert du champ de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  de la façon suivante (fig. 4.15) :

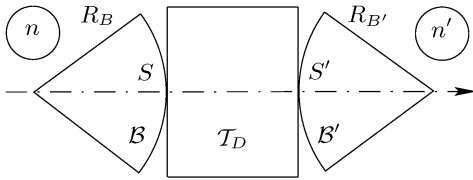
- 1° Transparence de courbure pour passer de  $U_B(\mathbf{r})$  à  $U_{T-}(\mathbf{r})$  (amplitude sur le plan d'entrée de  $\mathcal{T}_D$ ) ;
- 2° Changement de variable entre l'entrée et la sortie de la boîte noire pour tenir compte du grandissement :  $U'_{T-}(\mathbf{r}') = (1/g_s) U_{T-}(\mathbf{r}'/g_s)$  ;
- 3° Multiplication par  $T_B(\mathbf{r}')$  (effet du dioptre, à définir) : l'amplitude à la sortie de la boîte noire est  $U_{T+}(\mathbf{r}') = T_B(\mathbf{r}') U'_{T-}(\mathbf{r}')$  ;
- 4° Transparence de courbure pour passer de  $U_{T+}(\mathbf{r}')$  à  $U_{B'}(\mathbf{r}')$ .

Comme le champ sur  $\mathcal{B}'$  est identique au champ sur  $\mathcal{B}$ , au grandissement  $g_s$  près, il doit y avoir compensation des courbures, et le résultat des opérations précédentes doit être l'identité, ou plus précisément, compte tenu de l'homothétie entre objet et image

$$U_{B'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_B\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s}\right). \quad (4.46)$$

Il en résulte que la fonction de transmission de la boîte noire associée à l'ima-  
gerie de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est <sup>13</sup>

$$T_B(\mathbf{r}') = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda_0} \left( \frac{n'}{R_{B'}} - \frac{n}{g_s^2 R_B} \right) r'^2 \right]. \quad (4.47)$$



**FIG. 4.15.** Représentation d'un dioptre par une boîte noire  $\mathcal{T}_D$  (une transparence) dont la fonction de transmission est donnée par la relation (4.47).

Ce qui est remarquable, c'est que les deux fonctions  $T_A$  et  $T_B$  des relations (4.45) et (4.47) sont identiques. Autrement dit, la représentation du dioptre que nous venons de fournir est indépendante de la paire de sphères conjuguées choisie pour la définir : la transparence associée au dioptre est intrinsèque. Nous n'allons pas démontrer ce résultat pour un dioptre, mais d'emblée pour un système centré quelconque ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

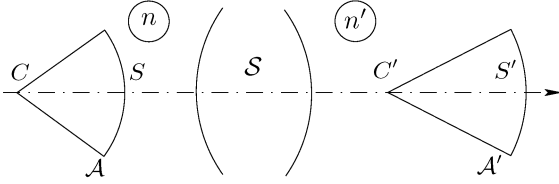
<sup>13</sup> Le résultat est exprimé avec la variable de l'espace image  $\mathbf{r}'$ . Il s'exprime aussi en fonction de  $\mathbf{r}$ , variable de l'espace objet, voir la relation (4.69).

### 4.5.2 Systèmes à foyers et systèmes afocaux

Soit un système centré  $\mathcal{S}$  supposé stigmatique (stigmatisme approché) : l'image géométrique<sup>14</sup> d'un point est un point. De façon équivalente, le système  $\mathcal{S}$  transforme une onde sphérique issue du point objet en une onde sphérique convergeant vers le point image.

L'indice de réfraction de l'espace objet est  $n$  et celui de l'espace image est  $n'$ . La longueur d'onde d'étude est  $\lambda_0$  (dans le vide).

Soit un point lumineux  $C$  (supposé être sur l'axe du système centré) et soit  $C'$  son image à travers  $\mathcal{S}$ . Soit  $\mathcal{A}$  une sphère centrée en  $C$ , de sommet  $S$  et de rayon  $R_A = SC$  (fig. 4.16). Conformément au théorème 2, l'image cohérente de  $\mathcal{A}$  est la sphère  $\mathcal{A}'$  de centre  $C'$  et de sommet  $S'$ , l'image paraxiale de  $S$  (le rayon de  $\mathcal{A}'$  est  $R_{A'} = S'C'$ ). Le grandissement transversal aux sommets est  $g_s$  et celui aux centres est  $g_c$ .



**FIG. 4.16.** Le système centré  $\mathcal{S}$  transforme une onde sphérique issue de  $C$  en une onde sphérique convergeant en  $C'$  (de façon virtuelle ici).

Une onde sphérique issue de  $C$  produit un champ homogène sur  $\mathcal{A}$ . De même, un champ homogène sur  $\mathcal{A}'$  correspond à une onde convergeant en  $C'$  (sur la figure 4.16 cette convergence est virtuelle, puisque la lumière se propage de gauche à droite). Le système  $\mathcal{S}$  transforme la courbure de l'onde incidente. Pour avoir une expression explicite de l'effet du système centré, nous reproduisons l'analyse faite pour le dioptré au paragraphe précédent : le système centré est équivalent à une transparence qui opère entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  et dont la fonction de transmission s'écrit

$$T(\mathbf{r}') = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda_0} \left( \frac{n'}{R_{A'}} - \frac{n}{g_s^2 R_A} \right) r'^2 \right], \quad (4.48)$$

au coefficient de transmission près.

Deux cas sont à distinguer.

**Système afocal :**  $g_c = g_s$ . La loi du grandissement des rayons conduit à

$$\frac{n'}{R_{A'}} - \frac{n}{g_s^2 R_A} = 0, \quad (4.49)$$

et le système  $\mathcal{S}$  est dit afocal.

<sup>14</sup> Par « géométrique » nous voulons dire que nous ne tenons pas compte de la diffraction comme il sera fait au chapitre 8 (prise en compte de l'ouverture limitée des systèmes optiques).

**Proposition 4.5.1.** *Pour un système afocal, le grandissement transversal est constant.*

*Preuve.* Soit  $W$  un point quelconque de l'axe optique du système  $\mathcal{S}$  et soit  $W'$  son image paraxiale. Soit  $g_w$  le grandissement transversal pour cette conjugaison. Soit  $g$  le grandissement longitudinal entre  $SW$  et  $S'W'$ , c'est-à-dire, suivant la loi du grandissement des rayons, tel que

$$g = \frac{\overline{S'W'}}{\overline{SW}} = \frac{n'}{n} g_s g_w. \quad (4.50)$$

Soit  $g'$  le grandissement longitudinal entre  $CW$  et  $C'W'$

$$g' = \frac{\overline{C'W'}}{\overline{CW}} = \frac{n'}{n} g_c g_w. \quad (4.51)$$

De l'hypothèse  $g_c = g_s$ , il résulte  $g = g'$ , puis

$$\frac{n'}{n} g_s g_c = \frac{\overline{S'C'}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{S'W'} + \overline{W'C'}}{\overline{SW} + \overline{WC}} = g = \frac{n'}{n} g_s g_w. \quad (4.52)$$

Nécessairement :  $g_w = g_c = g_s$  (car  $g_s \neq 0$ ).  $\square$

**Remarque 4.5.1.** Le résultat de la proposition 4.5.1 peut s'énoncer comme suit : un système optique pour lequel il existe deux conjugaisons ayant le même grandissement transversal est un système afocal.  $\diamond$

**Système à foyers :  $g_c \neq g_s$ .** Cette fois

$$\frac{n'}{R_{A'}} - \frac{n}{g_s^2 R_A} \neq 0, \quad (4.53)$$

si bien qu'il est légitime de définir une distance  $f'$ , baptisée distance focale image du système  $\mathcal{S}$ , par

$$\frac{n'}{g_s f'} = \frac{n'}{R_{A'}} - \frac{n}{g_s^2 R_A}. \quad (4.54)$$

Le système  $\mathcal{S}$  est un système à foyers<sup>15</sup> et, conformément à la relation (4.48), il se représente par

$$T(\mathbf{r}') = \exp \left[ \frac{i\pi n'}{\lambda_0 g_s f'} r'^2 \right]. \quad (4.55)$$

Cette relation n'est intéressante que si  $f'$  est indépendante des paires  $(C, C')$  et  $(S, S')$  qui ont servi à la définir, ce que nous montrerons ultérieurement. Nous verrons également que la distance focale  $f'$  définie ci-dessus est bien égale à la distance focale image habituelle de l'optique géométrique paraxiale, et qu'il existe effectivement des foyers, ce qui justifie le vocabulaire employé.

<sup>15</sup> À ce stade de la théorie, il s'agit seulement d'une nomenclature. L'existence des foyers sera prouvée par la suite.

### 4.5.3 Système à foyers : formule de conjugaison avec origines en deux points conjugués quelconques

Soit  $C$  et  $S$  deux points objets quelconques (sur l'axe du système centré) et soient  $C'$  et  $S'$  leurs images paraxiales (la figure 4.16 illustre encore la situation). Soit  $\mathcal{A}$  la sphère centrée en  $C$ , de sommet  $S$  (de rayon  $R_A = \overline{SC}$ ). Son image cohérente est la sphère  $\mathcal{A}'$  de centre  $C'$ , de sommet  $S'$  (et de rayon  $R_{A'} = \overline{S'C'}$ ). Le grandissement aux sommets est  $g_s$  et celui aux centres est  $g_c$ .

Les points choisis comme origines sont  $S$  et  $S'$ . Nous notons  $p = R_A = \overline{SC}$  et  $p' = R_{A'} = \overline{S'C'}$ . La relation (4.54) s'écrit

$$g_s \frac{n'}{p'} = \frac{n}{g_s p} + \frac{n'}{f'}. \quad (4.56)$$

La relation (4.56) est la relation de conjugaison avec origines en deux points conjugués quelconques,  $S$  et  $S'$ , pour lesquels le grandissement transversal est  $g_s$  (voir le livre de Maréchal [156] p. 38). Toutefois, pour affirmer cela, il faut établir que la distance  $f'$  est indépendante de  $S$  et  $S'$ , ce qui va être fait.

Commençons par établir deux relations utiles par la suite. Dans l'imagerie de la sphère  $\mathcal{A}$ , la loi du grandissement des rayons s'écrit

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} g_s g_c, \quad (4.57)$$

et des relations (4.56) et (4.57) il résulte

$$\frac{1}{g_c} - \frac{1}{g_s} = \frac{n'p}{nf'}. \quad (4.58)$$

On déduit de façon analogue

$$g_s - g_c = \frac{p'}{f'}. \quad (4.59)$$

Les relations (4.58) et (4.59) serviront dans les calculs.

**Proposition 4.5.2.** *La distance  $f'$  définie par la relation (4.54) est indépendante des paires  $(C, C')$  et  $(S, S')$ .*

*Preuve.* Soient  $V$  et  $W$  deux points de l'axe du système centré et soient  $V'$  et  $W'$  leurs images paraxiales. Les grandissements transversaux de ces conjugaisons sont  $g_v$  et  $g_w$ . La distance  $f'$  est définie par la relation (4.54) à l'aide des paires  $(C, C')$  et  $(S, S')$ . Soient  $v = \overline{SV}$ ,  $v' = \overline{S'V'}$ ,  $w = \overline{SW}$  et  $w' = \overline{S'W'}$ . Comme  $S$  et  $S'$  servent d'origines, les relations (4.58) et (4.59) appliquées à  $V$  et  $V'$  s'écrivent

$$\frac{1}{g_v} - \frac{1}{g_s} = \frac{n'v}{nf'} \quad \text{et} \quad g_s - g_v = \frac{v'}{f'}. \quad (4.60)$$

Ces mêmes relations appliquées à  $W$  et  $W'$  deviennent

$$\frac{1}{g_w} - \frac{1}{g_s} = \frac{n'w}{nf'} \quad \text{et} \quad g_s - g_w = \frac{w'}{f'}. \quad (4.61)$$

Il en résulte

$$\frac{1}{g_v} - \frac{1}{g_w} = \frac{n'}{nf'}(v - w) \quad \text{et} \quad g_w - g_v = \frac{v' - w'}{f'}. \quad (4.62)$$

Soit  $\mathcal{B}$  la sphère de centre  $V$  et sommet  $W$  : son rayon de courbure est  $R_B = v - w$ . Soit  $\mathcal{B}'$  la sphère de centre  $V'$  et sommet  $W'$  : son rayon de courbure est  $R_{B'} = v' - w'$ . Nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{n'}{R_{B'}} - \frac{n}{g_w^2 R_B} &= \frac{n'}{v' - w'} - \frac{n}{(v - w)g_w^2} \\ &= \frac{n'}{(g_w - g_v)f'} - \frac{n}{\frac{nf'}{n'} \left( \frac{1}{g_v} - \frac{1}{g_w} \right) g_w^2} \\ &= \frac{n'}{f'} \left[ \frac{1}{g_w - g_v} - \frac{g_v}{(g_w - g_v)g_w} \right] \\ &= \frac{n'}{g_w f'}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

La relation (4.63) est la relation (4.54) écrite pour les sphères  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , c'est-à-dire pour les paires  $(V, V')$  et  $(W, W')$ .  $\square$

La proposition 4.5.2 permet de conclure que dans la relation (4.56) les points  $S$  et  $S'$  n'interviennent finalement que comme origines, et que  $f'$  est indépendante du choix de ces deux points. La relation (4.56) est bien la relation de conjugaison avec origines en deux points conjugués quelconques  $S$  et  $S'$ , comme nous l'avons annoncé.

#### 4.5.4 Système à foyers : formule de conjugaison avec origines aux points principaux (Descartes)

**Proposition 4.5.3.** *Soit  $\mathcal{S}$  un système à foyers. Il existe deux points conjugués  $H$  et  $H'$  pour lesquels le grandissement transversal est égal à 1. La paire  $(H, H')$  est unique.*

*Preuve.* Considérons une paire de points conjugués  $(S, S')$  et conservons les notations antérieures. Si  $g_s = 1$ , nous choisissons  $H = S$  et  $H' = S'$ . S'il existait une autre paire de points conjugués  $(C, C')$  avec  $g_c = 1$ , le système  $\mathcal{S}$  serait afocal, conformément au cas étudié pour établir la proposition 4.5.1 (voir la remarque 4.5.1).

Si  $g_s \neq 1$ , soient le point  $H$  et la mesure algébrique  $D$  tels que

$$D = \overline{SH} = \frac{n}{n'} \left( 1 - \frac{1}{g_s} \right) f', \quad (4.64)$$

et soit  $H'$  l'image de  $H$  par  $\mathcal{S}$ . Soit  $D' = \overline{S'H'}$  et soit  $g_h$  le grandissement transversal entre  $H$  et  $H'$ . La relation (4.58) s'écrit

$$\frac{1}{g_h} - \frac{1}{g_s} = \frac{n'D}{nf'}, \quad (4.65)$$

c'est-à-dire  $1/g_h = 1$ , ce qui prouve l'existence de la paire  $(H, H')$ . Son unicité résulte de celle de  $D$ , définie par la relation (4.64).  $\square$

**Définition 4.5.1.** *Les points  $H$  et  $H'$  de la proposition 4.5.3 sont les points principaux<sup>16</sup> de  $\mathcal{S}$ .*

Prenons les points principaux comme origines. Soient  $A$  et  $A'$  deux points conjugués et soient  $x = \overline{HA}$  et  $x' = \overline{H'A'}$ . La relation (4.56) appliquée aux points  $H$  et  $H'$ , pour lesquels  $g_s = g_h = 1$ , devient

$$\frac{n'}{x'} = \frac{n}{x} + \frac{n'}{f'}. \quad (4.66)$$

La relation (4.66) est la relation de conjugaison de Descartes. Les origines sont les points principaux.

Le grandissement transversal  $g_a$  entre  $A$  et  $A'$  est déduit de la relation (4.58) en faisant  $g_a = g_c$ ,  $p = x$ ,  $p' = x'$  et  $g_s = g_h = 1$ ; cela donne

$$\frac{1}{g_a} = 1 + \frac{n'x}{nf'} = \frac{n'x}{nx'}, \quad (4.67)$$

soit encore

$$g_a = \frac{nx'}{n'x}. \quad (4.68)$$

#### 4.5.5 Foyers

**Foyer image.** Considérons les formules de Descartes, avec origines aux points principaux, appliquées à deux points conjugués  $A$  et  $A'$  ( $x = \overline{HA}$  et  $x' = \overline{H'A'}$ ). Si  $A$  est à l'infini, son image est, par définition, le foyer (principal) image. Alors  $x = \pm\infty$  et la relation (4.66) donne  $x' = f'$ , soit encore  $f' = \overline{H'F'}$ . La distance focale image définie au paragraphe 4.5.2 est bien celle qui est habituellement définie en optique géométrique paraxiale.

**Foyer objet.** Soient de nouveau deux paires de points conjugués  $(S, S')$  et  $(C, C')$ . Ce sont les sommets et les centres de deux calottes sphériques images  $\mathcal{A}$  (rayon  $R_A$ ) et  $\mathcal{A}'$  (rayon  $R_{A'}$ ). Avec les coordonnées de l'espace objet, le système  $\mathcal{S}$  se représente par

$$T(\mathbf{r}) = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda_0} \left( \frac{n'}{R_{A'}} g_s^2 - \frac{n}{R_A} \right) r^2 \right]. \quad (4.69)$$

<sup>16</sup> Ce sont les points principaux sur l'axe. Il existe des points principaux hors de l'axe : en optique paraxiale tout point d'un plan principal est un point principal.

La relation (4.69) n'est rien d'autre que la relation (4.48) où  $g_s \mathbf{r}$  remplace  $\mathbf{r}'$ .

On définit la distance focale objet  $f$  (d'un système à foyers) par

$$-g_s \frac{n}{f} = \frac{n'}{R_{A'}} g_s^2 - \frac{n}{R_A}. \quad (4.70)$$

Il en résulte (avec  $p' = R_{A'}$  et  $p = R_A$ )

$$g_s \frac{n'}{p'} = \frac{n}{g_s p} - \frac{n}{f}, \quad (4.71)$$

et

$$g_s = \frac{np'}{g_s n' p} - \frac{np'}{n' f} = g_c - \frac{np'}{n' f}. \quad (4.72)$$

Ainsi

$$g_c - g_s = \frac{np'}{n' f}. \quad (4.73)$$

Des relations (4.56) et (4.71), on déduit enfin

$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}. \quad (4.74)$$

La distance focale objet définie par la relation (4.70) est bien la distance focale objet habituelle de l'optique géométrique paraxiale.

Si  $g_s = 1$ , la relation (4.71) redonne la formule de conjugaison de Descartes (origine aux points principaux) sous la forme

$$\frac{n'}{x'} = \frac{n}{x} - \frac{n}{f}. \quad (4.75)$$

On désigne par  $F$  le foyer (principal) objet, tel que  $\overline{HF} = f$ . L'image de  $F$  à travers le système est à l'infini : si  $x = f$ , alors la formule de Descartes montre que  $x'$  est infini.

**Remarque 4.5.2 (Formule de conjugaison de Newton).** Pour la paire de points conjugués  $(A, A')$ , si  $q = \overline{FA}$  et  $q' = \overline{F'A'}$ , la formule de conjugaison de Newton s'écrit

$$qq' = ff'. \quad (4.76)$$

Elle se déduit par exemple de la formule de Descartes. La formule de Newton a pour origines deux points (les foyers) qui ne sont pas conjugués l'un de l'autre. Elle prend pour cela une forme différente de celle des relations de conjugaison étudiées dans tout ce paragraphe.

#### 4.5.6 Lentille mince

Soit une lentille mince dont les faces (sphériques) admettent  $R_1$  et  $R_2$  comme rayons de courbure. L'indice du verre qui la compose est  $n$ , et la lentille est placée dans l'air (indice pratiquement égal à 1). La distance focale image de cette lentille est <sup>17</sup>

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.77)$$

ce qui suppose qu'on a négligé l'épaisseur de la lentille (lentille mince). Conformément à la relation (4.55), cette lentille se représente par (le coefficient de transmission de la lentille est omis)

$$T(\mathbf{r}') = \exp \left[ \frac{i\pi(n-1)}{\lambda_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) r'^2 \right]. \quad (4.78)$$

**Remarque 4.5.3.** Il ne faut pas confondre une lentille simple avec une transparence de courbure, même si leur représentation mathématique est similaire. Une transparence de courbure n'a pas d'effet sur une onde : elle représente la relation qui lie les amplitudes des champs sur deux sphères tangentes (pour une même onde). En revanche une lentille simple (plus généralement un système centré) modifie l'onde incidente et en change la courbure.

**Remarque 4.5.4.** Précisons comment utiliser éventuellement la fonction  $T$ , définie par la relation (4.78), pour le calcul d'un champ. Dans le cas d'une lentille simple, la fonction  $T$  s'applique à l'amplitude du champ sur le plan de la lentille (supposée mince). Si  $U_-$  est l'amplitude du champ incident sur le plan de la lentille, l'amplitude du champ émergent, considérée sur le même plan, s'écrit

$$U_+(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) U_-(\mathbf{r}) = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda_0 f'} r^2 \right] U_-(\mathbf{r}). \quad (4.79)$$

La relation (4.79) n'est autre que la relation (4.55) écrite pour  $g_s = 1$ , ce qui se justifie puisque le plan de la lentille (mince) est son propre conjugué.

L'étude générale du paragraphe 4.5.2 montre que la relation (4.79) s'applique aux amplitudes des champs sur deux sphères conjuguées quelconques, à condition d'y introduire le grandissement de cette conjugaison ( $g_s$ ).

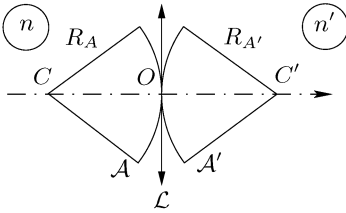
**Remarque 4.5.5.** La figure 4.17 représente une lentille mince  $\mathcal{L}$ , considérée comme une transparence, qui conjugue  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ . Elle est à rapprocher de la figure 4.14 qui représente un dioptré sphérique dans les mêmes conditions. La lentille est supposée être dans des milieux extrêmes d'indices de réfraction différents. Si  $O$  est le centre de la lentille, nous notons  $q = \overline{OC}$  et  $q' = \overline{OC'}$ , où  $C$  est le centre de courbure de  $\mathcal{A}$  et  $C'$  celui de  $\mathcal{A}'$ . Comme  $\mathcal{A}'$  est l'image cohérente de

<sup>17</sup> Une lentille mince est constituée de deux dioptrés : la relation (4.77) se déduit de la formule de Gullstrand, relation (4.44), pour  $e = 0$ .

$\mathcal{A}$ , il y a conjugaison des centres de courbure, et la lentille se représente par (le coefficient de transmission est omis)

$$T(r) = \exp \left[ \frac{i\pi n'}{\lambda_0 f'} r^2 \right] = \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda_0} \left( \frac{n'}{q'} - \frac{n}{q} \right) r^2 \right], \quad (4.80)$$

qui n'est autre que la relation (4.45) puisque  $q = R_A$  et  $q' = R_{A'}$ . L'expression de la fonction  $T$  sous la forme de la relation (4.80) sera utile au chapitre 12 pour décrire les lentilles temporelles.



**FIG. 4.17.** Représentation d'une lentille mince  $\mathcal{L}$  comme une transparence.

## 4.6 Exercices

### Exercice 4.1 (Dioptre plan).

1. Établir la formule de conjugaison du dioptre plan.
2. Quelle est l'image (cohérente) d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ , de rayon de courbure  $R_A$ , dont le sommet  $S$  est à la distance  $d$  et le centre à la distance  $q$  du dioptre ?
3. Quel est l'invariant de Gauss du dioptre plan ?

### Exercice 4.2 (Miroir sphérique).

1. Établir la condition de double conjugaison (sommet et centre) pour l'imagerie cohérente à travers un miroir sphérique.
2. Écrire la relation entre l'amplitude du champ sur l'image et celle sur l'objet (émetteur) supposé sphérique.
3. Montrer qu'il existe un invariant de Gauss pour le miroir sphérique.
4. Montrer qu'il existe un invariant métaxial du miroir sphérique.

**Exercice 4.3.** Soit un miroir sphérique de rayon de courbure  $R$ . Montrer que la sphère  $\mathcal{C}$  qui passe par le centre du miroir et qui est centrée sur lui est sa propre image cohérente à travers le miroir. Quel est le grandissement transversal de cette conjugaison ?

**Exercice 4.4.** Montrer que seul un système afocal donne une image cohérente plane d'un émetteur plan.

**Exercice 4.5.** Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux dioptries formant un système centré  $\mathcal{S}$  (voir la figure 4.8). Soit  $g_1$  le grandissement transversal de la conjugaison par  $\mathcal{D}$  d'un émetteur  $\mathcal{A}$  et de son image  $\mathcal{A}_1$ , et soit  $g_2$  le grandissement de la conjugaison par  $\mathcal{D}'$  de  $\mathcal{A}_1$  et de son image  $\mathcal{A}'$ .

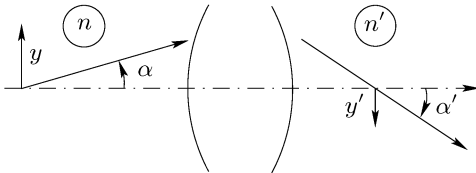
Montrer que le grandissement transversal de la conjugaison par  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  est  $g = g_1 g_2$ .

**Exercice 4.6 (Formule de conjugaison de Newton. Loi de Bonnet).**

1. Dédurre la formule de conjugaison de Newton du dioptre sphérique de celle de Descartes (voir la remarque 4.5.2).
2. Même question pour un système centré.
3. Retrouver la loi du grandissement des rayons de Bonnet à partir de la formule de conjugaison de Newton (pour un système centré).

**Exercice 4.7 (Relation de Lagrange–Helmholtz et loi du grandissement des rayons de Bonnet).** Soient un objet  $y$  et  $y'$  son image (paraxiale) à travers un système centré (fig. 4.18). Si  $g_\alpha$  est le grandissement angulaire pour la conjugaison considérée ( $g_\alpha = \alpha'/\alpha$ ),  $g_y$  le grandissement transversal ( $g_y = y'/y$ ) et si, pour maintenir une symétrie formelle, on écrit  $g_n = n'/n$ , la relation de Lagrange–Helmholtz ( $ny\alpha = n'y'\alpha'$ ) s'écrit  $g_n g_y g_\alpha = 1$ .

1. Soit un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ , de sommet  $S$  et centre de courbure  $C$ , et soit  $\mathcal{A}'$  son image cohérente. Soit  $g_\sigma$  le grandissement angulaire aux sommets et  $g_\gamma$  le grandissement angulaire aux centres de courbure. Exprimer le grandissement des rayons en fonction de  $g_\sigma$  et  $g_\gamma$ .
2. Dédurre de la question précédente une expression de la relation de Lagrange–Helmholtz faisant intervenir, outre les grandissements angulaires, des grandeurs longitudinales, c'est-à-dire, au lieu de  $y$  et  $y'$  (grandeurs transversales), les mesures algébriques  $\overline{AC}$  et  $\overline{A'C'}$ ,  $A$  et  $C$  étant deux points de l'axe du système dont les images paraxiales respectives sont  $A'$  et  $C'$  [68].



**FIG. 4.18.** Illustration de la relation de Lagrange–Helmholtz (exercice 4.7). Les deux rayons représentés sont « images » l'un de l'autre.

**Exercice 4.8.** Retrouver la loi de double conjugaison du dioptre sphérique en utilisant deux fois la relation (3.31), sans décomposer l'analyse en plusieurs cas particuliers comme il est fait au paragraphe 4.1.

**Exercice 4.9.** Montrer que l'amplitude du champ dans le plan focal d'un miroir sphérique est sa propre transformée de Fourier.

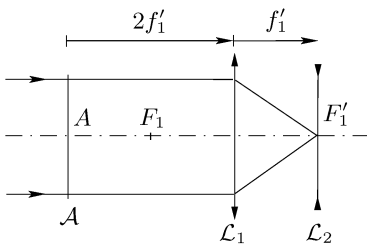
**Exercice 4.10 (Résonateur confocal).** Un résonateur confocal est constitué de deux miroirs sphériques qui se font face et qui ont leur foyer en commun. Montrer que l'amplitude du champ dans le plan focal commun aux deux miroirs est sa propre transformée de Fourier. En déduire que le champ résonnant est invariant par transformation de Fourier.

**Exercice 4.11 (Résonateur confocal symétrique).** Soit un résonateur confocal symétrique. Montrer que les amplitudes des champs sur les miroirs s'échangent par transformation de Fourier optique.

**Exercice 4.12 (Transformée de Fourier virtuelle).** Soit une transparence plane  $\mathcal{T}$  placée dans le plan focal objet d'un doublet divergent (qu'on pourra représenter comme une lentille mince divergente). L'objet (virtuel) est éclairé par une onde plane. Où se forme la transformée de Fourier optique du champ sur  $\mathcal{T}$  ?

**Exercice 4.13.** Soit le montage de la figure 4.19 où  $\mathcal{L}_1$  est un objectif convergent de distance focale image  $f'_1$ , assimilé à une lentille mince. L'objectif  $\mathcal{L}_2$ , assimilé lui aussi à une lentille mince, est divergent, de distance focale image  $f'_2 = -f'_1$ . La lentille  $\mathcal{L}_2$  est située dans le plan focal image de  $\mathcal{L}_1$ .

Un objet plan  $\mathcal{A}$ , placé à la distance  $-2f'_1$  de  $\mathcal{L}_1$ , est éclairé par une onde plane monochromatique produite par une source lumineuse non représentée sur la figure 4.19.



**FIG. 4.19.** Montage d'observation de la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$ .

1. Où  $\mathcal{A}'$ , l'image cohérente de  $\mathcal{A}$  à travers  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , est-elle située ? (Donner sa position et son rayon de courbure).
2. Où la transformée de Fourier optique de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  s'observe-t-elle ?

**Exercice 4.14.** Retrouver la loi de double conjugaison du dioptré sphérique en suivant la méthode fréquentielle du paragraphe 3.6.

**Exercice 4.15.** Montrer que les relations (4.40) et (4.42) sont équivalentes.

# Chapitre 5

## Figures de diffraction

Nous illustrons les résultats des chapitres précédents par le calcul de diverses figures de diffraction classiques et proposons des montages expérimentaux pour observer ces dernières. L'étude du spectre des réseaux de diffraction et celle du rayonnement des antennes en champ lointain relèvent des mêmes méthodes. Ce chapitre exige une réelle pratique de la transformation de Fourier à deux dimensions, puisqu'au fond, en diffraction de Fraunhofer, tout se ramène au calcul de la transformée de l'amplitude du champ sur l'émetteur.

### 5.1 Obtention du spectre d'une amplitude lumineuse

#### 5.1.1 Modulation spatiale de la lumière

Il existe essentiellement trois façons de moduler une onde lumineuse : modulation d'amplitude (qui affecte bien sûr l'intensité vibratoire), modulation de phase et modulation anisotrope (portant sur la polarisation).

Si  $U_i(\mathbf{r})$  est l'amplitude incidente et  $U_t(\mathbf{r})$  l'amplitude transmise au point  $\mathbf{r}$  d'une transparence, le coefficient de transmission de la transparence en ce point est  $t(\mathbf{r})$  tel que

$$U_t(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}), \quad (5.1)$$

et  $t$  est la fonction de transmission. Ce qui suit se transpose à la réflexion à condition de remplacer l'amplitude transmise par l'amplitude réfléchie : la fonction de transmission devient la fonction de réflexion.

La transparence engendre une modulation d'amplitude si  $t(\mathbf{r})$  est un nombre réel tel que, pour tout  $\mathbf{r}$ ,

$$0 \leq t(\mathbf{r}) \leq 1. \quad (5.2)$$

La modulation est de phase si

$$t(\mathbf{r}) = e^{-i\varphi(\mathbf{r})}. \quad (5.3)$$

De fait, il arrive qu'une modulation soit mixte : le coefficient de transmission s'écrit

$$t(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) e^{-i\varphi(\mathbf{r})}, \quad (5.4)$$

où  $0 \leq a(\mathbf{r}) \leq 1$ .

Une émulsion photographique développée de manière courante fournit un exemple de modulation d'amplitude ; une émulsion blanchie, un exemple de modulation de phase, comme un réseau de diffraction gravé sur une lame de verre.

La modulation est anisotrope si le coefficient de transmission  $t(\mathbf{r})$  dépend de la polarisation de l'onde incidente, un aspect des ondes électromagnétiques que nous ne prenons généralement pas en compte dans cet ouvrage, nous limitant à une théorie scalaire de la diffraction. L'approche de certains phénomènes liés à la polarisation est cependant concevable dans le cadre de la théorie scalaire et c'est pour cela que nous mentionnons ce qui suit. À titre d'exemple, la diffraction par des modulateurs à cristaux liquides s'explique, dans ses grandes lignes, en appliquant la théorie scalaire à chacune des deux composantes orthogonales d'une même onde polarisée, puis en les superposant après qu'elles se sont propagées [137, 192].

Parmi les modulations anisotropes, on distingue la modulation de biréfringence et la modulation de dichroïsme : la biréfringence est une anisotropie de la phase  $\varphi(\mathbf{r})$  et le dichroïsme une anisotropie de l'amplitude du coefficient de transmission. Pour les classer, prenons l'exemple d'un milieu biréfringent, caractérisé par deux vibrations propres, orthogonales, et par le déphasage qui se crée entre elles au cours de la propagation dans le milieu. Ces deux vibrations sont en général polarisées elliptiquement. L'une est la vibration lente, l'autre la vibration rapide. Il résulte de cette présentation qu'on peut imaginer d'abord moduler le déphasage engendré par le milieu, les vibrations propres restant inchangées. C'est ce que nous appelons une modulation de biréfringence par modulation du déphasage. On considère ensuite que le déphasage est fixe et que ce sont les directions des vibrations propres qui sont modulées. Cela conduit à la notion de modulation de biréfringence par modulation d'axe<sup>1</sup>. On conçoit enfin une modulation de biréfringence mixte : on module à la fois le déphasage et la direction des vibrations propres. Cette analyse est transposable aux milieux dichroïques.

Certains cristaux liquides donnent lieu à une modulation d'axe (pour une direction de propagation appropriée). Le niobate de lithium ( $\text{LiNbO}_3$ ) est le siège (sous champ électrique appliqué variable) d'une modulation de biréfringence par modulation de la phase [167, 248], et des cristaux photoréfringents comme le BSO ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ) permettent une modulation mixte [8, 180]. Des milieux qui sont le siège d'effets magnéto-optiques ont des propriétés comparables formellement [94, 222].

Toutes les modulations mentionnées se traduisent en général par une modulation d'amplitude sur la sphère de Fourier comme le montreront les exemples

<sup>1</sup> Une telle dénomination vient de la représentation de la lumière polarisée au moyen de la sphère de Poincaré [201]. Les deux vibrations propres d'un milieu biréfringent (normées à 1) se représentent par deux points diamétralement opposés sur la sphère qui, pour cette raison, définissent un axe. Une modulation de la direction des vibrations propres se traduit par une modulation de l'axe associé sur la sphère de Poincaré.

des prochains paragraphes. Dans le cadre de l'optique de Fourier (théorie scalaire), une modulation d'amplitude comme une modulation de déphasage produisent seulement une modulation d'amplitude, de phase ou mixte sur la sphère de Fourier, mais pas de modulation de polarisation. En revanche une modulation de biréfringence peut donner lieu à une modulation de polarisation, de phase ou d'amplitude, suivant le cas.

Enfin, les modulations précédentes, décrites comme des modulations spatiales, ont leurs équivalents temporels<sup>2</sup>.

Le paragraphe 15.4 fournit des détails techniques sur des matériaux qui permettent de moduler la lumière : émulsions photographiques, cristaux photoréfringents, cristaux liquides.

### 5.1.2 Montages pratiques

Optiquement, on réalise une transformation de Fourier à l'aide d'un phénomène de diffraction de Fraunhofer, c'est-à-dire quand on passe du champ sur une calotte sphérique au champ sur la sphère de Fourier de cette dernière (Théorème 1, p. 48, fig. 3.3 p. 46). Si  $D$  est la distance de la calotte sphérique  $\mathcal{A}$  à sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  ( $D$  est aussi le rayon de courbure de  $\mathcal{A}$ ), les amplitudes des champs sur ces deux calottes sont liées par la relation

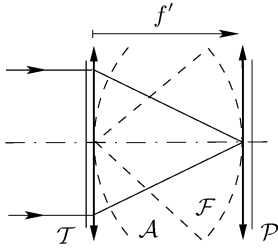
$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \widehat{U}_A\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda D}\right). \quad (5.5)$$

On obtient une transformation de Fourier optique dans d'autres circonstances qui sont des adaptations du cas précédent. On cherche en particulier des situations qui permettent d'observer la transformée de Fourier sur un plan. Des objectifs « aplanissent » les deux calottes sphériques confocales  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}$ , comme il a été vu au paragraphe 4.2.4. La figure 5.1 montre comment obtenir sur un plan ( $\mathcal{P}$ ) le spectre<sup>3</sup> de l'amplitude du champ, elle-même affichée sur un plan ( $\mathcal{T}$ ). Si les deux objectifs (représentés sur la figure 5.1 comme deux lentilles minces pour simplifier) ont la même distance focale  $f'$ , on obtient la transformée de Fourier après un trajet long de  $f'$ . La source lumineuse n'est pas représentée sur la figure ; on suppose qu'il s'agit d'une source monochromatique collimatée (longueur d'onde  $\lambda$ ).

Si  $t$  est la fonction de transmission de la transparence  $\mathcal{T}$  (fig. 5.1), l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est  $U_A(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r})$  ( $U_0$  est une constante dimensionnelle), et l'amplitude du champ sur le plan  $\mathcal{P}$  est égale à l'amplitude du champ sur la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$ . Cela s'écrit

<sup>2</sup> Une modulation temporelle est susceptible de modifier la fréquence du rayonnement.

<sup>3</sup> L'emploi de ce mot mériterait des précisions. Il peut désigner l'amplitude du champ diffracté ou l'éclairement associé, ou même simplement la transformée de Fourier d'une amplitude. Malgré cette confusion, il ne devrait pas y avoir d'ambiguïté : la démarche suivie consiste à calculer l'amplitude du champ diffracté – à l'aide de la transformation de Fourier –, puis son module au carré (intensité vibratoire qui détermine l'éclairement).



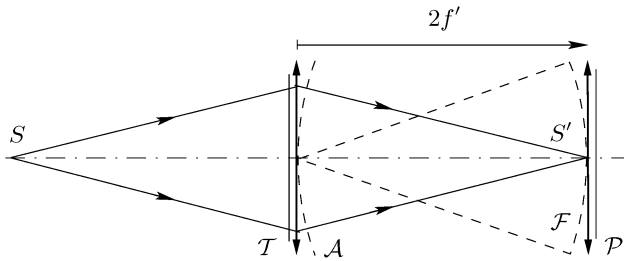
**FIG. 5.1.** Montage de transformation de Fourier optique plan à plan. L'amplitude complexe du champ dans le plan  $\mathcal{P}$  est la transformée de Fourier optique de l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{T}$ . De fait, la calotte sphérique  $\mathcal{F}$  est la sphère Fourier de  $\mathcal{A}$ . L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est égale à l'amplitude du champ sur  $\mathcal{T}$ , et l'amplitude du champ sur  $\mathcal{P}$  est égale à l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}$ .

$$U_P(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}) = \frac{iU_0}{\lambda f'} \hat{t} \left( \frac{\mathbf{s}}{\lambda f'} \right). \quad (5.6)$$

La figure 5.2 présente un montage complet qui inclut la source (ponctuelle). Le premier objectif (de focale  $f'$ ) forme une image de la source sur le second objectif (de focale  $2f'$ ). La transformée de Fourier s'obtient après un trajet<sup>4</sup> de  $2f'$ , et la relation (5.6) est à remplacer par

$$U_P(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}) = \frac{iU_0}{2\lambda f'} \hat{t} \left( \frac{\mathbf{s}}{2\lambda f'} \right). \quad (5.7)$$

L'exercice 5.1 propose une variante du montage de la figure 5.2 qui permet de faire varier les dimensions du spectre.

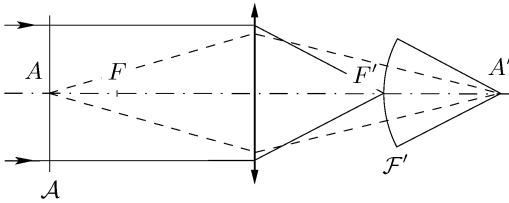


**FIG. 5.2.** Un montage comparable à celui de la figure 5.1, mais avec la source ponctuelle  $S$  à distance finie.

**Remarque 5.1.1.** Plus précisément, sur la figure 5.2, la transparence  $\mathcal{T}$  doit être située dans le plan principal objet du premier objectif, et la sphère  $\mathcal{A}$  est tangente au plan principal image. L'image de la source ponctuelle  $S$  est  $S'$ , qui se confond avec le point principal objet du second objectif. La sphère  $\mathcal{F}$  est tangente au plan principal objet du second objectif et le plan  $\mathcal{P}$  se confond avec le plan principal image.  $\diamond$

<sup>4</sup> La longueur du parcours donne le temps de formation de la transformée de Fourier de l'amplitude du champ. Cela présente un intérêt en traitement du signal optique, thème abordé au chapitre 16. Par exemple, le montage de la figure 5.2 constitue un processeur optique de calcul de transformées de Fourier. Si la focale de l'objectif est de 3 cm, le temps de calcul est de 0,2 ns, le temps que met la lumière pour parcourir  $2f' = 6$  cm.

Une autre façon de procéder consiste à se souvenir que la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  d'un émetteur plan  $\mathcal{A}$  est à l'infini, et que pour la ramener à distance finie il est classique en optique d'utiliser un objectif. Cet objectif doit être convergent si on souhaite obtenir une image réelle de l'infini. Ainsi, sur la figure 5.3, la sphère  $\mathcal{F}'$  est l'image de  $\mathcal{F}$ , laquelle est à l'infini (pour cela non représentée!) mais centrée sur  $A$ . Les propriétés de l'imagerie cohérente (voir le chapitre 4, en particulier le théorème 2) montrent que  $\mathcal{F}'$  est la sphère qui passe par le foyer image  $F'$  de l'objectif et qui est centrée sur  $A'$ , l'image du centre de courbure de  $\mathcal{F}$ , lequel est le point  $A$ , sommet de  $\mathcal{A}$ .

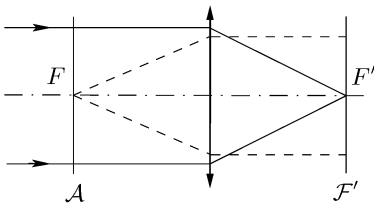


**FIG. 5.3.** La transformée de Fourier optique de l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{A}$  se trouve sur la calotte sphérique  $\mathcal{F}'$ . Si  $A$  est le sommet de  $\mathcal{A}$ , la sphère  $\mathcal{F}'$  est centrée en  $A'$ , l'image paraxiale de  $A$ .

Pour que  $\mathcal{F}'$  soit plane, il faut faire en sorte que  $A$  soit placé au foyer objet  $F$  de l'objectif, afin que  $A'$  soit à l'infini, comme le montre la figure 5.4. Nous venons de retrouver un montage très connu qui permet, lui aussi, d'obtenir une transformation de Fourier entre deux plans [97]. Si  $f'$  est la distance focale image de l'objectif, la transformée de Fourier s'obtient après un parcours de  $2f'$  et <sup>5</sup>

$$U_{F'}(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda f'} \hat{U}_A\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda f'}\right). \quad (5.8)$$

La relation (5.8) est la relation (5.5) dans laquelle la distance de diffraction  $D$  est remplacée par la distance focale image de l'objectif. Pour justifier cela, imaginons que l'amplitude du champ dans le plan focal objet soit l'amplitude



**FIG. 5.4.** L'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{F}'$  est la transformée de Fourier de l'amplitude dans le plan  $\mathcal{A}$ .

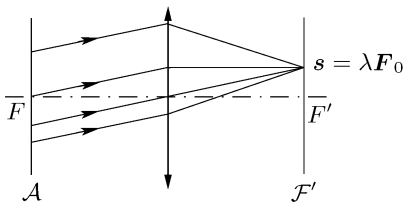
<sup>5</sup> Si  $t$  est la fonction de transmission de  $\mathcal{A}$ , on a  $U_A(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r})$ , où  $U_0$  est une constante.

associée à une fréquence spatiale pure (voir le paragraphe 2.1.4). L'onde plane associée se propage dans la direction angulaire  $\Phi = \lambda \mathbf{F}$ , et cette onde est focalisée par l'objectif dans son plan focal, exactement au point  $\mathbf{s} = f' \lambda \mathbf{F}$ . L'amplitude du champ au point  $\mathbf{s}$  est la valeur de la transformée de Fourier de  $U_A$  pour la fréquence spatiale  $\mathbf{F} = \mathbf{s} / \lambda f'$ , ce qu'exprime la relation (5.8). Le facteur  $i / \lambda f'$  se justifie en remarquant que l'objectif focalise une onde plane dans son plan focal image. Cela revient à faire converger une onde à la distance  $D = f'$ . (Une démonstration est proposée à l'exercice 5.2.)

**Remarque 5.1.2.** La relation (5.8) reste valable si  $\mathcal{F}'$  est une calotte sphérique (sphère de Fourier de l'image de  $\mathcal{A}$ ) comme sur la figure 5.3 (voir l'exercice 5.2).

**Remarque 5.1.3 (Explication intuitive de la formation d'un spectre).**

Le raisonnement précédent fournit une explication intuitive à la formation du spectre du champ sur l'émetteur  $\mathcal{A}$  dans le plan focal image de l'objectif, comme l'illustre la figure 5.5. Si l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est celle qui est associée à la fréquence pure  $\mathbf{F}_0$ , l'onde qui émerge de  $\mathcal{A}$  est une onde plane que l'objectif focalise au point  $\mathbf{s} = \lambda f' \mathbf{F}_0$  du plan focal image. À une fréquence spatiale correspond ainsi un point du plan focal image. Ce dernier est bien une représentation point à point du plan des fréquences spatiales. De plus, l'amplitude du champ au point de focalisation est proportionnelle à l'amplitude de l'onde plane, c'est-à-dire à l'amplitude du spectre angulaire pour la fréquence spatiale considérée.



**FIG. 5.5.** Si l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{A}$  est celle associée à la fréquence spatiale  $\mathbf{F}_0$ , l'onde plane qui émerge de  $\mathcal{A}$  est focalisée par l'objectif au point  $\mathbf{s} = \lambda \mathbf{F}_0$  de son plan focal image.

**Remarque 5.1.4.** Insistons sur le fait que dans le montage de la figure 5.4 ce n'est pas l'objectif qui produit la transformée de Fourier du champ sur  $\mathcal{A}$  : c'est la seule propagation de l'onde lumineuse. Toutefois, comme  $\mathcal{A}$  est un émetteur plan, sa sphère de Fourier est à l'infini et le rôle de l'objectif est de ramener à distance finie ce qui serait observable à l'infini.

La figure 5.5 illustre cela : il suffit d'imaginer  $\mathcal{A}$  éclairé par une onde plane se propageant dans la direction de l'axe de l'objectif et la fonction de transmission de  $\mathcal{A}$  de la forme  $t(\mathbf{r}) = \exp[-2i\pi \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{r}]$ . L'onde diffractée est une onde plane émergeant de  $\mathcal{A}$  ; elle est ensuite – et ensuite seulement – focalisée au point  $\mathbf{s} = \lambda f' \mathbf{F}_0$ . Le phénomène de diffraction, qui est la réalisation physique de l'analyse spectrale du champ sur  $\mathcal{A}$ , a bien lieu sur  $\mathcal{A}$ . (La figure 5.38, exercice 5.1, est encore plus explicite, dans la mesure où il n'y a aucun objectif entre l'écran diffractant  $\mathcal{T}$  et le plan d'observation  $\mathcal{P}$ .)  $\diamond$

Afin de faciliter les calculs explicites des figures de diffraction, nous synthétisons ce qui précède dans la proposition suivante, qui reprend un résultat mentionné p. 48.

**Proposition 5.1.1 (Transformation de Fourier « optique ». Observation à distance finie).** *Le calcul de l'amplitude du champ sur la sphère de Fourier d'un émetteur  $\mathcal{A}$  s'effectue en trois étapes :*

- 1° *Calcul de la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  : on obtient  $\hat{U}_A(\mathbf{F})$  ( $\mathbf{F}$  est une fréquence spatiale) ;*
- 2° *Passage aux variables réduites : on remplace  $\mathbf{F}$  par  $\mathbf{s}/\lambda D$ , où  $\mathbf{s}$  est la variable spatiale sur la sphère de Fourier,  $D$  la « distance de diffraction » et  $\lambda$  la longueur d'onde du rayonnement ;*
- 3° *Multiplication par le facteur  $i/\lambda D$ , qui représente l'atténuation de l'onde et la quadrature entre l'onde directe et l'onde diffractée.*

Suivant le montage, la distance de diffraction  $D$  est égale au rayon de l'émetteur  $\mathcal{A}$  (figures 5.1 et 5.2) ou bien à la distance focale image de l'objectif qui sert à ramener à distance finie la sphère de Fourier (figures 5.3 et 5.4). Le résultat du calcul correspond, suivant le cas, à la relation (5.5) ou (5.8).

**Remarque 5.1.5 (Considération technique).** Sur tous les schémas de ce chapitre, et souvent sur ceux de l'ensemble du livre, les objectifs sont représentés symboliquement comme des lentilles simples minces. Cela facilite les dessins. Mais en aucun cas il ne faudrait utiliser des lentilles simples pour réaliser, dans de bonnes conditions, les expériences décrites ici, car ces lentilles ont des aberrations rédhibitoires. Les figures de diffraction étant obtenues en lumière quasi monochromatique, pour des faisceaux lumineux se propageant dans l'axe des systèmes optiques, la principale aberration à prendre en compte est l'aberration sphérique. Celle d'une lentille simple, aussi mince soit-elle, est importante. L'emploi d'un doublet améliore considérablement les choses, et se révèle suffisant pour l'observation de figures de diffraction de qualité, si son ouverture est modeste<sup>6</sup>. Or un doublet, c'est déjà un objectif ! C'est pourquoi nous avons pris soin d'employer systématiquement le mot « objectif » : il inclut les doublets, mais aussi des systèmes plus complexes et de meilleure qualité – un objectif de microscope par exemple –, qui satisfont, en pratique, les conditions du stigmatisme approché et de l'aplanétisme.

### 5.1.3 Observation sur un écran

On observe les figures de diffraction sur un écran  $\mathcal{E}$  tangent à la sphère de Fourier  $\mathcal{F}'$  de l'ouverture diffractante en son sommet. La plupart du temps l'écran est plan et l'éclairement y est le même que sur la sphère de Fourier, puisque le champ sur l'écran diffère de celui sur la sphère d'un terme de phase

<sup>6</sup> L'ouverture doit cependant être suffisante pour laisser passer les fréquences spatiales de l'objet diffractant (voir le chapitre 8).

quadratique. Le rayon moyen du faisceau incident étant, en général, normal à l'écran, l'éclairement détecté est

$$I_E(\mathbf{s}) = \frac{\varepsilon_0 n c}{2} |U_{F'}(\mathbf{s})|^2, \quad (5.9)$$

où  $1/\varepsilon_0 n c$  est l'impédance du milieu (paragraphe 1.3 ; relation (1.5) p. 18).

Par la suite, conformément à ce qui est dit au paragraphe 1.3, nous réduirons souvent l'éclairement sur la sphère de Fourier, ou sur un écran qui lui est tangent, à l'intensité vibratoire  $|U_{F'}(\mathbf{s})|^2$ .

## 5.2 Exemples de diffraction par une ouverture

Les exemples qui suivent se rapportent le plus souvent au montage de la figure 5.4 et à la relation (5.8). Le plan focal de l'objectif est le plan de Fourier, désigné par  $\mathcal{F}'$ . L'onde incidente est une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude égale à  $U_0$  (qui a la dimension d'un champ électrique et se mesure en V/m. En théorie, on choisit  $U_0 = 1$  V/m). L'incidence est normale.

De façon tout à fait équivalente nous considérons aussi le montage de la figure 5.1 et la relation (5.6). L'amplitude incidente sur l'ouverture diffractante  $\mathcal{T}$  est  $U_0$ . L'amplitude du champ immédiatement après  $\mathcal{T}$  est aussi celle sur la sphère  $\mathcal{A}$  : elle est égale à  $U_0 t$ , où  $t$  est la fonction de transmission de  $\mathcal{T}$ . La sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$  est  $\mathcal{F}$  et c'est le champ sur cette sphère qu'on veut calculer. Le champ sur  $\mathcal{P}$  est égal à celui sur  $\mathcal{F}$ , et l'éclairement est le même sur ces deux surfaces.

Pour harmoniser la description des deux configurations expérimentales nous dirons souvent sphère de Fourier plutôt que plan de Fourier et nous noterons  $\mathcal{F}'$  cette sphère, conformément à la relation (5.8).

### 5.2.1 Fente illimitée

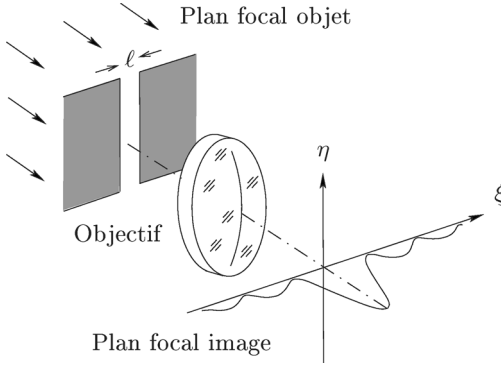
L'objet  $\mathcal{A}$  est une fente illimitée de largeur  $\ell$  (fig. 5.6), décrite par la fonction de transmission  $t(x, y) = \text{rect}_\ell(x)$ , où  $\text{rect}_\ell(x)$  vaut 1 si  $|x| \leq \ell/2$ , et 0 sinon. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est

$$U_A(\mathbf{r}) = U_A(x, y) = U_0 \text{rect}_\ell(x). \quad (5.10)$$

C'est une fonction à variables séparables (la variable  $y$  n'apparaît pas explicitement), si bien que sa transformée de Fourier à deux dimensions est le produit de deux transformées de Fourier à une dimension et s'écrit

$$\widehat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 \ell \frac{\sin \pi \ell F_x}{\pi \ell F_x} \delta(F_y). \quad (5.11)$$

L'amplitude du champ dans le plan focal image de l'objectif (plan de Fourier) s'obtient, avec des coordonnées  $\xi$  et  $\eta$ , et selon la proposition 5.1.1, en effectuant le changement de variables



**FIG. 5.6.** Représentation schématique de l'éclairement du champ diffracté par une fente illimitée de largeur  $\ell$ , observé dans le plan focal image d'un objectif.

$$F_x \mapsto \frac{\xi}{\lambda f'}, \quad F_y \mapsto \frac{\eta}{\lambda f'}, \quad (5.12)$$

et en multipliant par  $i/\lambda f'$ . Finalement

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{i\ell U_0}{\lambda f'} \frac{\sin \frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}}{\frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}} \delta\left(\frac{\eta}{\lambda f'}\right) = i\ell U_0 \frac{\sin \frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}}{\frac{\pi \ell \xi}{\lambda f'}} \delta(\eta), \quad (5.13)$$

où nous avons utilisé la relation  $|a| \delta(ax) = \delta(x)$ .

La présence de la distribution de Dirac dans la relation (5.13) indique que le champ est concentré sur l'axe  $\xi$  (fig. 5.6).

**Remarque 5.2.1.** La relation (5.13) est bien homogène d'un point de vue dimensionnel. Il suffit d'écrire  $\ell \delta(\eta) = \delta(\eta/\ell)$  pour s'en rendre compte (voir la remarque 3.4.1 p. 56).

**Remarque 5.2.2 (Éclairement de la figure de diffraction).** Cet éclairement est proportionnel au carré du module de l'amplitude du champ. La présence de la distribution de Dirac pose un problème, conformément à ce qui est exposé dans l'appendice A. Intuitivement, la distribution de Dirac en  $\eta$  traduit la concentration de l'énergie lumineuse sur l'axe  $\xi$ ; cette constatation et la remarque 5.2.1 conduisent à écrire l'éclairement (ou plutôt l'intensité vibratoire) de la figure de diffraction sous la forme

$$I_{F'}(\xi, \eta) = |U_0|^2 \left( \text{sinc} \frac{\ell \xi}{\lambda f'} \right)^2 \delta\left(\frac{\eta}{\ell}\right). \quad (5.14)$$

où  $\text{sinc}$  désigne la fonction sinus cardinal, définie par  $\text{sinc } x = \sin \pi x / \pi x$ .

L'expression de  $U_{F'}$ , telle qu'elle est donnée par le membre de droite de la relation (5.13), c'est-à-dire comportant  $\ell \delta(\eta)$  au lieu de  $\delta(\eta/\ell)$ , conduirait à écrire

$$I_{F'}(\xi, \eta) = \ell^2 |U_0|^2 \left( \text{sinc} \frac{\ell \xi}{\lambda f'} \right)^2 \delta(\eta). \quad (5.15)$$

La relation (5.15) n'est pas homogène d'un point de vue dimensionnel. Elle est incorrecte pour une autre raison : si la largeur de la fente  $\ell$  double, le flux qui traverse cette dernière double, et par conséquent l'éclairement de la figure de diffraction double lui aussi. Autrement dit, l'éclairement de la figure de diffraction est proportionnel à la largeur de la fente, ce dont ne rend pas compte la relation (5.15). En revanche c'est bien ce que montre la présence de  $\delta(\eta/\ell) = \ell\delta(\eta)$  dans la relation (5.14), laquelle constitue l'expression correcte de l'éclairement de la figure de diffraction (à l'impédance près). Il faut donc homogénéiser la distribution de Dirac dans l'expression de l'amplitude du champ, avant de chercher à exprimer l'éclairement correspondant.

### 5.2.2 Ouverture rectangulaire

La fente de la figure 5.6 est remplacée par une ouverture rectangulaire de côtés  $L$  et  $H$  (fig. 5.7). L'amplitude du champ qui émerge de l'ouverture est

$$U_A(\mathbf{r}) = U_A(x, y) = U_0 \text{rect}_L(x) \text{rect}_H(y), \quad (5.16)$$

et sa transformée de Fourier est <sup>7</sup>

$$\widehat{U}_A(\mathbf{F}) = \widehat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 L H \frac{\sin \pi L F_x}{\pi L F_x} \frac{\sin \pi H F_y}{\pi H F_y}. \quad (5.17)$$

L'amplitude du champ dans le plan de Fourier est

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{i U_0 L H}{\lambda f'} \frac{\sin \frac{\pi L \xi}{\lambda f'}}{\frac{\pi L \xi}{\lambda f'}} \frac{\sin \frac{\pi H \eta}{\lambda f'}}{\frac{\pi H \eta}{\lambda f'}}. \quad (5.18)$$

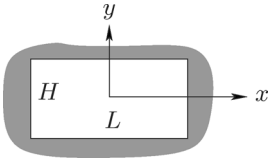


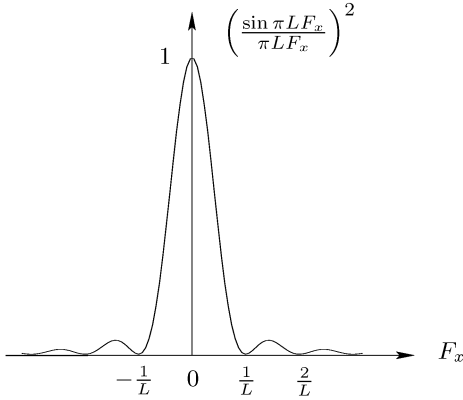
FIG. 5.7. Ouverture rectangulaire.

On observe sur un écran placé dans le plan de Fourier un éclairement proportionnel à  $|U_{F'}(\xi, \eta)|^2$ . L'intensité vibratoire dans ce plan est

$$I_{F'}(\xi, \eta) = |U_{F'}(\xi, \eta)|^2 = \frac{|U_0|^2 L^2 H^2}{\lambda^2 f'^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi L \xi}{\lambda f'}}{\frac{\pi L \xi}{\lambda f'}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi H \eta}{\lambda f'}}{\frac{\pi H \eta}{\lambda f'}} \right)^2. \quad (5.19)$$

La figure 5.8 montre le graphe de la fonction  $\sin^2 \pi L F_x / (\pi L F_x)^2$  qui donne le profil (normalisé) de la figure de diffraction pour  $\eta = 0$ , c'est-à-dire  $I_{F'}(\xi, 0)$ .

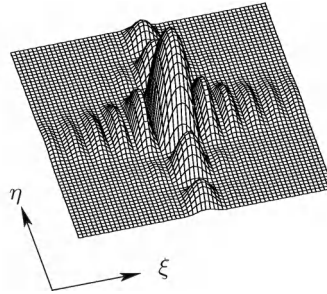
<sup>7</sup> Voir la note 21 en bas de la page 37.



**FIG. 5.8.** Graphe de la fonction  $[(\sin \pi L F_x)/(\pi L F_x)]^2$ . Le maximum secondaire vaut 0,047.

(Le maximum secondaire vaut 0,047 ; il est obtenu pour une valeur de  $F_x$  légèrement inférieure à  $3/(2L)$ , qui satisfait l'équation<sup>8</sup>  $\pi L F_x = \tan \pi L F_x$ ).

La figure 5.9 représente la figure de diffraction d'une ouverture rectangulaire telle qu'elle est observée sur un écran. (De fait, les bas niveaux d'éclairement ont été légèrement rehaussés pour devenir visibles.)



**FIG. 5.9.** À gauche : figure de diffraction d'une ouverture rectangulaire ( $L = 2H$ ). À droite : représentation graphique de  $|U_{F'}(\xi, \eta)|^2$ .

### 5.2.3 Trous d'Young

Les deux trous d'Young, supposés infiniment petits, sont distants de  $L$  (fig. 5.10). L'amplitude du champ sur les orifices se représente par

$$U_A(\mathbf{r}) = U_A(x, y) = U_0 \ell_0^2 \left[ \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{L}{2}\right) \right] \delta(y), \quad (5.20)$$

où  $\ell_0$  est l'unité de longueur (voir la règle 2 p. 56). La transformée de Fourier de  $U_A$  est

<sup>8</sup> La plus petite solution strictement positive de l'équation  $x = \tan x$  est en effet  $x \approx 4,493\,409\,458 < 1,5\pi$ .

$$\widehat{U}_A(\mathbf{F}) = \widehat{U}_A(F_x, F_y) = 2U_0\ell_0^2 \cos \pi L F_x. \quad (5.21)$$

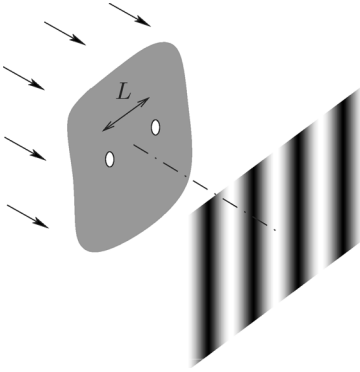
Le spectre (en amplitude) est

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{2iU_0\ell_0^2}{\lambda f'} \cos \pi L \frac{\xi}{\lambda f'}. \quad (5.22)$$

Ce résultat est un classique. L'éclairement sur la sphère de Fourier est (à l'impédance près)

$$|U_{F'}(\xi, \eta)|^2 = \frac{4|U_0|^2\ell_0^4}{\lambda^2 f'^2} \cos^2 \pi L \frac{\xi}{\lambda f'} = \frac{2|U_0|^2\ell_0^4}{\lambda^2 f'^2} \left(1 + \cos 2\pi L \frac{\xi}{\lambda f'}\right). \quad (5.23)$$

On observe des franges dont le profil est sinusoïdal (fig. 5.10). L'interfrange est  $\lambda f'/L$  (c'est la période spatiale des franges).

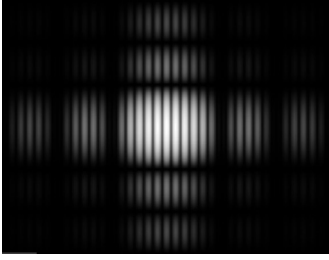


**FIG. 5.10.** Trous d'Young. Les franges sont rectilignes (approximation métaxiale, voir la remarque 5.2.3) avec un profil sinusoïdal.

**Remarque 5.2.3.** Nous avons trouvé des franges d'Young rectilignes parce que, selon l'approximation métaxiale, nous avons développé un calcul au deuxième ordre. En réalité, les franges d'Young sont hyperboliques. Mais près de l'axe, ces hyperboles s'écartent peu de leur tangente en leur sommet.

**Remarque 5.2.4.** Comme le montre la figure 5.10, il n'est pas nécessaire d'utiliser un objectif pour obtenir, dans le plan d'observation, l'éclairement donné par la relation (5.23). On montre en effet que l'éclairement est le même quelle que soit la courbure de l'onde d'éclairage des deux trous. C'est une conséquence de ce que l'amplitude de l'objet, donnée par l'équation (5.20), ne contient que des distributions de Dirac.

**Remarque 5.2.5.** On tient compte du fait que les trous d'Young ont des dimensions finies et une forme géométrique particulière (circulaire, carrée, ou autre) de la façon suivante. En supposant deux trous identiques, on obtient la figure de diffraction correspondante en multipliant les franges d'Young précédentes par la figure de diffraction d'une seule ouverture. La remarque 5.2.4 ne s'applique plus. La figure 5.11 montre un exemple pour des trous rectangulaires (la figure 10.14 p. 315 illustre le cas de deux trous circulaires).



**FIG. 5.11.** Figure de diffraction de trous d'Young rectangulaires : c'est la figure de diffraction d'une ouverture rectangulaire, modulée par des franges d'Young.

### 5.2.4 Ouverture circulaire

On décrit l'ouverture circulaire de diamètre  $D$  à l'aide de la fonction « circ » (abréviation de *circle*, cercle) telle que

$$\begin{aligned} \text{circ}_D(x, y) &= 1, \quad \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{D}{2}, \\ \text{circ}_D(x, y) &= 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Si l'éclairage est homogène sur l'ouverture, l'amplitude du champ émergent de l'ouverture est

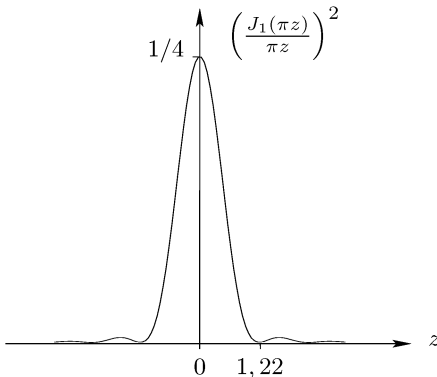
$$U_A(x, y) = U_0 \text{circ}_D(x, y). \quad (5.25)$$

Il en résulte (voir le tableau B.3 p. 485)

$$\hat{U}_A(\mathbf{F}) = \frac{\pi U_0 D^2}{2} \frac{J_1(\pi D F)}{\pi D F}, \quad \text{où } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (5.26)$$

et où  $J_1$  est la fonction de Bessel de première espèce et premier ordre [3,212,242]. Finalement

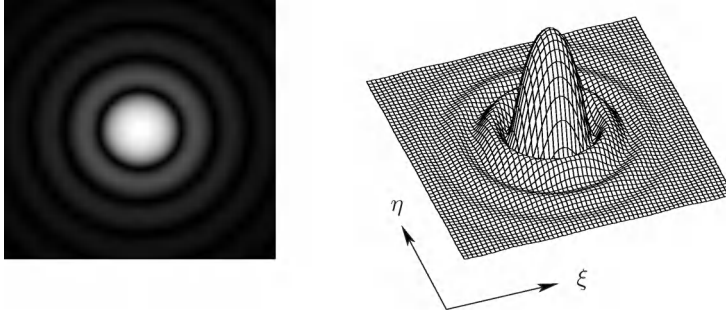
$$U_{F'}(s) = \frac{i\pi U_0 D^2}{2\lambda f'} \frac{J_1\left(\pi \frac{Ds}{\lambda f'}\right)}{\pi \frac{Ds}{\lambda f'}}, \quad \text{où } s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (5.27)$$



**FIG. 5.12.** Graphe de la fonction  $[J_1(\pi z)/\pi z]^2$ .

La figure 5.12 représente la fonction  $(J_1(\pi z)/\pi z)^2$  qui donne l'éclairement dans le plan de Fourier. Le premier zéro de  $U_{F'}(\mathbf{s})$  s'obtient pour  $s = 1,22 \lambda f'/D$ .

La figure de diffraction d'une ouverture circulaire est baptisée figure (ou tache) d'Airy. Elle est représentée par la figure 5.13.



**FIG. 5.13.** À gauche : figure de diffraction d'une ouverture circulaire (figure d'Airy). À droite : représentation graphique de  $|U_{F'}(\xi, \eta)|^2$ .

### 5.3 Diffraction par un bord d'écran rectiligne

La diffraction par un bord d'écran rectiligne, traitée ici dans le cadre d'une théorie scalaire, est un problème classique. Sa résolution est suffisamment longue et délicate sur le plan mathématique pour mériter tout un paragraphe.

#### 5.3.1 Diffraction de Fraunhofer

**Calcul du champ diffracté.** La fonction de transmission de l'écran (supposé plan) s'écrit

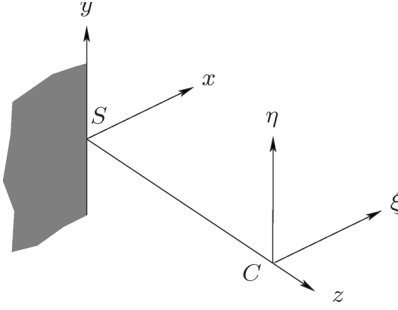
$$t(x, y) = \Upsilon(x), \quad (5.28)$$

où  $\Upsilon$  désigne la fonction de Heaviside ( $\Upsilon(x) = 1$  si  $x \geq 0$ , et  $\Upsilon(x) = 0$  si  $x < 0$ ). Nous désignons par  $z$  l'axe perpendiculaire aux axes  $x$  et  $y$  (fig. 5.14).

L'écran diffractant est éclairé par une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , d'amplitude  $U_0$ , convergeant au point  $C$  de l'axe  $z$ , à la distance  $D = \overline{SC}$  de l'écran (fig. 5.14). Il s'agit de calculer l'amplitude du champ puis l'éclairement sur la sphère de Fourier de l'émetteur (secondaire) que constitue l'écran diffractant. Puisque l'éclairage est convergent, l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{A}$  tangente à l'écran en  $S$  et centrée en  $C$  est

$$U_A(x, y) = U_0 t(x, y) = U_0 \Upsilon(x), \quad (5.29)$$

et le champ sur la sphère de Fourier (sphère  $\mathcal{F}'$  passant par  $C$  et centrée sur l'écran, en  $S$ ) est



**FIG. 5.14.** Éléments pour l'étude de la diffraction de Fraunhofer par un bord d'écran rectiligne. L'écran diffractant est supposé éclairé par une onde sphérique convergeant au point C.

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda D} \hat{t} \left( \frac{\xi}{\lambda D}, \frac{\eta}{\lambda D} \right). \quad (5.30)$$

On utilise la paire de Fourier (spatiale à une dimension<sup>9</sup>)

$$\mathcal{Y}(x) = \frac{1}{2} \delta(F_x) - \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi F_x}, \quad (5.31)$$

et applique la transformation de Fourier à deux dimensions pour écrire

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{U_0 \lambda D}{2} \left( i\delta(\xi) - \text{V.P.} \frac{1}{\pi \xi} \right) \otimes \delta(\eta). \quad (5.32)$$

La relation (5.32) donne l'amplitude, sur la sphère de Fourier, du champ diffracté par le bord d'écran.

Que dire de l'éclairement sur la sphère de Fourier ? Quelle est son expression mathématique ? Pour l'obtenir, nous devrions calculer le carré du module de l'amplitude du champ, mais nous nous heurtons ici à une difficulté mathématique, puisque le champ est représenté par des distributions singulières. Pour surmonter cette difficulté, nous appliquons la méthode exposée dans l'appendice A.

**Remarque 5.3.1.** En absence d'écran diffractant, l'amplitude sur  $\mathcal{F}'$  serait  $U_{F'}(\xi, \eta) = iU_0 \lambda D \delta(\xi, \eta)$  ; l'éclairement  $I_{F'}(\xi, \eta)$  s'obtiendrait en homogénéisant la distribution de Dirac, c'est-à-dire  $U_{F'}(\xi, \eta) = iU_0 \delta(\xi/\sqrt{\lambda D}, \eta/\sqrt{\lambda D})$ , puis en prenant le carré du coefficient de cette distribution, ce qui conduit à  $I_{F'}(\xi, \eta) = |U_0|^2 \delta(\xi/\sqrt{\lambda D}, \eta/\sqrt{\lambda D}) = |U_0|^2 \lambda D \delta(\xi, \eta)$ . Ainsi, pour le calcul de l'éclairement, la relation (5.32) doit être écrite

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{U_0}{2} \left[ i\delta \left( \frac{\xi}{\sqrt{\lambda D}} \right) - \text{V.P.} \frac{\sqrt{\lambda D}}{\pi \xi} \right] \otimes \delta \left( \frac{\eta}{\sqrt{\lambda D}} \right). \quad (5.33)$$

Pour alléger les notations, le facteur  $|U_0|^2 \lambda D / 4\pi^2$  ne sera introduit dans l'expression de l'éclairement qu'à la fin du calcul suivant.

<sup>9</sup> La transformée de Fourier de la fonction de Heaviside est donnée dans le tableau B.2 p. 484, mais dans sa version « temporelle ». La paire de Fourier de la relation (5.31) est « spatiale » (signe plus dans l'exponentielle de définition de la transformation de Fourier) : cela explique le signe moins devant la distribution valeur principale.

**Calcul de l'éclairement de la figure de diffraction.** La présence de la distribution  $\delta(\eta)$  dans la relation (5.32) indique que toute la lumière est concentrée sur l'axe  $\xi$ . Cela était prévisible puisque le bord d'écran est infini dans la direction  $y$ . Du fait que  $i\delta(\xi)$  et  $V.P.(1/\xi)$  sont en quadrature, l'éclairement de la figure de diffraction est composé (c'est la « somme ») d'un point lumineux en  $(0, 0)$ , qui provient de la distribution  $\delta(\xi) \otimes \delta(\eta)$ , et de l'éclairement correspondant à la distribution  $V.P.(1/\xi) \otimes \delta(\eta)$ . C'est cette composante de l'éclairement qu'il faut décrire sous forme mathématique explicite.

La difficulté que pose l'expression de l'éclairement associé à un champ représenté par la distribution valeur principale de  $1/\xi$  se résoud, conformément à ce qui est exposé dans l'appendice A (§A.2), par la prise en compte de la réponse percutonnelle  $\psi$  du détecteur. Puisque tout est concentré sur cet axe, seule la variable  $\xi$  est prise en compte par la suite, et la fonction  $\psi$  ne dépend que de cette variable.

Comment choisir la fonction  $\psi$ ? Une solution simple serait de choisir une fonction « rectangle » (à deux dimensions, ce serait une fonction cercle). Mais  $\psi$  doit être de classe  $C^\infty$  à support compact ; cela s'obtient en régularisant la fonction rectangle par la fonction  $\rho_\beta$ , définie sur  $[-\beta, \beta]$  par

$$\rho_\beta(x) = C_\beta \exp \left[ \frac{\beta^2}{x^2 - \beta^2} \right], \quad (5.34)$$

où  $C_\beta$  est une constante de normalisation, la fonction étant nulle en dehors de l'intervalle précédent (voir la relation (A.14) p. 470).

La réponse percutonnelle du détecteur est la fonction

$$\psi = \frac{1}{\ell} \text{rect}_\ell * \rho_\beta. \quad (5.35)$$

Le coefficient  $1/\ell$  normalise<sup>10</sup> la fonction  $\psi$ . L'intérêt du choix précédent est que la fonction  $\psi$  est aussi proche qu'on veut d'une fonction rectangle :  $\psi$  tend vers la fonction rectangle quand  $\beta$  tend vers 0. La figure 5.15 donne le graphe de la fonction  $\psi$  (en pratique  $\beta \ll \ell$ ).

Introduisons la fonction<sup>11</sup>  $h$  telle que

$$h = -\psi * V.P.\frac{1}{\xi}. \quad (5.36)$$

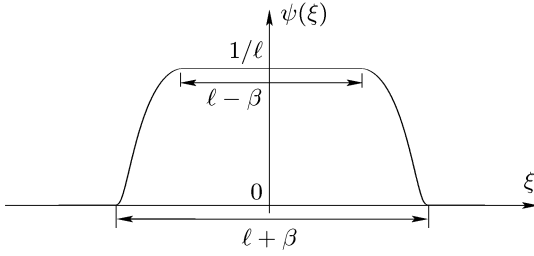
La réponse du détecteur<sup>12</sup> est la même que s'il recevait au point  $(\xi, 0)$  l'éclairement<sup>13</sup> (intensité vibratoire)  $I(\xi) = |h(\xi)|^2$ .

<sup>10</sup> Il est souhaitable que la réponse percutonnelle du détecteur tende vers une distribution de Dirac quand  $\ell$  et  $\beta$  tendent vers 0, puisque la distribution de Dirac est la réponse percutonnelle d'un détecteur idéal, dont la résolution est infinie. Le choix de  $1/\ell$  est justifié par  $\lim_{\ell \rightarrow 0} \text{rect}_\ell / \ell = \delta$  (voir le paragraphe A.1.3).

<sup>11</sup> Comme  $\psi$  est une fonction test,  $h$  est bien une fonction (voir le paragraphe A.1.6).

<sup>12</sup> La réponse au terme  $\delta(\xi)$  de la relation (5.32), ou  $\delta(\xi/\sqrt{\lambda D})$  de la relation (5.33), est examiné plus loin.

<sup>13</sup> Voir la remarque 5.3.1.



**FIG. 5.15.** Graphe de la réponse percussive du détecteur, telle qu'elle est donnée par la relation (5.35) (une seule dimension est représentée). Ici  $\ell > \beta$ . La fonction  $\psi$  est une fonction test ; elle tend vers une fonction rectangle quand  $\beta$  tend vers 0.

Il s'agit maintenant de calculer  $h(\xi)$ . On en obtient une approximation en remplaçant la fonction  $\psi$  par la fonction  $(1/\ell)\text{rect}_\ell$ , ce qui simplifie les calculs. Le résultat obtenu est d'autant plus proche du résultat exact que  $\beta$  est petit. Soit la fonction  $h_a$  telle que

$$h_a = -\frac{1}{\ell} \text{rect}_\ell * \text{V.P.} \frac{1}{\xi}. \quad (5.37)$$

Pour  $\xi > \ell/2$ , le produit de convolution de la relation (5.37) s'écrit avec une intégrale en valeur principale qui se ramène à une intégrale standard, puisque la valeur principale est à prendre en 0, point qui est en dehors du support de la fonction rectangle translatée de  $\xi$ . Ainsi

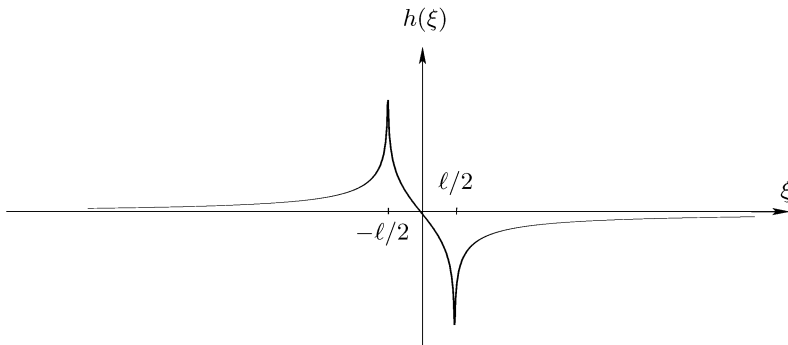
$$h_a(\xi) = -\frac{1}{\ell} \int_{\xi-\ell/2}^{\xi+\ell/2} \frac{d\xi'}{\xi'} = -\frac{1}{\ell} \int_{\xi-\ell/2}^{\xi+\ell/2} \frac{d\xi'}{\xi'} = \frac{1}{\ell} \text{Ln} \frac{\xi - \frac{\ell}{2}}{\xi + \frac{\ell}{2}}. \quad (5.38)$$

De même, pour  $\xi < -\ell/2$ ,

$$h_a(\xi) = -\frac{1}{\ell} \int_{\xi-\ell/2}^{\xi+\ell/2} \frac{d\xi'}{\xi'} = -\frac{1}{\ell} \left[ \text{Ln}(-\xi') \right]_{\xi-\ell/2}^{\xi+\ell/2} = \frac{1}{\ell} \text{Ln} \frac{\xi - \frac{\ell}{2}}{\xi + \frac{\ell}{2}}. \quad (5.39)$$

Enfin, pour  $-\ell/2 < \xi < \ell/2$ ,

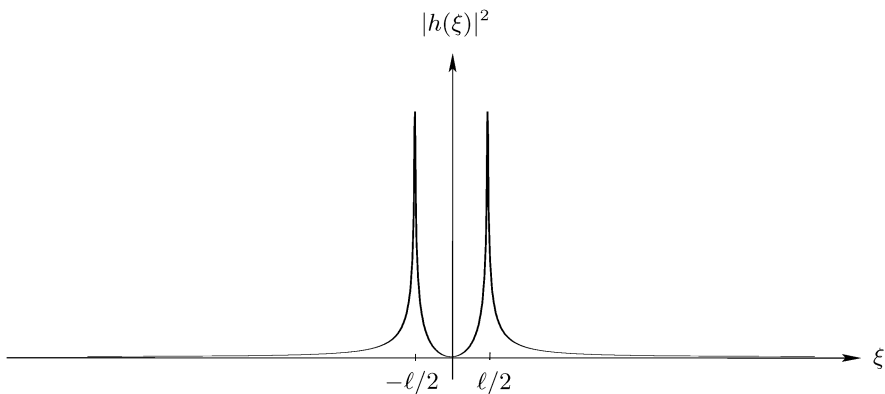
$$\begin{aligned} h_a(\xi) &= -\frac{1}{\ell} \int_{\xi-\ell/2}^{\xi+\ell/2} \frac{d\xi'}{\xi'} \\ &= -\frac{1}{\ell} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\xi-\ell/2}^{-\varepsilon} \frac{d\xi'}{\xi'} + \int_{\varepsilon}^{\xi+\ell/2} \frac{d\xi'}{\xi'} \right\} \\ &= -\frac{1}{\ell} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \text{Ln} \varepsilon - \text{Ln} \left( \frac{\ell}{2} - \xi \right) + \text{Ln} \left( \xi + \frac{\ell}{2} \right) - \text{Ln} \varepsilon \right\} \\ &= \frac{1}{\ell} \text{Ln} \frac{\frac{\ell}{2} - \xi}{\frac{\ell}{2} + \xi}. \end{aligned} \quad (5.40)$$



**FIG. 5.16.** Partie réelle de l'amplitude du champ diffracté par un bord d'écran tel qu'il est détecté par un détecteur dont la réponse percussionnelle est une fonction rectangle de largeur  $\ell$ . En dehors de l'intervalle  $[-\ell/2, \ell/2]$ , on a  $h(\xi) = -1/\xi$ .

Il reste à considérer les cas  $\xi = \pm\ell/2$ , pour lesquels il n'est plus possible de remplacer la fonction  $h$  par la fonction  $h_a$ . En effet, les relations (5.38), (5.39) et (5.40) montrent que  $h_a(\xi)$  devient infini quand  $\xi$  tend vers  $\ell/2$  ou  $-\ell/2$ . Nous ne ferons pas le calcul explicite, nous bornant à remarquer que  $h(\ell/2)$  et  $h(-\ell/2)$  sont finis. Ainsi  $h_a(\xi)$  s'écarte de façon appréciable de  $h(\xi)$  seulement dans un voisinage de  $\ell/2$  et dans un voisinage de  $-\ell/2$  qu'il nous est loisible de rendre aussi petits que nous le souhaitons en choisissant  $\beta$  assez petit pour cela.

La figure 5.16 donne le graphe (approché) de la fonction  $h$ , soit, à un coefficient multiplicatif près, de la partie réelle de l'amplitude du champ sur la sphère de Fourier. La figure (5.17) donne le graphe de la fonction  $|h|^2$ , c'est-à-dire de la partie de l'éclairement correspondant à l'amplitude précédente. Pour une bonne lisibilité des graphes, la valeur de  $\ell$  est choisie relativement grande par rapport au domaine d'étude (rapport de 1 à 20). Dans la pratique,  $\ell$  est petit devant les dimensions de la figure de diffraction. En particulier, pour  $|\xi| > \ell/2$ ,



**FIG. 5.17.** Éclairement correspondant à l'amplitude de la figure 5.17. En dehors de l'intervalle  $[-\ell/2, \ell/2]$ , il est proportionnel à  $1/\xi^2$ .

$h_a(\xi)$  tend vers  $-1/\xi$  quand  $\ell$  tend vers 0, puisque dans ce cas

$$\frac{1}{\ell} \operatorname{Ln} \frac{\xi - \frac{\ell}{2}}{\xi + \frac{\ell}{2}} = \frac{1}{\ell} \operatorname{Ln} \frac{1 - \frac{\ell}{2\xi}}{1 + \frac{\ell}{2\xi}} \sim -\frac{1}{\xi}. \quad (5.41)$$

En dehors d'un voisinage de l'origine, il est légitime de remplacer la distribution V.P.( $1/\xi$ ) par la fonction  $1/\xi$ , autrement dit, d'approcher l'intensité vibratoire au point  $\xi$  par  $1/\xi^2$  (à un facteur multiplicatif près). Ce n'est que dans l'intervalle  $[-\ell/2, \ell/2]$  que  $h_a(\xi)$  s'éloigne de  $-1/\xi$ . Toutefois cet intervalle peut être rendu arbitrairement petit (cela dépend de la résolution spatiale du détecteur).

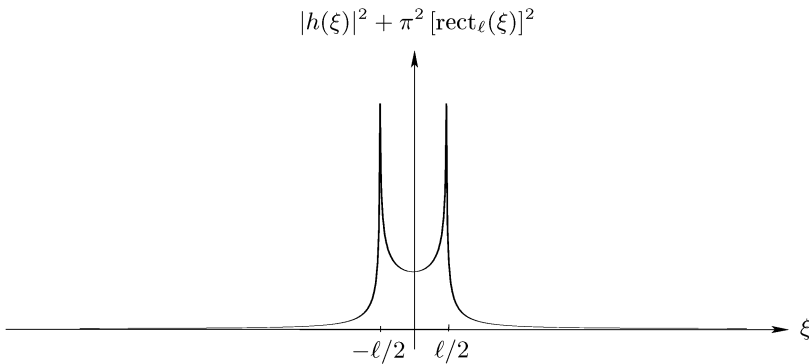
Il reste à tenir compte de la distribution de Dirac à l'origine des coordonnées sur la sphère de Fourier. La partie imaginaire de l'amplitude du champ détecté est obtenue en faisant le produit de convolution de la fonction  $\psi$  avec la distribution  $i\delta(\xi/\sqrt{\lambda D})$  : elle vaut (en supposant  $\beta \ll \ell$ )

$$U_i(\xi) = i\sqrt{\lambda D} \delta * \psi(\xi) = i\sqrt{\lambda D} \psi(\xi) \approx \frac{i\sqrt{\lambda D}}{\ell} \operatorname{rect}_\ell(\xi). \quad (5.42)$$

Finalement, une approximation de l'éclairement de la figure de diffraction de Fraunhofer d'un bord d'écran, détecté par un détecteur dont la réponse percussionnelle est  $(1/\ell) \operatorname{rect}_\ell * \rho_\beta \approx (1/\ell) \operatorname{rect}_\ell$ , s'écrit (remarque 5.3.1)

$$I_{F'}(\xi, \eta) = \frac{|U_0|^2 \lambda D}{4\pi^2 \ell^2} \left( \operatorname{Ln} \frac{\xi - \frac{\ell}{2}}{\xi + \frac{\ell}{2}} \right)^2 \otimes \delta\left(\frac{\eta}{\sqrt{\lambda D}}\right), \quad \text{si } |\xi| > \frac{\ell}{2}, \quad (5.43)$$

$$I_{F'}(\xi, \eta) = \frac{|U_0|^2 \lambda D}{4\pi^2 \ell^2} \left[ \pi^2 + \left( \operatorname{Ln} \frac{\frac{\ell}{2} - \xi}{\frac{\ell}{2} + \xi} \right)^2 \right] \otimes \delta\left(\frac{\eta}{\sqrt{\lambda D}}\right), \quad \text{si } |\xi| < \frac{\ell}{2}. \quad (5.44)$$



**FIG. 5.18.** Fonction donnant l'éclairement de la figure de diffraction de Fraunhofer d'un bord d'écran tel qu'il est détecté par un détecteur de réponse percussionnelle rectangulaire de largeur  $\ell$ .

La figure 5.18 donne le graphe de  $I_{F'}(\xi, 0)$  (à une constante multiplicative près).

Quand  $\ell$  est petit, l'éclairement se déduit des relations (5.41) et (5.43) et s'écrit, sauf au voisinage de l'origine,

$$I_{F'}(\xi, \eta) = \frac{|U_0|^2 \lambda D}{4\pi^2 \xi^2} \otimes \delta\left(\frac{\eta}{\sqrt{\lambda D}}\right). \quad (5.45)$$

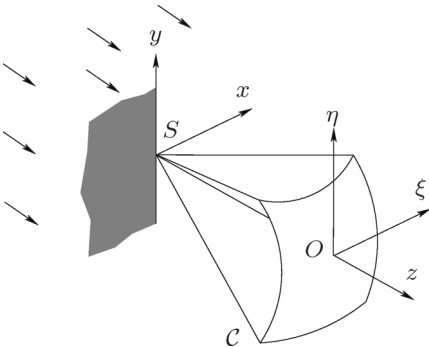
**Remarque 5.3.2.** Il est envisageable de calculer la figure de diffraction d'une fente infiniment longue (paragraphe 5.2.1) en considérant celle-ci comme formée de deux bords d'écran parallèles, chacun étant une version traduite du bord d'écran étudié précédemment. Les deux translations, opposées, se traduisent par des déphasages opposés sur la sphère de Fourier. On constate que les distributions de Dirac qui apparaissent dans l'amplitude diffractée par chaque bord se compensent et que les déphasages mentionnés introduisent une modulation de la figure de diffraction de la forme  $\sin(\pi L \xi / \lambda D)$ , où  $L$  est la largeur de la fente, c'est-à-dire la distance des deux bords d'écran. On trouve bien, finalement, une amplitude diffractée en sinus cardinal, cela pour un détecteur dont la réponse percussionnelle est arbitrairement fine. Les calculs explicites sont proposés en exercice (exercice 5.7).

### 5.3.2 Diffraction de Fresnel

L'écran du paragraphe précédent est maintenant éclairé par une onde plane (fig. 5.19), d'amplitude  $U_0$ . On observe un phénomène de diffraction de Fresnel par exemple sur la sphère  $\mathcal{C}$ , située à la distance  $D = \overline{SO}$  de l'écran et centrée sur lui (pour la définition de la diffraction de Fresnel, voir les paragraphes 3.3.2 et 3.3.3). L'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{C}$  est

$$U_{\mathcal{C}}(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D}(x\xi + y\eta)\right] t(x, y) dx dy, \quad (5.46)$$

où la fonction  $t$  est donnée par la relation (5.28).



**FIG. 5.19.** On observe la diffraction de Fresnel par un bord d'écran rectiligne sur la sphère cardinale  $\mathcal{C}$ .

La fonction  $t$  est à variables séparables, et l'intégrale de la relation (5.46) est le produit de deux intégrales de Fourier. En supposant  $D > 0$ , l'intégration en  $y$  conduit à

$$U_C(\xi, \eta) = \frac{iU_0 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda D}} \exp\left[\frac{i\pi\eta^2}{\lambda D}\right] \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{i\pi x^2}{\lambda D}\right] \exp\left[\frac{2i\pi x\xi}{\lambda D}\right] \mathcal{R}(x) dx. \quad (5.47)$$

Nous écrivons<sup>14</sup>

$$U_C(\xi, \eta) = \frac{iU_0 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda D}} \exp\left[\frac{i\pi\eta^2}{\lambda D}\right] \exp\left[\frac{i\pi\xi^2}{\lambda D}\right] J(\xi), \quad (5.48)$$

où

$$J(\xi) = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda D}(x - \xi)^2\right] dx. \quad (5.49)$$

On a l'habitude d'exprimer  $J(\xi)$  en fonction des intégrales de Fresnel, définies par [3, 7, 10, 29, 97, 134]

$$C(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi}{2} u^2 du, \quad \text{et} \quad S(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi}{2} u^2 du. \quad (5.50)$$

Ces fonctions sont tabulées dans divers ouvrages [3, 40] et on en connaît des développements en séries ou des approximations [3].

L'emploi des intégrales de Fresnel conduit à écrire  $J(\xi)$  sous la forme

$$J(\xi) = \sqrt{\frac{\lambda D}{2}} \left\{ C(+\infty) + C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}}\xi\right) - i \left[ S(+\infty) + S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}}\xi\right) \right] \right\}. \quad (5.51)$$

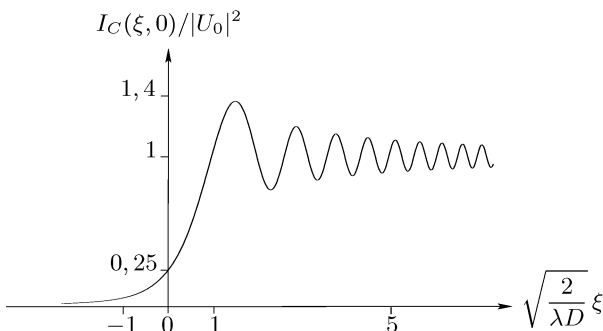
On montre [29, 134] :  $C(+\infty) = S(+\infty) = 1/2$ .

L'éclairement sur la sphère  $\mathcal{C}$  s'écrit

$$I_C(\xi, \eta) = \frac{|U_0|^2}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}}\xi\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}}\xi\right) \right]^2 \right\}. \quad (5.52)$$

La figure 5.20 représente le profil de l'éclairement de la figure de diffraction obtenue, normalisé (par rapport à l'éclairement  $|U_0|^2$  qui serait l'éclairement en l'absence de l'écran). L'abscisse est également normalisée. La partie de la courbe pour laquelle  $\xi < 0$  correspond à l'ombre géométrique de l'écran. En  $\xi = 0$ , l'éclairement normalisé vaut 1/4. Enfin, pour  $\xi > 0$ , l'éclairement est une fonction oscillante qui tend vers 1 pour  $\xi$  assez grand. Les oscillations

<sup>14</sup> Si on remplace la sphère  $\mathcal{C}$  par son plan tangent en  $O$ , les termes de phase quadratique du membre de droite de la relation (5.48) disparaissent. De toutes façons ils n'interviennent pas dans l'expression de l'éclairement.



**FIG. 5.20.** Profil normalisé de l'éclairement de la figure de diffraction de Fresnel d'un bord d'écran rectiligne.

correspondent à des franges lumineuses. Ce sont celles dont nous avons parlé au chapitre 1 (paragraphe 1.1).

Évaluons l'ordre de grandeur du pas des franges (parler du pas est abusif : les franges se resserrent quand  $\xi$  augmente ; elles ne sont pas périodiques). Si  $D = 1$  m et si  $\lambda = 0,5$   $\mu\text{m}$ , on obtient  $(2/\lambda D)^{1/2}\xi = 1$  pour  $\xi = 0,5$  mm. Les cinq premières franges occupent une largeur d'environ 2,5 mm.

**Remarque 5.3.3.** La figure 5.20 montre que le maximum d'éclairement n'est pas situé à la limite de l'ombre géométrique. Un tel effet est parfois appréciable en radio-électricité (c'est-à-dire avec de grandes longueurs d'ondes). Imaginons une source dans le ciel et une antenne (réceptrice) placée près d'une montagne de façon à être à peu près alignée avec la source et l'arrête de la montagne : l'antenne détecte un signal maximum dans une direction qui n'est pas tout à fait celle de la source.

## 5.4 Spectres de réseaux de diffraction

Un réseau de diffraction est une structure périodique qui transmet ou réfléchit la lumière. Les réseaux étudiés ici sont à une dimension<sup>15</sup> et fonctionnent en transmission. Il s'agit de calculer le spectre de tels réseaux, ou encore l'éclairement de leur figure de diffraction. L'emploi de réseaux de diffraction en spectroscopie est abordé au paragraphe 13.5.

Les conditions d'observation sont celles du paragraphe 5.2 (la distance de diffraction est  $f'$ , distance focale de l'objectif employé selon le montage de la figure 5.1 par exemple).

La distribution « peigne de Dirac » facilite la description des structures périodiques. Sa définition est

<sup>15</sup> Cela signifie qu'un tel réseau se décrit par une fonction qui ne dépend que d'une variable d'espace. Il existe des réseaux bidimensionnels (voir l'exercice 5.6) ou tridimensionnels (un cristal donne une idée d'un tel réseau).

$$\sqcup\sqcup(x) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta(x - q), \quad (5.53)$$

et sa transformée de Fourier est

$$\text{T.F.}[\sqcup\sqcup(x)](F_x) = \widehat{\sqcup\sqcup}(F_x) = \sqcup\sqcup(F_x). \quad (5.54)$$

Le peigne de Dirac de pas  $p$  s'écrit

$$\sqcup\sqcup_p(x) = \sqcup\sqcup\left(\frac{x}{p}\right) = p \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta(x - qp), \quad (5.55)$$

si bien que

$$\sqcup\sqcup_p(x) \rightleftharpoons p \sqcup\sqcup_{1/p}(F_x). \quad (5.56)$$

Bien que nous limitant dans ce paragraphe aux réseaux monodimensionnels, nous donnons l'expression d'un peigne de Dirac en dimension 2 (voir l'exercice 5.6 pour un exemple d'application). Nous écrivons

$$\sqcup\sqcup_{p,\ell}(x, y) = \sqcup\sqcup\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{\ell}\right) = p\ell \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - qp, y - n\ell), \quad (5.57)$$

dont il résulte

$$\sqcup\sqcup_{p,\ell}(x, y) \rightleftharpoons p\ell \sqcup\sqcup_{1/p, 1/\ell}(F_x, F_y). \quad (5.58)$$

Par la suite nous utilisons la fonction sinus cardinal de « largeur »  $2/\ell$ , ainsi définie

$$\text{sinc}_\ell \xi = \frac{\sin \pi \ell \xi}{\pi \ell \xi} = \text{sinc } \ell \xi. \quad (5.59)$$

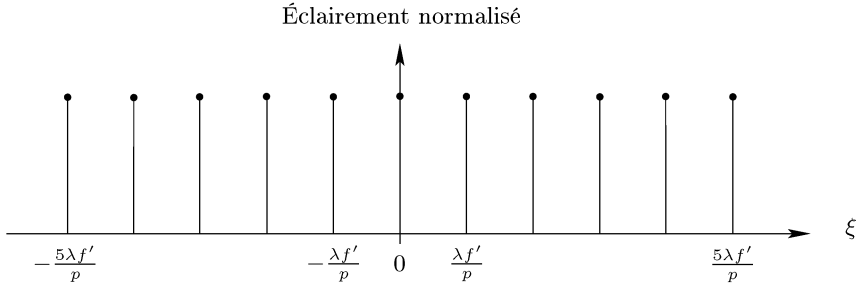
Nous avons la paire de Fourier

$$\text{rect}_\ell(x) \rightleftharpoons \ell \text{sinc}_\ell F_x. \quad (5.60)$$

#### 5.4.1 Réseaux d'amplitude

Nous étudions des réseaux composés d'ouvertures percées dans un écran opaque et réparties périodiquement.

**Réseau à traits infiniment fins et infiniment longs.** Il s'agit d'une première approche du calcul du spectre d'un réseau : les dimensions du réseau sont supposées infinies et les ouvertures infiniment minces et infiniment longues ; ce sont elles qui constituent les « traits » du réseau. La période du réseau est  $p$  : c'est la distance qui sépare deux traits adjacents. Le réseau est supposé être éclairé, sous incidence normale, par une onde plane monochromatique de



**FIG. 5.21.** Profil du spectre d'un réseau constitué d'un nombre infini d'ouvertures infiniment longues et infiniment minces. Les traits verticaux surmontés d'un point représentent symboliquement des distributions de Dirac.

longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $U_0$ . L'amplitude du champ immédiatement après le réseau est

$$U_A(x, y) = U_0 \ell_0 \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta(x - qp) = \frac{U_0 \ell_0}{p} \sqcup \sqcup_p(x), \quad (5.61)$$

où  $\ell_0$  assure l'homogénéité des distributions de Dirac et donc celle des deux membres de la relation (5.61) (voir le paragraphe 3.4.1). La transformée de Fourier de  $U_A$  est

$$\widehat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 \ell_0 \sqcup \sqcup_{1/p}(F_x) \delta(F_y), \quad (5.62)$$

et l'amplitude du champ sur la sphère de Fourier est (pour la distance de diffraction  $f'$ )

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{iU_0 \ell_0}{\lambda f'} \sqcup \sqcup \left( \frac{p\xi}{\lambda f'} \right) \delta \left( \frac{\eta}{\lambda f'} \right) = iU_0 \ell_0 \sqcup \sqcup \left( \frac{p\xi}{\lambda f'} \right) \delta(\eta). \quad (5.63)$$

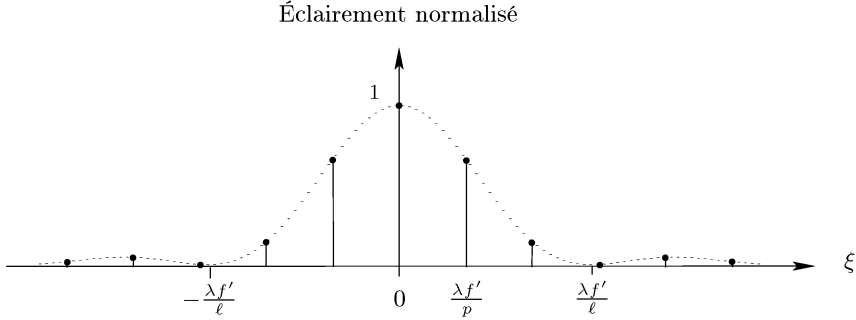
La figure de diffraction est constituée de points régulièrement espacés de  $\lambda f'/p$ , concentrés sur l'axe  $\xi$ , comme le montre le développement du peigne de Dirac de la relation (5.63) sous la forme

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{iU_0 \lambda f'}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta \left( \xi - q \frac{\lambda f'}{p} \right) \delta \left( \frac{\eta}{\ell_0} \right). \quad (5.64)$$

La figure 5.21 montre le profil du spectre du réseau. Chaque point du spectre est associé à un ordre de diffraction, indiqué par le paramètre  $q$  de la relation (5.64).

Ce qui précède constitue un modèle limite que nous allons compléter peu à peu pour nous rapprocher d'un réseau réel.

**Réseau à ouvertures de hauteur  $h$  et largeur  $\ell$ .** Nous précisons le modèle précédent en considérant des ouvertures rectangulaires ( $\ell \times h$ ), mais encore en



**FIG. 5.22.** Profil de la figure de diffraction d'un réseau d'amplitude comportant un nombre infini d'ouvertures rectangulaires identiques, de largeur  $\ell$ .

nombre infini. Le champ à la sortie du réseau est <sup>16</sup>

$$U_A(x, y) = \frac{U_0}{p} \sqcup \sqcup_p * \text{rect}_\ell(x) \text{rect}_h(y), \quad (5.65)$$

où le produit de convolution porte sur la seule variable  $x$ . On obtient, par transformation de Fourier,

$$\widehat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 \sqcup \sqcup_{1/p}(F_x) \ell \frac{\sin \pi \ell F_x}{\pi \ell F_x} h \frac{\sin \pi h F_y}{\pi h F_y}, \quad (5.66)$$

et finalement

$$\begin{aligned} U_{F'}(\xi, \eta) &= \frac{iU_0}{\lambda f'} \ell h \sqcup \sqcup \left( \frac{p\xi}{\lambda f'} \right) \text{sinc} \frac{\ell \xi}{\lambda f'} \text{sinc} \frac{h\eta}{\lambda f'} \\ &= \frac{iU_0 \ell h}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta \left( \xi - q \frac{\lambda f'}{p} \right) \text{sinc} \frac{\ell q}{p} \text{sinc} \frac{h\eta}{\lambda f'}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

La figure 5.22 représente l'éclairement (normalisé) dans le plan de Fourier pour  $\eta = 0$ . Le spectre est constitué de points lumineux espacés de  $\lambda f'/p$ , mais dont l'éclairement est modulé spatialement (à comparer avec la figure 5.21).

La dimension finie des ouvertures (qui sont toutes identiques) se traduit par une modulation des ordres de diffraction par une fonction sinus cardinal au carré (qui n'est rien d'autre que le carré de la transformée de Fourier de la fonction de transmission d'une ouverture, en ne considérant qu'une dimension).

**Remarque 5.4.1.** En général  $h$  est suffisamment grand pour qu'on puisse considérer que toute la lumière est concentrée en  $\eta = 0$ . Plus précisément, on utilise (c'est la relation (A.6) p. 468)

<sup>16</sup> Il n'y a pas lieu d'écrire la constante d'homogénéisation  $\ell_0$ , car elle s'introduit « naturellement » : le produit de convolution se traduit par une intégration spatiale (sur une dimension, variable  $x$ ) et conduit à une multiplication implicite par l'unité de longueur. Constatons que les relations écrites dans ce paragraphe sont bien homogènes.

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h}{\lambda f'} \operatorname{sinc} \frac{h\eta}{\lambda f'} = \delta(\eta), \quad (5.68)$$

pour écrire une expression approchée de  $U_{F'}(\xi, \eta)$ , valable pour  $h$  grand, sous la forme

$$U_{F'}(\xi, \eta) = \frac{iU_0 \ell \lambda f'}{p} \delta(\eta) \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta\left(\xi - q \frac{\lambda f'}{p}\right) \operatorname{sinc} \frac{\ell q}{p}. \quad (5.69)$$

**Réseau de dimensions finies.** Le réseau est supposé rectangulaire, de largeur  $L$  et hauteur  $H$ , et les traits infiniment minces, de période  $p$ .

Le réseau étant éclairé à l'incidence normale par une onde plane d'amplitude  $U_0$ , le champ immédiatement après le réseau s'écrit

$$U_A(x, y) = \frac{U_0 \ell_0}{p} \sqcup\sqcup_p(x) \operatorname{rect}_L(x) \operatorname{rect}_H(y), \quad (5.70)$$

et sa transformée de Fourier est

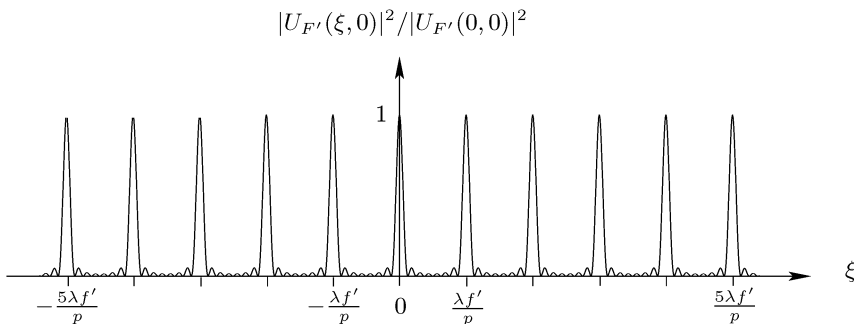
$$\widehat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 \ell_0 L H [\sqcup\sqcup_{1/p} * \operatorname{sinc}_L](F_x) \operatorname{sinc}_H F_y. \quad (5.71)$$

En pratique nous supposons  $H$  assez grand pour ne pas tenir compte de la limitation du réseau dans la direction correspondante : nous remplaçons la fonction  $H \operatorname{sinc}_H$  par la distribution de Dirac  $\delta$  (portant sur la variable  $F_y$ ).

L'amplitude du champ sur la sphère de Fourier est

$$\begin{aligned} U_{F'}(\xi, \eta) &= \frac{iU_0 \ell_0}{\lambda f'} L [\sqcup\sqcup_{1/p} * \operatorname{sinc}_L] \left( \frac{\xi}{\lambda f'} \right) \delta \left( \frac{\eta}{\lambda f'} \right) \\ &= \frac{iU_0 \ell_0 L}{p} \delta(\eta) \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - \frac{q}{p} \right). \end{aligned} \quad (5.72)$$

La figure 5.23 représente le profil normalisé de la figure de diffraction du réseau en  $\eta = 0$ . Il s'agit du spectre de la figure 5.21 dans lequel on a remplacé chaque distribution de Dirac par une fonction  $(\operatorname{sinc}_L)^2$  (qui n'est autre que le



**FIG. 5.23.** Profil de la figure de diffraction d'un réseau d'amplitude de dimensions finies et comportant des ouvertures infiniment minces.

carré de la transformée de Fourier de la fonction de transmission de l'ouverture du réseau). La largeur finie du réseau se traduit par un élargissement des points du spectre.

**Remarque 5.4.2.** La relation (5.72) donne la relation (5.64) quand  $L$  tend vers l'infini. Pour le montrer, on note  $a = 1/\lambda f'$  et  $b = q\lambda f'/p$  et on utilise

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} aL \operatorname{sinc}[aL(\xi - b)] = \delta(\xi - b). \quad (5.73)$$

**Réseau réel.** Un réseau réel, de dimensions  $L \times H$ , a un nombre fini d'ouvertures rectangulaires ( $\ell \times h$ ). Les deux effets que nous venons de décrire se conjuguent et le spectre du réseau est donné par la figure 5.24.

Le calcul explicite du spectre du réseau est le suivant (pour une onde incidente normale, d'amplitude  $U_0$ ). Le champ immédiatement après le réseau s'écrit

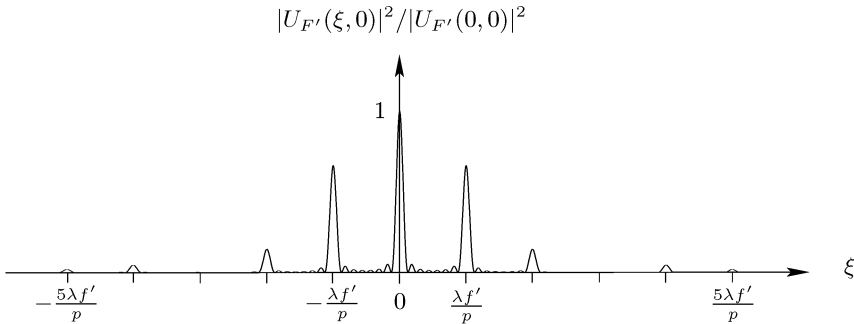
$$U_A(x, y) = \frac{U_0}{p} [\sqcup_p * \operatorname{rect}_\ell(x)] \operatorname{rect}_L(x) \operatorname{rect}_h(y), \quad (5.74)$$

dont la transformée de Fourier est

$$\widehat{U}_A(F_x, F_y) = U_0 L \ell h [\sqcup_{1/p} \operatorname{sinc}_\ell] * \operatorname{sinc}_L (F_x) \operatorname{sinc}_h F_y. \quad (5.75)$$

Une fois encore nous supposons  $h = H$  assez grand pour remplacer la fonction  $h \operatorname{sinc}_h$  par la distribution de Dirac  $\delta$ , de telle sorte que l'amplitude du champ dans le plan de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned} U_{F'}(\xi, \eta) &= iU_0 L \ell [\sqcup_{1/p} \operatorname{sinc}_\ell] * \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} \right) \delta(\eta) \\ &= \frac{iU_0 L \ell}{p} \delta(\eta) \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \operatorname{sinc}_\ell \frac{q}{p} \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - \frac{q}{p} \right). \end{aligned} \quad (5.76)$$



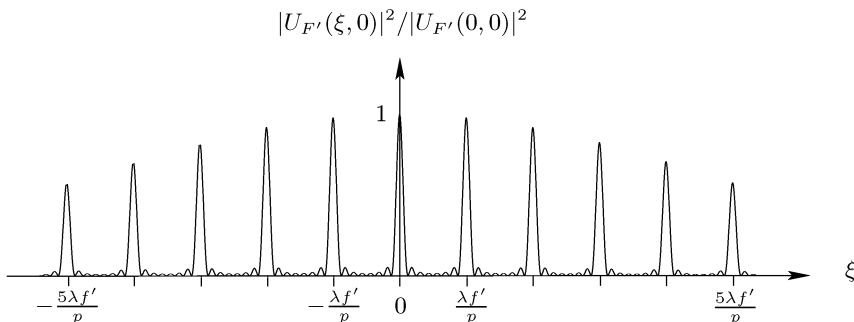
**FIG. 5.24.** Profil de la figure de diffraction d'un réseau d'amplitude comportant un nombre fini d'ouvertures identiques de dimensions finies. Le profil est pris en  $\eta = 0$ .

**Remarque 5.4.3.** On utilise le résultat de la remarque 5.4.2 pour montrer que la relation (5.76) donne la relation (5.69) quand  $L$  tend vers l'infini.

**Remarque 5.4.4.** En pratique on a souvent les inégalités suivantes

$$L \gg p \gg \ell, \quad (5.77)$$

si bien que la décroissance des pics du spectre s'effectue plus lentement que sur la figure 5.24. La figure 5.25 montre le profil du spectre dans un tel cas.



**FIG. 5.25.** Même cas que sur la figure 5.24 mais pour une valeur plus petite du rapport  $\ell/p$ .

La figure 5.26 montre l'aspect du spectre du réseau dans le plan de Fourier. Elle correspond au profil de la figure 5.25.



**FIG. 5.26.** Spectre de diffraction d'un réseau. On a tenu compte de la hauteur finie du réseau ( $H = 2L$ ), ce qui explique la forme des taches de diffraction verticalement.

**Remarque 5.4.5.** Les réseaux étudiés dans les paragraphes précédents comportent un nombre impair de traits, puisque nous avons toujours pris des peignes de Dirac centrés à l'origine. Cela n'a d'ailleurs pas grande importance pour un réseau comportant plusieurs milliers de traits, comme il est courant de rencontrer. L'exercice 5.10 propose le calcul de la figure de diffraction d'un réseau comportant un nombre de traits (ou d'ouvertures) pair.

**Remarque 5.4.6 (Une autre expression du spectre d'un réseau).** On trouve dans la littérature consacrée au sujet une autre expression du spectre d'un réseau, et cela essentiellement parce que la méthode de calcul suivie n'est pas la précédente [29]. Cela concerne la relation (5.72), qui prend en compte les dimensions finies du réseau, et la relation (5.76). Dans ce qui précède, nous avons choisi de multiplier un peigne de Dirac (c'est-à-dire une somme infinie de distributions de Dirac) par une fonction rectangle de largeur  $L$ , ce qui revient, *de facto*, à limiter le nombre de termes de la série. De manière équivalente, on

écrit d'emblée une somme réduite à un nombre fini de termes et cela conduit aux mêmes résultats, mais exprimés sous des formes différentes (l'exercice 5.10 peut d'ailleurs se résoudre de cette façon).

Le lien entre les deux approches s'établit à l'aide de la formule sommatoire de Poisson [206, 212] : si  $f$  et  $\hat{f}$  forment une paire de Fourier, alors ( $q$  est un entier)

$$\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} f(q) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \hat{f}(q). \quad (5.78)$$

Supposons que le réseau comporte  $2N + 1$  traits ou ouvertures. Si  $p$  est le pas du réseau, alors  $L = (2N + 1)p$  (cela permet d'avoir des ouvertures dont la largeur est, au maximum, légèrement inférieure à  $p$ ).

Pour appliquer la formule de Poisson, la relation (5.72) conduit à choisir comme fonction  $f$  la fonction définie par

$$f(u) = L \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - \frac{u}{p} \right), \quad (5.79)$$

la variable  $\xi$  devenant un paramètre. Dans ces conditions, la fonction  $\hat{f}$  est telle que

$$\hat{f}(v) = p \operatorname{rect}_L(pv) \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pv}{\lambda f'} \right] = p \operatorname{rect}_{L/p}(v) \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pv}{\lambda f'} \right]. \quad (5.80)$$

La relation (5.78) donne

$$\begin{aligned} L \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - \frac{q}{p} \right) &= \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} p \operatorname{rect}_{L/p}(q) \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pq}{\lambda f'} \right] \\ &= p \sum_{q=-N}^{q=N} \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pq}{\lambda f'} \right]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Nous calculons

$$\begin{aligned} \sum_{q=-N}^{q=N} \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pq}{\lambda f'} \right] &= \exp \left[ \frac{2i\pi N \xi p}{\lambda f'} \right] \sum_{q=0}^{q=2N} \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pq}{\lambda f'} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{2i\pi N \xi p}{\lambda f'} \right] \frac{1 - \exp \left[ -\frac{2i\pi(2N+1)\xi p}{\lambda f'} \right]}{1 - \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi p}{\lambda f'} \right]} \\ &= \frac{\sin \frac{(2N+1)\pi\xi p}{\lambda f'}}{\sin \frac{\pi\xi p}{\lambda f'}}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

si bien que la relation (5.72) se met sous la forme

$$U_{F'}(\xi, \eta) = iU_0 \ell_0 \delta(\eta) \frac{\sin \frac{(2N+1)\pi\xi p}{\lambda f'}}{\sin \frac{\pi\xi p}{\lambda f'}}. \quad (5.83)$$

Pour être complet, il reste à faire de même pour la relation (5.76), qui tient compte de la largeur finie des ouvertures du réseau (paramètre  $\ell$ ). Soit la fonction  $g$  définie par

$$g(u) = L\ell \operatorname{sinc}_\ell \frac{u}{p} \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - \frac{u}{p} \right). \quad (5.84)$$

La transformée de Fourier de  $g$  est

$$\hat{g} = p \operatorname{rect}_{\ell/p} * \hat{f}, \quad (5.85)$$

où la fonction  $\hat{f}$  est celle de la relation (5.80). Le calcul explicite de  $\hat{g}$  (calcul intégral) donne le résultat suivant

$$\hat{g}(v) = 0, \quad \text{si } |v| > \frac{L}{2p} + \frac{\ell}{2p}, \quad (5.86)$$

$$\hat{g}(v) = p\ell \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi\ell v}{\lambda f'} \right] \operatorname{sinc} \frac{\ell\xi}{\lambda f'}, \quad \text{si } |v| \leq \frac{L}{2p} - \frac{\ell}{2p}. \quad (5.87)$$

Pour appliquer la formule sommatoire de Poisson à  $g$  et  $\hat{g}$ , il n'est pas besoin de connaître la valeur de  $\hat{g}(v)$  pour  $(L - \ell)/2p < |v| < (L + \ell)/2p$ . En effet seules les valeurs entières de  $v$  comptent. Or  $L = (2N + 1)p$ , et nécessairement  $\ell < p$ . Il n'y a donc pas de nombre entier compris strictement entre  $(L - \ell)/2p$  et  $(L + \ell)/2p$ . La relation (5.78) appliquée aux fonctions  $g$  et  $\hat{g}$  donne

$$L\ell \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \operatorname{sinc}_\ell \frac{q}{p} \operatorname{sinc}_L \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - \frac{q}{p} \right) = p\ell \operatorname{sinc}_\ell \frac{\xi}{\lambda f'} \sum_{q=-N}^{q=N} \exp \left[ -\frac{2i\pi\xi pq}{\lambda f'} \right]. \quad (5.88)$$

Pour conclure, nous utilisons le calcul de la relation (5.82) et écrivons la relation (5.76) sous la forme

$$U_{F'}(\xi, \eta) = iU_0 \ell \delta(\eta) \operatorname{sinc} \frac{\ell\xi}{\lambda f'} \frac{\sin \frac{(2N+1)\pi\xi p}{\lambda f'}}{\sin \frac{\pi\xi p}{\lambda f'}}. \quad (5.89)$$

### 5.4.2 Réseau de phase

Soit une lame de verre dont l'épaisseur est sinusoïdale, de la forme

$$e(x, y) = e_0 + a \sin 2\pi F_0 x, \quad (5.90)$$

où  $0 < |a| < e_0$ . Si  $n$  est l'indice de réfraction du verre, et si on est dans le vide (ou l'air en prenant 1 pour indice), le déphasage introduit par la lame est

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi(n-1)e(x, y)}{\lambda}. \quad (5.91)$$

À un facteur de phase constant près, la fonction de transmission de la lame est

$$t(x, y) = \exp \left[ \frac{-2i\pi(n-1)a \sin 2\pi F_0 x}{\lambda} \right]. \quad (5.92)$$

Si  $J_q$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $q$  (un entier), la relation suivante [212]

$$e^{i\xi \sin \theta} = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q(\xi) e^{iq\theta}, \quad (5.93)$$

conduit à écrire la fonction  $t$  sous la forme

$$t(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) e^{-2i\pi q F_0 x}, \quad (5.94)$$

et la transformée de Fourier de  $t$  est telle que

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta(F_x - qF_0, F_y). \quad (5.95)$$

L'amplitude du champ sur la sphère de Fourier (la distance de diffraction étant  $f'$ ) est

$$\begin{aligned} U_{F'}(\xi, \eta) &= \frac{iU_0}{\lambda f'} \hat{t} \left( \frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'} \right) \\ &= \frac{iU_0}{\lambda f'} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta \left( \frac{\xi}{\lambda f'} - qF_0, \frac{\eta}{\lambda f'} \right) \\ &= iU_0 \lambda f' \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{2\pi(n-1)a}{\lambda} \right) \delta(\xi - qF_0 \lambda f', \eta). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Le spectre du réseau est formé d'une série de points alignés sur l'axe  $\xi$  et régulièrement espacés (la distance entre deux points voisins est  $F_0 \lambda f'$ ). Apparaissent, dans le spectre, des termes harmoniques qui traduisent un effet non linéaire. Cela vient de ce qu'on module la phase de l'onde comme le montre la relation (5.92).

**Remarque 5.4.7.** Les calculs de ce paragraphe valent pour un réseau mince, considéré comme une transparence (mince). Dans la pratique, on rencontre des réseaux épais pour lesquels se manifeste l'effet Bragg [152]. Cet effet se traduit par l'existence d'un seul ordre de diffraction (autre l'ordre 0) dont le calcul précédent donne encore la direction de diffraction associée. On conçoit enfin un avantage de l'effet Bragg : toute l'énergie lumineuse est concentrée dans un seul ordre (notion de rendement de diffraction, voir le paragraphe 5.5). Cela se paie toutefois par une grande sélectivité angulaire du réseau.

### 5.4.3 Réseaux de biréfringence

On parle de réseau de biréfringence quand la biréfringence d'un milieu est modulée périodiquement spatialement. Conformément à ce qui est dit au paragraphe 5.1.1, la modulation de biréfringence est une modulation du déphasage, d'axe ou mixte.

**Réseau de biréfringence sinusoïdal [192].** Soit un réseau de biréfringence inscrit dans un matériau biréfringent dont les vibrations propres sont supposées fixes. En revanche la biréfringence est modulée spatialement sous la forme (modulation du déphasage)

$$\psi(x, y) = \psi_0 \sin 2\pi F_0 x, \quad (5.97)$$

où  $1/F_0$  est le pas du réseau,  $\psi_0$  une constante et  $x$  et  $y$  des coordonnées dans le plan du réseau. Soient  $\mathbf{p}_1$  (vibration lente) et  $\mathbf{p}_2$  (vibration rapide) les états de polarisation propres du biréfringent<sup>17</sup> (supposés normalisés).

Le réseau est éclairé par une onde plane dont la polarisation est représentée par le vecteur

$$\mathbf{p} = a_1 \mathbf{p}_1 + a_2 \mathbf{p}_2, \quad (5.98)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des nombres complexes tels que  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$  (le vecteur  $\mathbf{p}$  est unitaire). À un terme de phase près, qui ne modifie pas le résultat final, l'état de polarisation qui émerge du réseau s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(x, y) &= a_1 \mathbf{p}_1 \exp \left[ -\frac{i\psi(x, y)}{2} \right] + a_2 \mathbf{p}_2 \exp \left[ \frac{i\psi(x, y)}{2} \right] \\ &= a_1 \mathbf{p}_1 \exp \left[ -\frac{i\psi_0 \sin 2\pi F_0 x}{2} \right] + a_2 \mathbf{p}_2 \exp \left[ \frac{i\psi_0 \sin 2\pi F_0 x}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.99)$$

La propriété des fonctions de Bessel traduite par la relation (5.93) conduit à écrire la relation (5.99) sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(x, y) &= a_1 \mathbf{p}_1 \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( -\frac{\psi_0}{2} \right) \exp [2iqF_0 x] \\ &\quad + a_2 \mathbf{p}_2 \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{\psi_0}{2} \right) \exp [2iqF_0 x]. \end{aligned} \quad (5.100)$$

<sup>17</sup> Les états  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  sont orthogonaux entre eux. En toute généralité, ils représentent des vibrations polarisées elliptiquement.

Les fonctions de Bessel  $J_q$  d'ordre pair sont paires, celles d'ordre impair sont impaires ; il en résulte

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(x, y) = & (a_1 \mathbf{p}_1 + a_2 \mathbf{p}_2) \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_{2q} \left( \frac{\psi_0}{2} \right) \exp [2i(2q)F_0 x] \\ & + (a_2 \mathbf{p}_2 - a_1 \mathbf{p}_1) \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_{2q+1} \left( \frac{\psi_0}{2} \right) \exp [2i(2q+1)F_0 x] . \end{aligned} \quad (5.101)$$

Pour traduire l'effet de la diffraction, nous devrions calculer par exemple le spectre angulaire de  $\mathbf{p}'(x, y)$ . Nous pouvons cependant comprendre comment la lumière est diffractée en remarquant que le terme  $\exp[-2i\pi q F_0 x]$  représente – à une constante dimensionnelle près – l'onde plane qui se propage dans la direction définie par  $(\alpha, \beta) = (q\lambda F_0, 0)$ . L'onde diffractée est composée d'une série d'ondes planes, chacune ayant sa propre direction de propagation, indexée par son ordre  $q$ .

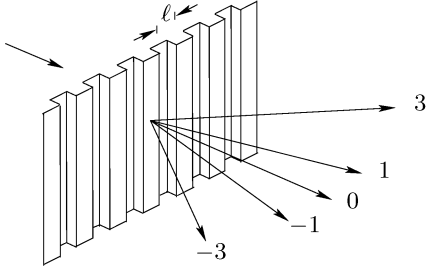
Les ordres de diffraction pairs diffractent avec la polarisation de l'onde incidente  $\mathbf{p} = a_1 \mathbf{p}_1 + a_2 \mathbf{p}_2$  ; les ordres impairs avec la polarisation  $\mathbf{p}'' = a_2 \mathbf{p}_2 - a_1 \mathbf{p}_1$ . Sur la sphère de Poincaré, les états  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  définissent un axe (voir la note 1 p. 100). Si  $P$  représente l'état  $\mathbf{p}$ , alors l'état  $\mathbf{p}''$  se représente par le point  $P''$ , symétrique de  $P$  par rapport à l'axe du biréfringent [192].

Dans le calcul de ce paragraphe, la valeur moyenne de  $\psi(x, y)$  était supposée nulle. Si cette valeur est  $\psi_m \neq 0$ , les polarisations des ondes diffractées subissent une rotation supplémentaire d'angle  $\psi_m$  autour de l'axe du biréfringent [192].

**Remarque 5.4.8.** Les résultats de ce paragraphe ont été vérifiés expérimentalement sur des cristaux de KDP [44].

**Remarque 5.4.9.** En choisissant convenablement la polarisation de l'onde incidente, on rend orthogonales entre elles la polarisation des ordres pairs et celle des ordres impairs. Si le réseau est épais, outre l'ordre 0, seul l'ordre 1 existe effectivement (cela est dû à l'effet Bragg). Les deux seuls ordres présents ont dès lors des polarisations orthogonales. Un polariseur permet enfin de sélectionner l'ordre 1. Cela est mis à profit dans des expériences d'holographie en temps réel sur support photoréfringent comme le BSO (voir le paragraphe 15.4.4). L'ordre 0, qui du point de vue de l'information est considéré comme du bruit, est éliminé au profit de l'ordre 1 qui porte l'information inscrite dans l'hologramme [111].

**Réseau de biréfringence binaire.** Pour un réseau binaire, si l'état de polarisation de l'onde incidente est  $\mathbf{p}$ , la polarisation immédiatement après le réseau est soit dans l'état  $\mathbf{p}_+$ , soit dans l'état  $\mathbf{p}_-$ , suivant la biréfringence locale du milieu. Ces deux états dépendent également du type de modulation : modulation de biréfringence par modulation d'axe, du déphasage ou mixte. À ce stade de l'analyse il n'est pas nécessaire de connaître explicitement les états  $\mathbf{p}_+$  et  $\mathbf{p}_-$ , et leur détermination se fera ultérieurement. La figure 5.27 représente schématiquement les domaines où la polarisation émergente est  $\mathbf{p}_+$  et ceux où



**FIG. 5.27.** Représentation schématique d'un réseau de biréfringence binaire. Si la largeur des domaines est la même pour les deux valeurs de la biréfringence, il n'y a pas de diffraction pour les ordres pairs autres que l'ordre 0.

elle est  $\mathbf{p}_-$ . Ces domaines sont supposés ici de même largeur  $\ell$  ; la période du réseau est  $2\ell$ .

L'état de polarisation immédiatement après le réseau s'écrit

$$\mathbf{p}'(x, y) = \frac{1}{2\ell} \mathbf{p}_+ \text{rect}_\ell * \sqcup\sqcup_{2\ell}(x) + \frac{1}{2\ell} \mathbf{p}_- \text{rect}_\ell * \sqcup\sqcup_{2\ell} * \delta_\ell(x). \quad (5.102)$$

La figure de diffraction s'obtient par transformation de Fourier

$$\hat{\mathbf{p}}'(F_x, F_y) = \ell(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- \exp[2i\pi\ell F_x]) \frac{\sin \pi\ell F_x}{\pi\ell F_x} \sqcup\sqcup_{1/2\ell}(F_x) \delta(F_y). \quad (5.103)$$

Le développement du peigne de Dirac s'écrit

$$\sqcup\sqcup_{1/2\ell}(F_x) = \frac{1}{2\ell} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta\left(F_x - \frac{q}{2\ell}\right). \quad (5.104)$$

et si  $q$  est un nombre entier pair (non nul), les supports des distributions de Dirac sont les points où la fonction sinus de la relation (5.103) s'annule. Il n'y a donc pas de diffraction des ordres pairs (autres que l'ordre 0).

L'ordre 0 est tel que

$$\hat{\mathbf{p}}'(0, 0) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-) \delta(F_x, F_y). \quad (5.105)$$

Les ordres impairs sont tels que

$$\hat{\mathbf{p}}'\left(\frac{2q+1}{2\ell}, 0\right) = \frac{(-1)^q}{\pi(2q+1)} (\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_-) \delta\left(F_x - \frac{2q+1}{2\ell}, F_y\right). \quad (5.106)$$

**Réseau de biréfringence binaire par modulation de déphasage.** Les vibrations propres du biréfringent se représentent par les vecteurs  $\mathbf{p}_1$  (vibration lente) et  $\mathbf{p}_2$ . Le déphasage peut prendre la valeur  $\psi_0$  (une constante) ou  $-\psi_0$  ; il s'écrit

$$\psi(x, y) = \frac{\psi_0}{\ell} \text{rect}_\ell * \sqcup\sqcup_{2\ell}(x) - \psi_0. \quad (5.107)$$

Ici la valeur moyenne de  $\psi$  est nulle, mais il est possible de traiter le cas général pour lequel cette valeur n'est pas nulle [192].

La lumière incidente est dans l'état de polarisation

$$\mathbf{p} = a\mathbf{p}_1 + b\mathbf{p}_2, \quad (5.108)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes. Les états  $\mathbf{p}_+$  et  $\mathbf{p}_-$  sont

$$\mathbf{p}_+ = a\mathbf{p}_1 \exp\left(-\frac{i\psi_0}{2}\right) + b\mathbf{p}_2 \exp\left(\frac{i\psi_0}{2}\right), \quad (5.109)$$

$$\mathbf{p}_- = a\mathbf{p}_1 \exp\left(\frac{i\psi_0}{2}\right) + b\mathbf{p}_2 \exp\left(-\frac{i\psi_0}{2}\right). \quad (5.110)$$

L'ordre 0 est tel que

$$\widehat{\mathbf{p}}'(0,0) = (a\mathbf{p}_1 + b\mathbf{p}_2) \cos \frac{\psi_0}{2} \delta(F_x, F_y), \quad (5.111)$$

et les ordres impairs

$$\widehat{\mathbf{p}}'\left(\frac{2q+1}{2\ell}, 0\right) = 2i \frac{(-1)^q}{\pi(2q+1)} (b\mathbf{p}_2 - a\mathbf{p}_1) \sin \frac{\psi_0}{2} \delta\left(F_x - \frac{2q+1}{2\ell}, F_y\right). \quad (5.112)$$

L'ordre 0 possède la polarisation de la lumière incidente alors que la polarisation des ordres impairs se déduit de la polarisation incidente comme si l'onde était passée à travers une lame demi-onde dont les vibrations propres sont celles du milieu biréfringent (c'est-à-dire  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ ).

Si  $\psi_0 = \pi$ , il n'existe pas d'ordre 0 ; si  $\psi_0 = 2\pi$ , il n'y a pas non plus d'ordre impair. Cela est normal dans la mesure où tout se passe comme s'il n'y avait pas de réseau ! (comme pour  $\psi_0 = 0$ ).

**Réseau de biréfringence binaire par modulation d'axe.** Il existe des zones où les vibrations propres du milieu dans lequel est formé le réseau sont  $\mathbf{p}_{1+}$  et  $\mathbf{p}_{2+}$ , et des zones où ce sont  $\mathbf{p}_{1-}$  et  $\mathbf{p}_{2-}$ . L'état de polarisation de l'onde incidente sur le réseau est

$$\mathbf{p} = a_+\mathbf{p}_{1+} + b_+\mathbf{p}_{2+} = a_-\mathbf{p}_{1-} + b_-\mathbf{p}_{2-}, \quad (5.113)$$

où  $a_+$ ,  $b_+$ ,  $a_-$  et  $b_-$  sont des constantes. Le déphasage est  $\psi_0$  dans tous les cas et par suite

$$\mathbf{p}_+ = a_+\mathbf{p}_{1+} \exp\left(-i\frac{\psi_0}{2}\right) + b_+\mathbf{p}_{2+} \exp\left(i\frac{\psi_0}{2}\right), \quad (5.114)$$

$$\mathbf{p}_- = a_-\mathbf{p}_{1-} \exp\left(-i\frac{\psi_0}{2}\right) + b_-\mathbf{p}_{2-} \exp\left(i\frac{\psi_0}{2}\right). \quad (5.115)$$

La polarisation de l'ordre 0 et celle des ordres impairs se calculent à l'aide des relations (5.105) et (5.106).

**Remarque 5.4.10.** Les méthodes précédentes s'appliquent à des réseaux de biréfringence à modulations sinusoïdales ou binaires, avec des motifs périodiques plus compliqués que ceux traités ici [137, 192].

## 5.5 Rendement de diffraction d'un réseau

### 5.5.1 Définition

L'amplitude diffractée par un réseau infini, de pas  $p$ , est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction de transmission du réseau, laquelle s'écrit, avec les fréquences spatiales comme variables, sous la forme

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \sum_q C_q \delta\left(F_x - \frac{q}{p}\right) \delta(F_y), \quad (5.116)$$

où  $C_q$  est une constante. Les paragraphes précédents fournissent des exemples (voir la relation (5.64) p. 122 ou (5.96) p. 129, en adaptant les variables).

On appelle rendement de diffraction de l'ordre  $q$  la quantité  $\eta_q = |C_q|^2$ . Le rendement de diffraction caractérise la fraction de l'énergie incidente (ou du flux incident) qui est diffractée dans l'ordre  $q$ .

### 5.5.2 Réseau d'amplitude sinusoïdal

La fonction de transmission du réseau s'écrit

$$t(x, y) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi x}{p} \right), \quad (5.117)$$

et sa transformée de Fourier

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \left[ \frac{1}{2} \delta(F_x) + \frac{1}{4} \delta\left(F_x - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{4} \delta\left(F_x + \frac{1}{p}\right) \right] \delta(F_y). \quad (5.118)$$

Le réseau comporte trois ordres de diffraction dont les rendements sont les suivants

$$\eta_0 = \frac{1}{4}, \quad \eta_1 = \eta_{-1} = \frac{1}{16} \approx 0,06. \quad (5.119)$$

La somme des trois valeurs du rendement de diffraction est

$$\eta_{-1} + \eta_0 + \eta_1 = \frac{3}{8}, \quad (5.120)$$

ce qui signifie que 3/8 de l'énergie incidente est transmise par le réseau. Cela se vérifie par le calcul de la moyenne de  $[t(x, y)]^2$  sur une période du réseau. De

$$[t(x, y)]^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + 2 \cos \frac{2\pi x}{p} + 2 \cos \frac{4\pi x}{p} \right), \quad (5.121)$$

il résulte (le symbole  $\langle \rangle$  représente la moyenne spatiale)

$$\langle [t(x, y)]^2 \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p [t(x, y)]^2 dx = \frac{3}{8}. \quad (5.122)$$

Le réseau absorbe les 5/8 du flux incident.

### 5.5.3 Réseau d'amplitude en créneaux

Soit un réseau, de pas  $p$ , dont la fonction de transmission s'écrit

$$t(x, y) = \frac{1}{p} \sqcup \sqcup_p * \text{rect}_{p/2}(x), \quad (5.123)$$

ce qui signifie que les parties passantes ont la même largeur ( $p/2$ ) que les parties absorbantes. Le spectre du réseau (en amplitude) est donné par

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \frac{p}{2} \text{sinc} \frac{pF_x}{2} \sqcup \sqcup_{1/p}(F_x) \delta(F_y) = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \text{sinc} \frac{q}{2} \delta\left(F_x - \frac{q}{p}\right) \delta(F_y), \quad (5.124)$$

si bien que le rendement de diffraction de l'ordre  $q$  est

$$\eta_q = \frac{1}{4} \left( \text{sinc} \frac{q}{2} \right)^2. \quad (5.125)$$

Mis à part l'ordre 0, le réseau ne diffracte que dans les ordres impairs : le spectre en amplitude s'écrit sous la forme

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \frac{1}{2} \delta(F_x) \delta(F_y) - \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \frac{(-1)^{q'}}{(2q'+1)\pi} \delta\left(F_x - \frac{2q'+1}{p}\right) \delta(F_y), \quad (5.126)$$

et le rendement de diffraction de l'ordre  $q = 2q' + 1$  est

$$\eta_q = \eta_{2q'+1} = \frac{1}{(2q'+1)^2 \pi^2}. \quad (5.127)$$

Le rendement de diffraction de l'ordre 0 est  $\eta_0 = 1/4$ ; celui des ordres 1 et  $-1$  est  $\eta_1 = \eta_{-1} = 1/\pi^2 \approx 0,10$ .

Le réseau absorbe la moitié du flux incident puisque

$$\langle [t(x, y)]^2 \rangle = \frac{1}{p} \int_0^p [t(x, y)]^2 dx = \frac{1}{2}. \quad (5.128)$$

On vérifie, à l'aide de la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \eta_q = \frac{1}{4} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \left( \text{sinc} \frac{q}{2} \right)^2 = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} A_{1/2}(q) = A_{1/2}(0) = \frac{1}{2}, \quad (5.129)$$

où  $A_{1/2}$  est la fonction triangle de largeur 1 (voir le paragraphe B.4.1 et le tableau B.2).

**Remarque 5.5.1.** Le rendement de diffraction de ce réseau dans l'ordre 1 est supérieur à celui du réseau sinusoïdal du paragraphe précédent qui pourtant ne comportait que trois ordres. Cela vient de ce que le réseau sinusoïdal absorbe d'avantage. (Le rendement dans l'ordre 0 est le même pour les deux réseaux.)

### 5.5.4 Réseau de phase à deux niveaux

Le réseau, de pas  $p$ , est un réseau de phase en créneaux de largeur  $p/2$ . La phase vaut 0 ou  $\pi$ , et la fonction de transmission du réseau s'écrit

$$t(x, y) = \frac{1}{p} \sqcup \sqcup_p * \text{rect}_{p/2}(x) + \frac{e^{i\pi}}{p} \sqcup \sqcup_p * \text{rect}_{p/2} * \delta_{p/2}(x). \quad (5.130)$$

Par transformation de Fourier on obtient

$$\begin{aligned} \hat{t}(F_x, F_y) &= \frac{p(1 - e^{i\pi p F_x})}{2} \text{sinc} \frac{p F_x}{2} \sqcup \sqcup_{1/p}(F_x) \delta(F_y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} (1 - e^{i\pi q}) \text{sinc} \frac{q}{2} \delta\left(F_x - \frac{q}{p}\right) \delta(F_y). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Le réseau ne diffracte que dans les ordres impairs. Il n'y a pas d'ordre 0. La relation (5.131) s'écrit encore

$$\hat{t}(F_x, F_y) = -2 \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \frac{(-1)^{q'}}{(2q' + 1)\pi} \delta\left(F_x - \frac{2q' + 1}{p}\right) \delta(F_y). \quad (5.132)$$

Le rendement de diffraction de l'ordre  $q = 2q' + 1$  est

$$\eta_{2q'+1} = \frac{4}{(2q' + 1)^2 \pi^2}. \quad (5.133)$$

En particulier :  $\eta_1 = \eta_{-1} = 4/\pi^2 \approx 0,40$ .

Le réseau étant un réseau de phase, donc transparent, tout le flux incident est diffracté. On vérifie

$$\begin{aligned} \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \eta_{2q'+1} &= \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \frac{4}{(2q' + 1)^2 \pi^2} = \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \left( \text{sinc} \frac{2q' + 1}{2} \right)^2 \\ &= -1 + \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \left( \text{sinc} \frac{q}{2} \right)^2 = 1, \end{aligned} \quad (5.134)$$

la dernière égalité résultant de la relation (5.129).

**Remarque 5.5.2.** On montre que le rendement de diffraction de l'ordre  $-1$  (ou 1 suivant les conventions adoptées) d'un réseau de phase augmente avec le nombre de niveaux de la phase. Par exemple pour quatre niveaux<sup>18</sup>, le rendement de l'ordre  $-1$  vaut 0,80 (celui de l'ordre 1 est nul, voir l'exercice 5.11). Quand le nombre de niveaux augmente, le profil du réseau se rapproche de celui d'un réseau échelette pour lequel toute la puissance lumineuse est diffractée dans un seul ordre (l'ordre 1 ou  $-1$ ).

<sup>18</sup> Le profil de la phase du réseau est formé de créneaux de même largeur.

**Remarque 5.5.3.** N'avoir qu'un ordre de diffraction est intéressant pour les applications des réseaux en spectroscopie (voir le paragraphe 13.5) ou pour leur emploi comme composants correcteurs de systèmes réfringents : toute la lumière diffractée est portée par une seule onde et les pertes que représentent les autres ordres sont nulles. L'ordre 0 n'a pas d'intérêt en spectroscopie puisqu'il ne donne pas lieu à dispersion ; il ne permet pas non plus de compenser le chromatisme de lentilles réfringentes, pour la même raison. Il est important de pouvoir l'éliminer et de concevoir des réseaux dont le profil permet cela.

## 5.6 Rayonnement des antennes

Il s'agit surtout ici de jeter un pont entre l'optique et le domaine des hyperfréquences et, par l'emploi d'un langage et d'outils communs aux deux disciplines, de montrer que la connaissance de l'une permet de comprendre des éléments de l'autre [253]. Dans une certaine mesure, les résultats de ce paragraphe s'étendent à l'acoustique [136].

L'optique de Fourier, théorie scalaire, s'applique aux antennes radio-électriques dans le domaine du champ lointain. On sait en effet qu'en champ lointain, l'onde rayonnée par une antenne est localement plane. La transformation de Fourier permet de comprendre, dans leurs grandes lignes, les propriétés géométriques du rayonnement d'une antenne. L'analogie entre ouvertures diffractantes et antennes à ouverture mérite d'être soulignée. Ainsi la résolution d'une antenne s'analyse comme celle d'un système optique (étudiée au chapitre 8). Les réseaux d'antennes sont les équivalents des réseaux de diffraction, et dans les deux cas des questions d'apodisation se posent de la même manière.

### 5.6.1 Diffraction à l'infini

**Champ lointain. Fonction caractéristique.** Si  $\mathcal{A}$  est un émetteur plan, sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  est à l'infini (voir la remarque 3.2.5 p. 49). À chaque fréquence spatiale de l'objet diffractant est associée une onde plane, et l'onde diffractée est une superposition d'ondes planes que nous décrivons en choisissant la fréquence angulaire  $\Phi = (\alpha, \beta)$  comme variable (voir le chapitre 2). L'amplitude de l'onde diffractée dans la direction définie<sup>19</sup> par  $\Phi$  est donnée par l'amplitude du spectre angulaire dans cette même direction (relation (2.21) p. 29), soit

$$V(\Phi) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} \Phi \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (5.135)$$

L'expression précédente donne l'amplitude de l'onde diffractée prise sur l'émetteur. Il y manque éventuellement un coefficient, si on veut représenter

<sup>19</sup> Rappelons que connaître  $\Phi$ , c'est connaître deux des cosinus directeurs de la direction de propagation de l'onde plane ( $\alpha$  et  $\beta$ ). Le troisième cosinus directeur,  $\gamma$ , se déduit de  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

le champ à l'infini. Pour comprendre cela, écrivons l'amplitude du champ diffracté, à la distance  $D$ , par diffraction de Fraunhofer à partir d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  (nécessairement de rayon  $D$ ), c'est-à-dire (Théorème 1)

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (5.136)$$

Si  $\mathcal{A}$  est un émetteur plan, sa sphère de Fourier est à l'infini. Or, selon la relation (5.136), l'amplitude  $U_F(\mathbf{s})$  tend vers 0 quand  $D$  tend vers l'infini. Nous définissons la zone de champ lointain de la façon suivante :

- 1° La distance  $D$  (qui est aussi le rayon de  $\mathcal{A}$ ) est assez grande pour qu'on puisse confondre l'émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  avec un plan ;
- 2° Si  $\mathbf{s}$  est la variable d'espace sur la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ , l'approximation  $\mathbf{s} = D\boldsymbol{\Phi}$  est légitime.

Dans ces conditions, l'amplitude diffractée en champ lointain par un émetteur plan s'obtient, dans la direction définie par  $\boldsymbol{\Phi}$ , en remplaçant la variable  $\mathbf{s}$  par  $D\boldsymbol{\Phi}$  dans la relation (5.136), soit explicitement

$$U_\infty(\boldsymbol{\Phi}) = U_F(D\boldsymbol{\Phi}) = \frac{i}{\lambda D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{i\lambda}{D} V(\boldsymbol{\Phi}). \quad (5.137)$$

En prévision des comparaisons qui seront faites avec les expressions habituelles du champ rayonné par une antenne, nous introduisons le terme  $\exp[-2i\pi D\nu/v]$  que nous n'écrivons plus, conformément à la règle 1 (p. 48), et écrivons la forme complète de la relation (5.137), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_\infty(\boldsymbol{\Phi}) &= \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{2i\pi D}{\lambda} \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \frac{i\lambda}{D} \exp \left[ -\frac{2i\pi D}{\lambda} \right] V(\boldsymbol{\Phi}). \end{aligned} \quad (5.138)$$

La « fonction caractéristique scalaire du rayonnement » est la fonction

$$f(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\lambda^2 V(\boldsymbol{\Phi})}{C}, \quad (5.139)$$

où

$$C = \sup_{\boldsymbol{\Phi}} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]. \quad (5.140)$$

La fonction  $f$  est la transformée de Fourier normalisée du champ sur l'émetteur.

**Diagramme de rayonnement.** Il est habituel de caractériser une antenne par son « diagramme de rayonnement » et d'adopter une représentation polaire de la fonction caractéristique (ou de son module), c'est-à-dire de l'amplitude  $U_\infty$  normalisée (ou de son module).

Soit une onde plane dont le vecteur d'onde est dans la direction de la droite  $\Delta$ . Les projections de cette droite sur les plans  $x, z$  et  $y, z$  définissent les angles

$\varphi_x$  et  $\varphi_y$  (fig. 5.28). La projection de  $\Delta$  sur le plan  $x, y$ , qui définit l'angle  $\varphi_z$ , est dans la direction du vecteur  $\Phi$  dont les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux des cosinus directeurs de la direction  $\Delta$  (voir la figure 2.6). En effet, par définition,

$$\alpha = \cos \theta_x, \quad (5.141)$$

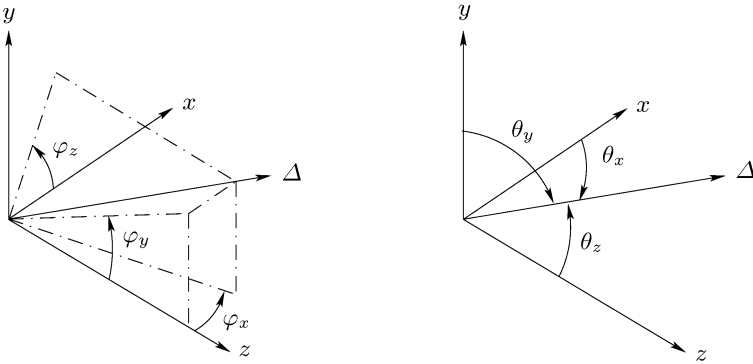
$$\beta = \cos \theta_y, \quad (5.142)$$

où  $\theta_x$  est l'angle de  $\Delta$  avec l'axe  $x$  et  $\theta_y$  celui de  $\Delta$  avec l'axe  $y$ . Enfin si  $\theta_z$  est l'angle de  $\Delta$  avec l'axe  $z$ , on établit les relations

$$\alpha = \sin \theta_y \sin \varphi_x = \sin \theta_z \cos \varphi_z, \quad (5.143)$$

$$\beta = \sin \theta_x \sin \varphi_y = \sin \theta_z \sin \varphi_z. \quad (5.144)$$

Ainsi  $\theta_z$  est égal à  $\varphi_x$  quand  $\varphi_z = 0$  (et  $\theta_y = \pi/2$ ), et est égal à  $\varphi_y$  quand  $\varphi_z = \pi/2$ .



**FIG. 5.28.** Deux façons de caractériser angulairement la direction  $\Delta$  dans l'espace.

Pour une antenne filaire<sup>20</sup> rectiligne, alignée sur la direction  $y$ , on construit le diagramme de rayonnement en choisissant l'angle  $\theta_y$  comme paramètre.

Pour une antenne à ouverture circulaire placée dans le plan  $x, y$ , on choisit comme paramètre l'angle  $\theta_z$ , à cause de la symétrie de révolution.

En général, les calculs des champs étant effectués en coordonnées cartésiennes, il est souvent plus commode de choisir  $\varphi_x$ , ou bien  $\varphi_y$ , comme angle caractéristique pour décrire le rayonnement de l'antenne. On obtient ainsi des « sections » du diagramme de rayonnement. Des exemples sont donnés dans les paragraphes suivants.

Si  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\Phi = (\alpha, \beta)$ , les relations (5.141) et (5.142) conduisent à écrire la relation (5.139) sous la forme<sup>21</sup>

<sup>20</sup> Sur le principe, une telle antenne est constituée d'un fil parcouru par un courant électrique dont l'intensité est le produit d'une porteuse sinusoïdale et d'une modulation. En pratique il s'agit souvent d'une antenne « dipôle » [75].

<sup>21</sup> Pour simplifier, et par abus, nous gardons la même lettre  $f$  pour noter la fonction caractéristique du rayonnement, indépendamment des variables angulaires choisies.

$$f(\theta_x, \theta_y) = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (x \cos \theta_x + y \cos \theta_y) \right] U_A(x, y) dx dy. \quad (5.145)$$

D'autre part, les relations (5.143) et (5.144) conduisent à

$$\Phi \cdot \mathbf{r} = x \sin \theta_z \cos \varphi_z + y \sin \theta_z \sin \varphi_z, \quad (5.146)$$

et la relation (5.139) devient

$$f(\theta_z, \varphi_z) = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda} (x \sin \theta_z \cos \varphi_z + y \sin \theta_z \sin \varphi_z) \right] U_A(x, y) dx dy, \quad (5.147)$$

### 5.6.2 Lien avec la théorie des antennes

En théorie des antennes<sup>22</sup>, on démontre le résultat suivant<sup>23</sup> [53, 173]. Soit  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  le vecteur densité de courant au point  $\mathbf{r}$  d'une antenne  $\mathcal{A}$ . En champ lointain, le champ électromagnétique rayonné par l'antenne est donné, au point<sup>24</sup>  $\boldsymbol{\rho}$ , par le vecteur champ électrique ( $\times$  est le symbole du produit vectoriel)

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{i\omega\mu}{4\pi\rho} \exp \left[ -\frac{2i\pi\rho}{\lambda} \right] \mathbf{e}_\rho \times \left[ \mathbf{e}_\rho \times \int_{\mathcal{A}} \exp [2i\pi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{r}] \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right], \quad (5.148)$$

et le vecteur champ magnétique

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{i\omega}{4\pi\rho} \exp \left[ -\frac{2i\pi\rho}{\lambda} \right] \left[ \mathbf{e}_\rho \times \int_{\mathcal{A}} \exp [2i\pi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{r}] \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right], \quad (5.149)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $\mu$  la perméabilité du milieu de propagation et  $\mathbf{e}_\rho$  est le vecteur unitaire suivant le rayon vecteur  $\boldsymbol{\rho}$ .

Pour établir le lien avec la diffraction en optique, nous remplaçons  $\mu$  par la perméabilité du vide  $\mu_0$ , dans la mesure où nous considérons des milieux non magnétiques. De  $\omega = 2\pi\nu$  résulte

$$\omega\mu = \frac{2\pi c}{n\lambda} \mu_0. \quad (5.150)$$

Les relations (5.148) et (5.149) deviennent respectivement

<sup>22</sup> Par théorie des antennes, nous entendons l'approche vectorielle du champ électromagnétique rayonné par une antenne, telle qu'elle est décrite dans des ouvrages classiques sur le sujet [48, 53, 55, 75, 119, 173].

<sup>23</sup> Certaines différences dans les signes s'expliquent par le choix d'une dépendance temporelle de la forme  $\exp[2i\pi\nu t]$ .

<sup>24</sup> Avec les notations employées dans ce livre, le vecteur  $\mathbf{r}$  est un vecteur à deux dimensions qui représente un point de l'antenne, l'origine étant le sommet de l'antenne (voir le paragraphe 3.1.1). Toutefois le vecteur  $\boldsymbol{\rho}$  est à trois dimensions ; son origine est aussi le sommet de l'antenne : si  $D$  est la distance de l'antenne au plan d'observation, le vecteur  $\boldsymbol{\rho}$  possède une composante  $D\mathbf{e}_z$  sur l'axe  $z$  (le vecteur  $\mathbf{e}_z$  est unitaire sur l'axe  $z$ ).

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{ic\mu_0}{2n\lambda\rho} \exp\left[-\frac{2i\pi\rho}{\lambda}\right] \mathbf{e}_\rho \times \left[ \mathbf{e}_\rho \times \int_{\mathcal{A}} \exp[2i\pi\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{r}] \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right], \quad (5.151)$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{ic}{2n\lambda\rho} \exp\left[-\frac{2i\pi\rho}{\lambda}\right] \left[ \mathbf{e}_\rho \times \int_{\mathcal{A}} \exp[2i\pi\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{r}] \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]. \quad (5.152)$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  forment un trièdre rectangle direct et l'onde diffractée en champ lointain est localement plane : nous la caractérisons seulement par  $\mathbf{E}$ .

Les coordonnées sphériques au point  $\boldsymbol{\rho}$  sont  $\rho$ ,  $\theta_z$  et  $\varphi_z$ , et les vecteurs unitaires correspondants  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  et  $\mathbf{e}_\varphi$  ; il en résulte

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{r} = r \sin \theta_z = x \sin \theta_z \cos \varphi_z + y \sin \theta_z \sin \varphi_z. \quad (5.153)$$

Supposons que le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$  ait une direction fixe et s'écrive  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j(\mathbf{r}) \mathbf{e}_c$ , où  $\mathbf{e}_c$  est unitaire. Soit le vecteur  $\mathbf{u}$  tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\rho \times [\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_c]. \quad (5.154)$$

Le champ  $\mathbf{E}$  s'écrit <sup>25</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u} \frac{ic\mu_0}{2n\lambda\rho} \exp\left[-\frac{2i\pi\rho}{\lambda}\right] \\ \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(x \sin \theta_z \cos \varphi_z + y \sin \theta_z \sin \varphi_z)\right] j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Cette expression conduit à définir la « fonction caractéristique du rayonnement <sup>26</sup> » par

$$F(\theta_z, \varphi_z) = \frac{\|\mathbf{u}\|}{C'} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(x \sin \theta_z \cos \varphi_z + y \sin \theta_z \sin \varphi_z)\right] j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5.156)$$

où

$$C' = \sup_{\theta_z, \varphi_z} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda}(x \sin \theta_z \cos \varphi_z + y \sin \theta_z \sin \varphi_z)\right] j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]. \quad (5.157)$$

Par comparaison avec la relation (5.147), nous concluons que la théorie scalaire fournit, au facteur  $\|\mathbf{u}\|$  près, la fonction caractéristique du rayonnement de l'antenne, à condition de remplacer l'amplitude du champ sur l'émetteur par l'amplitude du courant électrique sur l'antenne, lequel est supposé avoir une direction fixe. Cela s'écrit

$$F(\theta_z, \varphi_z) = \|\mathbf{u}\| f(\theta_z, \varphi_z). \quad (5.158)$$

<sup>25</sup> Ne pas confondre le signe  $\times$ , qui indique que l'écriture se poursuit sur la deuxième ligne par un produit, avec  $\times$  qui représente le produit vectoriel.

<sup>26</sup> C'est la fonction caractéristique définie en théorie vectorielle. Elle est différente, *a priori*, de la fonction caractéristique scalaire définie par la relation (5.139). Nous nous proposons ici de faire le lien entre les deux.

**Remarque 5.6.1.** La relation (5.155) précise les conditions de validité de l'hypothèse de la préservation de la polarisation du champ par diffraction-propagation, énoncée au paragraphe 1.3 du chapitre 1. En effet, près de l'axe de propagation  $z$ , le vecteur  $\mathbf{e}_\rho$  se confond pratiquement avec le vecteur  $\mathbf{e}_z$ , et si le vecteur densité de courant sur l'antenne est dans le plan de l'antenne et possède une direction fixe, le vecteur  $\mathbf{e}_c$  est constant et orthogonal à  $\mathbf{e}_\rho$ . Dans ces conditions  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_c$ , et la relation (5.155) montre que le champ électrique de l'onde diffractée est parallèle à la direction du courant sur l'antenne. Après remplacement du courant sur l'antenne par le champ électrique, c'est l'hypothèse faite pour fonder la théorie scalaire (chapitre 1).

**Remarque 5.6.2.** Jusqu'à présent le champ sur l'antenne était supposé de la forme  $U_A(x, y) \exp[2i\pi\nu t]$ . Une telle expression ne tient pas compte du signal qui contient l'information qu'on souhaite transmettre à l'aide de l'antenne : elle ne représente que la porteuse. Dans la réalité, le champ (ou le courant) sur l'antenne est au moins de spectre étroit et son étude relève de celle qui sera abordée au chapitre 9. Nous verrons cependant que la diffraction d'une onde à spectre étroit se ramène pratiquement, pour ce qui est de la variable d'espace, à celle d'une onde monochromatique, et cela justifie la présente étude. Il en irait différemment bien sûr en spectre large.

Ce qui suit vaut donc pour des ondes de spectre étroit, c'est-à-dire pour des largeurs de bandes faibles par rapport à la fréquence porteuse.

### 5.6.3 Antenne à ouverture rectangulaire

L'antenne est de dimensions  $L \times H$  ( $L$  suivant  $x$  et  $H$  suivant  $y$ ). Le vecteur densité de courant est supposé homogène, orienté suivant l'axe  $y$ , si bien que

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\rho \times [\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_y] = \sin \theta_y \mathbf{e}_\theta, \quad (5.159)$$

et  $|\mathbf{u}| = |\sin \theta_y|$ . L'amplitude du courant sur l'antenne est de la forme

$$j(x, y) = j_0 \text{rect}_L(x) \text{rect}_H(y), \quad (5.160)$$

où  $j_0$  est une constante (dimensionnelle). La fonction caractéristique scalaire du rayonnement est

$$f(\theta_z, \varphi_z) = \text{sinc} \frac{L \sin \theta_z \cos \varphi_z}{\lambda} \text{sinc} \frac{H \sin \theta_z \sin \varphi_z}{\lambda}. \quad (5.161)$$

On trace des sections du diagramme de rayonnement : une dans le plan  $y = 0$ , l'autre dans le plan  $x = 0$ . Dans le premier cas  $\varphi_z = 0$ , si bien que  $\theta_z = \varphi_x$  et  $\theta_y = \pi/2$ . Ainsi  $\sin \theta_y = 1$ , et dans le plan  $x, z$ , le rayonnement est caractérisé par la fonction

$$F(\varphi_x) = f(\varphi_x) = \text{sinc} \frac{L \sin \varphi_x}{\lambda}. \quad (5.162)$$

Dans le deuxième cas,  $\varphi_z = \pi/2$  et  $\theta_z = \varphi_y = \pi/2 - \theta_y$ . Dans le plan  $y, z$  le rayonnement est caractérisé par la fonction

$$F(\varphi_y) = f(\varphi_y) \sin \theta_y = \cos \varphi_y \operatorname{sinc} \frac{H \sin \varphi_y}{\lambda}. \quad (5.163)$$

La figure 5.29 donne la caractéristique du rayonnement pour une ouverture plus grande horizontalement (en  $x$ ) que verticalement (en  $y$ ). Les deux graphes sont à rapprocher de la figure 5.9 dont ils fournissent la représentation polaire des sections. Le rayonnement est plus directif horizontalement que verticalement. Cela explique que les antennes des radars de contrôle aérien sont plus larges que hautes : il est nécessaire en effet d'obtenir une bonne résolution horizontale de façon à connaître avec précision l'azimut de la cible, alors que verticalement au contraire on souhaite une plus large couverture du radar. En tournant sur elles-mêmes ces antennes permettent de surveiller tout l'espace. On améliore la résolution horizontale du système en utilisant un réseau d'antennes filaires ; ce point fera l'objet du paragraphe 5.6.6.



**FIG. 5.29.** Diagrammes de rayonnement d'une antenne à ouverture rectangulaire 8 fois plus large que haute. Le graphe de gauche donne la section horizontale du rayonnement et celui de droite la section verticale. Pour chaque diagramme, la trace du plan de l'antenne est le segment vertical représenté sur le schéma.

La même méthode d'étude s'applique à une ouverture circulaire.

**Remarque 5.6.1** Il faut bien sûr comparer les résultats établis ici avec ceux obtenus au paragraphe 5.2.2 pour une ouverture rectangulaire éclairée par une onde lumineuse. Le calcul qui conduit à la relation (5.161) est le même que celui qui conduit à la relation (5.18). La relation (5.161) est simplement une version normalisée de la relation (5.18). La fonction caractéristique (vectorielle) se déduit de  $f(\theta_z, \varphi_z)$  (scalaire) par multiplication par  $\sin \theta_y$ . Dans le cadre de l'approximation métaxiale, l'angle  $\theta_y$  est voisin de  $\pi/2$  et  $\sin \theta_y$  est voisin de 1 (le premier terme négligé est du troisième ordre en  $\pi/2 - \theta_y$ ). Dans les limites de l'approximation métaxiale, le champ rayonné par une antenne rectangulaire en champ lointain est identique au champ diffracté, en optique, par une ouverture rectangulaire (voir le chapitre 1).

#### 5.6.4 Antenne à balayage

Considérons de nouveau le champ sur l'antenne (ou le courant), de la forme  $U_A(x, y) \exp[2i\pi\nu t]$ , et supposons qu'on introduise un déphasage tel que l'amplitude du champ s'écrive finalement

$$U'_A(x, y) = U_A(x, y) \exp[-2i\pi F_0 x] \exp[2i\pi \nu t]. \quad (5.164)$$

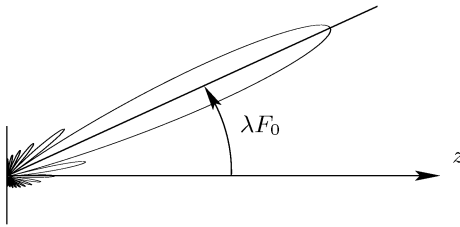
Il en résulte

$$U'_\infty = U_\infty * \delta_{\lambda F_0}, \quad (5.165)$$

soit encore

$$U'_\infty(\Phi) = U_\infty(\Phi - \lambda F_0), \quad (5.166)$$

où  $F_0 = (F_0, 0)$ . Le diagramme de rayonnement de l'antenne subit une rotation d'angle  $\lambda F_0$  (supposé petit), autour de l'axe vertical  $y$  (fig. 5.30).



**FIG. 5.30.** Un déphasage du courant sur l'antenne se traduit par une rotation de son diagramme de rayonnement. (Comparer avec le diagramme de gauche de la figure 5.29.)

Si le déphasage dépend du temps, c'est-à-dire si  $F_0$  est une fonction du temps, la relation (5.166) s'écrit

$$U'_\infty(\Phi) = U_\infty[\Phi - \lambda F_0(t)]. \quad (5.167)$$

En général  $F_0(t)$  est périodique et la relation (5.167) est valide si la période de  $F_0$  est grande devant  $1/\nu$  (qui est la période de la porteuse). On obtient une antenne à balayage quand  $F_0(t)$  est une fonction en « dents de scie ».

Une antenne à balayage offre l'avantage de produire une rotation du rayonnement sans mouvement mécanique [149]. Cela conduit à des fréquences de balayage plus élevées que celles autorisées par des rotations mécaniques, limitées par l'inertie de l'antenne. Il est même concevable d'asservir le courant sur l'antenne de façon à ce que le rayonnement de l'antenne pointe en permanence sur une cible mobile (principe de la poursuite d'une cible).

### 5.6.5 Antennes filaires

L'antenne est un fil rectiligne orienté suivant l'axe  $y$  :  $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_y$ , et par conséquent, comme au paragraphe 5.6.3, nous avons  $\|\mathbf{u}\| = |\sin \theta_y|$ .

Le champ électrique est tangentiel et la fonction caractéristique du rayonnement est

$$F(\theta_z, \varphi_z) = \sin \theta_y f(\theta_z, \varphi_z). \quad (5.168)$$

Plus précisément, l'amplitude du courant sur l'antenne est de la forme

$$j(\mathbf{r}) = j(x, y) = j_y(y) \delta(x). \quad (5.169)$$

En toute rigueur l'écriture intégrale de  $f(\theta_z, \varphi_z)$ , comme celle de la relation (5.147), est impropre, à cause de la distribution de Dirac. Cependant, si nous nous souvenons que  $f(\theta_z, \varphi_z)$  est, au fond, la transformée de Fourier du champ (ici du courant) sur l'émetteur, nous constatons

$$f(\theta_z, \varphi_z) = \hat{j}_y(\sin \theta_z \sin \varphi_z). \quad (5.170)$$

**Exemple 5.6.1** Soit une antenne filaire de longueur  $H$  parcourue par un courant électrique de la forme (la dépendance temporelle est omise)

$$j(x, y) = j_0 \delta(x) \text{rect}_H(y) \cos 2\pi F_0 y. \quad (5.171)$$

On trouve

$$\hat{j}(F_x, F_y) = j_0 \frac{H \sin \pi H (F_y - F_0)}{2 \pi H (F_y - F_0)} + j_0 \frac{H \sin \pi H (F_y + F_0)}{2 \pi H (F_y + F_0)}. \quad (5.172)$$

En remplaçant  $F_x$  par  $\alpha/\lambda$  et  $F_y$  par  $\beta/\lambda$ , puis  $\alpha$  par  $\sin \theta_z \cos \varphi_z$  et  $\beta$  par  $\sin \theta_z \sin \varphi_z$ , on obtient

$$f(\theta_z, \varphi_z) = \frac{1}{2} \text{sinc}_H \left( \frac{\sin \theta_z \sin \varphi_z}{\lambda} - F_0 \right) + \frac{1}{2} \text{sinc}_H \left( \frac{\sin \theta_z \sin \varphi_z}{\lambda} + F_0 \right). \quad (5.173)$$

Il est plus judicieux de choisir l'angle  $\theta_y$  comme paramètre puisque la fonction  $f$  ne dépend que de  $\theta_y$ . Il en résulte

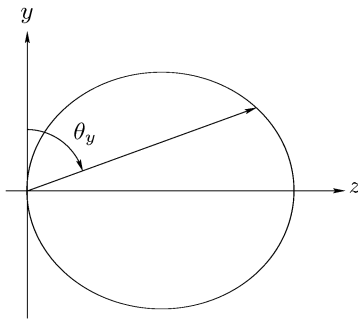
$$f(\theta_y) = \frac{1}{2} \text{sinc}_H \left( \frac{\cos \theta_y}{\lambda} - F_0 \right) + \frac{1}{2} \text{sinc}_H \left( \frac{\cos \theta_y}{\lambda} + F_0 \right). \quad (5.174)$$

Finalement

$$F(\theta_y) = \frac{\sin \theta_y}{2} \left[ \text{sinc}_H \left( \frac{\cos \theta_y}{\lambda} - F_0 \right) + \text{sinc}_H \left( \frac{\cos \theta_y}{\lambda} + F_0 \right) \right]. \quad (5.175)$$

Examinons un cas particulier classique. Supposons  $F_0 = 1/\lambda$  et  $H = \lambda/2$  (antenne demi-onde). Le courant est stationnaire (onde stationnaire). Il est nul aux deux extrémités de l'antenne. La relation (5.175) devient

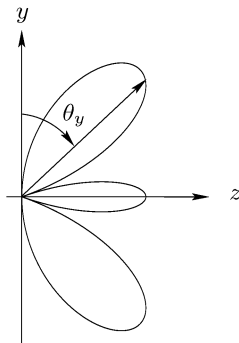
$$\begin{aligned} F(\theta_y) &= \frac{\sin \theta_y}{2} \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} (\cos \theta_y - 1) \right]}{\frac{\pi}{2} (\cos \theta_y - 1)} + \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} (\cos \theta_y + 1) \right]}{\frac{\pi}{2} (\cos \theta_y + 1)} \right\} \\ &= \frac{\sin \theta_y}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta_y \right) \left[ \frac{1}{\frac{\pi}{2} (\cos \theta_y - 1)} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} (\cos \theta_y + 1)} \right] \\ &= \pi \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta_y \right)}{\sin \theta_y}. \end{aligned} \quad (5.176)$$



**FIG. 5.31.** Diagramme de rayonnement d'une antenne filaire demi-onde (le courant sur l'antenne est le long de l'axe  $y$ ).

La figure 5.31 donne une section du diagramme de rayonnement de cette antenne filaire. Le diagramme complet, dans l'espace, s'obtient par rotation autour de l'axe  $y$ .

La figure 5.32 montre le diagramme de rayonnement d'une antenne filaire pour laquelle  $H = 3\lambda/2$  et  $F_0 = 1/\lambda$ .



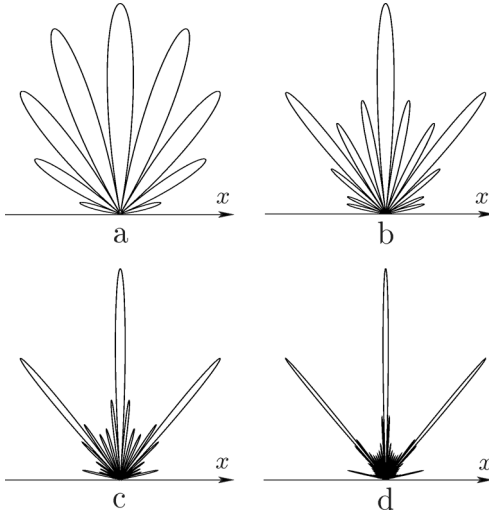
**FIG. 5.32.** Diagramme de rayonnement d'une antenne filaire de longueur  $3\lambda/2$  (le courant sur l'antenne est le long de l'axe  $y$ ). On a tracé  $|F(\theta_y)|$ .

### 5.6.6 Réseau d'antennes filaires

**Pourquoi des réseaux d'antennes filaires ?** Les réseaux d'antennes filaires sont, dans une large mesure, équivalents aux réseaux de diffraction : un réseau d'antennes est constitué d'antennes filaires identiques, parallèles entre elles et périodiquement espacées (période  $p$ ).

Cette similitude masque cependant l'intérêt des réseaux d'antennes, essentiellement parce qu'un réseau de diffraction comporte un grand nombre de traits et correspond pratiquement au cas limite d'un très grand nombre d'antennes. Il est instructif à ce propos d'examiner ce que se passe quand on augmente progressivement le nombre d'antennes mises en parallèle, comme l'illustre la figure 5.33.

Imaginons des antennes filaires parallèles à l'axe  $y$  (perpendiculaire au plan de la figure 5.33) et régulièrement espacées sur l'axe  $x$ . Nous nous intéressons



**FIG. 5.33.** Diagrammes de rayonnement de (a) 2; (b) 4; (c) 8; et (d) 16 antennes filaires. Le lobe central s'affine et les lobes secondaires s'affaiblissent quand le nombre d'antennes augmente.

au champ lointain dans la direction de l'axe  $z$  et traçons le diagramme de rayonnement en fonction de l'angle  $\pi/2 - \varphi_x$ , qui est aussi l'angle  $\theta_x$  si on se limite à une section perpendiculaire à l'axe  $y$ .

La figure 5.33–a représente le diagramme de rayonnement (en  $\theta_x$ ) de deux antennes filaires, la figure 5.33–b celui de quatre antennes, la figure 5.33–c d'un réseau composé de huit antennes filaires et enfin la figure 5.33–d d'un réseau de 16 antennes. Quand le nombre d'antennes augmente :

- 1° Le lobe central s'affine ;
- 2° Les lobes intermédiaires s'affaiblissent.

Pour un très grand nombre d'antennes, le réseau se décrit par un peigne de Dirac et le diagramme de rayonnement est lui-même un peigne de Dirac ; cela confirme la tendance décrite dans les deux points ci-dessus.

L'intérêt d'un réseau d'antennes réside dans l'amélioration de la directivité du lobe principal du rayonnement et dans la réduction des lobes secondaires. Cette propriété, décrite ici pour les antennes d'émission, se transpose à la résolution des antennes de réception (voir le paragraphe 8.4.2 du chapitre 8).

Il reste encore des lobes d'ordre supérieur. Une façon de les faire disparaître consiste à choisir le pas du réseau égal à la demi-longueur d'onde.

**Courant uniforme sur toutes les antennes.** Nous supposons les antennes au nombre de  $2N + 1$ , de longueur  $H$ , orientées suivant l'axe  $y$  (on traiterait de même  $2N$  antennes ; le choix d'un nombre impair d'antennes correspond à celui effectué pour les réseaux optiques – voir la remarque 5.4.6 p. 126).

Le courant dans le plan de l'antenne est de la forme

$$j(x, y) = j_0 \sum_{q=-N}^{q=N} \delta(x - qp) \text{rect}_H(y) \cos 2\pi F_0 y. \quad (5.177)$$

Par transformation de Fourier (à deux dimensions), puis changement de variables, on obtient la fonction caractéristique scalaire du rayonnement sous la forme

$$g(\theta_x, \theta_y) = f(\theta_x, \theta_y) \sum_{q=-N}^{q=N} \exp \left[ -\frac{2i\pi q p \cos \theta_x}{\lambda} \right], \quad (5.178)$$

où  $f(\theta_x, \theta_y)$  est donné par la relation (5.173).

On appelle « facteur réseau » la fonction définie par

$$R(\theta_x) = \sum_{q=-N}^{q=N} \exp \left[ -\frac{2i\pi q p \cos \theta_x}{\lambda} \right]. \quad (5.179)$$

Le calcul qui conduit à la relation (5.82) donne ici

$$R(\theta_x) = \frac{\sin \frac{(2N+1)\pi p \cos \theta_x}{\lambda}}{\sin \frac{\pi p \cos \theta_x}{\lambda}}. \quad (5.180)$$

La relation (5.180) est à rapprocher de la relation (5.83), établie pour un réseau de diffraction : elle en est simplement une version normalisée. Les variables angulaires et spatiales sont liées par

$$\cos \theta_x = \alpha \approx \frac{\xi}{f'}, \quad (5.181)$$

où  $f'$  joue le rôle de la distance de diffraction : l'approximation est justifiée quand cette distance est grande (champ lointain).

**Antennes filaires déphasées linéairement.** Le courant dans le plan de l'antenne est de la forme

$$j(x, y) = j_0 \sum_{q=-N}^{q=N} \delta(x - qp) \exp[-2i\pi q \phi] \operatorname{rect}_H(y) \cos 2\pi F_0 y, \quad (5.182)$$

où  $\phi$  est une constante. Le calcul du paragraphe précédent reste valable à condition de remplacer  $\cos \theta_x$  par  $\cos \theta_x - \lambda \phi / p$ . Le facteur réseau de l'antenne est

$$R(\theta_x) = \frac{\sin \left[ (2N+1)\pi \left( \frac{p \cos \theta_x}{\lambda} - \phi \right) \right]}{\sin \left[ \pi \left( \frac{p \cos \theta_x}{\lambda} - \phi \right) \right]}. \quad (5.183)$$

## 5.7 Apodisation

La question de l'apodisation se pose aussi bien en optique que pour une antenne [33, 40]. L'idée est de réduire les lobes d'une figure de diffraction, tels qu'ils apparaissent par exemple pour une ouverture rectangulaire (figures 5.8 et 5.9), pour une ouverture circulaire (figure d'Airy, figures 5.12 et 5.13) ou dans le diagramme de rayonnement d'une antenne (fig. 5.29).

La résolution d'un instrument d'optique est abordée au chapitre 8, notamment au moyen du critère de Rayleigh. Ce critère est pertinent pour distinguer deux points lumineux dont les images ont sensiblement le même éclairement. Or il arrive qu'on souhaite observer par exemple une étoile située dans le voisinage immédiat d'une étoile de plus faible magnitude (plus lumineuse), et placée de telle sorte que le maximum de la tache de diffraction qui en est l'image se superpose au premier anneau de la figure d'Airy de l'autre étoile. Du fait de l'importante différence de magnitude, l'étoile la moins lumineuse n'est pas perçue, car le centre de sa tache d'Airy a un éclairement bien inférieur à celui du premier anneau de la tache d'Airy engendrée par l'autre étoile. L'idée vient alors de réduire l'éclairement du premier anneau de la figure d'Airy et l'apodisation permet d'obtenir ce résultat. Le problème se pose en des termes comparables pour les antennes de radar [33].

### 5.7.1 Apodisation par atténuation aux bords de la pupille

L'apodisation est abordée à travers un exemple, en considérant de nouveau la diffraction par une ouverture rectangulaire (largeur  $L$ , hauteur  $H$ ), traitée au paragraphe 5.2.2. Soit  $U_A$  l'amplitude donnée par la relation (5.16) : c'est celle du champ sur l'ouverture éclairée uniformément.

Plaçons sur l'ouverture précédente une transparence dont la fonction de transmission s'écrit

$$t(x, y) = \frac{1}{4} \left( 1 + \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \left( 1 + \cos \frac{2\pi y}{H} \right). \quad (5.184)$$

L'amplitude du champ apodisé sur l'ouverture est (l'indice  $a$  signifie apodisé)

$$U_A^{[a]}(x, y) = t(x, y) U_A(x, y). \quad (5.185)$$

C'est sur la sphère de Fourier, là où s'observe la figure de diffraction (régime de Fraunhofer), que se remarque le phénomène d'apodisation. Sur cette sphère, l'amplitude du champ diffracté correspondant à  $U_A^{[a]}$  est

$$U_{F'}^{[a]} = \hat{t} * U_{F'}, \quad (5.186)$$

où  $U_{F'}$  est donné par la relation (5.18).

La transformée de Fourier de la fonction  $t$  s'écrit

$$\hat{t}(F_x, F_y) = \frac{1}{4} \left[ \delta + \frac{1}{2} (\delta_{-1/L} + \delta_{1/L}) \right]_{F_x} \otimes \left[ \delta + \frac{1}{2} (\delta_{-1/H} + \delta_{1/H}) \right]_{F_y}, \quad (5.187)$$

où les indices  $F_x$  et  $F_y$  indiquent sur quelle variable portent les distributions de Dirac.

Pour alléger l'écriture, introduisons les fonctions  $g$  et  $h$  définies par

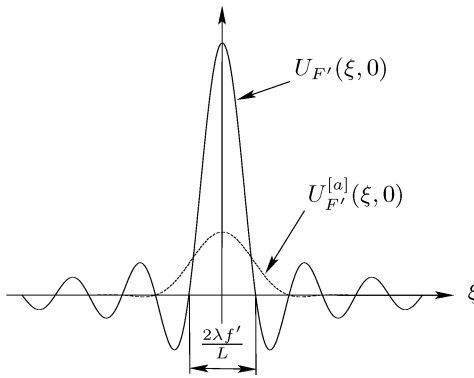
$$g(\xi) = \frac{L}{2} \operatorname{sinc} \frac{L\xi}{\lambda f'} + \frac{L}{4} \operatorname{sinc} \left( \frac{L\xi}{\lambda f'} - 1 \right) + \frac{L}{4} \operatorname{sinc} \left( \frac{L\xi}{\lambda f'} + 1 \right), \quad (5.188)$$

$$h(\eta) = \frac{H}{2} \operatorname{sinc} \frac{H\eta}{\lambda f'} + \frac{H}{4} \operatorname{sinc} \left( \frac{H\eta}{\lambda f'} - 1 \right) + \frac{H}{4} \operatorname{sinc} \left( \frac{H\eta}{\lambda f'} + 1 \right), \quad (5.189)$$

L'amplitude du champ apodisé, sur la sphère de Fourier, s'écrit finalement

$$U_{F'}^{[a]}(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda f'} g(\xi) h(\eta). \quad (5.190)$$

La figure 5.34 permet de comparer les amplitudes de  $U_{F'}(\xi, 0)$  et  $U_{F'}^{[a]}(\xi, 0)$ . On constate que le premier lobe de l'amplitude apodisée est plus faible que celui de l'amplitude non apodisée.



**FIG. 5.34.** Comparaison de l'amplitude des champs diffractés par une ouverture rectangulaire et par la même ouverture, apodisée par une fonction sinusoidale (pour chaque dimension).

Le bénéfice de l'apodisation se paie : considérons l'éclairement de la figure de diffraction pour  $\eta = 0$ , et comparons-le à celui obtenu au paragraphe 5.2.2, représenté par la figure 5.9. La tache centrale de la figure de diffraction non apodisée occupe une largeur  $2\lambda f'/L$ . Le premier 0 de la fonction  $U_{f'}^{[a]}$  se rencontre en  $\xi = 2\lambda f'/L$ , ce qui fait une tache centrale de largeur  $4\lambda f'/L$ , soit le double de la tache non apodisée. En outre, nous constatons

$$U_{F'}^{[a]}(0, 0) = \frac{iU_0HL}{4\lambda f'} = \frac{1}{4} U_{F'}(0, 0). \quad (5.191)$$

La figure de diffraction est plus large et moins lumineuse que la figure non apodisée, ce que montre la figure 5.34. C'est le prix à payer pour réduire les lobes de la figure de diffraction.

**Remarque 5.7.1.** Il existe d'autres fonctions d'apodisation que celle donnée par la relation (5.184) : fonction « triangle », puissances d'une fonction cosinus, etc. Par rapport à la fonction triangle, celle de la relation (5.184) a l'avantage d'être de classe  $C^\infty$  au bord de l'ouverture (donc plus régulière).

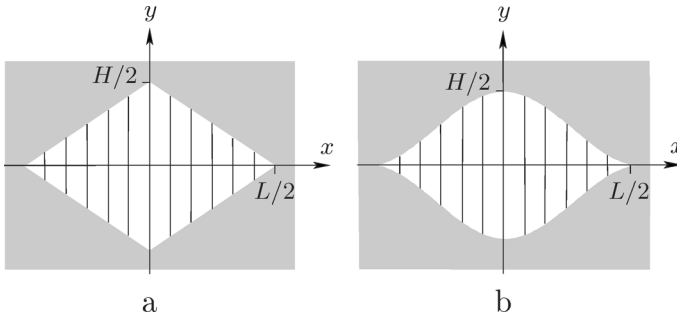
### 5.7.2 Apodisation d'un réseau par une fenêtre transparente

Dans le paragraphe précédent l'apodisation était obtenue en plaçant sur la pupille un écran absorbant inhomogène qui adoucissait en quelque sorte le passage entre la région transparente de la pupille et la partie opaque de l'écran diffractant. La forme de la pupille n'était pas affectée par l'ajout de l'écran absorbant en ce sens que le support (au sens mathématique du terme) de la fonction de transmission de l'ouverture restait le même. La technique décrite dans le présent paragraphe consiste à modifier la forme même de l'ouverture diffractante, c'est-à-dire le support de sa fonction de transmission, par l'intermédiaire d'une fenêtre transparente qui restreint le support de l'ouverture.

Soit un réseau de diffraction à traits infiniment minces, de pas  $p$ , limité par une pupille rectangulaire de largeur  $L$  et hauteur  $H$ . La figure de diffraction de ce réseau a été calculée au paragraphe 5.4.1 (réseau de dimensions finies, p. 124).

Plaçons sur le réseau une ouverture (fenêtre) supposée symétrique par rapport à l'axe  $x$  (les traits du réseau étant parallèles à  $y$ ). La figure 5.35 montre deux exemples de fenêtres. De fait, la fenêtre est décrite par une équation de la forme  $|y| = f(x)$  ( $f$  étant une fonction à valeurs positives). Pour le losange, la fonction  $f$  est une fonction « triangle » ; pour le chapeau de gendarme, c'est une fonction de la forme

$$f(x) = \text{rect}_L(x) \left( 1 + \cos \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (5.192)$$



**FIG. 5.35.** Réseau apodisé par une fenêtre : (a) en losange ; (b) en « chapeau de gendarme ». Dans la réalité, le réseau comporte beaucoup plus de traits que ce qui est indiqué sur les deux schémas.

La relation (5.70) correspondait à une fonction de transmission du réseau, sans apodisation, de la forme

$$\begin{aligned} t(x, y) &= \frac{1}{p} \sqcup_p(x) \text{rect}_L(x) \text{rect}_H(y) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta(x - qp) \text{rect}_L(x) \text{rect}_H(y) \\ &= \sum_{q=-Q}^{q=Q} \delta(x - qp) \text{rect}_H(y) = \sum_{q=-Q}^{q=Q} t_q(x, y), \end{aligned} \quad (5.193)$$

où  $Q$  est la partie entière de  $L/2p$  et  $t_q(x, y) = \delta(x - qp) \text{rect}_H(y)$ .

La fonction de transmission du réseau apodisé s'écrit

$$t^{[a]}(x, y) = \sum_{q=-Q}^{q=Q} \delta(x - qp) \text{rect}_{2f(qp)}(y) = \sum_{q=-Q}^{q=Q} t_q^{[a]}(x, y), \quad (5.194)$$

où  $t_q^{[a]}(x, y) = \delta(x - qp) \text{rect}_{2f(qp)}(y)$ . La transformée de Fourier de  $t_q^{[a]}$  est

$$\widehat{t}_q^{[a]}(F_x, F_y) = e^{2i\pi qp F_x} \frac{\sin 2\pi f(qp) F_y}{\pi F_y}. \quad (5.195)$$

Le spectre du réseau à pleine ouverture (non apodisé) est composé de points localisés sur l'axe  $F_y$  (voir le paragraphe 5.4.1), ce qui conduit à considérer  $\widehat{t}(F_x, 0)$  et à examiner ce que devient cette fonction (ou distribution) en présence de la fenêtre d'apodisation. Or

$$\widehat{t}_q^{[a]}(F_x, 0) = 2f(qp) e^{2i\pi qp F_x} = \widehat{g}_q(F_x, 0) \quad (5.196)$$

où la fonction  $g_q$  est définie par

$$g_q(x, y) = t_q(x, y) f(x). \quad (5.197)$$

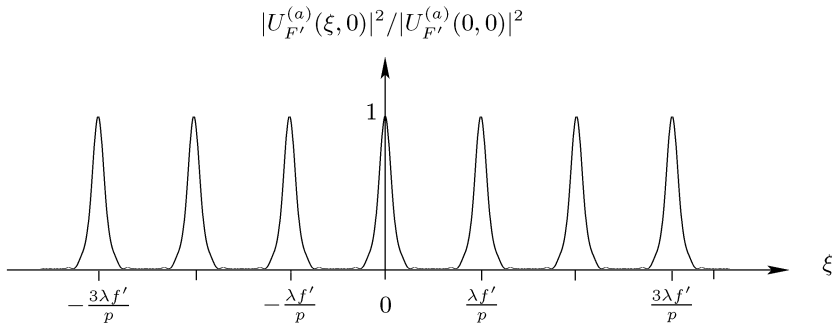
Il en résulte finalement

$$\widehat{t}^{[a]}(F_x, 0) = \widehat{g}(F_x, 0), \quad (5.198)$$

où  $g$  est telle que

$$g(x, y) = t(x, y) f(x). \quad (5.199)$$

Sur l'axe  $F_x$ , le spectre du réseau apodisé par une fenêtre décrite par la fonction  $f$  est le même que celui du réseau apodisé par atténuation par une transparence de fonction de transmission  $f$ .



**FIG. 5.36.** Profil normalisé de la figure de diffraction d'un réseau apodisé par une fenêtre en chapeau de gendarme (à comparer avec la figure 5.23).

La figure 5.36 montre le profil normalisé de la figure de diffraction d'un réseau apodisé par une fonction en chapeau de gendarme, comme celle donnée par la relation (5.192) et représentée par la figure 5.35–b. Les données sont celles du paragraphe 5.4.1 :  $U_{F'}^{[a]}$  est l'amplitude du champ apodisé sur la sphère de Fourier. Les traits du réseau étant supposés infiniment minces, cette figure est à rapprocher de la figure 5.23.

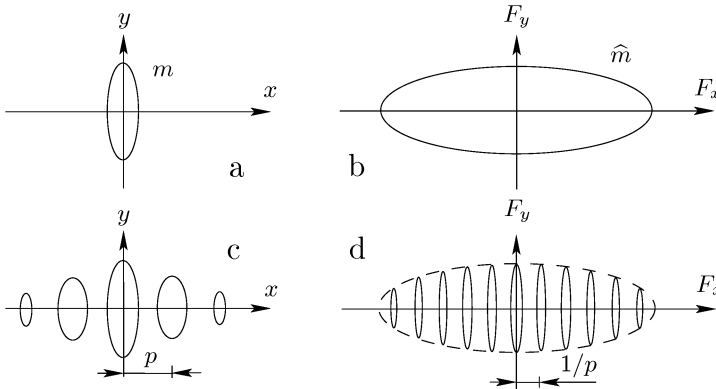
### 5.7.3 Réseau d'antennes pondéré

Il est possible d'apodiser une antenne à ouverture rectangulaire par une fonction similiaire à la fonction de transparence du paragraphe 5.7.1, ou encore par une fonction triangle (voir l'exercice 5.12). On apodise également des antennes à ouverture circulaire. En pratique, on pondère la distribution de courant sur l'antenne, ce qui n'est d'ailleurs pas forcément simple à obtenir. Il arrive qu'on alimente une antenne cornet par un guide d'ondes ; celui-ci introduit une pondération du courant qui affecte le rayonnement de l'antenne.

Le problème d'un réseau d'antennes pondéré est un peu plus général que celui de la seule apodisation d'un réseau, mais se pose dans des termes semblables. Le réseau est constitué d'un ensemble périodique d'antennes identiques, chacune d'elles étant décrite par le motif  $m$  (fig. 5.37). On tient compte de l'étendue limitée du réseau en introduisant une fonction de pondération  $P$ , si bien que l'amplitude du champ qui émerge du réseau d'antennes s'écrit

$$U_A(x, y) = \frac{U_0}{p} [\sqcup_p * m]_x(x, y) P(x), \quad (5.200)$$

où  $[\ ]_x$  indique que le produit de convolution ne porte que sur la variable  $x$ , et où  $U_0$  est une constante dimensionnelle. Par transformation de Fourier, nous



**FIG. 5.37.** Représentation schématique d'un réseau d'antennes pondéré. (a) Support du motif (une antenne) ; (b) Support du spectre du motif ; (c) Réseau pondéré. La pondération est indiquée schématiquement en réduisant le support des antennes. (d) Spectre du réseau pondéré. (Pour éviter la contradiction de supports bornés pour  $m$  et sa transformée de Fourier  $\hat{m}$ , on considère n'avoir tracé que la partie « utile » des supports de ces fonctions, lesquels peuvent donc être infinis.)

obtenons

$$\hat{U}_A(F_x, F_y) = \frac{U_0}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \hat{m}\left(\frac{q}{p}, F_y\right) \hat{P}\left(F_x - \frac{q}{p}\right). \quad (5.201)$$

En pratique, dans la sommation de la relation (5.201), les valeurs de  $q$  sont bornées, dans la mesure où  $\hat{m}$  est à support borné.

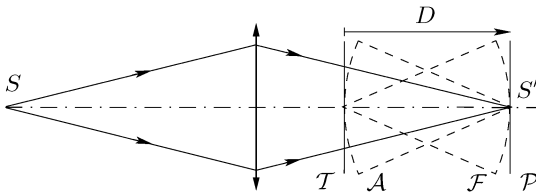
La figure 5.37 représente schématiquement le spectre du réseau pondéré. Il y a échantillonnage au pas  $1/p$  du spectre du motif  $m$  avec un gabarit qui est le spectre de la fonction de pondération.

L'analyse précédente est une généralisation de l'apodisation d'un réseau de diffraction par atténuation. Certaines pondérations produisent un diagramme de rayonnement limité à un seul faisceau apodisé ; elles utilisent par exemple les polynômes de Tchebycheff et sont employées pour les radars [55, 243].

## 5.8 Exercices

**Exercice 5.1 (Montage de transformation de Fourier ajustable).** La figure 5.38 montre une variante du montage de la fig. 5.2 qui permet de faire varier la taille du spectre de la fonction de transmission  $t$  de la transparence  $\mathcal{T}$ . L'objectif forme en  $S'$  l'image de la source  $S$  (longueur d'onde  $\lambda$ ). La distance de  $\mathcal{T}$  à  $S'$  est  $D$ .

1. Donner l'expression de l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{A}$  tangente à  $\mathcal{T}$  et centrée en  $S'$ .
2. Calculer l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}$ , la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ . Quelle est la distance de diffraction à prendre en compte ?
3. Calculer l'éclairement dans le plan  $\mathcal{P}$ , tangent à  $\mathcal{F}$  en son sommet.
4. Montrer qu'en faisant varier  $D$  on fait varier la taille du spectre de  $t$  observé sur  $\mathcal{P}$ .



**FIG. 5.38.** Montage permettant de faire varier les dimensions du spectre d'une transparence.

**Exercice 5.2.** Démontrer la relation (5.8) p. 103 pour le montage schématisé par la figure 5.3. Constater que la relation est la même, quelle que soit la position de l'émetteur plan  $\mathcal{A}$  (seule change la sphère de Fourier) ; en déduire le résultat pour le montage de la figure 5.4.

**Exercice 5.3 (Fentes d'Young).** On remplace les trous d'Young de la figure 5.10 par deux fentes identiques distantes de  $L$ . Calculer l'éclairement de la figure de diffraction à la distance  $D$  du plan des fentes en supposant celles-ci infiniment fines et infiniment longues.

**Exercice 5.4 (Trous d'Young rectangulaires).** Soit un écran plan percé de deux ouvertures rectangulaires identiques, de côtés  $L/2$  et  $H$ , séparées, centre à centre, de la distance  $L$  (fig. 5.39). On éclaire cet écran par une onde monochromatique convergeant au point  $S$  situé à la distance  $D$  de l'écran.

1. Écrire la forme explicite de la fonction de transmission  $t(x, y)$  de l'écran.
2. Quelle est l'amplitude du champ dans le plan parallèle à l'écran et passant par  $S$  (coordonnées  $x', y'$  dans ce plan) ?
3. Donner l'allure du profil de l'éclairement dans le plan précédent pour  $y' = 0$ .

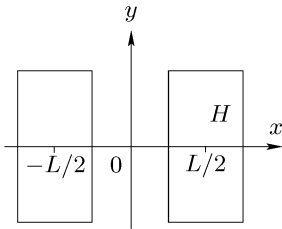


FIG. 5.39. Trous d'Young rectangulaires.

**Exercice 5.5 (Trous d'Young circulaires).** Même exercice que le précédent, mais avec deux ouvertures circulaires de diamètre  $d$ , dont les centres sont distants de  $L$ .

**Exercice 5.6 (Damier).** On considère un écran en « damier » constitué de carrés de côtés  $\ell$ , alternativement transparents et opaques. On éclaire cet écran par une onde monochromatique (longueur d'onde  $\lambda$ ), convergeant en un point  $S$ , à la distance  $D$  de l'écran.

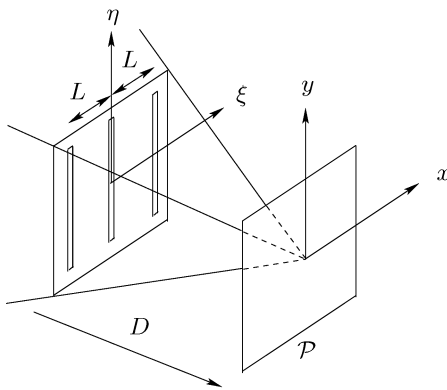
1. Écrire la fonction de transmission de l'écran, supposé infini.
2. Donner l'expression de l'amplitude du champ dans le plan du foyer  $S$ .
3. Même question en supposant que le damier contient  $10 \times 10$  cases.

**Exercice 5.7 (Diffraction de Fraunhofer d'une fente illimitée).** Retrouver l'expression de l'amplitude du champ diffracté par une fente infiniment longue (paragraphe 5.2.1) en considérant cette dernière comme formée de deux bords d'écrans parallèles et en appliquant les résultats du paragraphe 5.3.1.

**Exercice 5.8 (Figures de diffraction de Fresnel).**

1. Utiliser les résultats du paragraphe 5.3.2 pour calculer la figure de diffraction de Fresnel d'une fente illimitée.
2. Même question pour une ouverture rectangulaire.

**Exercice 5.9 (Mesure de faibles déphasages par la méthode des trois fentes [200]).** *Examen de maîtrise de physique, université de Bretagne-Sud, Lorient, 2002.* On dispose de trois fentes parallèles entre elles, qu'on supposera, pour simplifier, infiniment étroites et infiniment longues. La distance des fentes entre elles est  $L$ . On éclaire le plan de ces fentes par une onde monochromatique (longueur d'onde  $\lambda$ ) convergeant à la distance  $D$  (voir la figure 5.40). L'amplitude de l'onde d'éclaireage au niveau des fentes est  $U_0$ , et on écrira  $I_0 = |U_0|^2$ . Soit  $\mathcal{P}$  le plan parallèle au plan des fentes, à la distance  $D$ . On prend des coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  dans le plan des fentes, la coordonnée  $\eta$  étant parallèle au grand côté des fentes, et des coordonnées  $x$  et  $y$  dans le plan  $\mathcal{P}$ , la coordonnée  $x$  étant parallèle à  $\xi$ . On posera par la suite  $A = 2\pi L/\lambda D$ .

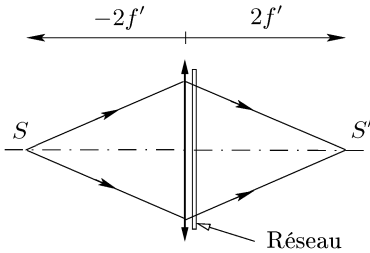


**FIG. 5.40.** Montage pour la mesure d'un faible déphasage par la méthode des trois fentes.

1. Donner l'expression de l'éclairement  $I(x, y)$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .
2. On place devant la fente centrale une lame transparente qui introduit un déphasage constant  $\varphi$ . Donner l'expression de l'éclairement dans le plan  $\mathcal{P}$ .
3. Tracer les graphes des fonctions  $I(x, 0)$  pour  $\varphi = \pi/2$  et  $\varphi = \pi/2 + \varepsilon$ , avec  $0 < \varepsilon \ll \pi/2$ .
4. Soit  $\mathcal{P}'$  le plan parallèle à  $\mathcal{P}$  situé à la distance  $D'$  du plan des fentes avec  $D' < D$ . On observe dans le plan  $\mathcal{P}'$  (coordonnées  $x'$  et  $y'$ ) et non dans le plan  $\mathcal{P}$  (défocalisation). Calculer dans les conditions de la question 2 l'éclairement dans le plan  $\mathcal{P}'$ . On posera  $B = \pi L^2/\lambda D D'$ .
5. Dédire de ce qui précède une méthode de mesure d'un faible déphasage  $\varepsilon$ . Donner la valeur de  $\varepsilon$  en fonction de la distance de défocalisation  $D - D'$  qui permet sa mesure.
6. Application numérique. Calculer la différence de marche  $\delta$  d'une lame mince qui conduit à une défocalisation  $D - D' = 10 \mu\text{m}$  dans les conditions suivantes :  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ,  $L = 1 \text{ mm}$ ,  $D = 10 \text{ cm}$ .

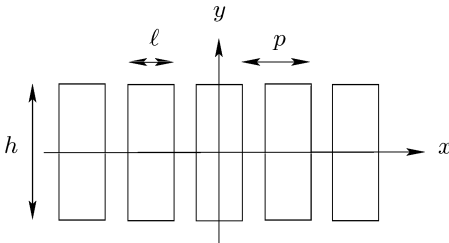
**Exercice 5.10 (Réseau de diffraction à ouvertures rectangulaires).** Une source lumineuse  $S$ , ponctuelle et monochromatique, est située à la distance  $-2f'$  d'un objectif convergent, de distance focale image  $f'$ , qu'on assimile

à une lentille mince (fig. 5.41). On place dans le plan de la lentille un réseau de diffraction composé de  $M$  ouvertures rectangulaires identiques, de largeur  $\ell$  et longueur  $h$ . La distance centre à centre d'une ouverture à sa voisine est  $p$  (fig. 5.42).



**FIG. 5.41.** Montage d'observation du spectre de l'onde diffractée par un réseau.

1. On suppose que  $M$  est impair, de la forme  $M = 2N + 1$ . Calculer l'amplitude du champ dans le plan de l'image  $S'$  de la source (prendre des variables  $x, y$  dans le plan de la lentille et  $x', y'$  dans le plan de  $S'$ ). Tracer schématiquement le profil de l'éclairement correspondant pour  $y' = 0$ .
2. Même question pour  $M = 2N$ .

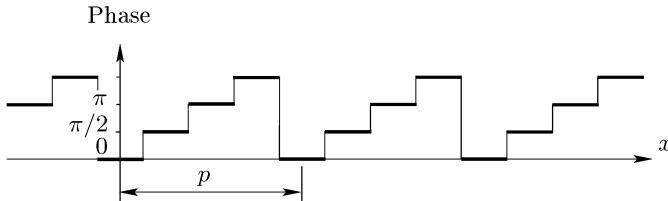


**FIG. 5.42.** Réseau de diffraction comportant  $M$  ouvertures rectangulaires.

**Exercice 5.11 (Rendement de diffraction d'un réseau).** On considère des réseaux infinis ayant tous un même pas  $p$  et se propose de calculer le rendement de diffraction de divers ordres. La démarche consiste à écrire la fonction de transmission de chaque réseau dont on calcule ensuite la transformée de Fourier.

1. Réseau en amplitude comportant des créneaux parfaitement transparents de largeur  $\ell$  ( $\ell < p$ ). Les créneaux complémentaires, de largeur  $p - \ell$ , sont parfaitement absorbants. Quel est le rendement de diffraction de l'ordre 0 ? de l'ordre 1 ? Comparer avec les résultats du paragraphe 5.5.3.
2. Réseau de phase à deux niveaux comportant des créneaux de largeur  $\ell$  ( $\ell < p$ ) pour lesquels la phase est  $\pi$ . La phase est supposée nulle dans les autres créneaux, de largeur  $p - \ell$ . Quel est le rendement de diffraction de l'ordre 0 ? de l'ordre 1 ? Comparer avec les résultats du paragraphe 5.5.4.

3. Réseau de phase dont le profil est donné par la figure 5.43. Le réseau comporte quatre niveaux de phase :  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$ . Quel est le rendement de diffraction de l'ordre 0 ? de l'ordre 1 ? de l'ordre  $-1$  ?
4. Quel est l'avantage du troisième réseau sur les deux autres ?



**FIG. 5.43.** Profil d'un réseau à quatre niveaux de phase.

**Exercice 5.12 (Apodisation par une fonction « triangle »).** On définit la fonction « triangle » de largeur  $2L$  par

$$A_L(x) = x + L, \quad \text{si } -L \leq x < 0,$$

$$A_L(x) = 0, \quad \text{si } |x| > L,$$

$$A_L(x) = L - x, \quad \text{si } 0 \leq x \leq L.$$

Montrer qu'on peut apodiser la figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture rectangulaire de largeur  $L$  à l'aide d'une transparence dont la fonction de transmission est une fonction triangle. Préciser la largeur de la fonction triangle qui convient. (On étudiera le problème pour une seule dimension.)

**Exercice 5.13 (Antenne à ouverture circulaire).** Soit une antenne à ouverture circulaire de diamètre  $D$ , rayonnant à la longueur d'onde  $\lambda$ . Le courant sur l'ouverture est supposé homogène de direction fixe. Calculer la fonction caractéristique du rayonnement de l'antenne. Tracer le diagramme de rayonnement de l'antenne.

## Chapitre 6

# Diffraction et transformation de Fourier fractionnaire

Jusqu'ici le transfert du champ par diffraction s'exprimait au moyen de deux opérateurs : transformation de Fourier (optique) et transparence de courbure. La transformation de Fourier fractionnaire – dont la transformation de Fourier<sup>1</sup> est un cas particulier – offre l'avantage d'inclure dans son expression intégrale le noyau de Fourier et des termes de phase quadratique, c'est-à-dire, pour employer le langage de l'optique métaxiale, des transparences de courbure. Le transfert du champ par diffraction se réduit ainsi à un seul opérateur « fractionnaire », comme il est expliqué dans ce chapitre. L'appendice C expose les principales propriétés de la transformation de Fourier fractionnaire.

### 6.1 Diffraction de Fresnel et transformation de Fourier fractionnaire

#### 6.1.1 Analogie entre la diffraction de Fresnel et la transformation de Fourier fractionnaire

Nous employons le terme de diffraction de Fresnel pour qualifier le transfert du champ dans le cas général d'un émetteur quelconque vers un récepteur quelconque placé à distance finie (voir le paragraphe 3.3.2).

Le transfert de l'amplitude du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$ , de rayon de courbure  $R_A$ , vers un récepteur  $\mathcal{D}$ , de rayon  $R_D$ , situé à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$ , s'exprime par

$$U_D(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_D} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \quad (6.1) \\ \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} ,$$

avec des variables spatiales  $\mathbf{r}$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{s}$  sur  $\mathcal{D}$ . (La relation (6.1) est la relation (3.31) où  $R_D$  remplace  $R_B$ .)

D'autre part, la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  s'écrit (voir l'appendice C)

---

<sup>1</sup> Nous l'appelons transformation de Fourier standard, pour la distinguer.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{ie^{-i\alpha}}{\sin \alpha} \exp[-i\pi\sigma^2 \cot \alpha] \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\pi\rho^2 \cot \alpha] \exp\left[\frac{2i\pi\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho}}{\sin \alpha}\right] f(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'analogie entre les relations (6.1) et (6.2) devrait paraître claire : présence de termes de phase quadratique devant et sous l'intégrale, noyau de Fourier. Une fois cette analogie aperçue, il reste toutefois à prouver que la relation (6.1) se met effectivement sous la forme de (6.2), et pour cela il faut trouver la valeur de  $\alpha$  adéquate. Il faut aussi trouver les variables réduites appropriées. La raison en est la suivante. Quand on traduit un phénomène de diffraction de Fraunhofer par une transformation de Fourier, on calcule d'abord la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur l'émetteur, puis on change de variables pour obtenir l'amplitude du champ sur la sphère de Fourier (voir la proposition 5.1.1 p. 105). Ce changement de variables est nécessaire parce que la transformée de Fourier d'une fonction à variables d'espace, comme l'est l'amplitude du champ sur l'émetteur, est une fonction des fréquences spatiales, alors que l'amplitude du champ sur le récepteur est une fonction de variables d'espace. Pour relier cette amplitude à la transformée de Fourier du champ sur l'émetteur, il est nécessaire d'établir une correspondance entre les variables d'espace sur le récepteur et les fréquences spatiales ; c'est le rôle des variables réduites. Le problème se pose de la même façon pour la diffraction de Fresnel et se résout par le choix de variables réduites fractionnaires, comme nous allons le montrer.

### 6.1.2 Expression de la diffraction de Fresnel par une transformation de Fourier fractionnaire

Soit  $\mathcal{C}$  une calotte sphérique centrée sur un émetteur  $\mathcal{A}$  de rayon de courbure  $R_A$  (fig. 6.1). Si la distance de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{C}$  est  $D$ , le rayon de courbure de  $\mathcal{C}$  est  $-D$ . Soit le paramètre  $\mu$  tel que

$$\mu = \frac{D}{R_A}. \quad (6.3)$$

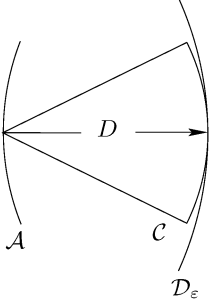
L'amplitude du champ sur  $\mathcal{C}$  (variable  $\mathbf{s}$ ) se déduit de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  (variable  $\mathbf{r}$ ) par la relation

$$U_C(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda\mu R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_A} r^2 \frac{1-\mu}{\mu}\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda\mu R_A} \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6.4)$$

Essayons de représenter l'intégrale précédente sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire<sup>2</sup>. Pour cela, soit  $\varepsilon$  un nombre réel non nul, tel que  $\varepsilon R_A > 0$ , et soit  $\alpha$  dans  $]-\pi, \pi[$ , tel que

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{1-\mu}{\mu}, \quad \alpha D \geq 0. \quad (6.5)$$

<sup>2</sup> Comme il n'y a pas de terme de phase quadratique devant l'intégrale de la relation (6.4) notre tentative n'aboutira pas : mais elle permettra de constater ce qui manque pour réussir et conduira au résultat.



**FIG. 6.1.** Situation illustrant l'expression du transfert de l'amplitude du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}_\varepsilon$  sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire. On adapte le rayon de courbure de  $\mathcal{D}_\varepsilon$  pour obtenir le résultat souhaité.

**Relations utiles.** Les résultats suivants, déduits des relations (6.3) et (6.5) sont utiles pour les calculs :

$$\mu = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}, \quad (6.6)$$

et

$$\sin^2 \alpha = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \varepsilon^2(1 - \mu)^2}. \quad (6.7)$$

D'autre part

$$\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{\mu} = \frac{\varepsilon R_A \sin \alpha}{D}, \quad (6.8)$$

si bien que de  $\varepsilon R_A > 0$ , de  $\alpha D \geq 0$ , et de  $\alpha \in ] -\pi, \pi[$ , il résulte

$$\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha \geq 0. \quad (6.9)$$

Il n'est pas possible d'avoir  $\cos \alpha = -\varepsilon \sin \alpha$  (la relation (6.5) montre que cela correspond à  $\mu$  infini). Finalement

$$\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha > 0. \quad (6.10)$$

**Variables et amplitudes réduites.** Nous introduisons les variables réduites

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}} \mathbf{r}, \quad (6.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathbf{s}, \quad (6.12)$$

et nous décrivons les champs à l'aide des amplitudes réduites

$$V_A(\boldsymbol{\rho}) = U_A \left( \sqrt{\lambda \varepsilon R_A} \boldsymbol{\rho} \right), \quad (6.13)$$

$$V_C(\boldsymbol{\sigma}) = U_C \left( \sqrt{\lambda \varepsilon R_A} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \right). \quad (6.14)$$

**Expression de la diffraction.** Dans ces conditions, la relation (6.4) s'écrit <sup>3</sup>

$$V_C(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{i(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)}{\sin \alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\pi \rho^2 \cot \alpha] \exp \left[ \frac{2i\pi \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}}{\sin \alpha} \right] V_A(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}. \quad (6.15)$$

Pour que la relation (6.15) inclue une transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , à une constante multiplicative près, il manque essentiellement le facteur

$$\exp[-i\pi \sigma^2 \cot \alpha] = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda R_A} s^2 \frac{\varepsilon^2(1-\mu)}{\mu[\mu^2 + \varepsilon^2(1-\mu)^2]} \right]. \quad (6.16)$$

Ce facteur s'introduit naturellement si on observe le champ non pas sur la sphère  $\mathcal{C}$ , mais sur la sphère  $\mathcal{D}_\varepsilon$ , tangente à  $\mathcal{C}$  (fig. 6.1), de rayon de courbure  $R_\varepsilon$  tel que

$$\frac{1}{R_\varepsilon} + \frac{1}{D} = \frac{\varepsilon^2(1-\mu)}{\mu R_A [\mu^2 + \varepsilon^2(1-\mu)^2]}, \quad (6.17)$$

soit encore

$$R_\varepsilon = \frac{\mu^2 + \varepsilon^2(1-\mu)^2}{-\mu + \varepsilon^2(1-\mu)} R_A = \frac{D^2 + \varepsilon^2(R_A - D)^2}{-D + \varepsilon^2(R_A - D)}. \quad (6.18)$$

En conclusion, si le champ sur  $\mathcal{D}_\varepsilon$  est représenté par l'amplitude réduite <sup>4</sup>  $V_{D_\varepsilon}$  définie par

$$V_{D_\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = U_{D_\varepsilon} \left( \sqrt{\lambda \varepsilon R_A} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \right), \quad (6.19)$$

le transfert du champ par diffraction de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}_\varepsilon$  s'écrit

$$V_{D_\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = e^{i\alpha} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathcal{F}_\alpha[V_A](\boldsymbol{\sigma}). \quad (6.20)$$

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{D}_\varepsilon$  est liée à l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  par une transformation de Fourier fractionnaire [181–183].

**Proposition 6.1.1.** *Étant donné un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ , de rayon de courbure  $R_A$ , et un nombre réel  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon R_A > 0$ , il existe, à la distance  $D$ , un récepteur  $\mathcal{D}_\varepsilon$  tel que le transfert de l'amplitude du champ par diffraction de l'émetteur au récepteur s'exprime sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire dont l'ordre  $\alpha$  est donné par l'équation (6.5), où  $\mu = D/R_A$ . Le rayon de courbure du récepteur est donné par (6.18) et le transfert se traduit par la relation (6.20).*

<sup>3</sup> Pour le calcul explicite, rappelons que les variables sont à deux dimensions. Par exemple, la relation (6.11) donne  $d\mathbf{r} = \lambda \varepsilon R_A d\boldsymbol{\rho}$ .

<sup>4</sup> La relation (6.19) n'est rien d'autre que la relation (6.14), car les variables d'espace sont les mêmes sur les sphères  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}_\varepsilon$ , puisqu'il s'agit de deux sphères tangentes.

**Remarque 6.1.1.** Le paramètre  $\varepsilon$  est une sorte de degré de liberté dans le choix du paramètre  $\alpha$ . Son introduction vient de ce que pour un émetteur et une distance de propagation donnés, il existe plusieurs récepteurs sur lesquels s'observe une transformée de Fourier fractionnaire de l'amplitude du champ (réduite) sur l'émetteur. C'est ce que montre la relation (6.18), qui donne la valeur du rayon de courbure d'un récepteur répondant à la question, pour chaque valeur de  $\varepsilon$ .

**Remarque 6.1.2.** Selon la relation (6.18), le récepteur  $\mathcal{D}_\varepsilon$  devient un plan ( $R_\varepsilon$  est infini) si  $\varepsilon^2 = \mu/(1 - \mu)$  et, pour  $\varepsilon$  réel, cela n'a lieu que si  $1 > \mu > 0$ . Si  $R_A > 0$ , la condition précédente sur  $\mu$  se traduit par  $R_A > D > 0$ , et si  $R_A < 0$ , par  $R_A < D < 0$ . Cela signifie que le récepteur plan est toujours situé entre l'émetteur et sa sphère de Fourier.

**Remarque 6.1.3.** En général, le cas d'un émetteur ou d'un récepteur plans exige une approche spéciale, mais semblable à celle qui vient d'être suivie [188].

**Remarque 6.1.4.** Examinons quelques cas particuliers :

- si  $\mu = 0$ , la relation (6.18) conduit à  $R_\varepsilon = R_A$ , et le récepteur se confond avec  $\mathcal{A}$ . La relation (6.5) donne  $\alpha = 0$  : la transformation de Fourier fractionnaire associée au transfert du champ est l'identité, ce qui est logique puisque  $\mathcal{A}$  sert à la fois d'émetteur et de récepteur ;
- si  $\mu = 1$ , alors  $R_\varepsilon = -R_A$ , et la sphère  $\mathcal{D}_\varepsilon$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ . La relation (6.5) donne  $\alpha = \pi/2$  : la transformation de Fourier fractionnaire est une transformation de Fourier standard ;
- si  $\mu = 1/2$ , alors  $\cot \alpha = \varepsilon$ . Si de plus  $\varepsilon = 1$ , le récepteur est un plan et  $\alpha = \pi/4$ . La distance de l'émetteur au récepteur est égale à la moitié de la distance de l'émetteur à sa sphère de Fourier, et l'ordre  $\alpha$  vaut la moitié de  $\pi/2$ .

**Remarque 6.1.5 (Continuité de la propagation et de la transformation de Fourier fractionnaire).** La continuité de la transformation de Fourier fractionnaire par rapport à son ordre – qu'exprime la propriété iv du paragraphe C.3 p. 489 – s'adapte bien à la continuité de la propagation. Si on observe le champ sur l'émetteur même, il n'y a pas de diffraction, et  $\alpha = 0$ . Si on s'éloigne de l'émetteur  $\mathcal{A}$ , l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire croît de manière continue, et quand on arrive sur la sphère de Fourier, il atteint la valeur  $\pi/2$ . On progresse continûment d'une position où il n'y a pas de diffraction à un phénomène de diffraction de Fraunhofer, en passant par la diffraction de Fresnel. Si on considère la propagation au-delà de la sphère de Fourier, l'ordre de la transformation fractionnaire prend des valeurs supérieures à  $\pi/2$ .

### 6.1.3 Observation du champ sur un récepteur donné

Jusqu'à présent nous nous sommes donné un émetteur et nous sommes demandé à quelle condition il était possible d'exprimer l'amplitude du champ diffracté à une distance donnée sous la forme d'une transformée de Fourier

fractionnaire. Nous avons choisi l'ordre de la transformation et calculé le rayon de courbure que devait avoir le récepteur pour que cela fût possible.

Posons le problème sous une forme différente. Soit un émetteur  $\mathcal{A}$  et soit un récepteur  $\mathcal{D}$  à la distance  $D$ . Existe-t-il une transformation de Fourier fractionnaire qui exprime le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$ ? Et quel est son ordre?

Le récepteur  $\mathcal{D}$  (de rayon  $R_D$ ) correspond à une valeur de  $\varepsilon$  qui se déduit de la relation (6.18), où on a remplacé  $R_\varepsilon$  par  $R_D$ , et telle que

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\mu R_A + R_D}{(\mu - 1)R_A + R_D} = \frac{D(D + R_D)}{(R_A - D)(D - R_A + R_D)}. \quad (6.21)$$

Si le membre de droite de l'équation (6.21) est positif, le paramètre  $\varepsilon$  est réel et choisi tel que  $\varepsilon R_A > 0$ . Le paramètre  $\alpha$  est ensuite défini par la relation (6.5) et il existe une seule valeur de  $\alpha$  répondant à la question.

Si  $\varepsilon^2 < 0$ , on introduit des valeurs de  $\varepsilon$  imaginaires pures et des valeurs complexes de  $\alpha$ . Il faut dans ce cas prendre des précautions d'ordre mathématique – afin de garantir que l'intégrale de définition de la transformation de Fourier fractionnaire est convergente –, mais la méthode suivie pour des paramètres réels s'adapte aux paramètres complexes, comme le montre une publication récente [191], reprise en complément de ce chapitre (paragraphe 6.4).

**Définition 6.1.1 (Transfert d'ordre réel, transfert d'ordre complexe).**

*Le transfert de l'amplitude du champ d'un émetteur vers un récepteur est d'ordre réel si l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire qui lui est associée est un nombre réel; le transfert est d'ordre complexe si cet ordre est un nombre complexe.*

En conclusion, si on accepte des ordres complexes, il existe toujours une transformation de Fourier fractionnaire qui traduit le transfert de l'amplitude du champ par diffraction–propagation d'un émetteur vers un récepteur donnés.

**Remarque 6.1.6 (Diffraction sur une sphère cardinale).** Le transfert de l'amplitude du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$  à une sphère cardinale (centrée sur l'émetteur) est une exception : il ne s'exprime pas sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire selon la méthode du paragraphe 6.1.2 ; il manque pour cela un terme de phase quadratique devant l'intégrale qui exprime le transfert du champ. La relation (6.4) le montre.

**Remarque 6.1.7 (Définition directe de l'ordre  $\alpha$ ).** L'ordre  $\alpha$  dépend essentiellement des rayons de courbure et de la distance de l'émetteur au récepteur. Les relations (6.5) et (6.21) conduisent en effet à

$$\cot^2 \alpha = \frac{(D + R_D)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_D)}. \quad (6.22)$$

Pour un transfert réel, le signe de  $\cot \alpha$  est celui de  $R_A D (R_A - D)$ , comme conséquence de la relation (6.5) et de  $\varepsilon R_A > 0$ . Par suite, l'ordre  $\alpha$  est parfaitement défini (dans le cas réel) par les conditions  $\alpha D \geq 0$  et  $\alpha \in ] -\pi, \pi[$ . On définit ainsi  $\alpha$  sans avoir défini au préalable  $\varepsilon$ , lequel sert seulement à définir les variables et fonctions réduites.

**Remarque 6.1.8 (Sphère de Fourier).** Si  $D = R_A = -R_D$ , le récepteur  $\mathcal{D}$  est la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  (phénomène de diffraction de Fraunhofer, traduit par une transformation de Fourier standard). La relation (6.21) montre que  $\varepsilon$  est indéterminé. Cependant la relation (6.22) permet de définir  $\alpha$ , qui vaut  $\pi/2$  si  $D > 0$ , et  $-\pi/2$  si  $D < 0$  (récepteur virtuel).

Au chapitre 3 la diffraction de Fraunhofer s'exprimait à l'aide d'une transformation de Fourier (standard). La méthode suivie consistait à calculer la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur l'émetteur et à effectuer un changement de variables, en passant des fréquences spatiales aux variables spatiales sur la sphère de Fourier. Mais ces dernières ne correspondent pas tout à fait aux variables réduites du paragraphe 6.1.2. La formulation du chapitre 3 est cependant équivalente à celle du présent chapitre. Pour le montrer, rappelons que la diffraction de  $\mathcal{A}$  à sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  s'écrit (Théorème 1)

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \widehat{U}_A\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A}\right). \quad (6.23)$$

La méthode du paragraphe 6.1.2 s'applique à l'amplitude réduite  $V_F$  et la relation (6.20) conduit à

$$V_F(\boldsymbol{\sigma}) = i\varepsilon \mathcal{F}_{\pm\pi/2}[V_A](\boldsymbol{\sigma}), \quad (6.24)$$

où  $\varepsilon$  est un nombre réel quelconque tel que  $\varepsilon R_A > 0$ . Par conséquent il existe une infinité de variables réduites admissibles sur  $\mathcal{A}$  et sur sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$ . La relation (6.24) s'écrit à l'aide de la transformation  $\mathcal{F}_{\pi/2}$  si  $R_A > 0$ , et à l'aide de la transformation  $\mathcal{F}_{-\pi/2}$  si  $R_A < 0$ . Comme  $\varepsilon$  et  $R_A$  doivent avoir le même signe, si  $\mathfrak{s}(\varepsilon)$  désigne le signe de  $\varepsilon$ , la relation (6.24) se met sous la forme

$$V_F(\boldsymbol{\sigma}) = i\varepsilon \mathcal{F}_{\mathfrak{s}(\varepsilon)\pi/2}[V_A](\boldsymbol{\sigma}). \quad (6.25)$$

De fait, les relations (6.23) et (6.25) sont équivalentes : pour une valeur de  $\varepsilon$  fixée arbitrairement (telle que  $\varepsilon R_A > 0$ ), la variable réduite sur  $\mathcal{A}$  est

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}}, \quad (6.26)$$

et par suite

$$U_A(\mathbf{r}) = V_A\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}}\right), \quad (6.27)$$

de telle sorte que

$$\widehat{U}_A(\mathbf{F}) = \lambda \varepsilon R_A \widehat{V}_A\left(\sqrt{\lambda \varepsilon R_A} \mathbf{F}\right). \quad (6.28)$$

D'autre part, il résulte de  $R_A = D$  et  $\varepsilon R_A > 0$  que  $\varepsilon$  et  $\alpha$  ont le même signe. Par conséquent, la variable réduite sur  $\mathcal{F}$  est

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{|\varepsilon| \mathbf{s}}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}}. \quad (6.29)$$

La relation (6.23) donne

$$\begin{aligned} V_F(\boldsymbol{\sigma}) &= U_F \left( \frac{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}}{|\varepsilon|} \boldsymbol{\sigma} \right) = \frac{i}{\lambda R_A} \hat{U}_A \left( \frac{\mathbf{s}(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_A}} \boldsymbol{\sigma} \right) \\ &= i \varepsilon \hat{V}_A(\mathbf{s}(\varepsilon) \boldsymbol{\sigma}) = i \varepsilon \mathcal{F}_{\mathbf{s}(\varepsilon)\pi/2}[V_A](\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (6.30)$$

et on retrouve ainsi la relation (6.25).

**Remarque 6.1.9 (Une relation utile).** Les relations (6.7) et (6.8) conduisent à

$$(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2 = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \varepsilon^2(1 - \mu)^2}. \quad (6.31)$$

De la relation (6.21) et de  $\mu = D/R_A$ , il résulte

$$(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2 = \frac{(D + R_D)R_A}{(R_A - D)R_D}. \quad (6.32)$$

**Remarque 6.1.10 (Symétrie des variables réduites sur l'émetteur et sur le récepteur).** L'emploi du paramètre  $\varepsilon$  laisse croire qu'il existe une dissymétrie dans la prise en compte des paramètres liés aux récepteurs et celle des paramètres liés au récepteur. Cela se manifeste notamment dans la définition même des variables réduites par les relations (6.11) et (6.12).

Jusqu'à présent le paramètre  $\varepsilon$  était un degré de liberté. Il se réduit à une simple commodité d'écriture qui allège certaines expressions, comme le montrent les explications suivantes dues à É. Fogret. Selon la remarque 6.1.7, le paramètre  $\alpha$  se définit sans référence à  $\varepsilon$ , et selon la remarque 6.1.9, l'expression  $\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha$ , qui intervient dans la relation (6.20), s'exprime à l'aide des seuls paramètres  $D$ ,  $R_A$  et  $R_D$ .

La relation (6.21) conduit à écrire la relation (6.11) sous la forme

$$\rho^4 = \frac{1}{\lambda^2 R_A^2} \frac{(R_A - D)(D - R_A + R_D)}{D(D + R_D)} r^4, \quad (6.33)$$

et, grâce à la relation (6.32), la relation (6.12) sous la forme

$$s^4 = \frac{1}{\lambda^2 R_D^2} \frac{(D + R_D)(D - R_A + R_D)}{D(R_A - D)} r^4. \quad (6.34)$$

Les relations (6.33) et (6.34) sont plus symétriques que ne le sont les relations (6.11) et (6.12). De fait, elles sont identiques : si  $\mathcal{D}$  devient l'émetteur et  $\mathcal{A}$  le récepteur, la distance de diffraction  $D$  se change en  $-D$ , et on passe simplement de la relation (6.33) à (6.34) en échangeant  $R_A$  et  $R_D$ .

Finalement, la relation (6.20), qui est le cœur même de ce chapitre, s'écrit sans utiliser  $\varepsilon$ .

## 6.2 Transfert réciproque et transfert d'ordre réel

### 6.2.1 Transfert réciproque

Jusqu'ici l'émetteur avait un rôle particulier dans la mesure où la définition des paramètres et des variables réduites conduisant à associer une transformation de Fourier fractionnaire au transfert du champ, se rapportait au rayon de courbure  $R_A$  de l'émetteur (c'est lui qui intervenait dans la définition de  $\mu$ ). Un tel transfert est décrit sous la forme « directe ». Cependant, étant donné un émetteur  $\mathcal{A}$  et un récepteur  $\mathcal{D}$ , le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  s'exprime encore sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire quand les paramètres fractionnaires et les variables réduites sont rapportés au rayon de courbure du récepteur : le transfert est décrit sous la forme « réciproque ».

L'expression du transfert réciproque s'obtient, techniquement, en considérant  $\mathcal{D}$  comme émetteur et  $\mathcal{A}$  comme récepteur, de telle sorte que les formules établies pour un transfert direct s'appliquent : si  $S_A$  est le sommet de  $\mathcal{A}$  et  $S_D$  le sommet de  $\mathcal{D}$ , la distance de propagation est  $D' = \overline{S_D S_A} = -D$ , si bien que les paramètres fractionnaires et les variables et fonctions réduites sont

$$\mu' = \frac{D'}{R_D} = -\frac{D}{R_D}, \quad (6.35)$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{\mu'}{1 - \mu'} \frac{\mu' R_D + R_A}{(\mu' - 1)R_D + R_A}, \quad \varepsilon' R_D > 0, \quad (6.36)$$

$$\cot \alpha' = \varepsilon' \frac{1 - \mu'}{\mu'}, \quad \alpha' D' \geq 0, \quad (6.37)$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon' R_D}} (\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha') \mathbf{r}, \quad (6.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon' R_D}} \mathbf{s}, \quad (6.39)$$

$$V'_A(\boldsymbol{\rho}') = U_A \left( \sqrt{\lambda \varepsilon' R_D} \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} \right), \quad (6.40)$$

$$V'_D(\boldsymbol{\sigma}') = U_D \left( \sqrt{\lambda \varepsilon' R_D} \boldsymbol{\sigma}' \right). \quad (6.41)$$

Le transfert de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{A}$  s'écrit

$$V'_A(\boldsymbol{\rho}') = e^{i\alpha'} (\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha') \mathcal{F}_{\alpha'}[V'_D](\boldsymbol{\rho}'). \quad (6.42)$$

La relation (6.42) s'inverse et donne le transfert réciproque de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  sous la forme

$$V'_D(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{e^{-i\alpha'}}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} \mathcal{F}_{-\alpha'}[V'_A](\boldsymbol{\sigma}'). \quad (6.43)$$

Le transfert réciproque a une utilité pratique dans certains calculs, en particulier quand il s'agit de composer deux transformations de Fourier fractionnaires, comme il sera fait par la suite. Une autre propriété parfois utile est la suivante :

**Proposition 6.2.1.** *Soit  $\alpha$  l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire associée au transfert du champ d'un émetteur vers un récepteur dans sa forme directe, et soit  $\alpha'$  l'ordre de la transformation associée au même transfert mais sous sa forme réciproque. Alors :*

- i. *Les ordres  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont réels en même temps ;*
- ii. *Quand  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont réels, ils sont opposés :  $\alpha' = -\alpha$ .*

*Preuve.* i – Au transfert direct est associé le paramètre  $\varepsilon$ , tel que

$$\varepsilon^2 = \frac{D(D + R_D)}{(R_A - D)(D - R_A + R_D)}, \quad (6.44)$$

et au transfert réciproque, le paramètre  $\varepsilon'$ , défini par

$$\varepsilon'^2 = \frac{D'(D' + R_A)}{(R_D - D')(D' - R_D + R_A)}, \quad (6.45)$$

où  $D'$  est la distance du récepteur à l'émetteur. De  $D' = -D$ , résulte l'inégalité  $\varepsilon^2 \varepsilon'^2 > 0$ , qui montre que le transfert direct et le transfert réciproque sont soit tous les deux d'ordre réel, soit tous les deux d'ordre complexe.

ii – La définition de  $\alpha$  et  $\alpha'$ , supposés réels, conduit à

$$\cot^2 \alpha' = \varepsilon'^2 \frac{(R_D + D)^2}{D^2} = \frac{(R_A - D)(R_D + D)}{D(D - R_A + R_D)} = \cot^2 \alpha \geq 0, \quad (6.46)$$

dont il résulte  $\cot \alpha' = \pm \cot \alpha$ .

L'identité  $D(D - R_A + R_D) = (D - R_A)(D + R_D) + R_A R_D$  permet de déduire de la relation (6.46)

$$\frac{R_A R_D}{(R_A - D)(R_D + D)} \geq 1, \quad (6.47)$$

et ensuite

$$\frac{R_A R_D D^2}{(R_A - D)(R_D + D)} \geq 0, \quad (6.48)$$

qui signifie que  $R_A D(R_A - D)$  et  $R_D D(R_D + D)$  ont le même signe. Conformément à la remarque 6.1.7,  $\cot \alpha$  a le signe de  $R_A D(R_A - D)$ , et  $\cot \alpha'$  a le signe de  $R_D D'(R_D - D')$  qui est opposé à celui de  $R_D D(R_D + D)$  (car  $D' = -D$ ). Par conséquent  $\cot \alpha$  et  $\cot \alpha'$  ont des signes opposés :  $\cot \alpha' = -\cot \alpha$ .

De  $\alpha D \geq 0$ ,  $\alpha' D' \geq 0$ , et de  $D = -D'$ , il résulte  $\alpha \alpha' \leq 0$ , et  $\alpha$  et  $\alpha'$  ont des signes opposés. Comme  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont dans l'intervalle  $] -\pi, \pi[$  et comme  $\cot \alpha' = -\cot \alpha$ , nécessairement  $\alpha' = -\alpha$ .  $\square$

Il résulte de la proposition 6.2.1 que le fait que le transfert est d'ordre réel est intrinsèque à l'ensemble de l'émetteur et du récepteur, que l'on considère le transfert direct ou le réciproque. Comme de plus le transfert réciproque de  $\mathcal{A}$

à  $\mathcal{D}$  est l'inverse du transfert de  $\mathcal{D}$  (considéré comme émetteur) à  $\mathcal{A}$  (considéré comme récepteur) la propriété est caractéristique de la seule géométrie de l'ensemble. Il est dès lors possible de préciser à quelle condition « géométrique » un transfert est d'ordre réel, et c'est ce qui est examiné au paragraphe suivant.

**Remarque 6.2.1.** Il ne faut pas confondre transfert réciproque et transfert « inverse ». Si  $\mathcal{A}$  est un émetteur et  $\mathcal{D}$  un récepteur, il y a deux moyens de décrire le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  : par transfert direct, qui se rapporte au rayon  $R_A$  ; par transfert réciproque, qui se rapporte au rayon  $R_D$ . Transfert direct et transfert réciproque décrivent le même phénomène de diffraction.

Le transfert du champ de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{A}$  est l'inverse du transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$ . Si la lumière va effectivement de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$ , le transfert de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{A}$  se conçoit comme un transfert virtuel.

Dans ce qui précède, le transfert réciproque de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  est décrit comme l'inverse du transfert de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{A}$  pour des raisons techniques, pour arriver rapidement au résultat recherché.

### 6.2.2 Caractérisation géométrique d'un transfert d'ordre réel

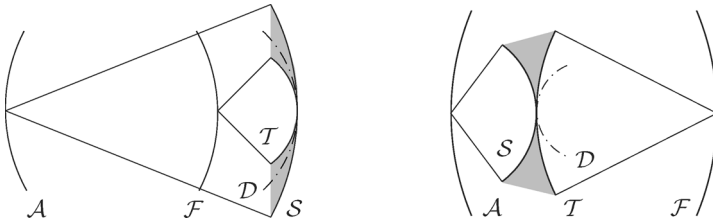
Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur et soit  $\mathcal{D}$  un récepteur à la distance  $D$ . Le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  est d'ordre réel si, et seulement si,

$$\frac{(D + R_D)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_D)} \geq 0, \quad (6.49)$$

conformément à la relation (6.22).

Soit  $\mathcal{F}$  la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ . Soient  $\mathcal{S}$  la calotte sphérique tangente à  $\mathcal{D}$  et centrée sur  $\mathcal{A}$  (son rayon est  $R_S = -D$ ) et  $\mathcal{T}$  la calotte sphérique tangente à  $\mathcal{D}$  et centrée sur  $\mathcal{F}$  (son rayon est  $R_T = R_A - D$ ). La relation (6.49) s'écrit

$$0 \leq -\frac{R_T(R_D - R_S)}{R_S(R_D - R_T)} = -\frac{\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_D}}{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_D}}. \quad (6.50)$$



**FIG. 6.2.** Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  est d'ordre réel si, et seulement si, le récepteur  $\mathcal{D}$  est situé dans la zone ombrée, limitée par les sphères  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  centrées respectivement sur l'émetteur  $\mathcal{A}$  et sur sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$ . C'est le cas sur la figure de gauche, mais pas sur celle de droite.

Le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  est d'ordre réel si, et seulement si,  $(1/R_S) - (1/R_D)$  et  $(1/R_T) - (1/R_D)$  ont des signes opposés. Désignons par  $\mathfrak{C}_S$ ,  $\mathfrak{C}_T$  et  $\mathfrak{C}_D$  la courbure de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{D}$  respectivement ( $\mathfrak{C}_S = 1/R_S$ , et de même pour  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{D}$ ). La condition (6.50) s'écrit

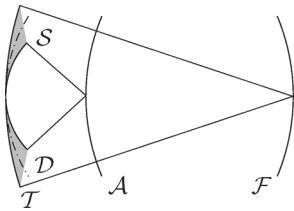
$$\frac{\mathfrak{C}_S - \mathfrak{C}_D}{\mathfrak{C}_T - \mathfrak{C}_D} \leq 0, \quad (6.51)$$

soit encore

$$\text{Min}(\mathfrak{C}_S, \mathfrak{C}_T) \leq \mathfrak{C}_D \leq \text{Max}(\mathfrak{C}_S, \mathfrak{C}_T). \quad (6.52)$$

Cette condition est satisfaite si, et seulement si, la calotte sphérique  $\mathcal{D}$  est située dans l'espace compris entre les sphères  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ . La figure 6.2 donne deux exemples de transferts ; l'un est d'ordre réel, l'autre ne l'est pas.

**Remarque 6.2.2.** Il est classique en optique de parler d'objets et d'images réels ou virtuels. Il en va dès lors de même d'un transfert par diffraction : un tel transfert est virtuel si le récepteur est « derrière » l'émetteur, c'est-à-dire si la distance de propagation est négative ; il est réel si la distance est positive. Ces notions s'ajoutent à celle d'ordre réel introduite ici, l'ordre étant celui de la transformation de Fourier fractionnaire qui exprime le transfert du champ par diffraction. Un transfert virtuel peut être éventuellement d'ordre réel, comme le montre la figure 6.3. La partie droite de la figure 6.2 montre un transfert réel (non virtuel) d'ordre complexe.

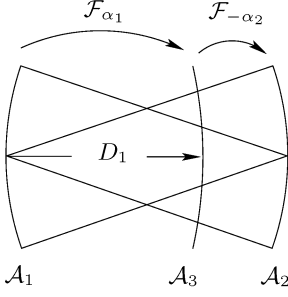


**FIG. 6.3.** Ici le transfert de  $\mathcal{A}$  (émetteur) à  $\mathcal{D}$  (récepteur) est virtuel (la lumière se propage de gauche à droite). Il est néanmoins d'ordre réel puisque  $\mathcal{D}$  est dans la région ombrée.

## 6.3 Principe de Huygens–Fresnel et composition des transformations de Fourier fractionnaires

### 6.3.1 Première approche

Conformément au principe de Huygens–Fresnel, le transfert du champ électrique d'un émetteur  $\mathcal{A}_1$  vers un récepteur  $\mathcal{A}_2$  se conçoit comme le résultat d'un premier transfert de  $\mathcal{A}_1$  vers un récepteur aérien intermédiaire  $\mathcal{A}_3$ , suivi du transfert de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$ . Le phénomène de diffraction entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  est la



**FIG. 6.4.** Le transfert du champ de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_2$  se représente par une transformation de Fourier fractionnaire qui est la composée de  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  et de  $\mathcal{F}_{-\alpha_2}$ . Une telle composition est conforme au principe de Huygens-Fresnel.

composition d'une première diffraction, entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_3$ , et d'une seconde entre  $\mathcal{A}_3$  et  $\mathcal{A}_2$ . Cette propriété est respectée par les opérateurs de transfert du champ employés par la théorie métaxiale, comme montré au paragraphe 3.5.

Si les transferts du champ se représentent par des transformations de Fourier fractionnaires, à la composition des transferts doit correspondre la composition des transformations, telle qu'elle est exprimée par la propriété iii du paragraphe C.3 p. 489. C'est ce qui est montré dans ce paragraphe, limité, pour simplifier, au cas particulier où  $\mathcal{A}_2$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}_1$ , et  $\mathcal{A}_3$  une sphère située entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .

La variable spatiale est  $r_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sur la sphère  $\mathcal{A}_j$ , dont le rayon de courbure est  $R_j$ . Soit  $D_1$  la distance de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$ , et  $D_2 = D_1 - R_1$  la distance de  $\mathcal{A}_2$  à  $\mathcal{A}_3$ . Le transfert direct de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$  se décrit à l'aide des paramètres

$$\mu_1 = \frac{D_1}{R_1}, \quad (6.53)$$

et  $\varepsilon_1$ , tel que

$$\varepsilon_1^2 = \frac{D_1(D_1 + R_3)}{(R_1 - D_1)(D_1 - R_1 + R_3)}, \quad \varepsilon_1 R_1 > 0. \quad (6.54)$$

Le transfert précédent est supposé d'ordre réel. L'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire associée est  $\alpha_1$ , tel que

$$\cot \alpha_1 = \varepsilon_1 \frac{1 - \mu_1}{\mu_1}, \quad \alpha_1 D_1 \geq 0. \quad (6.55)$$

Le transfert de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  se décrit sous sa forme réciproque. Les paramètres utilisés sont (en tenant compte de  $R_2 = -R_1$ )

$$\mu_2 = \frac{D_2}{R_2} = 1 - \mu_1, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2 &= \frac{D_2(D_2 + R_3)}{(R_2 - D_2)(D_2 - R_2 + R_3)} = -\frac{(D_1 - R_1)(D_1 - R_1 + R_3)}{D_1(D_1 + R_3)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_1^2}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

et  $\varepsilon_2 R_2 > 0$ . Les paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont réels en même temps et, dans le cas réel (considéré ici), ont des signes opposés comme conséquence de  $R_2 = -R_1$ . L'ordre  $\alpha_2$  du transfert réciproque est tel que  $\alpha_2 D_2 \geq 0$ , et

$$\cot \alpha_2 = \varepsilon_2 \frac{1 - \mu_2}{\mu_2} = -\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\mu_1}{1 - \mu_1} = -\tan \alpha_1, \quad (6.58)$$

d'où

$$\alpha_2 = \alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}. \quad (6.59)$$

Par conséquent, le transfert de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$  s'exprime à l'aide de la transformation  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$ , le transfert de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  à l'aide de  $\mathcal{F}_{-\alpha_2}$ , et la somme des ordres de ces deux transformations vaut  $\pm\pi/2$ . Pour achever l'analyse, notons que la composition de  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  et  $\mathcal{F}_{-\alpha_2}$  est effectivement possible si les variables réduites qui résultent de l'application de  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  sont les variables réduites auxquelles s'applique  $\mathcal{F}_{-\alpha_2}$ . Sans cette condition la composition des transformations n'a pas de sens.

Pour le transfert direct de  $\mathcal{A}_1$  à  $\mathcal{A}_3$ , la variable réduite sur  $\mathcal{A}_3$  est

$$\rho_3 = \frac{r_3}{\sqrt{\lambda \varepsilon_1 R_1}} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1), \quad (6.60)$$

et l'amplitude réduite

$$V_3(\rho_3) = U_3 \left( \sqrt{\lambda \varepsilon_1 R_1} \frac{\rho_3}{\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1} \right). \quad (6.61)$$

Pour le transfert réciproque de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$ , la variable réduite sur  $\mathcal{A}_3$  est

$$\rho'_3 = \frac{r_3}{\sqrt{\lambda \varepsilon_2 R_2}} (\cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \sin \alpha_2), \quad (6.62)$$

et l'amplitude réduite

$$V'_3(\rho'_3) = U_3 \left( \sqrt{\lambda \varepsilon_2 R_2} \frac{\rho'_3}{\cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \sin \alpha_2} \right). \quad (6.63)$$

De  $\varepsilon_2 = -1/\varepsilon_1$ , de  $R_1 = -R_2$  et de  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$ , il résulte

$$\rho'_3 = \mp \frac{1}{\varepsilon_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\lambda R_1}} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1), \quad (6.64)$$

et ensuite  $\rho'_3 = \mp \mathfrak{s}(\varepsilon_1) \rho_3$ , où  $\mathfrak{s}(\varepsilon_1)$  est le signe de  $\varepsilon_1$ . Nous avons également

$$V'_3(\sigma_3) = V_3(\mp \mathfrak{s}(\varepsilon_1) \rho_3). \quad (6.65)$$

Examinons le cas  $\rho'_3 = -\rho_3$ , qui se présente quand  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ , ou quand  $\varepsilon_1 < 0$  et  $\alpha_2 = \alpha_1 - \pi/2$ . Alors

$$\begin{aligned} V'_3(\rho'_3) &= e^{i\alpha_1} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1) \mathcal{F}_{\alpha_1}[V_1](-\rho'_3) \\ &= e^{i\alpha_1} (\cos \alpha_1 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1) \mathcal{F}_{\alpha_1 \pm \pi}[V_1](\rho'_3), \end{aligned} \quad (6.66)$$

où le signe  $\pm$  se réfère à  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$ . La composition de  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  et  $\mathcal{F}_{-\alpha_2}$  a bien un sens. De façon explicite nous écrivons ( $\rho_2$  est la variable réduite sur  $\mathcal{A}_2$ )

$$V_2(\rho_2) = \frac{e^{-i\alpha_2}}{\cos \alpha_2 + \varepsilon_2 \sin \alpha_2} \mathcal{F}_{-\alpha_2}[V_3'](\rho_2), \quad (6.67)$$

et la composition conduit à

$$V_2(\rho_2) = i\varepsilon_1 \mathcal{F}_{-\alpha_2} \circ \mathcal{F}_{\alpha_1 \pm \pi}[V_1](\rho_2) = i\varepsilon_1 \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \pi/2}[V_1](\rho_2). \quad (6.68)$$

Le cas  $\rho'_3 = \rho_3$  se présente quand  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\alpha_2 = \alpha_1 - \pi/2$ , ou quand  $\varepsilon_1 < 0$  et  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ . Alors  $V_3'(\rho'_3) = V_3(\rho'_3)$  et la composition de  $\mathcal{F}_{\alpha_1}$  et  $\mathcal{F}_{-\alpha_2}$  est possible. Nous avons, explicitement,

$$V_2(\rho_2) = i\varepsilon_1 \mathcal{F}_{-\alpha_2} \circ \mathcal{F}_{\alpha_1}[V_1](\rho_2) = i\varepsilon_1 \mathcal{F}_{\varepsilon_1 \pi/2}[V_1](\rho_2). \quad (6.69)$$

Dans les deux cas nous retrouvons la relation (6.25) (remarque 6.1.8). La composition des transferts de  $\mathcal{A}_2$  à  $\mathcal{A}_3$  et de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  correspond au transfert du champ de la sphère  $\mathcal{A}_1$  à sa sphère de Fourier  $\mathcal{A}_2$ , comme il fallait s'y attendre (diffraction de Fraunhofer).

**Remarque 6.3.1.** La démonstration précédente reste valable si  $\mathcal{A}_3$  n'est pas située entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , un des deux transferts (au moins) étant virtuel.

**Remarque 6.3.2.** En suivant la méthode précédente, la loi de composition se démontre dans des cas plus généraux [188].

### 6.3.2 Deuxième méthode

La méthode suivie au paragraphe précédent n'est pas entièrement satisfaisante, car elle attribue des rôles différents à  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$  : par exemple les variables réduites se rapportent à  $\mathcal{A}_1$  et à  $\mathcal{A}_2$  seulement. Or le strict respect du principe de Huygens–Fresnel voudrait que les trois transferts considérés dans la composition s'expriment en des termes équivalents. Pour fixer les idées, désignons par  $\alpha_{ji}$  l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire associée au transfert de  $\mathcal{A}_i$  vers  $\mathcal{A}_j$ . Le principe de Huygens–Fresnel exige d'avoir

$$\alpha_{21} = \alpha_{23} + \alpha_{31}, \quad (6.70)$$

où  $\alpha_{ji}$  est défini de la même manière, en fonction de  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{A}_j$ , quelle que soit la paire  $(i, j)$ . Nous exposons ici une technique de composition, due à É. Fogret [78], qui satisfait les exigences mentionnées.

Soient trois calottes sphériques  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Le rayon de courbure de  $\mathcal{A}_i$  est  $R_i$ , la distance (sommet à sommet) de  $\mathcal{A}_i$  à  $\mathcal{A}_j$  est  $D_{ji}$ , la variable spatiale sur  $\mathcal{A}_i$  est  $r_i$  et  $U_i$  l'amplitude du champ. À la paire  $(i, j)$  (ordonnée) est associé l'opérateur de transfert  $\mathcal{H}_{ji}$  de  $\mathcal{A}_i$  à  $\mathcal{A}_j$  (voir le paragraphe 3.5).

Pour fixer les idées, la calotte sphérique  $\mathcal{A}_3$  est supposée située entre  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ , bien que les résultats obtenus s'appliquent à toutes les situations. Les distances prises en compte satisfont la relation

$$D_{21} = D_{23} + D_{31} . \quad (6.71)$$

Le principe de Huygens–Fresnel se traduit par (relation (3.48) p. 59)

$$\mathcal{H}_{21} = \mathcal{H}_{23} \circ \mathcal{H}_{31} . \quad (6.72)$$

Dans le présent chapitre, l'opérateur de transfert  $\mathcal{H}_{ji}$  se représente par la transformation de Fourier fractionnaire  $\mathcal{F}_{\alpha_{ji}}$ , et le problème se pose de savoir dans quelle mesure la relation (6.72) est respectée par cette représentation.

Le transfert de  $\mathcal{A}_i$  à  $\mathcal{A}_j$  est décrit par les paramètres  $\alpha_{ji}$  et  $\varepsilon_{ji}$  tels que

$$\cot^2 \alpha_{ji} = \frac{(D_{ji} + R_j)(R_i - D_{ji})}{D_{ji}(D - R_i + R_j)} , \quad (6.73)$$

$$\varepsilon_{ji}^2 = \frac{D_{ji}(R_j + D_{ji})}{(R_i - D_{ji})(D_{ji} - R_i + R_j)} . \quad (6.74)$$

Pour simplifier, les transferts  $\mathcal{H}_{21}$  et  $\mathcal{H}_{31}$  sont supposés d'ordre réel. Dans ces conditions  $\alpha_{21}$  et  $\alpha_{31}$  sont des nombres réels dans l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ , tels que  $\alpha_{21}D_{21} \geq 0$  et  $\alpha_{31}D_{31} \geq 0$ . Les paramètres  $\varepsilon_{21}$  et  $\varepsilon_{31}$  sont également réels et satisfont  $\varepsilon_{21}R_1 > 0$  et  $\varepsilon_{31}R_1 > 0$ .

Pour les paires (1, 2) et (1, 3), les variables réduites liées au transfert  $\mathcal{H}_{ji}$  sont

$$\rho_i^{[ji]} = \frac{\mathbf{r}_i}{\sqrt{\lambda \varepsilon_{ji} R_i}} , \quad (6.75)$$

$$\rho_j^{[ji]} = \frac{\mathbf{r}_j}{\sqrt{\lambda \varepsilon_{ji} R_i}} (\cos \alpha_{ji} + \varepsilon_{ji} \sin \alpha_{ji}) , \quad (6.76)$$

et les amplitudes réduites

$$V_i^{[ji]}(\rho_i^{[ji]}) = U_i(\sqrt{\lambda \varepsilon_{ji} R_i} \rho_i^{[ji]}) , \quad (6.77)$$

$$V_j^{[ji]}(\rho_j^{[ji]}) = U_j \left( \frac{\sqrt{\lambda \varepsilon_{ji} R_i} \rho_j^{[ji]}}{\cos \alpha_{ji} + \varepsilon_{ji} \sin \alpha_{ji}} \right) , \quad (6.78)$$

si bien que le transfert de  $\mathcal{A}_i$  à  $\mathcal{A}_j$  se met sous la forme

$$V_j^{[ji]}(\rho_j^{[ji]}) = e^{i\alpha_{ji}} (\cos \alpha_{ji} + \varepsilon_{ji} \sin \alpha_{ji}) \mathcal{F}_{\alpha_{ji}} [V_i^{[ji]}](\rho_j^{[ji]}) . \quad (6.79)$$

À ce stade, nous ne connaissons pas la nature du transfert  $\mathcal{H}_{23}$  : s'il est d'ordre réel, il se met sous la forme de la relation (6.79) avec  $i = 3$  et  $j = 2$ , les variables et amplitudes réduites étant définies par les relations (6.75)–(6.78). S'il est d'ordre complexe, les variables et amplitudes réduites sont définies différemment, mais il est encore possible d'écrire la relation (6.79) (voir le paragraphe 6.4). Dans tous les cas, nous désignons par  $\mathcal{G}_{ji}$  l'opérateur défini par la relation (6.79), c'est-à-dire tel que

$$V_j^{[ji]} = \mathcal{G}_{ji} [V_i^{[ji]}] . \quad (6.80)$$

La relation (6.72) exige d'avoir

$$\mathcal{G}_{21} = \mathcal{G}_{23} \circ \mathcal{G}_{31} . \quad (6.81)$$

**Proposition 6.3.1.** *Une condition nécessaire pour obtenir  $\mathcal{G}_{21} = \mathcal{G}_{23} \circ \mathcal{G}_{31}$  est*

$$R_3 = \frac{D_{31}(R_2 + D_{23})(R_1 - D_{21}) + D_{23}(R_2 + D_{21})(R_1 - D_{31})}{D_{31}(R_1 - D_{21}) + D_{23}(D_{21} + R_2)}. \quad (6.82)$$

*Preuve.* La composition exige d'avoir

$$\cos \alpha_{21} + \varepsilon_{21} \sin \alpha_{21} = (\cos \alpha_{23} + \varepsilon_{23} \sin \alpha_{23})(\cos \alpha_{31} + \varepsilon_{31} \sin \alpha_{31}). \quad (6.83)$$

Avec les notations de ce paragraphe, la relation (6.32) s'écrit

$$(\cos \alpha_{ji} + \varepsilon_{ji} \sin \alpha_{ji})^2 = \frac{R_i(R_j + D_{ji})}{R_j(R_i - D_{ji})}, \quad (6.84)$$

si bien que la relation (6.83) est satisfaite seulement si

$$\frac{R_1(R_2 + D_{21})}{R_2(R_1 - D_{21})} = \frac{R_3(R_2 + D_{23})}{R_2(R_3 - D_{23})} \frac{R_1(R_3 + D_{31})}{R_3(R_1 - D_{31})}. \quad (6.85)$$

La relation (6.85) se révèle être une équation du premier degré en  $R_3$  dont la solution est donnée par la relation (6.82).  $\square$

Il s'agit ensuite d'établir la réciproque de la proposition 6.3.1 et de montrer que, si le rayon  $R_3$  satisfait la relation (6.82), le transfert de  $\mathcal{G}_{21}$  est bien la composition de  $\mathcal{G}_{31}$  et  $\mathcal{G}_{23}$  (pris dans cet ordre). La démonstration repose sur deux lemmes dont la preuve, donnée dans une publication récente [78], n'est pas reprise ici (voir l'exercice 6.1).

**Lemme 6.3.1.** *Si la condition (6.82) est satisfaite, alors :*

- i.  $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{21}$  ;
- ii. *Le transfert de  $\mathcal{A}_3$  à  $\mathcal{A}_2$  est d'ordre réel ( $\varepsilon_{23}^2 > 0$ ).*

Si la condition (6.82) est satisfaite, le deuxième point du lemme 6.3.1 montre que le transfert  $\mathcal{H}_{23}$  est d'ordre réel ; il s'exprime donc dans les mêmes termes que les transferts  $\mathcal{H}_{21}$  et  $\mathcal{H}_{31}$  : les variables et amplitudes réduites sont données par les relations (6.75)–(6.78) avec  $i = 3$  et  $j = 2$  et le transfert par la relation (6.79) ou (6.81).

**Lemme 6.3.2.** *Si la condition (6.82) est satisfaite, alors :*

- i. *Les variables réduites sur  $\mathcal{A}_3$ , liées aux transferts  $\mathcal{H}_{31}$  et  $\mathcal{H}_{32}$ , sont identiques :  $\rho_3^{[23]} = \rho_3^{[31]}$  ;*
- ii. *Les variables réduites sur  $\mathcal{A}_1$ , liées aux transferts  $\mathcal{H}_{21}$  et  $\mathcal{H}_{31}$ , sont identiques :  $\rho_1^{[21]} = \rho_1^{[31]}$  ;*
- iii. *Les variables réduites sur  $\mathcal{A}_2$ , liées aux transferts  $\mathcal{H}_{21}$  et  $\mathcal{H}_{23}$ , sont identiques :  $\rho_2^{[21]} = \rho_2^{[23]}$  ;*
- iv.  $\alpha_{21} = \alpha_{23} + \alpha_{31}$ .

La proposition 6.3.1 et sa réciproque sont incluses dans la proposition suivante :

**Proposition 6.3.2.** *La relation  $\mathcal{G}_{21} = \mathcal{G}_{23} \circ \mathcal{G}_{31}$  est vérifiée si, et seulement si, le rayon de courbure  $R_3$  satisfait la relation (6.82).*

*Preuve.* Compte tenu de la proposition 6.3.1, il reste à montrer que si la condition (6.82) est satisfaite, alors  $\mathcal{G}_{21} = \mathcal{G}_{23} \circ \mathcal{G}_{31}$ .

Pour l'opérateur  $\mathcal{H}_{31}$ , le transfert du champ s'écrit

$$V_3^{[31]}(\boldsymbol{\rho}_3^{[31]}) = e^{i\alpha_{31}} (\cos \alpha_{31} + \varepsilon_{31} \sin \alpha_{31}) \mathcal{F}_{\alpha_{31}} [V_1^{[31]}](\boldsymbol{\rho}_3^{[31]}), \quad (6.86)$$

et pour l'opérateur  $\mathcal{H}_{23}$

$$V_2^{[23]}(\boldsymbol{\rho}_2^{[23]}) = e^{i\alpha_{23}} (\cos \alpha_{23} + \varepsilon_{23} \sin \alpha_{23}) \mathcal{F}_{\alpha_{23}} [V_3^{[23]}](\boldsymbol{\rho}_2^{[23]}). \quad (6.87)$$

Si la condition (6.82) est satisfaite, les variables réduites sur  $\mathcal{A}_3$  sont les mêmes pour les deux transferts (lemme 6.3.2). Par conséquent  $V_3^{[23]} = V_3^{[31]}$ , et la composition de  $\mathcal{F}_{\alpha_{31}}$  et  $\mathcal{F}_{\alpha_{23}}$  (pris dans cet ordre) a bien un sens. On obtient

$$\begin{aligned} V_2^{[23]}(\boldsymbol{\rho}_2^{[23]}) &= e^{i(\alpha_{23} + \alpha_{31})} \mathcal{F}_{23} [\mathcal{F}_{31} [V_1^{[31]}]](\boldsymbol{\rho}_2^{[23]}) \\ &= e^{i\alpha_{21}} \mathcal{F}_{21} [V_1^{[31]}](\boldsymbol{\rho}_2^{[23]}). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Pour conclure, remarquons que le point ii du lemme (6.3.2) assure l'identité des variables réduites sur  $\mathcal{A}_1$  dans les transferts  $\mathcal{H}_{21}$  et  $\mathcal{H}_{31}$  :  $\boldsymbol{\rho}_1^{[21]} = \boldsymbol{\rho}_1^{[31]}$ ; il en résulte l'identité des fonctions réduites  $V_1^{[21]} = V_1^{[31]}$ . Pour la même raison, le point iii assure l'égalité des variables réduites sur  $\mathcal{A}_2$ . Nous remplaçons  $V_1^{[31]}$  par  $V_1^{[21]}$  et  $\boldsymbol{\rho}_2^{[23]}$  par  $\boldsymbol{\rho}_2^{[21]}$  dans la relation (6.88) et obtenons

$$V_2^{[21]}(\boldsymbol{\rho}_2^{[21]}) = e^{i\alpha_{21}} \mathcal{F}_{21} [V_1^{[21]}](\boldsymbol{\rho}_2^{[21]}). \quad (6.89)$$

La relation (6.89) est équivalente à  $\mathcal{G}_{21} = \mathcal{G}_{23} \circ \mathcal{G}_{31}$ .  $\square$

**Conclusion.** Le principe de Huygens-Fresnel est respecté si, et seulement si, le rayon de la sphère intermédiaire  $\mathcal{A}_3$  satisfait la relation (6.82).

## 6.4 Complément : diffraction et transformations de Fourier fractionnaires d'ordre complexe

### 6.4.1 Transfert du champ

Le transfert de l'amplitude du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$  (rayon de courbure  $R_A$ , amplitude  $U_A$ , variable  $\mathbf{r}$ ) vers un récepteur  $\mathcal{D}$  (rayon  $R_D$ , amplitude  $U_D$ , variable  $\mathbf{s}$ ), situé à la distance  $D$ , s'écrit (c'est la relation (6.1) p. 159)

$$\begin{aligned} U_D(\mathbf{s}) &= \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_D} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Ce transfert est d'ordre réel si, et seulement si,

$$J = \frac{(D + R_D)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_D)} \geq 0, \quad (6.91)$$

conformément à la relation (6.22) p. 164. Si  $J \geq 0$ , on choisit  $\alpha$  réel de façon à avoir  $\cot^2 \alpha = J$  (voir la remarque 6.1.7). Dans ces conditions, la relation (6.21) montre que  $\varepsilon^2 > 0$ , et  $\varepsilon$  est lui-même un nombre réel.

Nous examinons comment procéder quand  $J < 0$  [191]. La définition 6.1.1 a déjà baptisé le transfert, dans ce cas, « d'ordre complexe », un peu par anticipation. Il reste toutefois à montrer que la relation (6.90) se met effectivement sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre complexe et à préciser les variables réduites qui permettent cela.

Le cas  $J = -1$ , qui se rencontre si  $R_A R_D = 0$  et qui n'est pas réaliste, est écarté d'emblée.

Il est souhaitable de maintenir la relation  $\cot^2 \alpha = J$ , et cela conduit à admettre des valeurs de  $\alpha$  complexes de la façon suivante :

- si  $J < -1$ , soit  $\beta > 0$  tel que

$$\coth^2 \beta = -J. \quad (6.92)$$

Nous choisissons  $\alpha = i\beta$ , si bien que  $\cot \alpha = -i \coth \beta$ ;

- si  $-1 < J < 0$ , soit  $\beta > 0$  tel que

$$\coth^2 \beta = -\frac{1}{J}. \quad (6.93)$$

Nous choisissons  $\alpha = \pi/2 + i\beta$ , si bien que

$$\cot \alpha = -\frac{i}{\coth \beta}. \quad (6.94)$$

Dans les deux cas, l'ordre  $\alpha$  est tel que  $\cot^2 \alpha = J$ .

La représentation d'un phénomène de diffraction par une transformation de Fourier fractionnaire est fondée sur l'analogie des relations (6.1) – ou (6.90) – et (6.2). Le fait de choisir  $\alpha$  complexe pose un problème technique mathématique. Pour des raisons physiques, l'intégrale de la relation (6.1) doit être convergente, ou être valide au sens des distributions, et cela autorise finalement de choisir  $U_A$  dans une classe de fonctions assez vaste (jusqu'aux distributions tempérées). En revanche, si  $\alpha$  est complexe, l'intégrale de la relation (6.2) peut être divergente, même si  $f$  appartient à une classe de fonctions très restrictives, comme celle des fonctions à décroissance rapide. Quand  $\alpha$  est imaginaire, la quantité  $-i \cot \alpha$  devient réelle et peut être positive. Or la fonction  $\exp[x^2]$  n'est pas intégrable (elle n'admet pas non plus de transformée de Fourier). Certes physiquement, la fonction  $U_A$  est à support compact et les intégrales se ramènent à des domaines d'intégration finis : le problème de la divergence de l'intégrale de la relation (6.2) disparaît. Mais cela n'est pas dans l'esprit du calcul symbolique adopté dans ce livre, qui veut pouvoir représenter des cas limites, certes idéaux, en première approche des cas réels.

L'idée vient alors de compenser le terme imaginaire introduit par  $\cot \alpha$  par un autre terme imaginaire et de jouer pour cela avec les coordonnées réduites, qui deviennent complexes.

La relation (6.5) conduit à choisir  $\varepsilon$  tel que

$$\varepsilon = \frac{D}{R_A - D} \cot \alpha. \quad (6.95)$$

La relation (6.21) est encore satisfaite par  $\varepsilon^2$ .

Dans ce qui suit, le signe de  $DR_A(R_A - D)$  joue un rôle. Remarquons à ce propos que  $DR_A(R_A - D) = 0$  seulement si  $D = 0$ , ou si  $D = R_A$ , et dans les deux cas le transfert est d'ordre réel, ce qui n'est pas pris en compte ici. Enfin  $R_A = 0$  n'est pas physique. Nous pouvons supposer  $DR_A(R_A - D) \neq 0$ .

Soit  $\mathfrak{s}$  le signe de  $DR_A(R_A - D)$ , et soit  $\chi$  le nombre réel tel que

$$\chi = \mathfrak{s} i \varepsilon. \quad (6.96)$$

Le choix de  $\chi$  et celui de  $\beta$  ( $\coth \beta > 0$ ) montrent que  $\chi R_A > 0$ .

**Lemme 6.4.1.** *Soient  $\alpha$  et  $\varepsilon$  choisis comme ci-dessus.*

- i. *Si  $\alpha = i\beta$  ( $J < -1$ ), alors  $\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha$  est un nombre réel dont le signe est celui de  $R_A(R_A - D)$ .*
- ii. *Si  $\alpha = \pi/2 + i\beta$  ( $-1 < J < 0$ ), alors  $i(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)$  est un nombre réel dont le signe est celui de  $R_A(R_A - D)$ .*

*Preuve.* Supposons d'abord  $\alpha = i\beta$ , avec  $\beta > 0$ . Alors  $\sin \alpha = i \sinh \beta$ , avec  $\sinh \beta > 0$ . On a  $\varepsilon = -\mathfrak{s} i \chi$  et

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha &= \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \varepsilon \right) \sin \alpha = \left( \varepsilon \frac{R_A - D}{D} + \varepsilon \right) \sin \alpha \\ &= \frac{\varepsilon R_A \sin \alpha}{D} = \frac{\mathfrak{s} \chi R_A \sinh \beta}{D}. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Le dernier membre de droite de la relation (6.97) est un nombre réel et son signe est celui de  $\mathfrak{s}D$  (car  $\chi R_A > 0$  et  $\sinh \beta > 0$ ), d'où la première partie du lemme.

Supposons  $\alpha = \pi/2 + i\beta$ . Alors  $\sin \alpha = \cosh \beta \geq 0$ . On écrit

$$\begin{aligned} i(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) &= i \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \varepsilon \right) \sin \alpha = i \left( \varepsilon \frac{R_A - D}{D} + \varepsilon \right) \sin \alpha \\ &= \frac{i \varepsilon R_A \sin \alpha}{D} = \frac{\mathfrak{s} \chi R_A \cosh \beta}{D}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

dont on déduit la deuxième partie du lemme.  $\square$

Dans ces conditions, les variables et fonctions réduites sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{D}$  sont définies de la manière suivante :

$$\rho = \frac{1 + \mathfrak{s} i}{\sqrt{2\lambda\chi R_A}} \mathbf{r}, \quad (6.99)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1 + \mathfrak{s} \mathbf{i}}{\sqrt{2\lambda\chi R_A}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathbf{s}, \quad (6.100)$$

$$V_A(\boldsymbol{\rho}) = U_A \left( \frac{1 - \mathfrak{s} \mathbf{i}}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda\chi R_A} \boldsymbol{\rho} \right), \quad (6.101)$$

$$V_D(\boldsymbol{\sigma}) = U_D \left( \frac{(1 - \mathfrak{s} \mathbf{i}) \sqrt{\lambda\chi R_A}}{\sqrt{2} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)} \boldsymbol{\sigma} \right). \quad (6.102)$$

Par la suite, nous supposons  $DR_A(R_A - D) > 0$  ( $\mathfrak{s} = 1$ ). (On traiterait de la même manière le cas  $DR_A(R_A - D) < 0$ .) Puisque les variables réduites sont des variables vectorielles complexes (de dimension 2) nous définissons le produit scalaire de  $\boldsymbol{\rho} = (s, t)$  et  $\boldsymbol{\sigma} = (u, v)$  ( $s, t, u$  et  $v$  sont des nombres complexes) par

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma} = st + uv. \quad (6.103)$$

Nous notons  $(1 + \mathbf{i})\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres complexes de la forme  $(1 + \mathbf{i})x$ , où  $x$  est un nombre réel. (Dans le plan complexe,  $(1 + \mathbf{i})\mathbb{R}$  est la première bissectrice des axes.) Nous notons  $\Gamma = (1 + \mathbf{i})\mathbb{R} \times (1 + \mathbf{i})\mathbb{R}$  (c'est un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^2$ ).

Avec les variables et amplitudes réduites définies ci-dessus, le transfert de l'amplitude du champ de l'émetteur  $\mathcal{A}$  vers le récepteur  $\mathcal{D}$ , donné par la relation (6.90), s'écrit

$$\begin{aligned} V_D(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{i} \frac{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}{\sin \alpha} \exp[-\mathbf{i}\pi \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cot \alpha] \\ &\quad \times \int_{\Gamma} \exp[-\mathbf{i}\pi \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} \cot \alpha] \exp \left[ \frac{2\mathbf{i}\pi \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}}{\sin \alpha} \right] V_A(\boldsymbol{\rho}) \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Formellement, le membre de droite de la relation (6.104) est une transformation de Fourier fractionnaire étendue à des variables complexes. Pour avoir une véritable transformation de Fourier fractionnaire, il faut ramener le domaine d'intégration à  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemme 6.4.2.** *Soit  $V_A^{[\mathbf{r}]}$  l'amplitude réduite définie, pour  $\boldsymbol{\rho}^{[\mathbf{r}]} \in \mathbb{R}^2$ , par*

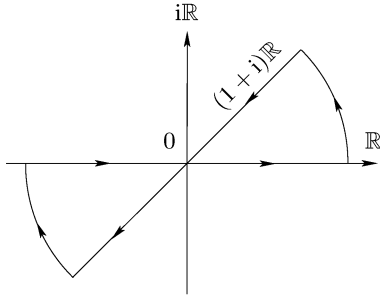
$$V_A^{[\mathbf{r}]}(\boldsymbol{\rho}^{[\mathbf{r}]}) = U_A(\sqrt{\lambda\chi R_A} \boldsymbol{\rho}^{[\mathbf{r}]}). \quad (6.105)$$

*Si  $V_A^{[\mathbf{r}]}$  admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  et n'a pas de pôles, et si  $\mathcal{F}_\alpha[V_A^{[\mathbf{r}]}]$  admet un prolongement holomorphe sur  $\Gamma$ , alors la relation (6.104) s'écrit, pour  $\boldsymbol{\sigma} \in \Gamma$ ,*

$$V_D(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathcal{F}_\alpha[V_A^{[\mathbf{r}]}](\boldsymbol{\sigma}). \quad (6.106)$$

*Preuve.* Soit  $\alpha$  un nombre complexe de la forme  $\alpha = \mathbf{i}\beta$ , ou bien de la forme  $\alpha = \pi/2 + \mathbf{i}\beta$ , où  $\beta$  est un nombre réel strictement positif. Nous procédons en trois étapes.

i – Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et si  $x'$  est un nombre réel, nous définissons l'opérateur  $T_\alpha$  par



**FIG. 6.5.** Chemin d'intégration pour la preuve du lemme 6.4.2.

$$T_\alpha[f](x, x') = \exp[-i\pi(x'^2 + x^2) \cot \alpha] \exp\left[\frac{2i\pi x x'}{\sin \alpha}\right] f(x). \quad (6.107)$$

Supposons que  $f$  ait un prolongement holomorphe et n'ait pas de pôles. Si  $z$  est un nombre complexe, nous supposons que  $|zT_\alpha[f](z, x')|$  tend vers 0 quand  $|z|$  tend vers l'infini. Une intégration sur le chemin indiqué par la figure 6.5 et le théorème des résidus (et les lemmes de Jordan [7, 9, 212]) permettent d'écrire (après passage à la limite)

$$\int_{(1+i)\mathbb{R}} T_\alpha[f](z, x') dz = \int_{\mathbb{R}} T_\alpha[f](x, x') dx. \quad (6.108)$$

ii – Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle à deux dimensions. Nous notons  $\boldsymbol{\rho}^{[r]} = (x, y)$  ( $x$  et  $y$  sont des nombre réels) et  $\boldsymbol{\sigma}^{[r]}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et introduisons l'opérateur  $S_\alpha$  tel que

$$S_\alpha[f](\boldsymbol{\rho}^{[r]}, \boldsymbol{\sigma}^{[r]}) = \exp[-i\pi(\boldsymbol{\sigma}^{[r]} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{[r]} + \boldsymbol{\rho}^{[r]} \cdot \boldsymbol{\rho}^{[r]}) \cot \alpha] \\ \times \exp\left[\frac{2i\pi \boldsymbol{\sigma}^{[r]} \cdot \boldsymbol{\rho}^{[r]}}{\sin \alpha}\right] f(\boldsymbol{\rho}^{[r]}). \quad (6.109)$$

Le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^2$  s'étend à  $\mathbb{C}^2$  conformément à la relation (6.103). Si  $f$  admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  et n'a pas de pôles, alors, pour tout vecteur  $\boldsymbol{\sigma}^{[r]}$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $S_\alpha[f](\boldsymbol{\rho}^{[r]}, \boldsymbol{\sigma}^{[r]})$ , considéré comme fonction de  $\boldsymbol{\rho}^{[r]}$ , admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  qui n'a pas de pôle.

On déduit de l'étape i

$$\frac{i \exp[-i\alpha]}{\sin \alpha} \int_{\Gamma} S_\alpha[f](\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}^{[r]}) d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{F}_\alpha[f](\boldsymbol{\sigma}^{[r]}). \quad (6.110)$$

iii – Si  $\mathcal{F}_\alpha[f]$  admet un prolongement holomorphe et si  $\boldsymbol{\sigma} = (1+i)\boldsymbol{\sigma}^{[r]}$ , alors

$$\frac{i \exp[-i\alpha]}{\sin \alpha} \int_{\Gamma} S_\alpha[f](\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{F}_\alpha[f](\boldsymbol{\sigma}). \quad (6.111)$$

Pour conclure il reste à faire  $f = V_A^{[r]}$  dans la relation (6.111) et à remarquer que

$$V_A\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\rho}^{[r]}\right) = V_A^{[r]}(\boldsymbol{\rho}^{[r]}). \quad (6.112)$$

Les relations (6.104) et (6.111) conduisent à la relation (6.106).  $\square$

**Proposition 6.4.1.** *Soit un émetteur  $\mathcal{A}$  (rayon  $R_A$ ) et un récepteur  $\mathcal{D}$  (rayon  $R_D$ ) à la distance  $D$ , tels que le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  soit d'ordre complexe, ce qui a lieu si*

$$J = \frac{(D + R_D)(R_A - D)}{D(D - R_A + R_D)} < 0. \quad (6.113)$$

*Soit  $\alpha$  tel que  $\cot^2 \alpha = J$ , et soient  $\varepsilon$  et  $\chi$  définis par les relations (6.95) et (6.96). Les variables réduites,  $\rho$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\sigma$  sur  $\mathcal{D}$ , sont définies par les relations (6.99) et (6.100); les amplitudes réduites sont  $V_A$  et  $V_D$ , définies par les relations (6.101) et (6.102). On suppose que  $V_A$  admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}^2$  et n'a pas de pôles.*

*Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  se décrit à l'aide d'une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre complexe  $\alpha$ . Plus précisément*

$$V_D(\sigma) = e^{i\alpha}(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathcal{F}_\alpha[V_A](\sigma). \quad (6.114)$$

*Preuve.* La variable réduite  $\rho$ , donnée par la relation (6.99), s'écrit

$$\rho = \frac{1 + \mathfrak{s}i}{\sqrt{2}} \rho^{[r]}, \quad (6.115)$$

où  $\rho^{[r]}$  est une variable réduite (vectorielle) réelle. On applique le lemme 6.4.2 à la fonction  $V_A^{[r]}$  définie par

$$V_A^{[r]}(\rho^{[r]}) = V_A \left( \frac{1 + \mathfrak{s}i}{\sqrt{2}} \rho^{[r]} \right). \quad (6.116)$$

□

**Remarque 6.4.1.** La relation (6.114) est la généralisation de la relation (6.20) au plan complexe.

**Remarque 6.4.2.** Les fonctions d'Hermite–Gauss (voir l'appendice C) satisfont les hypothèses de la proposition 6.4.1. Ces fonctions forment une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré sommable, ce qui permet d'appliquer la proposition à de telles fonctions. Elles correspondent aussi aux modes d'Hermite–Gauss d'un résonateur optique, et la proposition 6.4.1 est utile pour l'étude d'un tel dispositif (voir le chapitre 7).

### 6.4.2 Analyse graphique

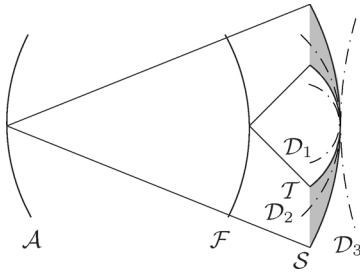
Nous complétons l'analyse du paragraphe 6.2.2. Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur et soit  $\mathcal{D}$  un récepteur à la distance  $D$ . Soit  $\mathcal{F}$  la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ . Soit  $\mathcal{S}$  la sphère tangente à  $\mathcal{D}$  centrée sur  $\mathcal{A}$  et soit  $\mathcal{T}$  la sphère tangente à  $\mathcal{D}$  centrée sur  $\mathcal{F}$ . Comme au paragraphe 6.2.2, nous utilisons les courbures des calottes sphériques mentionnées. Puisque  $\mathfrak{C}_S = -1/D$  et  $\mathfrak{C}_T = 1/(R_A - D)$ , le paramètre  $J$  de la relation (6.91) s'écrit

$$J = -\frac{\mathfrak{C}_S - \mathfrak{C}_D}{\mathfrak{C}_T - \mathfrak{C}_D}. \quad (6.117)$$

Les situations rencontrées aux paragraphes 6.2.2 et 6.4.1 se synthétisent de la façon suivante :

- 1° Si  $\mathfrak{C}_S \leq \mathfrak{C}_T \leq \mathfrak{C}_D$  ou  $\mathfrak{C}_D \leq \mathfrak{C}_T \leq \mathfrak{C}_S$ , alors  $J < -1$ , et  $\alpha$  est de la forme  $\alpha = i\beta$  ( $\beta > 0$ ) ;
- 2° Si  $\text{Min}(\mathfrak{C}_S, \mathfrak{C}_T) \leq \mathfrak{C}_D \leq \text{Max}(\mathfrak{C}_S, \mathfrak{C}_T)$ , alors  $J \geq 0$ , et  $\alpha$  est réel. (C'est la situation analysée au paragraphe 6.2.2) ;
- 3° Si  $\mathfrak{C}_T \leq \mathfrak{C}_S \leq \mathfrak{C}_D$  ou  $\mathfrak{C}_D \leq \mathfrak{C}_S \leq \mathfrak{C}_T$ , alors  $-1 < J < 0$ , et  $\alpha$  est de la forme  $\alpha = \pi/2 + i\beta$  ( $\beta > 0$ ).

La figure 6.6 illustre les trois situations possibles (le récepteur  $\mathcal{D}_j$  représente le récepteur  $\mathcal{D}$  dans la situation  $j$  de la liste précédente).



**FIG. 6.6.** Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}_1$  est d'ordre  $\alpha = i\beta$ . Celui de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}_2$  est d'ordre réel. Celui de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}_3$  est d'ordre  $\alpha = \pi/2 + i\beta$ .

## 6.5 Exercices

**Exercice 6.1.** Démontrer les lemmes 6.3.1 et 6.3.2.

**Exercice 6.2.** Soit deux calottes sphériques  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  (centrées sur l'axe  $z$ ). On désigne par  $S_j$  le sommet de  $\mathcal{A}_j$  et par  $C_j$  son centre de courbure. Montrer que le transfert de l'amplitude du champ d'une calotte à l'autre est d'ordre réel si, et seulement si, les quatre points  $S_1, C_1, S_2$  et  $C_2$  sont ordonnés sur l'axe  $z$  de façon à ce que deux indices voisins soient toujours différents (1212 ou 2121 ; et non par exemple 1122, ni 1221).

## Chapitre 7

# La méthode de la transformation de Fourier fractionnaire

Conformément aux résultats du chapitre 6, la clé de l'association entre un phénomène de diffraction et une transformation de Fourier fractionnaire réside dans le choix de l'ordre de cette dernière. Or une transformation de Fourier fractionnaire est complètement caractérisée par son ordre ; une fois celui-ci connu, l'écriture explicite de la transformation n'apporte pas d'information supplémentaire : il doit être possible de résoudre des problèmes de diffraction en ne manipulant que les ordres des transformations concernées ainsi que les paramètres qui leur sont liés, sans recourir à l'écriture intégrale du phénomène de diffraction considéré. C'est en cela que consiste l'idée développée dans ce chapitre. Sa mise en œuvre conduit à une nouvelle méthode d'étude de problèmes de diffraction métaxiale, fondée sur l'emploi de la transformation de Fourier fractionnaire [184–188].

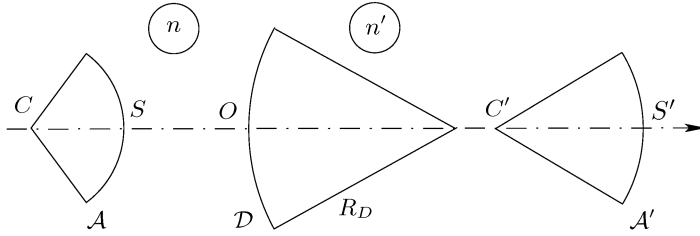
La méthode proposée dans ce chapitre est d'abord illustrée par un exemple déjà traité, celui de l'imagerie cohérente à travers un dioptre sphérique (vue au chapitre 4). Appliquée ensuite aux résonateurs optiques et aux faisceaux gaussiens, elle offre l'intérêt d'inclure leur théorie dans le cadre de l'optique de Fourier, qui s'en trouve élargi d'autant.

### 7.1 Le dioptre

L'imagerie cohérente par un dioptre a été étudiée au chapitre 4. L'approche suivie considérait plusieurs cas particuliers avant de conclure par le cas général. La raison de cela était qu'il fallait adapter les courbures des émetteurs et des récepteurs pour être dans une situation de transformation de Fourier optique. La transformation de Fourier fractionnaire, parce qu'elle inclut des termes de phase quadratique dans sa forme intégrale, permet de traiter d'emblée le cas général.

#### 7.1.1 Transfert général

Soit  $\mathcal{D}$  la surface d'un dioptre qui sépare deux milieux homogènes et isotropes d'indices de réfraction  $n$  et  $n'$ . Le sommet de  $\mathcal{D}$  est  $O$  et son rayon de courbure est  $R_D$  (fig. 7.1). La lumière se propage du milieu objet ( $n$ ) vers le milieu image ( $n'$ ). La longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement dans l'espace objet et la longueur d'onde  $\lambda'$  dans l'espace image satisfont la relation  $n\lambda = n'\lambda'$ .



**FIG. 7.1.** Le processus de formation d'une image cohérente à travers un dioptré se décrit au moyen de la composition de deux transformations de Fourier fractionnaires, associées au transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{A}'$ .

Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur sphérique de centre  $C$ , de sommet  $S$  et de rayon de courbure  $R_A = \overline{SC}$ , situé à la distance  $d = \overline{OS}$  de  $\mathcal{D}$ . L'émetteur est dans l'espace objet : c'est un émetteur réel si  $d \leq 0$ , virtuel si  $d > 0$ . Soit également un récepteur sphérique  $\mathcal{A}'$ , de sommet  $S'$ , situé dans l'espace image, à la distance  $d' = \overline{OS'}$  de  $\mathcal{D}$ . Le centre de courbure de  $\mathcal{A}'$  est  $C'$  et son rayon de courbure est  $R_{A'} = \overline{S'C'}$ . Le récepteur peut être réel ( $d' \geq 0$ ) ou virtuel ( $d' < 0$ ). Les variables sont  $\mathbf{r}$  sur  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{s}$  sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathbf{r}'$  sur  $\mathcal{A}'$ .

Il s'agit d'exprimer l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  en fonction de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  à l'aide d'une transformation de Fourier fractionnaire. Pour cela, la surface  $\mathcal{D}$  est considérée comme un récepteur intermédiaire ; le résultat s'obtient en composant deux transformations de Fourier fractionnaires.

Le transfert de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{A}'$  se conçoit sous la forme directe, selon la proposition 6.1.1, avec les paramètres  $\mu'$ ,  $\alpha'$  et  $\varepsilon'$  tels que

$$\mu' = \frac{d'}{R_D}, \quad (7.1)$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{\mu'}{1 - \mu'} \frac{\mu' R_D + R_{A'}}{(\mu' - 1)R_D + R_{A'}}, \quad \varepsilon' R_D > 0, \quad (7.2)$$

$$\cot \alpha' = \varepsilon' \frac{1 - \mu'}{\mu'}, \quad (7.3)$$

le domaine de  $\alpha'$  étant  $[0, \pi[$  si  $d' \geq 0$ , ou  $] -\pi, 0]$  si  $d' \leq 0$  (les deux conditions sont compatibles si  $d' = 0$  et dans ce cas  $\alpha' = 0$ ). Les variables et amplitudes réduites sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}'$  sont respectivement

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{\sqrt{\lambda' \varepsilon' R_D}} \mathbf{s}, \quad (7.4)$$

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{1}{\sqrt{\lambda' \varepsilon' R_D}} (\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha') \mathbf{r}', \quad (7.5)$$

$$V_D'(\boldsymbol{\sigma}') = U_D(\sqrt{\lambda' \varepsilon' R_D} \boldsymbol{\sigma}'), \quad (7.6)$$

$$V_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = U_{A'} \left( \sqrt{\lambda' \varepsilon' R_D} \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} \right). \quad (7.7)$$

Dans ces conditions, conformément à la relation (6.20), le transfert de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{A}'$  s'exprime par

$$V_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = e^{i\alpha'} (\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha') \mathcal{F}_{\alpha'}[V_D'](\boldsymbol{\rho}'). \quad (7.8)$$

Le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  est décrit sous sa forme réciproque, qui permet d'avoir les mêmes variables réduites sur  $\mathcal{D}$ , condition nécessaire à la composition des deux transformations concernées. Les paramètres fractionnaires correspondants sont  $\mu$ ,  $\alpha$  et  $\varepsilon$  tels que

$$\mu = \frac{d}{R_D}, \quad (7.9)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\mu R_D + R_A}{(\mu-1)R_D + R_A}, \quad \varepsilon R_D > 0, \quad (7.10)$$

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{1-\mu}{\mu}, \quad (7.11)$$

le domaine de  $\alpha$  étant  $[0, \pi[$  si  $d \geq 0$ , ou  $] -\pi, 0]$  si  $d \leq 0$ . Les variables et amplitudes réduites sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}$  sont

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_D}} \mathbf{s}, \quad (7.12)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_D}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathbf{r}, \quad (7.13)$$

$$V_D(\boldsymbol{\sigma}) = U_D(\sqrt{\lambda \varepsilon R_D} \boldsymbol{\sigma}), \quad (7.14)$$

$$V_A(\boldsymbol{\rho}) = U_A \left( \sqrt{\lambda \varepsilon R_D} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \right). \quad (7.15)$$

Le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  se traduit par

$$V_D(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{e^{-i\alpha}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_{-\alpha}[V_A](\boldsymbol{\sigma}). \quad (7.16)$$

La composition des opérateurs des relations (7.8) et (7.16) est possible si les variables réduites sur  $\mathcal{D}$  sont égales ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'$ ), ce qui implique

$$n'\varepsilon = n\varepsilon'. \quad (7.17)$$

Si tel est le cas, alors  $V_D' = V_D$  et

$$V_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = e^{i(\alpha' - \alpha)} \frac{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_{\alpha' - \alpha}[V_A](\boldsymbol{\rho}'). \quad (7.18)$$

Ainsi l'amplitude du champ réduite sur  $\mathcal{A}'$  s'exprime en fonction de l'amplitude réduite sur  $\mathcal{A}$  à l'aide d'une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\beta = \alpha' - \alpha$ .

La relation (7.18) est équivalente aux relations (4.40) et (4.42) du paragraphe 4.3 (ici  $\mathcal{A}'$  joue le rôle de  $\mathcal{B}'$ ).

### 7.1.2 Formules paraxiales

À quelles conditions  $\mathcal{A}'$  est-elle l'image cohérente de  $\mathcal{A}$ ? C'est le cas si  $\beta = 0$ , ou si  $\beta = \pm\pi$ , parce que la transformation  $\mathcal{F}_0$  est l'identité et que  $\mathcal{F}_\beta[f](\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{F}_{\beta-\pi}[f](\boldsymbol{-\rho})$  (l'image est inversée, ce qui est fréquent en optique).

Si  $\beta = 0$ , alors  $\alpha' = \alpha$ , et cela est possible si  $\alpha'$  et  $\alpha$  sont dans le même intervalle, c'est-à-dire si  $\mathcal{A}$  est un objet réel ( $d \leq 0$ ) et  $\mathcal{A}'$  une image virtuelle ( $d' < 0$ ); ou si  $\mathcal{A}$  est virtuel ( $d > 0$ ) et  $\mathcal{A}'$  réel ( $d' \geq 0$ ); ou encore si  $\alpha = \alpha' = 0$  ( $d = d' = 0$ ). Dans tous les cas  $\mu\mu' \geq 0$  (soit encore  $dd' \geq 0$ ).

D'autre part,  $\beta = \pi$  signifie  $\alpha' = \alpha + \pi$ , et  $\beta = -\pi$  signifie  $\alpha' = \alpha - \pi$ . Cela a lieu si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont tous les deux réels ou tous les deux virtuels, c'est-à-dire si  $\mu\mu' \leq 0$  (ou  $dd' \leq 0$ ).

Quand  $\beta = 0$  ou quand  $\beta = \pm\pi$ , on a  $\cot \alpha' = \cot \alpha$ , ce qui donne, grâce à la relation (7.17),

$$n' \frac{1 - \mu'}{\mu'} = n \frac{1 - \mu}{\mu}, \quad (7.19)$$

et ensuite,

$$n' \left( \frac{1}{d'} - \frac{1}{R_D} \right) = n \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R_D} \right). \quad (7.20)$$

La relation (7.20) est la formule de conjugaison du dioptré sphérique; elle se met sous la forme classique (relation (4.4) p. 70)

$$\frac{n'}{d'} = \frac{n}{d} + \frac{n' - n}{R_D}. \quad (7.21)$$

Il reste à exprimer l'amplitude du champ sur l'image en fonction de celle sur l'objet. Si  $\beta = 0$ , la transformation  $\mathcal{F}_\beta$  devient l'opérateur identité et les variables réduites sur  $\mathcal{A}$  et sur  $\mathcal{A}'$  doivent être égales :  $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}$ . Il en résulte l'expression du grandissement transversal aux sommets  $g_s$  entre  $\mathcal{A}$  et son image  $\mathcal{A}'$ , défini par  $\boldsymbol{r}' = g_s \boldsymbol{r}$ , sous la forme

$$g_s = \frac{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'}. \quad (7.22)$$

(Pour établir la relation (7.22), on utilise les relations (7.5), (7.13), (7.17) et  $\sin \alpha' = \sin \alpha$ .) Il résulte des relations (7.3), (7.11) et (7.17)

$$g_s = \frac{\varepsilon + \cot \alpha}{\varepsilon' + \cot \alpha'} = \frac{\varepsilon \mu'}{\varepsilon' \mu} = \frac{n}{n'} \frac{d'}{d}, \quad (7.23)$$

si bien que le grandissement  $g_s$  est le grandissement (transversal) paraxial habituel, tel qu'il est donné par exemple par la relation (4.14) p. 74.

Si  $\beta = \pm\pi$ , comme l'application de  $\mathcal{F}_{\pm\pi}$  à une fonction change le signe de la variable dans cette fonction, nous obtenons une image si  $\boldsymbol{\rho}' = -\boldsymbol{\rho}$ ; d'où (avec  $\sin \alpha' = -\sin \alpha$ )

$$g_s = -\frac{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} = \frac{\varepsilon + \cot \alpha}{\varepsilon' + \cot \alpha'} = \frac{n}{n'} \frac{d'}{d}. \quad (7.24)$$

Dans les deux cas ( $\beta = 0$ , ou  $\beta = \pm\pi$ ), le grandissement transversal s'écrit

$$g_s = e^{i(\alpha - \alpha')} \frac{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'}. \quad (7.25)$$

De plus,  $g_s$  a le signe de  $\mu\mu'$  : il est positif si  $\beta = 0$ , et négatif si  $\beta = \pm\pi$ . Finalement, si  $\mathfrak{s}(g_s)$  est le signe de  $g_s$ , la relation (7.18) s'écrit

$$V_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{g_s} V_A(\mathfrak{s}(g_s)\boldsymbol{\rho}'), \quad (7.26)$$

La relation (7.26) est équivalente à la relation (4.21) p. 75.

### 7.1.3 Formules métaxiales

La relation (7.20) traduit la conjugaison du sommet de l'émetteur et du sommet de son image ; l'analyse est poursuivie selon la même méthode pour montrer que les centres de courbure sont aussi conjugués l'un de l'autre et pour retrouver ainsi le résultat établi au chapitre 4 à propos de l'imagerie cohérente (double conjugaison).

Soient  $q = \overline{OC}$  et  $q' = \overline{OC'}$  ; de  $q = d + R_A$  et  $q' = d' + R_{A'}$ , il résulte

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\mu R_D + R_A}{(\mu - 1)R_D + R_A} = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{d + R_A}{d - R_D + R_A} \\ &= \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{q}{q - R_D}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

De la même manière

$$\varepsilon'^2 = \frac{\mu'}{1 - \mu'} \frac{q'}{q' - R_D}. \quad (7.28)$$

Les relations (7.17) et (7.19) donnent

$$\frac{n'^2}{n^2} = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} = \frac{n'}{n} \frac{q'}{q' - R_D} \frac{q - R_D}{q}, \quad (7.29)$$

dont on déduit

$$n' \left( \frac{1}{R_D} - \frac{1}{q'} \right) = n \left( \frac{1}{R_D} - \frac{1}{q} \right), \quad (7.30)$$

qui signifie que  $C$  et  $C'$  sont conjugués.

Il résulte des relations (7.20) et (7.30)

$$n' \left( \frac{1}{d'} - \frac{1}{q'} \right) = n \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{q} \right), \quad (7.31)$$

et cette quantité est l'invariant métaxial du dioptré sphérique.

Pour compléter les formules, il reste à établir la loi du grandissement des rayons de Bonnet. Le grandissement transversal aux sommets est

$$g_s = \frac{n}{n'} \frac{d'}{d}. \quad (7.32)$$

Le grandissement transversal aux centres est

$$g_c = \frac{n}{n'} \frac{q'}{q}, \quad (7.33)$$

et comme  $R_A = q - d$  et  $R_{A'} = q' - d'$ , la relation (7.31) conduit à

$$n' \frac{R_{A'}}{d' q'} = n \frac{R_A}{d q}. \quad (7.34)$$

Le grandissement des rayons est

$$g_r = \frac{R_{A'}}{R_A} = \frac{n}{n'} \frac{d'}{d} \frac{q'}{q} = \frac{n'}{n} g_s g_c, \quad (7.35)$$

et cela constitue la loi de Bonnet (relations (4.29) p. 77 ou (4.33) p. 80).

#### 7.1.4 Conclusion

La méthode développée dans ce paragraphe est équivalente à celle du chapitre 4. Comme cette dernière, elle conduit à la condition de double conjugaison pour l'imagerie cohérente par un dioptré (conjugaison des sommets ; conjugaison des centres de courbure) et à la formule du grandissement des rayons. Elle donne également l'amplitude du champ sur l'image en fonction de celle sur l'objet. Elle est fondée sur une théorie scalaire de la diffraction, donc implicitement sur des intégrales du type des transformations de Fresnel. Cependant la méthode exposée s'applique et se développe sans qu'il ne soit besoin d'écrire explicitement ces intégrales : il suffit de manipuler les ordres des transformations de Fourier fractionnaires associées aux transformations intégrales de Fresnel ; ils ne dépendent – outre la longueur d'onde – que de la géométrie du problème étudié (rayons de courbure, distances entre les surfaces).

## 7.2 Fondements de la théorie des résonateurs optiques

Un résonateur optique se compose de deux miroirs sphériques (ou plans) qui se font face<sup>1</sup>, et il est clair que la théorie métaxiale est tout à fait adaptée, *a priori*, à leur étude, puisqu'elle traite d'émetteurs et de récepteurs sphériques. Ce paragraphe décrit ces résonateurs et établit leurs principales propriétés à l'aide de la transformation de Fourier fractionnaire.

<sup>1</sup> Un tel résonateur est dit ouvert : les parois latérales ne sont pas réfléchissantes. Il existe aussi des résonateurs en anneau [6, 216].

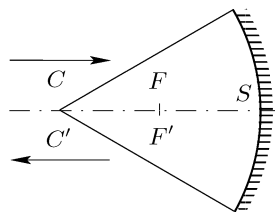
L'importance des résonateurs optiques vient en grande partie de celles des lasers<sup>2</sup>. Un laser associe deux effets : une amplification du rayonnement par émission stimulée<sup>3</sup> et une résonance. C'est essentiellement le résonateur (ou cavité) optique qui détermine les propriétés géométriques du rayonnement laser (même si la prise en compte de l'amplification apporte des corrections aux résultats obtenus pour une cavité passive [81]).

La théorie développée dans ce paragraphe, consacrée à l'étude des modes transversaux des résonateurs, ne tient pas compte de la limitation des dimensions transversales des miroirs. Cette approximation est justifiée pour un grand nombre de lasers [112, 126].

### 7.2.1 Convention pour les miroirs

Dans tout ce qui précède, le sens de propagation de la lumière déterminait le sens positif des mesures algébriques. Or pour un miroir, le sens de propagation change lors de la réflexion, d'où les conventions suivantes. La première consiste à maintenir le sens de propagation de la lumière comme donnant le sens positif des mesures algébriques, ce qui signifie que ce sens positif n'est pas le même avant et après réflexion. On sait par exemple que le foyer d'un miroir sphérique (le foyer objet comme le foyer image) est à mi-distance du centre de courbure  $C$  et du sommet du miroir  $S$  (fig. 7.2). Bien que les foyers  $F$  et  $F'$  se confondent dans l'espace (géométrique), ils appartiennent pourtant à des espaces optiques différents, ce qui conduit aux définitions suivantes. La distance focale objet est  $f = \overline{SF}$ , et son signe se détermine par référence au sens de propagation de la lumière avant réflexion. Ainsi  $f$  est négative pour un miroir concave (qui se comporte comme une lentille convergente), et positive pour un miroir convexe. La distance focale image est  $f' = \overline{SF'}$  et son signe se définit par référence au sens de propagation de la lumière après réflexion. Il en résulte  $f' = -f$ .

On définit de même un centre de courbure objet  $C$  tel que  $\overline{SC} = 2\overline{SF}$ , et un centre de courbure image  $C'$  tel que  $\overline{SC'} = 2\overline{SF'}$ . Le rayon de courbure objet est  $R = \overline{SC}$ ; il se rapporte à la direction de propagation de la lumière avant



**FIG. 7.2.** Pour un miroir, le foyer objet  $F$  est situé dans l'espace objet et il se rapporte, optiquement, à la direction de propagation de la lumière avant la réflexion. Le foyer image  $F'$  se rapporte à la direction de propagation après la réflexion. On introduit un centre de courbure objet  $C$  et un centre de courbure image  $C'$ ; ces points sont confondus géométriquement, mais pas optiquement.

<sup>2</sup> Il ne s'agit pas d'oublier l'interféromètre de Fabry-Perot, utilisé en spectroscopie : les résonateurs optiques des lasers sont des interféromètres de Fabry-Perot ! Toutefois en spectroscopie, l'intérêt est mis davantage sur les modes longitudinaux de l'instrument que sur les modes transversaux qui sont étudiés dans ce paragraphe.

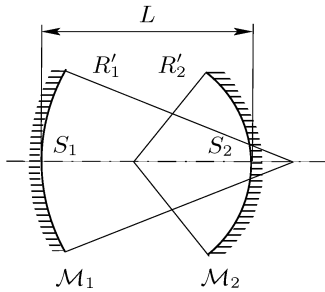
<sup>3</sup> D'où l'acronyme *L.A.S.E.R.* pour *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*.

réflexion. Le rayon de courbure image est  $R' = \overline{SC'}$  et se rapporte au sens de propagation après réflexion ; par conséquent  $R' = -R$ .

L'intérêt de procéder ainsi est d'abord que les formules de conjugaison des lentilles simples restent valables pour les miroirs sphériques<sup>4</sup> ; ensuite que les résultats établis pour la diffraction d'un émetteur vers un récepteur s'appliquent aux miroirs, sans modifications. Avant la réflexion le miroir se comporte comme un récepteur dont le rayon de courbure est  $R$ , alors qu'après la réflexion, il se comporte comme un émetteur de rayon  $R'$ .

### 7.2.2 Longueur d'un résonateur

Soit un résonateur optique composé de deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , de sommets  $S_1$  et  $S_2$  (fig. 7.3). Pour le transfert du champ de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$ , la distance à prendre en compte pour la diffraction est  $D = \overline{S_1 S_2}$ . Comme la lumière se propage de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$ , la distance  $D$  est positive ; il est toutefois profitable d'envisager qu'elle puisse être négative (rappelons qu'il serait plus correct de parler de mesure algébrique) : cela correspond à un résonateur virtuel.



**FIG. 7.3.** Résonateur optique composé de deux miroirs sphériques. La longueur du résonateur est la distance entre les sommets des miroirs ; elle est la même pour les deux sens de parcours.

Pour le transfert du champ de  $\mathcal{M}_2$  à  $\mathcal{M}_1$ , la distance de diffraction à prendre en compte est  $D' = \overline{S_2 S_1}$ . Comme le sens de propagation de la lumière est l'opposé du précédent, on a  $D' = D$ . Il résulte des conventions choisies la définition suivante.

**Définition 7.2.1 (Longueur du résonateur).** *La longueur du résonateur, notée  $L$ , est égale à la distance de diffraction d'un miroir à l'autre. Elle est la même pour les deux sens de parcours du résonateur.*

Puisque  $L = D = D'$ , il arrive que la longueur de résonateur soit négative ! De fait, c'est une mesure algébrique. Cela présente de l'intérêt pour les résonateurs virtuels.

<sup>4</sup> Par exemple, la formule de Newton  $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$  s'applique ainsi à la conjugaison de  $A$  et  $A'$ , avec les conventions énoncées dans ce paragraphe.

### 7.2.3 Transfert du champ d'un miroir à l'autre

Soit de nouveau un résonateur optique composé de deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Soient  $U_1(\mathbf{r}_1)$  l'amplitude du champ sur  $\mathcal{M}_1$  et  $U_2(\mathbf{r}_2)$  l'amplitude sur  $\mathcal{M}_2$ . Examinons le transfert du champ de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  et les conditions de son expression par une transformation de Fourier fractionnaire. La lumière se propage de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  : le rayon de courbure de  $\mathcal{M}_1$  à prendre en compte est le rayon image  $R'_1$ , car pour le transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  la lumière s'éloigne de  $\mathcal{M}_1$ . En revanche, pour  $\mathcal{M}_2$ , c'est le rayon objet  $R_2$  qui compte. Par conséquent, le transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$ , exprimé sous forme directe, s'effectue à l'aide des paramètres  $\mu$ ,  $\varepsilon$  et  $\alpha$  tels que

$$\mu = \frac{L}{R'_1}, \quad (7.36)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\mu R'_1 + R_2}{(\mu - 1)R'_1 + R_2}, \quad \varepsilon R'_1 > 0, \quad (7.37)$$

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{1 - \mu}{\mu}, \quad \alpha L \geq 0. \quad (7.38)$$

Les variables réduites sont

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R'_1}} \mathbf{r}_1, \quad (7.39)$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon R'_1}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathbf{r}_2, \quad (7.40)$$

et avec les amplitudes réduites habituelles (voir le chapitre 6), le transfert, s'il est d'ordre réel, se met sous la forme

$$V_2(\boldsymbol{\rho}_2) = e^{i\alpha} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \mathcal{F}_\alpha[V_1](\boldsymbol{\rho}_2). \quad (7.41)$$

Pour le transfert (direct) du champ de  $\mathcal{M}_2$  à  $\mathcal{M}_1$ , les rayons de courbure utilisés sont  $R'_2$  et  $R_1$ , et les paramètres fractionnaires sont

$$\mu' = \frac{L}{R'_2}, \quad (7.42)$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{\mu'}{1 - \mu'} \frac{\mu' R'_2 + R_1}{(\mu' - 1)R'_2 + R_1}, \quad \varepsilon' R'_2 > 0, \quad (7.43)$$

$$\cot \alpha' = \varepsilon' \frac{1 - \mu'}{\mu'}, \quad \alpha' L \geq 0. \quad (7.44)$$

Les variables réduites prennent la forme

$$\boldsymbol{\rho}'_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon' R'_2}} \mathbf{r}_2, \quad (7.45)$$

$$\boldsymbol{\rho}'_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon' R'_2}} (\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha') \mathbf{r}_1, \quad (7.46)$$

et le transfert se traduit par

$$V'_1(\boldsymbol{\rho}'_1) = e^{i\alpha'} (\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha') \mathcal{F}_{\alpha'}[V'_2](\boldsymbol{\rho}'_1). \quad (7.47)$$

**Remarque 7.2.1.** Il est parfois utile d'utiliser la relation (7.37) sous la forme (voir la relation (6.21) p. 164)

$$\varepsilon^2 = \frac{L(L + R_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_1 + R_2)} = \frac{L(L - R'_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_1 - R'_2)}. \quad (7.48)$$

◇

Il s'agit maintenant de composer les deux transformations  $\mathcal{F}_\alpha$  et  $\mathcal{F}_{\alpha'}$  pour exprimer un trajet aller et retour de la lumière à partir de  $\mathcal{M}_1$ . Nous procédons en plusieurs étapes.

**Lemme 7.2.1.** *Les paramètres  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont réels en même temps.*

*Preuve.* On écrit

$$\varepsilon^2 = \frac{L(L + R_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_1 + R_2)} = K, \quad (7.49)$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{L(L + R_1)}{(R'_2 - L)(L - R'_2 + R_1)} = K', \quad (7.50)$$

et, de  $R'_1 = -R_1$  et  $R'_2 = -R_2$ , il résulte que  $KK' > 0$ , ce qui signifie que  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont réels en même temps. Cela vaut également pour  $\alpha$  et  $\alpha'$  et provient de leur définition à partir de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ . □

**Lemme 7.2.2.** *Si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont réels, alors  $\alpha' = \alpha$ .*

*Preuve*<sup>5</sup>. En remplaçant  $R'_1$  par  $-R_1$ , et  $R_2$  par  $R'_2$  dans l'expression de  $\cot^2 \alpha$ , on obtient

$$\cot^2 \alpha = \frac{(R'_1 - L)(R_2 + L)}{L(L - R'_1 + R_2)} = \frac{(R_1 + L)(R'_2 - L)}{L(L + R_1 - R'_2)} = \cot^2 \alpha'. \quad (7.51)$$

Le signe de  $\cot \alpha$  est celui de  $R'_1 L(R'_1 - L)$ , et le signe de  $\cot \alpha'$  est le signe de  $R'_2 L(R'_2 - L)$  (voir la remarque 6.1.7 p. 164). Si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont réels, la relation (7.51) montre que

$$\frac{L(L - R'_1 - R'_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_2)} \geq 0, \quad (7.52)$$

c'est-à-dire, en remarquant que  $L(L - R'_1 - R'_2) = (R'_1 - L)(R'_2 - L) - R'_1 R'_2$ ,

<sup>5</sup> La preuve est la même que la deuxième partie de la preuve de la proposition 6.2.1 p. 168.

$$\frac{R'_1 R'_2}{(R'_1 - L)(R'_2 - L)} \geq 1. \quad (7.53)$$

Il en résulte, pour  $\alpha$  et  $\alpha'$  réels,

$$\frac{R'_1 R'_2 L^2}{(R'_1 - L)(R'_2 - L)} \geq 0, \quad (7.54)$$

et nécessairement  $R'_1 L(R'_1 - L)$  et  $R'_2 L(R'_2 - L)$  ont le même signe, ce qui signifie que  $\cot \alpha$  et  $\cot \alpha'$  ont le même signe. Finalement  $\cot \alpha = \cot \alpha'$ .

Pour  $\alpha$  et  $\alpha'$  réels, nous avons  $\alpha L \geq 0$  et  $\alpha' L \geq 0$ , de telle sorte que  $\alpha$  et  $\alpha'$  ont le même signe. Comme de plus  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont dans  $] -\pi, \pi[$ , la relation  $\cot \alpha = \cot \alpha'$  implique  $\alpha' = \alpha$ .  $\square$

**Remarque 7.2.2.** Les lemmes 7.2.1 et 7.2.2 peuvent se déduire de la proposition 6.2.1 en remplaçant  $\alpha'$  par  $-\alpha'$ .

**Lemme 7.2.3.** Avec les définitions et les notations antérieures, nous avons

$$(\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha')(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) = 1. \quad (7.55)$$

*Preuve.* On écrit (voir la relation (6.32) p. 166)

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \varepsilon^2(1 - \mu)^2} = \frac{\mu R'_1 + R_2}{(1 - \mu)R_2} \\ &= \frac{(L + R_2)R'_1}{(R'_1 - L)R_2}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

et de même

$$(\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha')^2 = \frac{(L + R_1)R'_2}{(R'_2 - L)R_1}. \quad (7.57)$$

De  $R'_1 = -R_1$  et  $R'_2 = -R_2$ , on déduit

$$(\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha')^2 (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2 = 1. \quad (7.58)$$

La relation (6.10) p. 161 donne  $\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha > 0$ , et comme il s'agit d'une relation générale, elle donne aussi  $\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha' > 0$ . Le résultat cherché s'en déduit.  $\square$

**Lemme 7.2.4.** Les variables réduites sur les miroirs sont telles que  $\rho'_1 = \rho_1$  et  $\rho'_2 = \rho_2$ .

*Preuve.* Mentionnons d'abord la relation

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} = \frac{(L + R_2)^2}{(L + R_1)^2}, \quad (7.59)$$

dont on déduit

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \pm \frac{L + R_2}{L + R_1}. \quad (7.60)$$

Pour les variables réduites sur  $\mathcal{M}_2$ , on écrit

$$\begin{aligned} \frac{(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2}{\lambda \varepsilon R'_1} &= \frac{(L + R_2)R'_1}{(R'_1 - L)R_2} \cdot \frac{1}{\lambda \varepsilon R'_1} = -\frac{L + R_2}{L + R_1} \cdot \frac{1}{\lambda \varepsilon R_2} \\ &= \mp \frac{1}{\lambda \varepsilon' R_2} = \pm \frac{1}{\lambda \varepsilon' R'_2}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Comme  $\varepsilon R'_1 > 0$  et  $\varepsilon' R'_2 > 0$ , seul le signe  $+$  est à prendre en considération dans le membre de droite de la relation (7.61). De  $\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha > 0$  et des relations (7.40) et (7.45) on déduit :  $\rho'_2 = \rho_2$ .

Pour les variables réduites sur  $\mathcal{M}_1$ , on écrit

$$\begin{aligned} \frac{(\cos \alpha' + \varepsilon \sin \alpha')^2}{\lambda \varepsilon' R'_2} &= \frac{(L + R_1)R'_2}{(R'_2 - L)R_1} \cdot \frac{1}{\lambda \varepsilon' R'_2} = -\frac{L + R_1}{L + R_2} \cdot \frac{1}{\lambda \varepsilon' R_1} \\ &= \mp \frac{1}{\lambda \varepsilon R_1} = \pm \frac{1}{\lambda \varepsilon R'_1}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Ici encore seul le signe  $+$  est à considérer. Le raisonnement est le même que précédemment du fait que  $\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha' > 0$ . On arrive à  $\rho'_1 = \rho_1$ .  $\square$

Le fait que les variables réduites sur  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont les mêmes pour les deux transferts rend possible la composition des deux transformations correspondantes, ce qui conduit à :

**Proposition 7.2.1.** *Soit un résonateur constitué de deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Soit  $\alpha$  l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire qui exprime le transfert direct du champ de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$ . Si  $\alpha$  est réel, le transfert du champ dans un aller et retour de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_1$  s'exprime par une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $2\alpha$ . Si  $V_1$  est l'amplitude réduite sur  $\mathcal{M}_1$ , alors*

$$V_1(\rho_1) = e^{2i\alpha} \mathcal{F}_{2\alpha}[V_1](\rho_1). \quad (7.63)$$

*Preuve.* Comme  $\rho'_1 = \rho_1$  et  $\rho'_2 = \rho_2$ , les amplitudes réduites sont telles que  $V'_1 = V_1$  et  $V_2 = V'_2$ . Le résultat est immédiat à partir des équations (7.41) et (7.47) et des lemmes 7.2.2 et 7.2.3.  $\square$

**Remarque 7.2.3.** La relation (7.63) vaut aussi pour un aller et retour à partir de  $\mathcal{M}_2$ , si bien que

$$V_2(\rho_2) = e^{2i\alpha} \mathcal{F}_{2\alpha}[V_2](\rho_2). \quad (7.64)$$

**Remarque 7.2.4.** On peut être surpris de constater que les ordres des transformations de Fourier fractionnaires associées aux transferts de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  et de  $\mathcal{M}_2$  à  $\mathcal{M}_1$  sont égaux : cela traduit une certaine symétrie entre ces deux transferts, bien que le résonateur ne soit pas lui-même symétrique (en général). Toutefois les variables réduites ne sont pas les mêmes sur les deux miroirs. La représentation du transfert du champ par diffraction sous la forme d'une transformation de Fourier fractionnaire adapte précisément les variables d'espace pour conduire à une identité formelle des deux transferts.  $\diamond$

La proposition 7.2.1 reste vraie si le transfert du champ d'un miroir à l'autre est d'ordre complexe. Nous admettrons ce résultat, démontré par ailleurs [191] et énonçons :

**Proposition 7.2.2.** *La relation (7.63) est vraie si  $\alpha$  est complexe (transfert d'ordre complexe).*

### 7.2.4 Modes transversaux

Nous commençons par adapter les notations. Soit  $\alpha_r$  l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire associée au transfert direct de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$ , que nous supposons d'ordre réel ( $\alpha_r$  est un nombre réel). Selon le lemme 7.2.2,  $\alpha_r$  est aussi l'ordre de la transformation associée au transfert de  $\mathcal{M}_2$  à  $\mathcal{M}_1$ , et la relation (7.63) montre que l'amplitude réduite sur le miroir  $\mathcal{M}_1$  est invariante dans une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $2\alpha_r$ . Au transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  correspond le paramètre  $\varepsilon_r$  tel que ( $\varepsilon_r$  est un nombre réel)

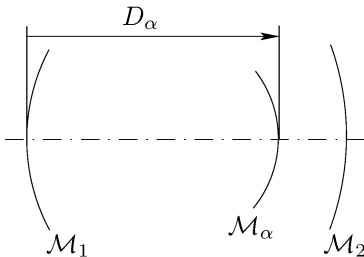
$$\varepsilon_r^2 = \frac{L(L - R'_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_1 - R'_2)}. \quad (7.65)$$

Nous construisons une famille de récepteurs  $\{\mathcal{M}_\alpha\}$  associés à une même valeur de  $\varepsilon$ , valeur que nous choisissons égale à  $\varepsilon_r$ . Soit un récepteur sphérique intermédiaire  $\mathcal{M}_\alpha$  situé à la distance  $D_\alpha$  de  $\mathcal{M}_1$  (fig. 7.4) et tel que le transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_\alpha$  se représente par une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . Nous choisissons le rayon de courbure  $R_\alpha$  de  $\mathcal{M}_\alpha$  de telle sorte que la valeur de  $\varepsilon$  soit égale à  $\varepsilon_r$ . Le rayon  $R_\alpha$  est donné par

$$R_\alpha = \frac{\mu^2 + \varepsilon_r^2(1 - \mu)^2}{-\mu + \varepsilon_r^2(1 - \mu)} R'_1, \quad (7.66)$$

où  $\mu = D_\alpha/R'_1$  (la relation (7.66) est la relation (6.18) p. 162 adaptée aux notations de ce paragraphe). Le transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_\alpha$  est d'ordre réel puisque  $\varepsilon_r$  est réel :  $\alpha$  est un nombre réel. Si  $\mathbf{r}'$  est la variable spatiale sur  $\mathcal{M}_\alpha$ , la variable réduite sur  $\mathcal{M}_\alpha$  est

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon_r R'_1}} (\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha) \mathbf{r}'. \quad (7.67)$$



**FIG. 7.4.** L'amplitude du champ sur le récepteur intermédiaire  $\mathcal{M}_\alpha$  est similaire à l'amplitude sur le miroir  $\mathcal{M}_1$  dans la mesure où cette amplitude se représente par une fonction propre d'une transformation de Fourier fractionnaire.

Imaginons que  $\mathcal{M}_\alpha$  soit un miroir sans que change le champ sur  $\mathcal{M}_\alpha$ . Par conséquent, le champ sur  $\mathcal{M}_1$  est le même pour le résonateur initial (formé des miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ ) que pour un résonateur admettant  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_\alpha$  comme miroirs. Dans ce dernier cas, l'amplitude réduite du champ sur  $\mathcal{M}_1$  est invariante dans une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $2\alpha$ . Ce résultat est valable pour toute valeur de  $\alpha$  comprise (au sens large) entre 0 et  $\alpha_r$ . Il s'étend à une calotte sphérique  $\mathcal{M}_\alpha$  qui n'est plus située entre  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , et cela a lieu quand  $\alpha$  n'appartient pas à  $[0, \alpha_r]$ .

Ce qui précède se synthétise dans la proposition suivante.

**Proposition 7.2.3.** *L'amplitude du champ sur un miroir d'un résonateur optique est une fonction propre de toute transformation de Fourier fractionnaire (c'est-à-dire quel que soit l'ordre de cette dernière).*

Les fonctions propres communes à toutes les transformations de Fourier fractionnaires sont les fonctions d'Hermite–Gauss. Il en résulte que l'amplitude réduite sur  $\mathcal{M}_1$  est, à un facteur dimensionnel près, une fonction d'Hermite–Gauss, de la forme

$$\varphi_{m,n}(x, y) = H_m(\sqrt{2\pi}x)H_n(\sqrt{2\pi}y) \exp[-\pi(x^2 + y^2)] , \quad (7.68)$$

où  $H_n$  est un polynôme d'Hermite. Rappelons la relation (voir l'appendice C)

$$\mathcal{F}_\alpha[\varphi_{m,n}] = \exp[i(m+n)\alpha]\varphi_{m,n} . \quad (7.69)$$

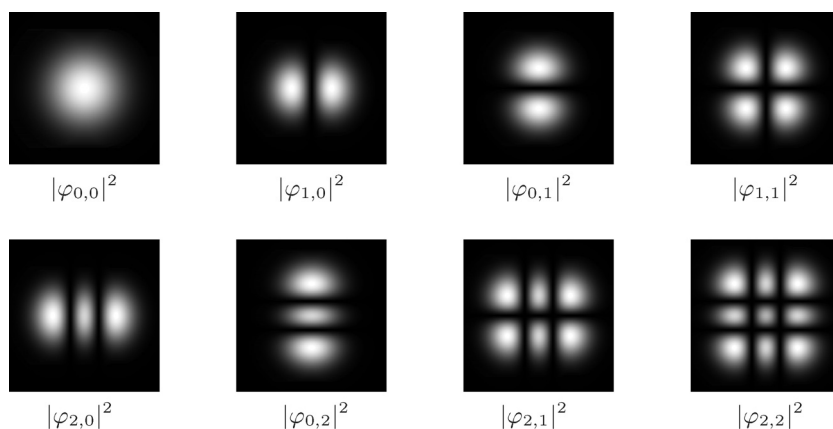
Si l'amplitude du champ réduite sur  $\mathcal{M}_1$  est une fonction d'Hermite–Gauss, puisque son transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_\alpha$  se traduit par une transformation de Fourier fractionnaire, l'amplitude réduite sur  $\mathcal{M}_\alpha$  est la même fonction d'Hermite–Gauss (à un facteur d'échelle près). Cela vaut également pour le champ sur  $\mathcal{M}_2$ . En conclusion, l'amplitude du champ est invariante tout au long de la propagation<sup>6</sup>, et cela conduit à la notion de mode de propagation transversal [31, 79, 80, 126]. On parle de mode  $(m, n)$  pour le mode dont l'amplitude réduite est représentée par la fonction  $\varphi_{m,n}$ .

Plus généralement, et en tenant compte de ce qui se passe dans un laser (pour lequel c'est le rayonnement extérieur à la cavité qui est intéressant en général) on étend ce qui précède à l'extérieur du résonateur. Nous en arrivons à considérer une famille de surfaces  $\mathcal{M}_\alpha$  correspondant à une même valeur  $\varepsilon_r$  de  $\varepsilon$ , le paramètre  $\alpha$  variant continûment. La distance  $D_\alpha$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  et le rayon de  $\mathcal{M}_\alpha$  est donné par la relation (7.66). (Ici apparaît l'intérêt d'envisager des distances  $D$  (ou  $L$ ) négatives – voir le paragraphe 7.2.2.)

Pour  $m = n = 0$ , on obtient comme fonction propre une fonction de Gauss et le mode associé est le mode fondamental.

La figure 7.5 donne l'intensité vibratoire de quelques modes transversaux d'un résonateur optique. On remarque que plus les indices  $m$  et  $n$  sont grands, plus le mode  $(m, n)$  s'étale sur une plus grande surface.

<sup>6</sup> Cela est vrai à une homothétie près sur la variable d'espace puisque justement les variables réduites ne sont pas les mêmes sur chaque sphère  $\mathcal{M}_\alpha$ .



**FIG. 7.5.** Exemples de modes transversaux d'un résonateur optique; il s'agit des modes d'Hermite–Gauss. On a représenté l'éclairement de chaque mode, c'est-à-dire  $|\varphi_{m,n}(x,y)|^2$  (l'axe  $x$  est horizontal et l'axe  $y$  vertical). Dans la littérature, ces modes sont aussi désignés sous la forme  $\text{TEM}_{m,n}$ , c'est-à-dire comme des modes transverses électromagnétiques, puisque les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  de ces modes sont effectivement transversaux, dans l'approximation scalaire.

**Remarque 7.2.5.** Les modes représentés sur la figure 7.5 sont les modes d'Hermite–Gauss du résonateur, puisque représentés par des fonctions du même nom. Ces modes apparaissent « naturellement » dans la théorie développée ici dans un système de coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ ; leur amplitude est représentée par une fonction  $\varphi_{m,n}(x,y)$ . On développe une analyse comparable en choisissant des coordonnées polaires et, tout aussi naturellement, apparaissent des modes de Laguerre–Gauss<sup>7</sup>, qui présentent une symétrie de révolution. Mathématiquement, les fonctions de Laguerre–Gauss forment une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré sommable et on passe linéairement de ces fonctions à celles d'Hermite–Gauss.

En pratique, un résonateur est limité par une pupille. Si celle-ci est circulaire, on met en évidence, expérimentalement, les modes de Laguerre–Gauss; si la pupille est carrée, les modes d'Hermite–Gauss (c'est une approximation: plus précisément, les modes sont représentés par des fonctions sphéroïdales [112]). Dans le cas d'un laser, comme le remarque Siegman [216], de faibles perturbations de la géométrie du résonateur, comme par exemple l'introduction d'une fenêtre de Brewster, privilégient toutefois les modes d'Hermite–Gauss.

### 7.2.5 Modes longitudinaux

Conformément à la règle 1 p. 48, un facteur de phase a été omis dans l'expression de la diffraction–propagation d'un miroir à l'autre. Puisque dans

<sup>7</sup> Étudier le résonateur en coordonnées polaires à l'aide de la transformation de Fourier fractionnaire est une question ouverte à ce jour.

un aller et retour la lumière parcourt la distance  $L$ , la relation (7.63) s'écrit de fait

$$V_1(\rho_1) = e^{-4i\pi L/\lambda} e^{2i\alpha_r} \mathcal{F}_{2\alpha} [V_1](\rho_1), \quad (7.70)$$

où  $\alpha_r$  est l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire qui exprime le transfert du champ d'un miroir à l'autre. Si  $V_{m,n}$  est l'amplitude réduite du mode  $(m, n)$  (ce qui suppose  $\alpha_r$  réel) alors

$$V_{m,n}(\rho_1) = e^{-4i\pi L/\lambda} e^{2i\alpha_r} e^{2i(m+n)\alpha_r} V_{m,n}(\rho_1), \quad (7.71)$$

ce qui impose

$$\frac{2\pi L}{\lambda} - \alpha_r(1 + m + n) = q\pi, \quad (7.72)$$

où  $q$  est un nombre entier. Seules des ondes à certaines longueurs d'ondes résonnent dans la cavité optique. On parle de mode longitudinal.

### 7.2.6 Stabilité d'un résonateur

Soit un résonateur composé des miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Le transfert du champ de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_1$ , après une réflexion sur  $\mathcal{M}_2$ , s'exprime par une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $2\alpha_r$ , comme dans la relation (7.63). Si  $\alpha_r$  est complexe, il y a une atténuation à chaque aller et retour qui est due à des pertes par diffraction. Le résonateur est dit instable.

**Proposition 7.2.4 (Stabilité d'un résonateur).** *Un résonateur est stable si, et seulement si, les amplitudes réduites sur les miroirs se correspondent dans une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre réel.*

Une condition classique de stabilité d'un résonateur s'énonce comme suit [110, 215].

**Proposition 7.2.5 (Corollaire de la proposition 7.2.4).** *Un résonateur est stable si, et seulement si, sa longueur  $L$  et les rayons images  $R'_1$  et  $R'_2$  des miroirs sont tels que*

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R'_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R'_2}\right) \leq 1. \quad (7.73)$$

*Preuve.* Pour le transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$ , l'ordre est  $\alpha_r$  tel que

$$\cot^2 \alpha_r = \frac{(R'_1 - L)(L + R_2)}{L(L - R'_1 + R_2)}. \quad (7.74)$$

Pour maintenir une certaine symétrie entre les deux miroirs, nous utilisons le rayon image  $R'_2$  de  $\mathcal{M}_2$  et écrivons

$$\cot^2 \alpha_r = \frac{(R'_1 - L)(L - R'_2)}{L(L - R'_1 - R'_2)}. \quad (7.75)$$

Le paramètre  $\alpha_r$  est réel ou complexe selon le signe du membre de droite de la relation (7.75).

Comme  $L(L - R'_1 - R'_2) = -(R'_1 - L)(L - R'_2) - R'_1 R'_2$ , on déduit de la relation (7.75) que  $\alpha_r$  est réel si, et seulement si,

$$\frac{R'_1 R'_2}{(R'_1 - L)(R'_2 - L)} \geq 1. \quad (7.76)$$

Cette relation est équivalente à (7.73). □

**Remarque 7.2.6.** Le choix du mot « stabilité » vient des premiers temps des lasers et n'est pas très judicieux, car il introduit des confusions dans la compréhension du fonctionnement d'un laser [6, 216, 217]. On pensait (années 60) qu'un résonateur instable ne permettait pas le bon fonctionnement d'un laser. Il n'en est rien, et d'ailleurs de nombreux lasers ont une cavité instable, ou en limite de stabilité<sup>8</sup> : cavité confocale symétrique, résonateur à deux miroirs plans.

L'instabilité d'un résonateur traduit d'importantes pertes par diffraction. Ces dernières peuvent toutefois être compensées par l'amplification. Dans un résonateur stable, il y a un effet de focalisation des faisceaux, qui limite les pertes par diffraction : plusieurs modes sont voisins (spatialement) et cela est néfaste pour le fonctionnement monomode du laser ; il y a compétition entre les modes pour bénéficier de l'amplification. Au contraire, dans un résonateur instable, il y a une meilleure séparation spatiale des modes et cela favorise le fonctionnement monomode du laser [6, 216, 217]. Plutôt que de résonateur stable on parle parfois de résonateur à modes confinés, ce qui traduit mieux la réalité physique.

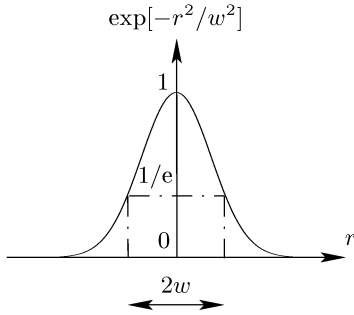
### 7.2.7 Col d'un résonateur

Soit encore le résonateur de la figure 7.3. L'amplitude du champ réduite sur  $\mathcal{M}_2$  est la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha_r$  de l'amplitude réduite sur  $\mathcal{M}_1$ . Le résonateur est supposé stable, c'est-à-dire que l'ordre  $\alpha_r$  est réel, et l'étude qui suit porte sur le mode fondamental. La représentation de l'amplitude de ce mode sur  $\mathcal{M}_\alpha$ , une surface de la famille construite au paragraphe 7.2.4, est donnée par la fonction

$$\exp[-\pi \rho^2] = \exp \left[ -\frac{\pi}{\lambda \varepsilon_r R'_1} (\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha)^2 r'^2 \right], \quad (7.77)$$

et l'introduction du paramètre

<sup>8</sup> Par limite de stabilité nous voulons dire qu'ils satisfont une des deux égalités de la relation (7.73).



**FIG. 7.6.** Définition du rayon transversal du mode fondamental.

$$w = \sqrt{\frac{\lambda \varepsilon_r R'_1}{\pi}} \frac{1}{\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha}, \quad (7.78)$$

permet d'écrire la relation (7.77) sous la forme

$$\exp[-\pi \rho^2] = \exp\left[-\frac{r'^2}{w^2}\right]. \quad (7.79)$$

(Selon la relation (6.10) :  $\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha > 0$ , si bien que  $w > 0$ .)

Le paramètre  $w$  est le rayon transversal<sup>9</sup> du mode fondamental sur  $\mathcal{M}_\alpha$ . La majeure partie de l'énergie portée par le champ se concentre sur un disque lumineux de rayon  $w$ . En tout point de ce disque l'amplitude  $\exp[-r'^2/w^2]$  est supérieure ou égale  $1/e$ .

Existe-t-il une valeur extrême de  $w$ ? La proposition suivante répond à cette question.

**Proposition 7.2.6.** *Le rayon transversal  $w$  admet un minimum, noté  $w_0$ , qui correspond à  $\tan \alpha = \varepsilon_r$ .*

*Preuve.* i – De

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha) = -\sin \alpha + \varepsilon_r \cos \alpha, \quad (7.80)$$

résulte que  $\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha$  a un extremum (en fonction de  $\alpha$ ) pour  $\tan \alpha = \varepsilon_r$  et par conséquent  $w$  aussi.

ii – Soit  $\alpha_0$  tel que  $\tan \alpha_0 = \varepsilon_r$ .

Si  $\varepsilon_r > 0$ , alors  $\alpha_0 \in ]0, \pi/2]$  ou  $\alpha \in ]-\pi, -\pi/2]$ . La deuxième possibilité conduit à  $\cos \alpha_0 + \varepsilon_r \sin \alpha_0 < 0$ , ce qui n'est pas compatible avec la relation (6.10). Seule la première possibilité est acceptable. De plus

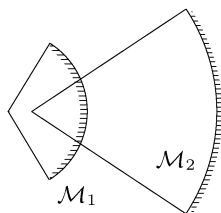
$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha) \right]_{\alpha_0} = -(1 + \varepsilon_r^2) \cos \alpha_0, \quad (7.81)$$

<sup>9</sup> À ne pas confondre avec le rayon de courbure de la sphère équiphase qui porte le champ.

et comme  $0 < \alpha_0 \leq \pi/2$ , nécessairement  $\cos \alpha_0 \geq 0$ , si bien que l'extremum de  $\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha$  est un maximum. Cela correspond à un minimum de  $w$ .

Si  $\varepsilon_r < 0$ , alors  $\alpha_0 \in [-\pi/2, 0[$ , ou  $\alpha \in [\pi/2, \pi[$ . La deuxième possibilité conduit à  $\cos \alpha_0 + \varepsilon_r \sin \alpha_0 < 0$ ; c'est incompatible avec la relation (6.10). On en déduit, ici encore, que nécessairement  $\cos \alpha_0 \geq 0$ , et l'extremum de  $\cos \alpha + \varepsilon_r \sin \alpha$  est un maximum; le paramètre  $w$  admet un minimum en  $\alpha = \alpha_0$ .  $\square$

**Remarque 7.2.7.** Le transfert de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  pour le résonateur de la figure 7.7 s'effectue avec  $\varepsilon_r < 0$ . La valeur  $\alpha_0$  qui intervient dans la preuve de la proposition 7.2.6 est négative. Cela signifie que le minimum de  $w$  se rencontre en dehors du résonateur (voir les propositions 7.2.8 et 14.1.3).



**FIG. 7.7.** Résonateur pour lequel le transfert du champ de  $\mathcal{M}_1$  à  $\mathcal{M}_2$  correspond à  $\varepsilon_r < 0$ .  $\diamond$

Une conséquence de la proposition 7.2.6 est qu'il existe une sphère de la famille  $\{\mathcal{M}_\alpha\}$  sur laquelle le disque de concentration de l'énergie du mode fondamental admet une aire minimale. De fait, cette sphère est un plan, conformément à la proposition suivante.

**Proposition 7.2.7.** *Le paramètre  $w$  atteint son minimum  $w_0$  sur un plan (noté  $\mathcal{W}_0$ ).*

*Preuve.* Le minimum de  $w$  est obtenu pour  $\alpha_0$  tel que  $\tan \alpha_0 = \varepsilon_r$ , et il lui correspond la valeur  $\mu_0$  de  $\mu$ . La relation (6.5) conduit à

$$\cot \alpha_0 = \varepsilon_r \frac{1 - \mu_0}{\mu_0}. \quad (7.82)$$

On en déduit

$$\varepsilon_r^2 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}, \quad (7.83)$$

ce qui signifie que la surface  $\mathcal{W}_0$  est un plan : c'est une conséquence de la remarque 6.1.2 p. 163.  $\square$

**Définition 7.2.2 (Col d'un résonateur).** *Si  $w_0$  est le minimum de  $w$ , le disque de diamètre  $2w_0$  du plan  $\mathcal{W}_0$  correspondant s'appelle le col (waist) du résonateur.*

**Proposition 7.2.8 (Position du col).** *Soit un résonateur de longueur  $L$ , composé de deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , de rayons images respectifs  $R'_1$  et  $R'_2$ . Le col du résonateur se trouve sur le plan  $\mathcal{W}_0$ , à la distance  $L_0$  de  $\mathcal{M}_1$  telle que*

$$L_0 = \frac{L(L - R'_2)}{2L - R'_1 - R'_2}. \quad (7.84)$$

*Preuve.* Au col correspondent le paramètre  $\mu_0$  et la distance  $L_0$  (comptée à partir de  $\mathcal{M}_1$ ) avec  $\mu_0 = L_0/R'_1$ . Pour le col, la valeur de  $\alpha$  est  $\alpha_0$  telle que  $\tan \alpha_0 = \varepsilon_r$ , si bien que

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = \cot \alpha_0 = \varepsilon_r \frac{1 - \mu_0}{\mu_0}, \quad (7.85)$$

et ensuite,

$$\frac{1}{\mu_0} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_r^2}. \quad (7.86)$$

On calcule, compte tenu de la valeur de  $\varepsilon_r$ ,

$$\frac{R'_1}{L_0} = \frac{1}{\mu_0} = 1 + \frac{(R'_1 - L)(L - R'_1 - R'_2)}{L(L - R'_2)} = \frac{-R'_1 R'_2 - R_1'^2 + 2LR'_1}{L(L - R'_2)}, \quad (7.87)$$

et finalement

$$L_0 = \frac{L(L - R'_2)}{2L - R'_1 - R'_2}. \quad (7.88)$$

□

**Proposition 7.2.9 (Dimension du col).** *Pour le résonateur de la proposition 7.2.8, le rayon transversal du col s'exprime sous la forme*

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{|L(R'_1 - L)(L - R'_2)(L - R'_1 - R'_2)|^{1/4}}{|2L - R'_1 - R'_2|^{1/2}}. \quad (7.89)$$

*Preuve.* Le col  $w_0$  est le minimum de  $w$  et il s'obtient pour  $\tan \alpha_0 = \varepsilon_r$ . La relation (7.78) donne

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda \tan \alpha_0 R'_1}{\pi}} \cos \alpha_0. \quad (7.90)$$

(Dans la preuve de la proposition 7.2.6, nous avons montré  $\cos \alpha_0 \geq 0$ .)

La relation (7.83) donne

$$\tan^2 \alpha_0 = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}, \quad (7.91)$$

puis  $\cos \alpha_0 = \sqrt{|1 - \mu_0|}$ . Pour  $L_0$ , défini comme dans la proposition 7.2.8, la relation (7.90) s'écrit

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda R'_1}{\pi}} |\mu_0(1 - \mu_0)|^{1/4} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} |L_0(R'_1 - L_0)|^{1/4}. \quad (7.92)$$

Les relations (7.84) et (7.92) conduisent à la relation (7.89). □

**Remarque 7.2.8.** Si le résonateur est symétrique, on a  $R'_1 = R'_2$  et  $L_0 = L/2$ . Alors  $\mathcal{W}_0$  est le plan de symétrie du résonateur. La relation (7.89) devient

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left| \frac{L}{2} \left( R'_1 - \frac{L}{2} \right) \right|^{1/4}. \quad (7.93)$$

◇

**Proposition 7.2.10 (Rayons transversaux sur les miroirs).** *Pour le résonateur de la proposition 7.2.8, les rayons transversaux du mode fondamental sur  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont respectivement  $w_1$  et  $w_2$  tels que*

$$w_1^4 = \frac{\lambda^2 R_1'^2 L(L - R'_2)}{\pi^2 (R'_1 - L)(L - R'_1 - R'_2)}, \quad (7.94)$$

$$w_2^4 = \frac{\lambda^2 R_2'^2 L(L - R'_1)}{\pi^2 (R'_2 - L)(L - R'_1 - R'_2)}. \quad (7.95)$$

*Preuve.* La valeur de  $w_1$  se déduit des relations (7.65) et (7.78) en faisant  $\alpha = 0$  (puisque le miroir  $\mathcal{M}_1$  sert d'origine pour  $\alpha$ ). La valeur de  $w_2$  s'obtient pour  $\alpha = \alpha_r$  (car  $\mathcal{M}_2$  est la surface d'onde pour cette valeur de  $\alpha$ ) avec

$$(\cos \alpha_r + \varepsilon_r \sin \alpha_r)^2 = \frac{(L - R'_2)R'_1}{(L - R'_1)R'_2}. \quad (7.96)$$

(La relation (7.96) se déduit de la relation (6.32) en adaptant les notations.) La relation (7.95) se déduit des relations (7.65), (7.78) et (7.96). □

**Remarque 7.2.9.** Les relations (7.94) et (7.95) constituent de fait une seule et unique relation puisque les deux miroirs ont un rôle équivalent. On passe bien de l'une à l'autre en échangeant  $R'_1$  et  $R'_2$ .

**Remarque 7.2.10.** Pour un résonateur symétrique les rayons de courbure des miroirs sont tels que  $R'_1 = R'_2$ , et par conséquent

$$w_1^4 = w_2^4 = \frac{\lambda^2 R_1'^2 L}{\pi^2 (2R'_1 - L)}. \quad (7.97)$$

## 7.3 Faisceaux gaussiens

### 7.3.1 Notion de faisceau gaussien

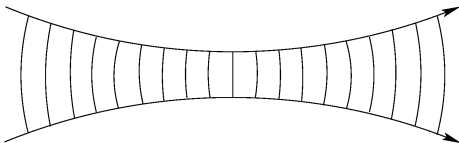
Les ondes qui résonnent dans un résonateur optique stable ont une répartition spatiale (transversale) de type gaussien (voir le paragraphe 7.2) ; elles constituent une bonne approximation des ondes émises par les lasers (si les effets dus aux dimensions transversales limitées des miroirs sont négligeables).

De là le terme de « faisceau gaussien » employé pour qualifier le rayonnement émis par de telles sources.

Des ondes à amplitude gaussienne se rencontrent toutefois dans d'autres circonstances, par exemple quand on traite des lentilles à gradient d'indice (lentille GRIN<sup>10</sup> [247, 249]), ou encore des fibres optiques (approximation du mode fondamental par une amplitude gaussienne [41, 220]). Un objectif transforme un faisceau gaussien en un autre faisceau gaussien qui n'est plus « directement » relié à sa source (nous voulons dire qu'il n'est pas dans le même espace optique que la source). C'est pour cela qu'il est intéressant de considérer un faisceau gaussien par lui-même, indépendamment de la façon dont il a été engendré.

Conformément à ce qui est expliqué au paragraphe 7.2.4, un faisceau gaussien est caractérisé par une famille de calottes sphériques<sup>11</sup> non concentriques, sur lesquelles l'amplitude du champ est représentée, à des termes de phase près (précisés par la suite), par une fonction de Gauss (si on s'en tient à l'onde fondamentale) ou par une fonction d'Hermite–Gauss. Ces calottes sphériques sont des surfaces d'ondes (surfaces équiphasés). Le faisceau gaussien proprement dit est constitué des trajectoires orthogonales des surfaces équiphasés (fig. 7.8).

On peut toujours imaginer un faisceau gaussien engendré par un résonateur hypothétique dont les miroirs se confondent avec deux des calottes sphériques équiphasés. À la notion de col d'un résonateur se substitue celle de col du faisceau gaussien (*Beam waist*).



**FIG. 7.8.** Un faisceau gaussien se conçoit comme orthogonal à une famille de calottes sphériques non concentriques sur lesquelles l'amplitude du champ est une fonction de Gauss (ou plus généralement, d'Hermite–Gauss).

### 7.3.2 Faisceaux gaussiens dans l'espace libre

**Caractérisation d'un faisceau gaussien par son col.** Elle résulte de la proposition suivante.

**Proposition 7.3.1.** *Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, un faisceau gaussien est entièrement défini par son col. Si  $w_0$  est le rayon transversal du col, le rayon de courbure  $R_d$  de la surface équiphasé (c'est une calotte sphérique) à la distance  $d$  du plan du col est (fig. 7.9)*

$$R_d = -d - \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d}, \quad (7.98)$$

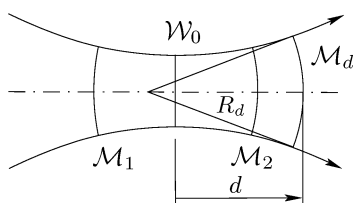
<sup>10</sup> GRIN est l'acronyme de *Gradient Index*.

<sup>11</sup> Dans les limites de l'approximation métaxiale.

et le rayon transversal du faisceau sur cette surface est  $w_d$ , tel que

$$w_d^2 = w_0^2 + \frac{\lambda^2 d^2}{\pi^2 w_0^2}. \quad (7.99)$$

*Preuve.* Un faisceau gaussien peut se concevoir comme étant engendré par un résonateur symétrique hypothétique dont les miroirs sont deux surfaces équiphases de la famille constituant le faisceau. Soit  $d$  la distance du plan du col à l'un des deux miroirs du résonateur. Avec les notations du paragraphe 7.2.7 nous avons  $d = -L/2$  et donc  $R_d = R_1$ . La valeur de  $R_d$  se déduit de la relation (7.93) et la valeur  $w_d$  de la relation (7.97).  $\square$



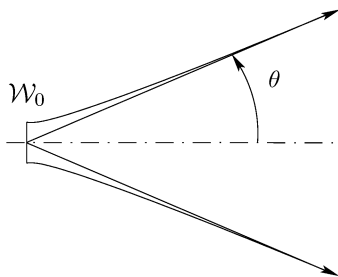
**FIG. 7.9.** Un faisceau gaussien est parfaitement défini par son col  $\mathcal{W}_0$ . La longueur d'onde étant connue, on calcule le rayon de courbure  $R_d$  de la sphère  $\mathcal{M}_d$  dont le sommet est à la distance  $d$  du col ( $\mathcal{M}_d$  est une surface d'onde).

**Remarque 7.3.1.** Si  $d = 0$  la relation (7.98) donne  $R_d$  infini, et la relation (7.99)  $w_d = w_0$ .  $\diamond$

**Forme du faisceau à grande distance du col.** On déduit des relations (7.98) et (7.99) qu'à grande distance du col le faisceau gaussien est pratiquement un faisceau conique divergent dont le demi-angle au sommet est la limite de  $|w_d/R_d|$  quand  $d$  tend vers l'infini, soit explicitement (fig. 7.10)

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (7.100)$$

Le centre de courbure des calottes sphériques équiphases tend vers le plan du col. L'amplitude du champ sur ces sphères reste gaussienne.



**FIG. 7.10.** À grande distance du col, le faisceau gaussien est pratiquement un faisceau conique de demi-angle au sommet  $\theta = \lambda/(\pi w_0)$ .

**Caractérisation d'un faisceau gaussien par sa trace sur une surface d'onde quelconque.** La proposition 7.3.1 se généralise sous la forme suivante.

**Proposition 7.3.2.** *Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée et une calotte sphérique  $\mathcal{S}$  donnée, de rayon de courbure  $R$ , il existe un seul faisceau gaussien ayant un rayon transversal  $w$  sur  $\mathcal{S}$ . Le rayon transversal du col du faisceau est  $w_0$  tel que*

$$w_0^2 = w^2 \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 w^4}{\lambda^2 R^2}}, \quad (7.101)$$

et la distance du plan du col au sommet de  $\mathcal{S}$  est

$$d = -\frac{R}{1 + \left(\frac{\lambda R}{\pi w^2}\right)^2}. \quad (7.102)$$

*Preuve.* Soit un faisceau gaussien de rayon transversal  $w_0$  sur le col. Si  $\mathcal{S}$  est une surface équiphase de ce faisceau, de rayon de courbure  $R$ , si  $w$  est la valeur du rayon transversal sur  $\mathcal{S}$  et  $d$  la distance du plan du col à  $\mathcal{S}$ , les relations (7.98) et (7.99), s'écrivent

$$R = -d - \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d}, \quad (7.103)$$

$$w^2 = w_0^2 + \frac{\lambda^2 d^2}{\pi^2 w_0^2}, \quad (7.104)$$

et conduisent à

$$\lambda^2 d^2 = \pi^2 w_0^2 (w^2 - w_0^2), \quad (7.105)$$

et

$$R = d \frac{w^2}{w_0^2 - w^2}. \quad (7.106)$$

Il résulte de la relation (7.103)

$$R = R \frac{w^2 - w_0^2}{w^2} + \frac{\pi^2 w_0^4 w^2}{\lambda^2 R (w^2 - w_0^2)}, \quad (7.107)$$

c'est-à-dire,

$$\lambda^2 R^2 (w_0^2 - w^2) + \pi^2 w_0^2 w^4 = 0, \quad (7.108)$$

qui conduit à la relation (7.101). La relation (7.102) se déduit des relations (7.101) et (7.106).

On conclut que l'amplitude du champ sur  $\mathcal{S}$  est égale à l'amplitude du champ engendré, à la distance  $d$ , par le faisceau gaussien de rayon transversal  $w_0$  sur le col. L'unicité du faisceau gaussien est une conséquence de la proposition 7.3.1.  $\square$

**Remarque 7.3.2.** Si le rayon de courbure  $R$  est infini, la surface  $\mathcal{S}$  est le plan du col. On constate que la relation (7.101) donne  $w_0 = w$ , et la relation (7.102),  $d = 0$ .  $\diamond$

**Amplitude du champ sur une surface d'onde.** La proposition suivante caractérise l'amplitude du champ associée à un faisceau gaussien sur une calotte sphérique équiphase arbitraire.

**Proposition 7.3.3.** *Soit  $\mathcal{S}_d$  une surface d'onde d'un faisceau gaussien, située à la distance  $d$  du plan du col (rayon transversal  $w_0$  et longueur d'onde  $\lambda$ ). Soit  $\alpha$  tel que*

$$\tan \alpha = \frac{\lambda d}{\pi w_0^2}. \quad (7.109)$$

*Si l'origine des phases est prise sur le plan du col, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{S}_d$  est, pour le mode  $(m, n)$ ,*

$$\begin{aligned} U_{m,n}(x, y, d) = U_0 \frac{w_0}{w_d} H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w_d} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w_d} \right) \\ \times \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w_d^2} - \frac{2i\pi d}{\lambda} + i(m + n + 1)\alpha \right], \end{aligned} \quad (7.110)$$

*où  $w_d$  est le rayon transversal du faisceau sur  $\mathcal{S}$ , et  $U_0$  une constante dimensionnelle.*

*Preuve.* Considérons le faisceau gaussien produit par un résonateur qui admet  $\mathcal{S}_d$  comme miroir. La surface  $\mathcal{S}_d$  correspond à l'ordre fractionnaire 0 et, pour  $\alpha = 0$ , la relation (7.78) permet d'écrire le paramètre  $\varepsilon_r$  sous la forme

$$\varepsilon_r = \frac{\pi w_d^2}{\lambda R_d}, \quad (7.111)$$

où  $w_d$  est le rayon transversal du faisceau sur  $\mathcal{S}_d$  et  $R_d$  le rayon de courbure de  $\mathcal{S}_d$ . Il résulte de la relation (7.101)

$$w_0^2 = \frac{w_d^2}{1 + \varepsilon_r^2}, \quad (7.112)$$

et on déduit de la relation (7.99)

$$\varepsilon_r^2 = \frac{\lambda^2 d^2}{\pi^2 w_0^4}. \quad (7.113)$$

D'autre part, on trouve le col pour  $\tan \alpha_0 = \varepsilon_r$ , de telle sorte que

$$\tan \alpha_0 = -\frac{\lambda d}{\pi w_0^2}. \quad (7.114)$$

Le signe moins dans la relation (7.114) se justifie ainsi :  $\tan \alpha_0$  a le signe de  $\varepsilon_r$  qui est le signe de  $R_d$  (car  $\varepsilon_r R_d > 0$ ). La relation (7.98) montre que le signe de  $d$  est opposé à celui de  $R_d$  et donc au signe de  $\tan \alpha_0$ .

L'amplitude du champ sur le col se déduit du champ sur  $\mathcal{S}_d$  par une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha_0$  sous la forme

$$W_0 = e^{i\alpha_0} (\cos \alpha_0 + \varepsilon_r \sin \alpha_0) \mathcal{F}_{\alpha_0}[V], \quad (7.115)$$

où  $W_0$  est l'amplitude réduite sur le col et  $V$  sur  $\mathcal{S}_d$ . L'amplitude réduite du mode  $(m, n)$  sur le plan du col est  $\varphi_{m,n}$  et on en déduit que l'amplitude réduite sur  $\mathcal{S}_d$  est

$$V_{m,n} = \frac{e^{-i\alpha_0}}{\cos \alpha_0 + \varepsilon_r \sin \alpha_0} \mathcal{F}_{-\alpha_0}[\varphi_{m,n}] = \frac{e^{-i\alpha_0(m+n+1)}}{\cos \alpha_0 + \varepsilon_r \sin \alpha_0} \varphi_{m,n}. \quad (7.116)$$

On conclut en passant aux amplitudes  $U$ , c'est-à-dire aux variables d'espace  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Alors

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_0} = 1 + \tan^2 \alpha_0 = 1 + \varepsilon_r^2, \quad (7.117)$$

et ensuite

$$\frac{1}{(\cos \alpha_0 + \varepsilon_r \sin \alpha_0)^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_0 (1 + \varepsilon_r^2)^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r^2} = \frac{w_0^2}{w_d^2}, \quad (7.118)$$

d'après la relation (7.112).

Si on choisit le plan du col comme référence des phases, il est naturel d'utiliser le paramètre  $\alpha = -\alpha_0$  pour définir la surface d'onde à la distance  $d$  du col. Ainsi la relation (7.114) devient la relation (7.109). L'amplitude du champ sur  $\mathcal{S}_d$  s'écrit

$$U_{m,n}(x, y, d) = \frac{w_0}{w_d} H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w_d} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w_d} \right) \times \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w_d^2} + i(m+n+1)\alpha \right]. \quad (7.119)$$

On obtient la relation (7.110) si on se souvient que dans l'exposé de la diffraction métaxiale, on avait volontairement omis un terme de phase de la forme  $\exp[-2i\pi d/\lambda]$  (voir la règle 1 p. 48. Ici on applique cette règle pour exprimer la propagation entre le col et  $\mathcal{S}_d$ ).  $\square$

**Remarque 7.3.3.** Si on veut l'amplitude du champ sur le plan situé à la distance  $d$  du col, on a recours à une transparence de courbure de la forme  $\exp[i\pi(x^2 + y^2)/\lambda R_d]$ , et on multiplie par ce facteur l'amplitude donnée par la relation (7.110).

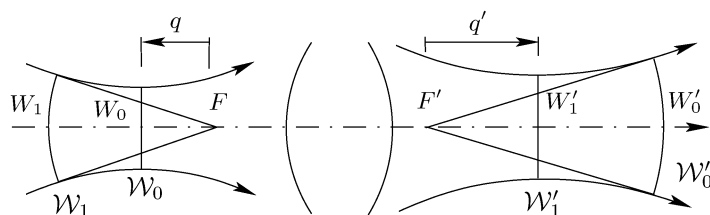
**Remarque 7.3.4.** La relation (7.109) montre que le paramètre  $\alpha$  tend vers  $\pi/2$  quand  $d$  tend vers  $+\infty$  et vers  $-\pi/2$  quand  $d$  tend vers  $-\infty$ . Si on s'intéresse au faisceau gaussien « fondamental », pour lequel  $m = n = 0$ , on constate qu'il y a dans l'expression de l'amplitude du champ du faisceau gaussien un terme de phase qui passe de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$  au cours de la propagation, c'est-à-dire un déphasage de  $\pi$  qui s'ajoute au déphasage « naturel » dû à la distance. Ce déphasage est l'équivalent du déphasage de  $\pi$  qui se manifeste quand une onde passe par son foyer.

### 7.3.3 Imagerie d'un faisceau gaussien

Montrons d'abord que l'image d'un faisceau gaussien à travers un système optique centré est encore un faisceau gaussien. Soit  $\mathcal{S}$  une surface équiphasé du faisceau gaussien objet et soit  $\mathcal{S}'$  son image à travers le système. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{S}$  est gaussienne et le rayon transversal est  $w$ . Si  $g_s$  est le grandissement aux sommets entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ , l'image cohérente de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{S}'$  est gaussienne et le rayon transversal est  $g_s w$ . On conclut à l'aide de la proposition 7.3.2.

Le problème qui se pose ensuite est celui de déterminer le faisceau gaussien image en supposant connu le faisceau objet.

**Propriété fondamentale : l'image du col d'un faisceau gaussien à travers un système à foyers n'est pas le col du faisceau image.** Cela résulte des propriétés de l'imagerie cohérente et en particulier du fait que l'image d'un émetteur plan n'est pas un plan mais une calotte sphérique. Si  $\mathcal{W}_0$  est le plan qui contient le col du faisceau objet, son image est la calotte sphérique  $\mathcal{W}'_0$  centrée au foyer image du système optique ; elle n'est un plan que si le système optique est afocal. Or le col d'un faisceau gaussien est un plan : nous devons conclure que  $\mathcal{W}'_0$  ne peut pas contenir le col du faisceau image si le système optique n'est pas afocal (fig. 7.11).



**FIG. 7.11.** Quand un système optique à foyers forme l'image d'un faisceau gaussien, le col du faisceau image n'est pas l'image du col du faisceau objet.

D'autre part, le col du faisceau image est sur un plan, disons  $\mathcal{W}'_1$ , qui est l'image (ou la conjuguée) d'une calotte sphérique  $\mathcal{W}_1$  centrée au foyer objet du système optique. Cette constatation permet d'établir les formules de l'imagerie d'un faisceau gaussien.

**Remarque 7.3.5.** Ce qui précède se résume en disant qu'il n'y a pas imagerie des cols (sauf si le système optique est afocal). On établit cependant à propos des cols de curieuses lois de conjugaison, qui ne sont pas tout à fait celles de l'optique géométrique paraxiale. Il faut comprendre qu'il n'y a rien de surprenant à cela puisqu'il n'y pas conjugaison des cols ! En revanche l'imagerie des faisceaux gaussiens s'explique tout à fait par les propriétés de l'imagerie cohérente (théorie métaxiale), c'est-à-dire par la double conjugaison des sommets et des centres de courbure. En aucune façon les faisceaux gaussiens n'échappent aux lois de l'optique géométrique.  $\diamond$

La proposition suivante est technique : elle constitue une étape pour démontrer la proposition 7.3.5 qui est d'emploi plus simple et plus universel.

**Proposition 7.3.4 (Localisation du col du faisceau image).** *Soit un objectif de foyers  $F$  et  $F'$  (distances focales  $f$  et  $f'$ ) formant l'image d'un faisceau gaussien. Soit  $S_1$  une surface équiphase du faisceau gaussien objet, de sommet  $S_1$  et de rayon de courbure  $R'_1$ . Soit  $\eta = \overline{S_1 F}/R'_1$ . Le plan du col du faisceau image passe par le point  $W'_1$  tel que*

$$\overline{F'W'_1} = \frac{\eta - \varepsilon_r^2(1 - \eta)}{\eta^2 + \varepsilon_r^2(1 - \eta)^2} \frac{ff'}{R'_1}. \quad (7.120)$$

*Preuve.* Soit  $\mathcal{W}'_1$  le plan du col du faisceau image. C'est l'image cohérente d'une calotte sphérique  $\mathcal{W}_1$  centrée au foyer objet de l'objectif (fig. 7.11). Calculons d'abord la position de  $\mathcal{W}_1$ . Pour cela imaginons le faisceau objet produit par un résonateur optique, et soit  $\mathcal{M}_1$  un des deux miroirs qui sert d'origine pour le paramètre  $\alpha$ . Si  $\Delta = \overline{S_1 F}$ , alors  $\eta = \Delta/R'_1$ . Soient  $W_1$  le sommet de  $\mathcal{W}_1$  et  $D_1 = \overline{S_1 W_1} = \mu_1 R'_1$ . La calotte sphérique  $\mathcal{W}_1$  correspond à une certaine valeur  $\alpha_1$  de  $\alpha$ , et comme elle est centrée en  $F$ , nous avons  $\overline{W_1 F} = R_{\alpha_1}$ , avec

$$R_{\alpha_1} = \frac{\mu_1^2 + \varepsilon_r^2(1 - \mu_1)^2}{-\mu_1 + \varepsilon_r^2(1 - \mu_1)} R'_1, \quad (7.121)$$

où  $R'_1$  est le rayon de courbure image de  $\mathcal{M}_1$ . D'autre part le rayon  $R_{\alpha_1}$  est tel que  $R_{\alpha_1} = \Delta - D_1 = (\eta - \mu_1)R'_1$ , et on déduit de la relation (7.121)

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon_r^2(1 - \eta)}{\varepsilon_r^2(1 - \eta) - \eta}, \quad (7.122)$$

ce qui permet de calculer la position de  $\mathcal{W}_1$ .

Cherchons maintenant la position du plan du col du faisceau image. Le rayon de courbure de  $\mathcal{W}_1$  est

$$R_{\alpha_1} = (\eta - \mu_1)R'_1 = \frac{\eta^2 + \varepsilon_r^2(1 - \eta)^2}{\eta - \varepsilon_r^2(1 - \eta)} R'_1. \quad (7.123)$$

Soient  $f$  la distance focale objet de l'objectif et  $f'$  la distance focale image ( $n'f = -nf'$ ). Si  $F'$  est le foyer image, la formule de conjugaison de Newton donne  $\overline{FW_1} \cdot \overline{F'W'_1} = ff'$ , si bien que

$$\overline{F'W'_1} = -\frac{ff'}{R_{\alpha_1}} = -\frac{\eta - \varepsilon_r^2(1 - \eta)}{\eta^2 + \varepsilon_r^2(1 - \eta)^2} \frac{ff'}{R'_1}, \quad (7.124)$$

et la proposition est démontrée.  $\square$

**Remarque 7.3.6.** Le plan du col du faisceau objet, c'est-à-dire  $\mathcal{W}_0$ , est à la distance  $\overline{FW_0} = (\mu' - \eta)R'_1$  de  $F$ . Si  $W'_0$  est l'image de  $W_0$ , la formule de conjugaison de Newton donne

$$\overline{F'W'_0} = \frac{ff'}{(\mu' - \eta)R'_1}. \quad (7.125)$$

$\diamond$

La proposition suivante permet de situer le col du faisceau image si on connaît la position du col du faisceau objet.

**Proposition 7.3.5 (Formule de « conjugaison » des cols).** *Soient respectivement  $F$  et  $F'$  le foyer objet et le foyer image d'un objectif qui forme l'image d'un faisceau gaussien. Soient  $f$  et  $f'$  les distances focales objet et image de cet objectif. Le col du faisceau objet est situé en  $W_0$  et le col du faisceau image en  $W'_1$ . Soient  $q = \overline{FW_0}$  et  $q' = \overline{F'W'_1}$ . Une formule de « conjugaison » des cols est (fig. 7.11)*

$$qq' = \frac{ff'}{1 + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 q^2}}. \quad (7.126)$$

*Preuve.* L'origine des distances dans l'espace objet est prise au foyer objet de l'objectif, de telle sorte que  $\eta = 0$  dans la relation (7.120). Soit  $d_1$  la distance du col à  $\mathcal{W}_1$  :  $d_1 = \overline{W_0 W_1}$ . Comme le rayon de courbure de  $\mathcal{W}_1$  est  $R_{d_1}$ , il résulte de la relation (7.124)

$$\overline{F'W'_1} = -\frac{ff'}{R_{d_1}} = \frac{ff'd_1}{d_1^2 + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2}}, \quad (7.127)$$

où on a utilisé la relation (7.121). On introduit  $q = \overline{FW_0} = -d_1 - R_{d_1}$  et  $q' = \overline{F'W'_1}$ , et on obtient

$$q = \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d_1}, \quad (7.128)$$

$$d_1 = \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 q}. \quad (7.129)$$

La relation (7.127) s'écrit

$$q' = \frac{ff'}{q + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 q}}, \quad (7.130)$$

dont on déduit la relation (7.126). □

**Remarque 7.3.7.** Nous baptisons « formule de conjugaison des cols » la relation (7.126) même s'il n'y a pas conjugaison des cols, comme il est expliqué dans la remarque 7.3.5. Nous nous conformons en cela à l'usage (abusivement) établi dans la littérature sur le sujet.

**Remarque 7.3.8.** Si  $w_0$  est nul, c'est-à-dire si on ne tient pas compte de la diffraction, la relation (7.126) se réduit à la formule de conjugaison de Newton :  $qq' = ff'$ , une formule classique de l'optique paraxiale. On obtient encore cette formule comme limite quand  $q$  tend vers l'infini.

**Remarque 7.3.9.** Si  $q = 0$ , la relation (7.126) donne  $q' = 0$  (cela est peut-être plus clair à partir de la relation (7.130) qui lui est équivalente). Autrement dit, si le col du faisceau objet est dans le plan focal objet de l'objectif, le col du faisceau image est dans le plan focal image. On passe du col objet au col image par une transformation de Fourier optique : pour les cols, la situation est celle de la figure 5.4 p. 103. (Cette propriété est utilisée en télécommunications optiques pour coupler une diode laser à une fibre optique.)

**Proposition 7.3.6 (Col du faisceau image).** *Le rayon transversal du col du faisceau image est  $w'_1$ , tel que*

$$w_1'^2 = \frac{f^2 \lambda^2}{\pi^2 w_0^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda^2 q^2}{\pi^2 w_0^4}\right)}. \quad (7.131)$$

*Preuve.* i – Comme  $W_1$  est à la distance  $d_1$  du col du faisceau objet, et selon la relation (7.99), nous avons

$$w_1^2 = w_0^2 + \frac{\lambda^2 d_1^2}{\pi^2 w_0^2}. \quad (7.132)$$

ii – Le rayon  $w'_1$  du col du faisceau image est l'image d'un disque de rayon  $w_1$ . Le grandissement latéral pour cette conjugaison est

$$g = -\frac{\overline{F'W'_1}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FW_1}}. \quad (7.133)$$

Comme  $W_1$  est une sphère centrée au foyer objet, alors  $\overline{FW_1} = -R_{d_1}$  et par conséquent

$$w_1'^2 = w_1^2 \frac{f^2}{R_{d_1}^2}. \quad (7.134)$$

Il résulte de la relation (7.132)

$$w_1'^2 = w_0^2 f^2 \frac{1 + \frac{\lambda^2 d_1^2}{\pi^2 w_0^4}}{\left(1 + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d_1^2}\right)^2 d_1^2}, \quad (7.135)$$

soit encore

$$w_1'^2 = \frac{f^2 \lambda^2}{\pi^2 w_0^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d_1^2}\right)}, \quad (7.136)$$

qui, compte tenu de la relation (7.129), conduit à la relation (7.131).  $\square$

**Remarque 7.3.10.** Si le col du faisceau objet est dans le plan focal objet de l'objectif, alors  $q = 0$  et le col du faisceau image est dans le plan focal image (remarque 7.3.9). De plus

$$w'_1 = \frac{|f|\lambda}{\pi w_0}. \quad (7.137)$$

**Remarque 7.3.11.** Si les indices de réfraction de l'espace objet et de l'espace image sont égaux, on remplace  $f$  par  $-f'$  dans les formules (7.131) et (7.137). Si ces indices sont  $n$  et  $n'$ , on a  $\lambda f = -\lambda' f'$ , et les formules (7.131) et (7.137) s'écrivent

$$w_1'^2 = \frac{f'^2 \lambda'^2}{\pi^2 w_0^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{n'^2 \lambda'^2 q^2}{n^2 \pi^2 w_0^4}\right)}, \quad (7.138)$$

et

$$w'_1 = \frac{|f'|\lambda'}{\pi w_0}. \quad (7.139)$$

### 7.3.4 Conclusion sur les faisceaux gaussiens

Si les formules rapportées dans ce paragraphe sont classiques [11, 79, 96, 110, 216, 248], la méthode suivie pour les établir ne l'est pas, à double titre, puisqu'elle est métaxiale et fractionnaire. Ce qui est important, c'est que les propriétés des faisceaux gaussiens, leurs formules de « conjugaison » par exemple, s'expliquent – mieux : se comprennent – dans le cadre de l'imagerie cohérente : elles relèvent toutes de la simple application du théorème 2 (p. 78). La théorie métaxiale fournit une explication physique profonde du comportement des faisceaux gaussiens et leur ôte le caractère exceptionnel que leur attribuent souvent les approches classiques.

## 7.4 Vers l'optique de Fourier fractionnaire

Nous concluons ce chapitre en soulignant les trois points suivants.

- 1° *La méthode de la transformation de Fourier fractionnaire.* L'étude du dioptré, des résonateurs optiques, des faisceaux gaussiens, s'est effectuée dans le cadre d'une théorie scalaire de la diffraction, et pour cela elle est équivalente à celles que l'on rencontre dans la littérature [125] ; elle offre le même degré de rigueur. Cependant à aucun moment il n'a été nécessaire de traduire les phénomènes de diffraction considérés sous leur forme intégrale explicite<sup>12</sup>. Tous les résultats ont été déduits de la simple manipulation de l'ordre des transformations de Fourier fractionnaires associées

<sup>12</sup> On observera qu'aucune intégrale ne figure dans ce chapitre.

au transfert du champ électrique, et des variables et amplitudes réduites. Nous avons ainsi gagné en simplicité. Nous avons également acquis une vue synthétique et opérationnelle de la diffraction, qui devrait favoriser de futurs développements.

- 2° *Extension du domaine de l'optique de Fourier.* La théorie des résonateurs optiques et celle des faisceaux gaussiens doivent désormais apparaître comme parties intégrantes de l'optique de Fourier. Ce sont clairement des thèmes adaptés à l'optique métaxiale, puisqu'y interviennent des miroirs sphériques et des transferts du champ de sphère à sphère. La transformation de Fourier fractionnaire offre un gain dans le traitement de ces sujets, conformément à ce qui a été dit au point précédent.
- 3° *Optique de Fourier fractionnaire.* Outre les exemples donnés dans ce chapitre, la méthode exposée s'applique à la formation des images par les instruments d'optique (chapitre 8). Des études ont été menées à propos de la diffraction par des émetteurs localement toriques, qui emploient la transformation de Fourier fractionnaire<sup>13</sup> [184]. Par conséquent, ce chapitre doit être compris comme la première étape dans la constitution d'une véritable doctrine, l'optique de Fourier fractionnaire [185].

<sup>13</sup> L'intérêt de la transformation de Fourier fractionnaire pour traiter d'émetteurs et récepteurs localement toriques se comprend de la façon suivante. Une surface régulière quelconque admet en chaque point deux courbures principales [225] ; en définissant deux rayons de courbure au sommet d'un émetteur (ou d'un récepteur), on approche celui-ci par une portion de tore ; d'où la notion d'émetteur localement torique qui généralise celle d'émetteur sphérique. Une portion de cylindre à base circulaire est un exemple d'émetteur localement torique (un des rayons de courbure étant infini). On conçoit que l'approximation d'un tel émetteur par une calotte sphérique n'est pas tout à fait adaptée : quel rayon de courbure donner à cette calotte ? L'expression de la diffraction entre un émetteur torique et un récepteur du même type fait intervenir quatre rayons de courbure. Supposons les plans de courbures principales identiques pour l'émetteur et le récepteur (on se ramène à cette situation par transparence de courbure torique). En choisissant dans le plan tangent au sommet de l'émetteur des coordonnées  $x$  et  $y$  selon ces sections principales, et en faisant de même au sommet du récepteur avec des coordonnées  $x'$  et  $y'$ , la transformation de Fourier fractionnaire permet de découpler les coordonnées : l'intégrale de diffraction est une intégrale double qu'on écrit comme la composition de deux transformations de Fourier fractionnaires à une dimension, portant l'une sur les variables  $x$  et  $x'$ , l'autre sur les variables  $y$  et  $y'$  (plus précisément sur les variables réduites associées). On applique la méthode étudiée au chapitre 6, qui associe à une intégrale de diffraction une transformation de Fourier fractionnaire dont l'ordre dépend de la distance de l'émetteur au récepteur et des rayons de courbure de ces derniers. Si les surfaces sont toriques, on traite le problème en  $x$  et  $x'$  indépendamment du problème en  $y$  et  $y'$ . Les différentes courbures font que les ordres de ces deux transformations ne sont pas les mêmes *a priori*. Par rapport à la transformation de Fourier standard, il y a en quelque sorte un degré de liberté supplémentaire. On peut traiter de cette façon l'imagerie par une lentille sphéro-cylindrique, ou encore la propagation ou l'imagerie de faisceaux gaussiens à col elliptique.

## 7.5 Exercices

**Exercice 7.1 (Stabilité d'un résonateur à miroirs plans ou concentriques).**

1. Un résonateur composé de deux miroirs plans est-il stable ?
2. Même question pour un résonateur composé de deux miroirs concentriques.
3. Que peut-on dire, dans le cas précédent, de la représentation du transfert du champ d'un miroir à l'autre par une transformation de Fourier fractionnaire ?

**Exercice 7.2 (Stabilité d'un résonateur confocal).** La figure 7.12 représente un résonateur confocal (les foyers des deux miroirs sont confondus). Ce résonateur est-il stable ? Cela est-il vrai de tout résonateur confocal ?

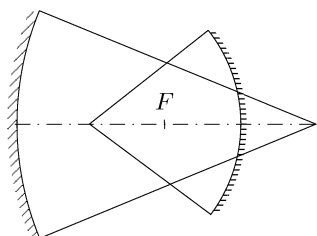


FIG. 7.12. Un résonateur confocal.

**Exercice 7.3.** On dispose de deux miroirs sphériques de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . On souhaite les utiliser pour fabriquer un résonateur dont le rayon transversal du col  $w_0$  est donné *a priori* (la longueur d'onde est imposée).

1. Déterminer une distance  $L$  des deux miroirs qui permet de résoudre le problème.
2. Cette distance est-elle unique (en général) ?

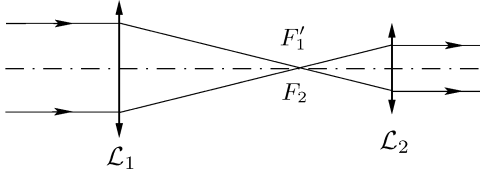
**Exercice 7.4 (Sphère de Fourier d'une sphère équi-phase d'un faisceau gaussien).**

1. Soit  $\mathcal{S}$  une calotte sphérique, surface équi-phase d'un faisceau gaussien. Montrer que la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{S}$  est aussi une calotte sphérique équi-phase du faisceau gaussien.
2. Comparer les rayons transversaux réduits sur  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 7.5 (Système afocal et faisceau gaussien).** La figure 7.13 représente un système afocal (les foyers sont à l'infini).

1. Montrer que l'image cohérente d'un émetteur plan à travers un système afocal est elle-même plane. Que peut-on en conclure si on forme l'image d'un faisceau gaussien par un système afocal ? En quoi ce résultat se distingue-t-il de ce qui se passe avec un système à foyers ?

- On suppose que le col du faisceau objet est dans le plan focal objet de  $\mathcal{L}_1$ . Où est situé le col du faisceau gaussien dans l'espace intermédiaire (entre  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ ) ? le col du faisceau image à travers l'ensemble du système afocal ?



**FIG. 7.13.** Système afocal composé de deux objectifs convergents.

**Exercice 7.6.** Un objectif convergent de foyers  $F$  et  $F'$  (distances focales  $f$  et  $f'$ ) forme l'image d'un faisceau gaussien dont le rayon transversal du col est  $w_0$ . Le col du faisceau objet (qui passe par  $W_0$ ) est à la distance  $q = \overline{FW_0}$  du foyer objet et le col du faisceau image (qui passe par  $W'_1$ ) est à la distance  $q' = \overline{F'W'_1}$  du foyer image. On note  $w'_1$  le rayon transversal du col du faisceau image. On suppose que l'indice de réfraction de l'espace objet est  $n$  et celui de l'espace image  $n'$  (les longueurs d'ondes sont telles que  $n\lambda = n'\lambda'$ ).

- Montrer que

$$\frac{q'}{w_1'^2 f'} = \frac{q}{w_0^2 f}.$$

- Montrer que

$$qq' = \frac{ff'}{1 + \frac{\pi^2 w_1'^4}{\lambda'^2 q'^2}}.$$

Commentaires ?

**Exercice 7.7 (Une formule de « conjugaison » des cols).** Soient  $H$  et  $H'$  les points principaux objet et image d'un objectif (convergent) de distance focale image  $f'$  et objet  $f$ . On suppose que l'indice de réfraction de l'espace objet est  $n$  et que  $n'$  est celui de l'espace image. Soit un faisceau gaussien de col de rayon transversal  $w_0$ , situé dans le plan  $\mathcal{W}_0$  qui passe par le point  $W_0$  de l'axe de l'objectif, dans l'espace objet. Soit  $w'_1$  le rayon transversal du col du faisceau image ; celui-ci se trouve dans le plan  $\mathcal{W}'_1$  qui passe par  $W'_1$ . On note  $p = \overline{HW_0}$  et  $p' = \overline{H'W'_1}$ .

- Démontrer la formule de « conjugaison » des cols suivante

$$\frac{n'}{p'} = \frac{n}{p \left( 1 + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 (p - f)p} \right)} + \frac{n'}{f'}.$$

- Où se trouve le col du faisceau image quand  $p = f$  ? quand  $p = 0$  ?

Deuxième partie

## **Ondes polychromatiques**

Une étude complète de la diffraction doit aborder les effets de celle-ci sur les ondes polychromatiques et nécessite pour cela l'introduction du temps comme variable supplémentaire. Le chapitre 9 étend dans ce sens les résultats de la première partie. Parmi les ondes polychromatiques figurent les ondes à spectre étroit dont l'intérêt est à la fois théorique – les calculs se simplifient et peuvent être menés à leur terme – et pratique – nombre de sources lumineuses, par exemple les lasers, ou les diodes lasers des télécommunications optiques, sont à spectre étroit. La fin du chapitre 9 leur est consacrée.

À l'échelle atomique, l'émission de lumière est un phénomène aléatoire, et cela a des conséquences à l'échelle macroscopique, même dans le cadre d'une théorie classique (non quantique). Le premier niveau d'étude concerne les propriétés statistiques d'ordre 2 du champ, c'est-à-dire sa cohérence, définie au chapitre 10. La propagation du champ s'accompagne de la propagation de sa cohérence, et le chapitre 10 établit des résultats classiques dans ce domaine, comme le théorème de Van Cittert–Zernike. L'étude se déduit directement de celle des ondes monochromatiques (première partie), étendue aux ondes polychromatiques conformément aux développements du chapitre 9.

Il existe une analogie formelle entre la diffraction et la propagation dans les lignes de transmission dispersives (dont les fibres optiques). Il suffit pratiquement de remplacer les variables spatiales de l'une (la diffraction) par le temps, pour avoir une expression de l'autre. La description de la diffraction en termes de transformation de Fourier fractionnaire conduit alors immédiatement à une description similaire des lignes de transmission dispersives, ou plus généralement de la dispersion de groupe qui accompagne la propagation d'un paquet d'ondes, comme le montre l'étude du chapitre 11. Cette façon de faire est appliquée au chapitre 12 aux paquets d'ondes gaussiens (analogues aux faisceaux gaussiens) et aux lentilles temporelles.

Cette partie utilise encore largement le cadre de la théorie des signaux et systèmes, le paramètre pris en compte étant cette fois-ci le temps. Ainsi la diffraction, décrite dans la première partie comme un filtre linéaire spatial, apparaît également comme un filtre linéaire temporel. Cela est vrai pour le transfert de l'amplitude du champ, mais aussi pour le transfert de la cohérence (chapitre 10).

# Chapitre 8

## Formation des images

L'analyse du chapitre 4 est complétée par la prise en compte des effets de la limitation des ouvertures des systèmes optiques sur la formation des images. Il en découle un des résultats les plus importants de l'optique moderne : l'image formée par un système optique est le produit de convolution de l'objet avec la réponse percussionnelle spatiale du système, laquelle est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction pupille de l'instrument. Cela n'est cependant rigoureux que pour des émetteurs centrés sur la pupille ; l'étude qui suit montre comment la transformation de Fourier fractionnaire et le produit de convolution fractionnaire permettent d'étendre la notion de réponse percussionnelle (spatiale), quelle que soit la courbure de l'objet.

### 8.1 Imagerie géométrique

#### 8.1.1 Les limites de l'imagerie géométrique

Les conditions d'obtention de l'image cohérente d'un objet (émetteur) sphérique ont été précisées au chapitre 4. Il s'agissait là de l'imagerie géométrique en ce sens que l'image était une copie conforme de l'objet : l'amplitude du champ sur l'image se déduisait de celle du champ sur l'objet dans une homothétie (le facteur d'homothétie étant le grandissement transversal). La correspondance entre l'objet et l'image était une correspondance point à point.

L'image véritablement formée par un système optique s'écarte de l'image géométrique pour deux raisons essentielles. La première est relative aux aberrations géométriques (nous considérons des rayonnements monochromatiques et nous affranchissons des aberrations chromatiques). Un système optique donnant d'un point une image strictement ponctuelle est dit stigmatique [156]. On sait que les systèmes optiques rigoureusement stigmatiques sont en nombre très limité (miroir plan, miroir parabolique pour le point à l'infini sur l'axe par exemple). Un système est aplanétique si le stigmatisme s'étend au voisinage d'une paire de points stigmatiques. Cette situation est encore plus rare que celle du seul stigmatisme (c'est le cas des points d'Young – ou de Weierstrass – du dioptré sphérique). Les aberrations résultent de l'écart qui existe entre la situation réelle et celle – idéale – qui satisferait le stigmatisme : elles font que, dans la quasi totalité des cas, l'image d'un point n'est pas rigoureusement un point mais une portion de caustique.

La résolution limitée des détecteurs optiques (grain d'une émulsion photographique, cellules d'un détecteur de type dispositif à transfert de charges (*CCD*), cônes et bâtonnets de la rétine humaine [138, 139]) rend toutefois possible la formation d'une image acceptable : grosso modo, il suffit que l'image d'un point soit inscrite dans une tache plus petite qu'un grain du détecteur, pour qu'on ne distingue pas cette image de celle qui serait rigoureusement stigmatique. On devine ainsi qu'une condition de stigmatisme approché est suffisante pour former une image et qu'elle remplace la condition de stigmatisme rigoureux, trop sévère en pratique. C'est tout l'art de l'ingénieur opticien que de calculer puis de réaliser des combinaisons optiques qui corrigent les aberrations et satisfont le stigmatisme approché. Il s'agit d'une tâche particulièrement complexe. On parvient cependant à construire des instruments d'optique de grande qualité (objectifs de microscopes, objectifs photographiques, par exemple).

La première conclusion à tirer, c'est que, dans les limites réalistes du stigmatisme approché, un instrument d'optique bien corrigé des aberrations fournit une image géométrique suffisamment proche d'une image homothétique de l'objet pour être considérée comme parfaite. Les résultats du chapitre 4 se situent dans cette limite et décrivent une correspondance point à point entre un objet et son image<sup>1</sup>.

Il existe toutefois une deuxième limitation à la correspondance point à point entre un objet et son image : elle provient des ouvertures nécessairement limitées des instruments d'optique et de la diffraction qui en résulte. La théorie développée au paragraphe 8.2 le montre. Dans un premier temps, nous justifions cela comme étant un fait d'expérience. Considérons par exemple un miroir parabolique, comme on en utilise en astronomie, rigoureusement stigmatique pour un objet ponctuel situé à l'infini sur son axe (une étoile). L'image de l'étoile devrait être un point (avec des dimensions en principe arbitrairement petites). Il n'en est rien : l'image d'une étoile est, de fait, une figure de diffraction, du type d'une tache d'Airy<sup>2</sup>, dont les dimensions dépendent d'ailleurs du diamètre du miroir (c'est-à-dire de son ouverture).

La conclusion de ce deuxième point est que, pour expliquer la formation des images, il faut tenir compte de l'ouverture limitée des instruments d'optique et de la diffraction qui en découle. Cette étude constitue l'objet de ce chapitre. L'analyse intuitive que nous venons de mener laisse deviner que nous devons abandonner l'idée d'une correspondance point à point entre un objet et son image.

### 8.1.2 Image géométrique, image physique

Pour distinguer l'approche du chapitre 4, dont nous venons de mentionner les limites, de celle que nous allons suivre, nous appelons « image géométrique »

<sup>1</sup> Tout ce que nous venons de dire concerne autant l'optique de Fourier classique que la théorie métaxiale.

<sup>2</sup> Ce n'est pas tout à fait vrai, à cause de l'occultation centrale de la pupille due au miroir secondaire.

l'image cohérente obtenue au chapitre 4, et « image physique » la véritable image, celle qu'on obtient en tenant compte de l'effet de la diffraction et de l'ouverture limitée des systèmes optiques.

Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur sphérique (l'objet) et soit  $\mathcal{A}'$  son image cohérente (qui s'obtient par conjugaison des sommets et des centres de courbure, conformément aux résultats établis au chapitre 4). Si  $U_A$  est l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$ , l'amplitude géométrique du champ sur  $\mathcal{A}'$  est  $U_{AG}$ , telle que (chapitre 4)

$$U_{AG}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s} \right), \quad (8.1)$$

où  $g_s$  est le grandissement transversal (ou latéral) aux sommets.

L'amplitude de l'image physique sur  $\mathcal{A}'$  (prenant en compte la diffraction par les ouvertures) est notée  $U_{A'}$ .

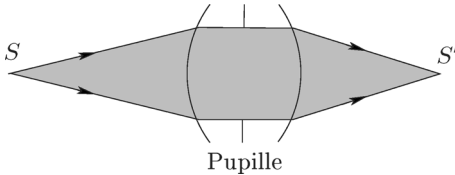
## 8.2 Théorie standard en lumière cohérente

Nous appelons standard la théorie développée dans ce paragraphe parce qu'elle est fondée sur l'approche métaxiale de G. Bonnet et n'a pas recours à la transformation de Fourier fractionnaire. Il ne s'agit pas pour autant de la théorie classique telle qu'on la trouve dans le livre de Goodman [97].

### 8.2.1 Pupilles

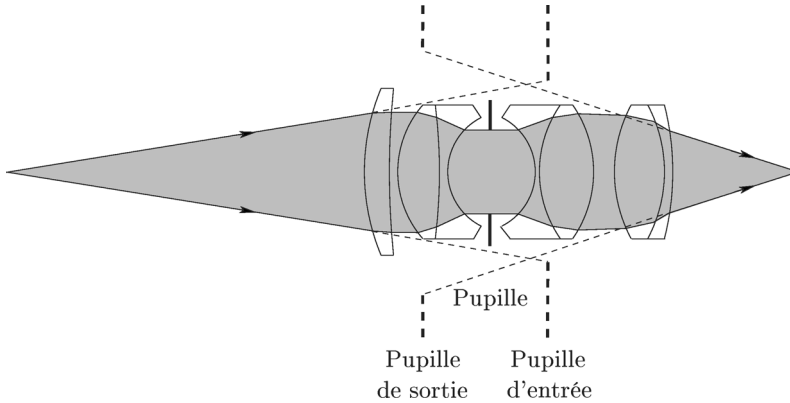
Soit un point lumineux  $S$  sur l'axe d'un objectif (fig. 8.1). Tous les rayons émis par  $S$  ne traversent pas l'objectif et il existe un diaphragme (iris) qui limite l'étendue du faisceau incident : c'est la pupille du système.

La pupille a trois fonctions : elle joue un rôle photométrique du fait qu'elle limite la quantité de lumière qui entre dans le système ; elle influe sur les aberrations, tant par sa position que par sa dimension [156] ; et enfin elle limite la résolution de l'instrument. Ce chapitre est consacré au troisième point.



**FIG. 8.1.** La pupille limite l'étendue du faisceau lumineux qui traverse le système optique.

Un système centré se compose généralement de plusieurs lentilles réparties en groupes. L'image de la pupille par les groupes de lentilles qui la précèdent s'appelle la pupille d'entrée de l'instrument ; l'image de la pupille par les groupes qui la suivent est la pupille de sortie (la figure 8.2 fournit un exemple et la figure 8.3 un schéma de principe). Il en résulte que la pupille de sortie est l'image de la pupille d'entrée à travers l'ensemble du système.



**FIG. 8.2.** La pupille d'entrée est l'image de la pupille à travers la partie du système antérieure à la pupille. La pupille de sortie est l'image de la pupille à travers la partie postérieure. Les pupilles de sortie et d'entrée sont conjuguées l'une de l'autre à travers le système entier. Sur la figure, les pupilles d'entrée et de sortie sont virtuelles.

Dans une théorie adaptée à la lumière cohérente, il faut considérer *a priori* des images de la pupille cohérentes, et on s'attend à ce que les pupilles d'entrée et de sortie soient des calottes sphériques (en général, conformément à la théorie de l'imagerie développée au chapitre 4). Nous nous limiterons cependant, le plus souvent, à des cas simples (pupilles binaires) pour lesquels il n'y aura pas de différence à considérer des pupilles d'entrée ou de sortie planes ou sphériques, et nous commencerons pour cela avec des pupilles planes (voir le paragraphe 8.5.2 pour une approche plus générale).

Avec la variable spatiale  $\mathbf{s}$ , la pupille d'entrée se décrit par la fonction pupille  $p$  telle que  $p(\mathbf{s}) = 1$ , si le point  $\mathbf{s}$  est dans l'ouverture de la pupille d'entrée, et  $p(\mathbf{s}) = 0$  sinon. On fait de même avec la pupille de sortie à l'aide de la variable  $\mathbf{s}'$  et de la fonction  $p'$  telle que  $p'(\mathbf{s}') = 1$ , si  $\mathbf{s}'$  est un point de la pupille de sortie, et  $p'(\mathbf{s}') = 0$  sinon. Les pupilles d'entrée et de sortie étant images l'une de l'autre, il en résulte

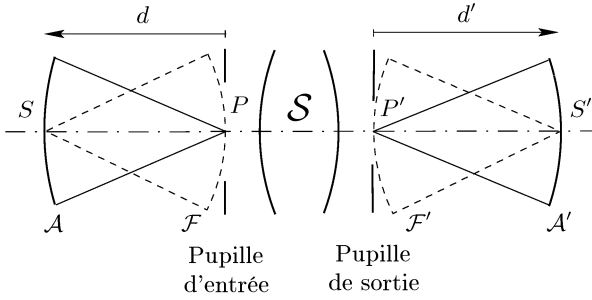
$$p'(\mathbf{s}') = p\left(\frac{\mathbf{s}'}{g_p}\right), \quad (8.2)$$

où  $g_p$  est le grandissement transversal pupillaire.

Il est parfois intéressant d'utiliser des fonctions pupilles généralisées qui prennent des valeurs quelconques entre 0 et 1, et plus généralement des valeurs complexes (ce qui permet d'inclure les aberrations à la théorie). Il peut être alors nécessaire de tenir compte du rayon de courbure des pupilles d'entrée et de sortie.

### 8.2.2 Image cohérente d'un émetteur centré sur la pupille d'entrée

Soit un émetteur  $\mathcal{A}$ , de sommet  $S$ , centré en  $P$  sur la pupille d'entrée de l'objectif  $\mathcal{S}$  (fig. 8.3). L'image de  $\mathcal{A}$  est la sphère  $\mathcal{A}'$ , de sommet  $S'$  (l'image



**FIG. 8.3.** Formation de l'image d'un objet  $\mathcal{A}$  (émetteur sphérique) centré sur la pupille d'entrée du système  $\mathcal{S}$ .

paraxiale de  $S$ ), centrée en  $P'$  (l'image paraxiale de  $P$ ). Le point  $P$  est le sommet<sup>3</sup> de la pupille d'entrée et  $P'$  le sommet de la pupille de sortie. Soient les mesures algébriques  $d = \overline{PS}$  et  $d' = \overline{P'S'}$ ; l'indice de réfraction de l'espace objet est  $n$  et celui de l'espace image est  $n'$ .

Soit  $\mathcal{F}$  la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$  : son centre de courbure est  $S$  et son sommet est  $P$ ; son image à travers  $\mathcal{S}$  est la sphère  $\mathcal{F}'$  qui passe par  $P'$  et qui est centrée en  $S'$ . La sphère  $\mathcal{A}'$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{F}'$ , si bien que le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$ , c'est-à-dire la formation de l'image cohérente de  $\mathcal{A}$ , se décompose en une transformation de Fourier optique de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$ , une imagerie cohérente de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{F}'$  avec ouverture limitée, et finalement une seconde transformation de Fourier optique de  $\mathcal{F}'$  à  $\mathcal{A}'$ . Cette analyse conduit au résultat suivant.

**Théorème 4 (Formation des images).** *Soit un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ , situé à la distance  $d$  de la pupille d'entrée d'un objectif et centré sur elle; soit  $\mathcal{A}'$  son image géométrique cohérente, obtenue conformément au théorème 2. Si  $p$  est la fonction pupille de l'objectif et  $g_s$  le grandissement transversal pour la position de l'émetteur, soit  $h$  la fonction définie par*

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2 d^2 g_s^2} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda d g_s}\right). \quad (8.3)$$

*La formation de l'image de  $\mathcal{A}$  est un filtrage linéaire de réponse percussionnelle spatiale<sup>4</sup>  $h$ , opérant sur l'amplitude de l'image géométrique : l'amplitude du champ de l'image physique  $U_{A'}$  est le produit de convolution de  $h$  et de l'amplitude de l'image géométrique  $U_{AG}$ , c'est-à-dire*

<sup>3</sup> Nous gardons le vocabulaire appliqué aux calottes sphériques, même si les pupilles sont planes.

<sup>4</sup> Nous employons ici la terminologie habituelle en optique. Toutefois, quand nous considérerons des ondes polychromatiques, la véritable réponse percussionnelle sera spatio-temporelle. C'est pourquoi nous ajoutons ici le qualificatif de « spatial » qui indique que  $h$  n'est pas la réponse percussionnelle complète. Plus loin (voir le paragraphe 9.3.2) nous appellerons la fonction  $h$  le gain complexe, comme nous l'avons fait au chapitre 3.

$$U_{A'} = U_{AG} * h. \quad (8.4)$$

*Preuve.* L'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}'$  est le produit de l'amplitude du champ image sur  $\mathcal{F}$  et de la fonction pupille<sup>5</sup>, soit

$$U_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{1}{g_p} U_F\left(\frac{\mathbf{s}'}{g_p}\right) p\left(\frac{\mathbf{s}'}{g_p}\right). \quad (8.5)$$

Puisque le rayon de  $\mathcal{A}$  est  $-d$ , l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}$  est

$$U_F(\mathbf{s}') = -\frac{i}{\lambda d} \widehat{U}_A\left(-\frac{\mathbf{s}'}{\lambda d}\right), \quad (8.6)$$

et puisque le rayon de  $\mathcal{F}'$  est  $d'$ , l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{i}{\lambda' d'} \widehat{U}_{F'}\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda' d'}\right). \quad (8.7)$$

Les transformées de Fourier de  $U_{F'}$  et  $U_F$  sont respectivement

$$\widehat{U}_{F'}(\mathbf{F}) = g_p [\widehat{U}_F * \widehat{p}](g_p \mathbf{F}), \quad (8.8)$$

$$\widehat{U}_F(\mathbf{F}) = -i\lambda d U_A(\lambda d \mathbf{F}). \quad (8.9)$$

La relation (8.8) s'écrit

$$\widehat{U}_{F'}(\mathbf{F}) = -i\lambda d g_p \int_{\mathbb{R}^2} U_A(\lambda d \mathbf{F}') \widehat{p}(g_p \mathbf{F} - \mathbf{F}') d\mathbf{F}', \quad (8.10)$$

et la relation (8.7) conduit à

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = g_p \frac{\lambda d}{\lambda' d'} \int_{\mathbb{R}^2} U_A(\lambda d \mathbf{F}') \widehat{p}\left(\frac{g_p \mathbf{r}'}{\lambda' d'} - \mathbf{F}'\right) d\mathbf{F}'. \quad (8.11)$$

La loi du grandissement des rayons de Bonnet s'écrit

$$\frac{d'}{d} = \frac{R_{A'}}{R_A} = \frac{n'}{n} g_s g_p, \quad (8.12)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction de l'espace objet et  $n'$  celui de l'espace image. Il en résulte

$$\frac{g_p}{\lambda' d'} = \frac{1}{\lambda d g_s}, \quad (8.13)$$

où  $\lambda'$  est la longueur d'onde dans l'espace image ( $\lambda' = \lambda n/n'$ ). Le changement de variable  $\mathbf{r} = \lambda d g_s \mathbf{F}'$  dans la relation (8.11) donne

<sup>5</sup> Si la fonction pupille est binaire, ne prenant que les valeurs 0 ou 1, la courbure de la pupille d'entrée n'a pas d'effet sur la formation de l'image.

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda^2 d^2 g_s^3} \int_{\mathbb{R}^2} U_A\left(\frac{\mathbf{r}}{g_s}\right) \hat{p}\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda d g_s} - \frac{\mathbf{r}}{\lambda d g_s}\right) d\mathbf{r}. \quad (8.14)$$

Les définitions de  $h$  et  $U_{AG}$  conduisent enfin à

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \int_{\mathbb{R}^2} U_{AG}(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (8.15)$$

qui est la forme explicite de la relation (8.4).  $\square$

**Remarque 8.2.1.** La remarque 4.1.3 p. 72 concernant le coefficient de transmission du système optique s'applique ici. Il est cependant possible d'inclure ce coefficient dans  $U_{AG}$ , de telle sorte que la relation (8.4) ne change pas.

**Remarque 8.2.2.** La fonction  $h$  est la réponse percussionnelle (spatiale) cohérente de l'objectif (pour la distance  $-d$ ). Une autre expression de  $h$  s'obtient à l'aide des paramètres de l'espace image et, grâce aux relations (8.2) et (8.13), prend la forme

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda'^2 d'^2} \hat{p}'\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda' d'}\right). \quad (8.16)$$

**Remarque 8.2.3 (Écart à la linéarité).** Le théorème 4 vaut pour les objectifs dépourvus d'aberrations, c'est-à-dire, en pratique, suffisamment bien corrigés pour satisfaire la condition de stigmatisme approché. Il décrit la formation d'une image dans le langage de la théorie des signaux et systèmes : l'objectif est un filtre linéaire qui opère sur l'amplitude du champ. Certes la réponse percussionnelle (spatiale) dépend de la conjugaison réalisée par l'objectif, c'est-à-dire de la position relative de l'objet. Mais pour une conjugaison donnée, l'objectif est un filtre linéaire.

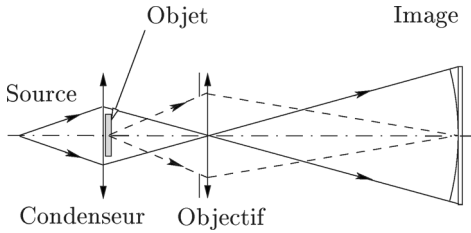
Les aberrations géométriques traduisent l'écart à la linéarité entre le système optique réel et le système parfait équivalent. Considérons deux points d'un émetteur sphérique : l'un sur l'axe, l'autre hors de l'axe. Pour un système réel, en toute généralité, dans le premier cas se manifeste de l'aberration sphérique, dans le second de l'astigmatisme. Cela signifie que la réponse du système optique réel à un point lumineux n'est pas la même dans tout le champ, comme pour un système parfait : il n'y a plus invariance par translation de la réponse de l'instrument. Non seulement l'image d'un point n'est plus un point, mais la linéarité du système est perdue ; d'où l'impossibilité de décrire la formation de l'image au moyen d'un produit de convolution. Cela est vrai en particulier en présence de distorsion, même si dans ce cas, l'image d'un point est (pratiquement) un point.

Ainsi la prise en compte des aberrations est *a priori* plus compliquée que celle de la diffraction ; ce qui complique les choses sur le plan mathématique, ce n'est pas tellement que l'image d'un point n'est pas un point – c'est ce qui se passe avec la diffraction et le théorème 4 traduit cela – ; c'est plutôt que l'image d'un point n'est pas la même sur tout le champ, ou encore que le grandissement latéral n'est pas constant (cas de la distorsion).

**Remarque 8.2.4.** La relation (8.4) permet le calcul de l'amplitude de l'image, mais un détecteur est sensible à l'éclairement (ou intensité vibratoire). Mise à part l'impédance (voir le chapitre 1), l'éclairement sur l'image est

$$I_{A'}(\mathbf{r}') = |U_{AG} * h(\mathbf{r}')|^2. \quad (8.17)$$

**Remarque 8.2.5.** La condition d'un émetteur centré sur la pupille d'entrée permet de concevoir l'éclairement d'un objet dont on veut former l'image cohérente. La figure 8.4 montre un tel dispositif : l'objet se comporte comme un émetteur sphérique centré sur la pupille d'entrée de l'objectif. En microscopie, on utilise un éclairage un peu plus compliqué, mais fondé sur le même principe : c'est l'éclairage Köhler [29, 92, 156]. On forme d'abord l'image de la source de lumière sur la pupille d'entrée du condenseur, puis on éclaire l'objet par une onde venant de l'infini (pour cela l'image de la source est dans le plan focal du condenseur). La pupille d'entrée de l'objectif est à l'infini. L'éclairage Köhler est analysé au paragraphe 13.3.4 (exemple 13.3.2 p. 387). Le même dispositif sert dans un projecteur de profil.



**FIG. 8.4.** Dispositif d'éclairage pour la formation de l'image cohérente d'un objet. Pour simplifier, l'objectif est assimilé à une lentille mince dont la monture sert de pupille. En toute rigueur, l'image est sur une sphère centrée sur la pupille de sortie de l'objectif.

### 8.2.3 Image cohérente d'un émetteur non centré sur la pupille d'entrée

Le théorème 4 vaut seulement, en lumière cohérente, pour un émetteur centré sur la pupille d'entrée de l'objectif. Examinons ce qui se passe si cette condition n'est pas satisfaite.

Soit  $\mathcal{B}$  un émetteur sphérique de rayon de courbure  $R_B$ , situé à la distance  $d$  de la pupille d'entrée, mais sans être centré sur elle (fig. 8.5). Soit  $\mathcal{A}$  la sphère tangente à  $\mathcal{B}$  et centrée en  $P$  sur la pupille (d'entrée). L'image géométrique de  $\mathcal{B}$  est la sphère  $\mathcal{B}'$  de rayon  $R_{B'}$ , tangente à l'image  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$  (sa distance à la pupille de sortie est  $d'$ ). Soit  $\tau$  la fonction définie par

$$\tau(r) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \left( \frac{r}{g_s} \right)^2 \right]. \quad (8.18)$$

(On a  $R_A = -d$  et  $R_{A'} = -d'$ , mais il n'est pas nécessaire de faire le changement.) La relation (8.4) appliquée à  $\mathcal{A}$  conduit à

$$U_{B'}(\mathbf{r}') = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda'} \left( \frac{1}{R_{B'}} - \frac{1}{R_{A'}} \right) r'^2 \right] [(\tau U_{BG}) * h](\mathbf{r}'). \quad (8.19)$$

Comme la fonction  $\tau$  intervient dans le produit de convolution (ou plutôt sous l'intégrale, si l'on écrit la forme intégrale explicite du produit de convolution), la relation (8.4) ne s'applique pas à  $\mathcal{B}$  (autrement dit, la relation (8.4) n'est pas exacte si on remplace  $U_{AG}$  par  $U_{BG}$  et  $U_{A'}$  par  $U_{B'}$ ).

Le théorème 4 est valide dans une situation très particulière ; rigoureusement, il ne s'applique pas à l'imagerie d'un émetteur sphérique quelconque. Une façon de dépasser cette limitation est décrite au paragraphe 8.5.

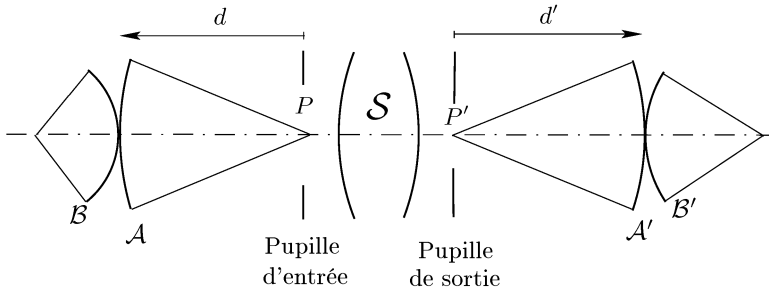


FIG. 8.5. Image d'un objet ( $\mathcal{B}$ ) non centré sur la pupille d'entrée.

**Remarque 8.2.6.** Le terme de phase  $\tau(\mathbf{r})$  peut être approché par 1 dans certains cas, par exemple si  $\mathcal{B}$  est un plan et si  $\mathcal{A}$  est situé à une grande distance de la pupille. La relation (8.4) est alors approximativement vraie pour la formation de l'image de  $\mathcal{B}$ . (Cette approximation est reprise au paragraphe 8.2.6.)

### 8.2.4 Fonction de transfert en lumière cohérente

La relation (8.4) décrit la formation de l'image d'un objet (émetteur sphérique)  $\mathcal{A}$ , centré sur la pupille d'entrée, sous la forme d'un produit de convolution : il est naturel de passer à l'espace de Fourier, celui des fréquences spatiales, et de remplacer le produit de convolution par un produit simple. Si  $H_c$  est la transformée de Fourier de la fonction  $h$ , la relation (8.4) donne<sup>6</sup>

$$\widehat{U}_{A'}(\mathbf{F}') = H_c(\mathbf{F}') \widehat{U}_{AG}(\mathbf{F}'), \quad (8.20)$$

de telle sorte que  $H_c$  est la fonction de transfert spatiale cohérente du système.

Explicitement, la relation (8.3) conduit à

$$H_c(\mathbf{F}) = \widehat{h}(\mathbf{F}) = \widehat{p}(\lambda d g_s \mathbf{F}) = p(-\lambda d g_s \mathbf{F}). \quad (8.21)$$

<sup>6</sup> Nous notons  $\mathbf{F}'$  la fréquence spatiale pour souligner que, bien que variable muette, elle se rapporte à l'espace image.

Ce même résultat s'exprime à l'aide de la fonction pupille de sortie  $p'$  : si  $g_p$  est le grandissement pupilaire, les relations (8.2) et (8.13) conduisent à

$$H_c(\mathbf{F}') = p'(-\lambda d g_s g_p \mathbf{F}') = p'(-\lambda' d' \mathbf{F}'), \quad (8.22)$$

où  $d'$  est la distance du sommet de la pupille de sortie au sommet de l'image et  $\lambda'$  la longueur d'onde dans l'espace image. La relation (8.22) peut se déduire directement de (8.16).

La relation (8.21) montre que la fonction de transfert spatiale n'est rien d'autre que la fonction pupille, à un facteur d'échelle près. Cela conduit à définir un critère simple pour savoir si une fréquence spatiale donnée est transmise ou non par le système optique, comme expliqué au paragraphe suivant.

### 8.2.5 Transmission des fréquences spatiales

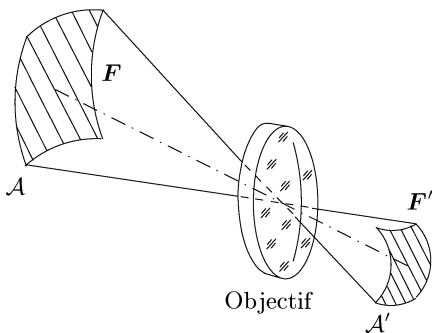
Une fréquence spatiale d'un objet n'est pas exactement conservée dans l'imagerie par un objectif et cela provient de l'existence du grandissement transversal (en général différent de 1), comme le montre la figure 8.6. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on introduit l'image géométrique (voir par exemple l'énoncé du théorème 4) – c'est-à-dire une copie homothétique de l'objet – pour décrire la formation d'une image. Soit  $\mathcal{A}'$  l'image de  $\mathcal{A}$  et soit  $g_s$  le grandissement transversal aux sommets. Supposons que l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  corresponde à une fréquence spatiale pure, disons  $\mathbf{F}$ , et prenne la forme

$$U_A(\mathbf{r}) = U_0 \exp[-2i\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}]. \quad (8.23)$$

L'amplitude du champ sur l'image géométrique est

$$U_{AG}(\mathbf{r}') = \frac{U_0}{g_s} \exp \left[ -\frac{2i\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'}{g_s} \right], \quad (8.24)$$

laquelle est l'amplitude associée à la fréquence spatiale  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}/g_s$ . Ainsi la période spatiale est multipliée par le grandissement transversal  $g_s$ , la fréquence spatiale divisée par ce même grandissement. Cela reste vrai pour toute fréquence spatiale, avec le même grandissement : c'est pourquoi l'analyse harmonique demeure pertinente pour l'étude des systèmes optiques et qu'il est



**FIG. 8.6.** À la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  de l'objet  $\mathcal{A}$  correspond la fréquence spatiale  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}/g_s$  de l'image  $\mathcal{A}'$ , où  $g_s$  est le grandissement transversal aux sommets pour cette conjugaison.

possible de considérer ces derniers comme des filtres linéaires, après homothétie sur l'objet (ce point a déjà été évoqué dans la remarque 2.2.3 p. 31).

Dans le cas général, on déduit des relations (8.1), (8.20) et (8.21)

$$\widehat{U}_{A'}(\mathbf{F}') = H_c(\mathbf{F}') \widehat{U}_{AG}(\mathbf{F}') = g_s p(-\lambda d g_s \mathbf{F}') \widehat{U}_A(g_s \mathbf{F}'), \quad (8.25)$$

ou encore, en utilisant les relations (8.2) et (8.13),

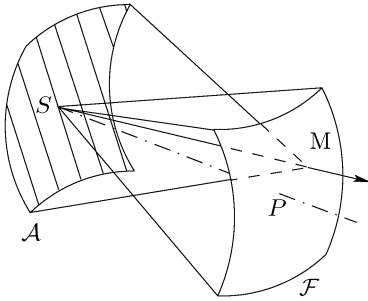
$$\widehat{U}_{A'}(\mathbf{F}') = g_s p'(-\lambda' d' \mathbf{F}') \widehat{U}_A(g_s \mathbf{F}'). \quad (8.26)$$

Les relations (8.25) et (8.26) se rapportent aux fréquences spatiales de l'espace image. On utilise les fréquences spatiales de l'espace objet pour écrire

$$\widehat{U}_{A'}(\mathbf{F}/g_s) = g_s p(-\lambda d \mathbf{F}) \widehat{U}_A(\mathbf{F}), \quad (8.27)$$

ce qui permet d'analyser la situation dans l'espace objet comme le montre la figure 8.7. Pour cela, soit la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}$ , qui est la sphère  $\mathcal{F}$ , tangente à la pupille d'entrée (puisque  $\mathcal{A}$  est centrée sur cette dernière). L'onde dont l'amplitude  $U_A$  est donnée par la relation (8.23) se focalise en un point  $M$  de  $\mathcal{F}$ . Si  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les cosinus directeurs de la direction de propagation  $SM$  associée à la fréquence  $\mathbf{F}$  (le point  $S$  est sur l'axe du système optique), les coordonnées de  $M$ , dans un système  $x, y, z$  d'origine  $S$ , sont  $-\alpha d$ ,  $-\beta d$ ,  $-\gamma d$ , où  $d = \overline{PS}$  (le signe moins vient de ce que la distance  $d$  est prise de la pupille vers l'objet). Si  $\mathbf{r}$  représente le point projeté de  $M$  sur le plan tangent à  $\mathcal{F}$  en  $S$ , alors

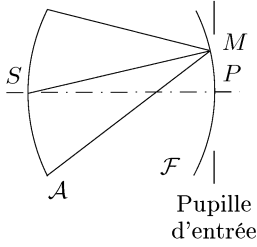
$$\mathbf{r} = -\lambda d \mathbf{F}. \quad (8.28)$$



**FIG. 8.7.** À la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  de l'objet correspond la direction de propagation représentée par la droite  $SM$ . Le point  $M$  se projette sur le plan de la pupille au point de coordonnées  $\mathbf{r} = -\lambda d \mathbf{F}$ .

Appliquons ce résultat à l'interprétation de la relation (8.25). Si la projection de  $M$  sur le plan de la pupille est dans la pupille (fig. 8.8), alors  $p(\mathbf{r}) = 1$  et  $H(-\lambda d \mathbf{F}) = 1$ . La fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  est transmise par le système optique. Si  $M$  se projette en dehors de l'ouverture de la pupille, alors  $p(\mathbf{r}) = 0$  et  $H(-\lambda d \mathbf{F}) = 0$ ; la fréquence  $\mathbf{F}$  n'est pas transmise.

La situation s'analyse de manière similaire dans l'espace image à l'aide de la relation (8.26).



**FIG. 8.8.** La fréquence spatiale associée à la direction de propagation  $SM$  est transmise par le système optique si, et seulement si, le point  $M$  se projette à l'intérieur de la pupille d'entrée (le point  $S$  est sur l'axe du système optique).

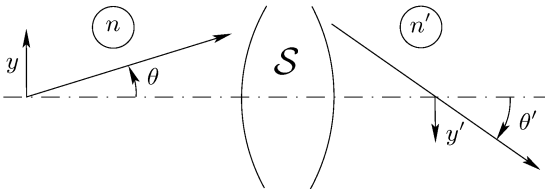
**Proposition 8.2.1.** *Soit un émetteur sphérique de sommet  $S$ , centré sur la pupille d'entrée d'un objectif. Une fréquence spatiale de l'émetteur est résolue par le système optique si, et seulement si, la droite passant par  $S$  et parallèle à la direction de propagation de l'onde plane associée à cette fréquence spatiale passe à l'intérieur<sup>7</sup> de la pupille d'entrée.*

**Remarque 8.2.7 (Relation de Lagrange–Helmholtz).** La fréquence spatiale  $F$  d'un objet devient  $F'$  sur l'image, et la relation  $F' = F/g_s$ , établie plus haut et qui se déduit de la relation (8.24), est équivalente à la relation de Lagrange–Helmholtz de l'optique géométrique paraxiale (voir l'exercice 4.7). Pour le montrer, utilisons la relation  $\Phi = \lambda F$ , et considérons le cas particulier  $\Phi = (\alpha, 0) = (\sin \theta, 0)$ , où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur d'onde et l'axe optique. La même relation s'écrit  $\Phi' = \lambda F'$  dans l'espace image, et en particulier  $\Phi' = (\alpha', 0) = (\sin \theta', 0)$ . Si  $g_s$  est le grandissement aux sommets, un objet transversal  $y$  et son image  $y'$  satisfont

$$\frac{y'}{y} = g_s = \frac{\lambda' \sin \theta}{\lambda \sin \theta'}, \quad (8.29)$$

et au premier ordre ( $\sin \theta \approx \theta$ ) cela conduit à la relation de Lagrange–Helmholtz (illustrée par la figure 8.9)

$$ny\theta = n'y'\theta'. \quad (8.30)$$



**FIG. 8.9.** Illustration de la relation de Lagrange–Helmholtz de l'optique géométrique paraxiale.

<sup>7</sup> Par « intérieur » il faut entendre la partie transparente de la pupille.

**Fréquence de coupure.** Supposons que la pupille d'entrée soit circulaire, de diamètre  $D$ . Soit  $\theta$  l'angle sous lequel on voit la pupille d'entrée depuis le sommet de l'objet (qui se trouve sur l'axe de l'objectif). On déduit de la relation (8.28) que l'objectif transmet la fréquence spatiale  $F$  si, et seulement si, le module  $F$  vérifie

$$F \leq \frac{\theta}{\lambda}. \quad (8.31)$$

La quantité  $\theta/\lambda$  est la fréquence de coupure de l'objectif (ou plutôt son module).

Pour une pupille de forme quelconque, ce qui précède est vrai pour chaque direction issue du centre de la pupille. Si par exemple la pupille est de forme carrée, le module de la fréquence de coupure suivant sa diagonale est égal à  $\sqrt{2}$  fois le module de la fréquence de coupure suivant un côté.

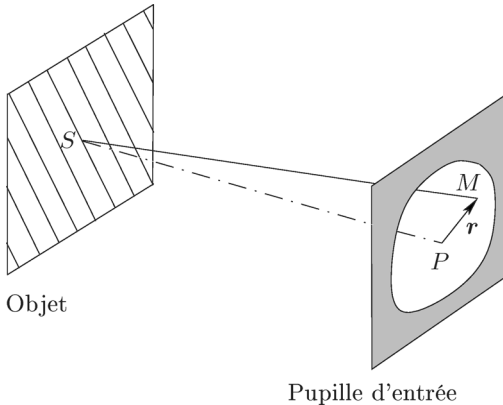
En conclusion, un système optique centré est un filtre passe-bas, limité par sa pupille. Un instrument comportant une pupille annulaire est un filtre passe-bande.

### 8.2.6 Approximation d'un objet éloigné

La relation (8.4) est rigoureusement établie pour un objet centré sur la pupille d'entrée du système optique. Pour un objet qui n'est pas centré sur la pupille d'entrée, la formation de l'image se décrit par la relation (8.19). Le principal obstacle pour réduire cette relation à la relation (8.4) ne vient pas tant du terme de phase extérieur au produit de convolution, qui n'influe pas sur l'éclairement de l'image, mais plutôt du terme de phase quadratique de la relation (8.18) – qui figure dans le produit de convolution.

Pour un objet plan ( $R_B$  infini) situé à grande distance de la pupille, sous la condition

$$\lambda |R_A| g_s^2 \gg r^2, \quad (8.32)$$



**FIG. 8.10.** Pour un objet plan éloigné de la pupille, on applique de façon approchée le résultat décrit par la figure 8.8.

le terme de phase de l'équation (8.18) est proche de 1 et l'équation (8.4) est pratiquement vérifiée.

L'interprétation de la fonction pupille comme fonction de transfert reste pertinente comme le montre la figure 8.10. À une fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  de l'objet correspond une direction de propagation  $OM$ . Si le point  $M$  est dans la pupille d'entrée, cette fréquence spatiale est transmise et l'image contient la fréquence spatiale  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}/g_s$ , où  $g_s$  est le grandissement transversal. Si le point  $M$  est en dehors de la pupille, la fréquence spatiale associée n'est pas transmise. La proposition 8.2.1 s'applique.

## 8.3 Formation des images en lumière incohérente

### 8.3.1 Réponse percussionnelle spatiale incohérente

Bien que nous n'ayons pas encore étudié la notion de cohérence (elle fera l'objet du chapitre 10) nous allons mentionner comment se forme l'image d'un émetteur incohérent. L'amplitude complexe du champ électrique à l'instant  $t$  et au point  $\mathbf{r}$  de l'émetteur  $\mathcal{A}$  est  $E_A(\mathbf{r}, t)$ , et l'éclairement correspondant est

$$I_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n c \langle |E_A(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle_t, \quad (8.33)$$

où  $\langle \rangle_t$  représente une moyenne temporelle,  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $c$  la vitesse de la lumière (dans le vide) et  $n$  l'indice de réfraction du milieu de propagation. Pour simplifier, nous n'écrirons plus le coefficient  $(1/2)\varepsilon_0 n c$  (nous utilisons l'intensité vibratoire, voir le paragraphe 1.3 du chapitre 1). Nous admettons ici – et nous prouverons au chapitre 10 – que les propriétés liées à la propagation de  $U_A(\mathbf{r})$  restent valables pour  $E_A(\mathbf{r}, t)$ .

L'éclairage de  $\mathcal{A}$  est spatialement incohérent si les vibrations prises en deux points distincts de l'émetteur n'ont aucune relation de phase (permanente) entre elles. Cela se traduit par

$$\langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} \rangle_t = I_A(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (8.34)$$

Soit alors un émetteur sphérique  $\mathcal{B}$  (rayon de courbure  $R_B$ ), situé à la distance  $d$  de la pupille d'entrée d'un objectif, mais pas nécessairement centré sur celle-ci. Soit  $\mathcal{A}$  la sphère tangente à  $\mathcal{B}$  et centrée en  $P$ , sur la pupille d'entrée (fig. 8.5). Comme les amplitudes des champs sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  se différencient seulement par un terme de phase quadratique, nous avons  $I_A(\mathbf{r}) = I_B(\mathbf{r})$ . Les amplitudes des images géométriques sur  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  sont  $E_{AG}$  et  $E_{BG}$  et leur correspondent les éclairements  $I_{AG}$  et  $I_{BG}$ . Des relations  $U_{AG}(\mathbf{r}') = U_A(\mathbf{r}'/g_s)$  et  $U_{BG}(\mathbf{r}') = U_B(\mathbf{r}'/g_s)$ , nous déduisons d'abord  $E_{AG}(\mathbf{r}', t) = E_A(\mathbf{r}'/g_s, t - t_p)$  et  $E_{BG}(\mathbf{r}', t) = E_B(\mathbf{r}'/g_s, t - t_p)$ , où  $t_p$  est le temps de propagation de la lumière de  $\mathcal{A}$  à son image  $\mathcal{A}'$ , de sommet à sommet (ce temps est le même que le temps de parcours de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , puisque  $\mathcal{B}$  est tangent à  $\mathcal{A}$ , et  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{A}'$ ). Il en résulte  $I_{AG}(\mathbf{r}') = I_{BG}(\mathbf{r}')$ .

Pour l'image physique sur  $\mathcal{B}'$  nous avons

$$\begin{aligned}
 I_{B'}(\mathbf{r}') &= \langle E_{B'}(\mathbf{r}', t) \overline{E_{B'}(\mathbf{r}', t)} \rangle_t \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}'_1 \int_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1) \overline{h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_2)} \langle E_{AG}(\mathbf{r}'_1, t) \overline{E_{AG}(\mathbf{r}'_2, t)} \rangle_t d\mathbf{r}'_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} |h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1)|^2 I_{BG}(\mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1,
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

soit encore,

$$I_{B'} = I_{BG} * |h|^2. \tag{8.36}$$

**Proposition 8.3.1.** *En lumière spatialement incohérente, un objectif est un filtre linéaire pour l'éclairement. Sa réponse percussionnelle (spatiale) incohérente est le carré du module de la réponse percussionnelle (spatiale) cohérente, quelle que soit la courbure de l'objet.*

**Remarque 8.3.1.** Le résultat de ce paragraphe, synthétisé par la relation (8.36), apparaîtra au paragraphe 10.5.5 comme un cas particulier de la formation d'une image en éclairage partiellement cohérent (voir la relation (10.129) p. 307).

### 8.3.2 Comparaison entre éclairage cohérent et éclairage incohérent

Avant de nous intéresser à la fonction de transfert en lumière incohérente, nous comparons l'image formée par un objectif en éclairage cohérent à celle formée en éclairage incohérent, quand l'objet représente une fréquence spatiale pure. Il s'agit d'illustrer la façon de manipuler la notion de fréquence spatiale en éclairage incohérent.

Sur l'objet, l'amplitude du champ réel associée à la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  s'écrit  $U(\mathbf{r}) = U_0 \cos 2\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$  ( $U_0$  est une constante dimensionnelle, supposée réelle), et si  $I_0 = U_0^2$ , l'intensité vibratoire correspondante est

$$I(\mathbf{r}) = I_0 \cos^2 2\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \frac{I_0}{2} (1 + \cos 4\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}). \tag{8.37}$$

L'intensité vibratoire possède une fréquence double de celle de l'amplitude du champ et elle contient en plus un fond continu correspondant à la partie constante de  $I(\mathbf{r})$ . Ce fond continu, le même quelle que soit la fréquence spatiale considérée, doit sa présence au fait qu'une intensité vibratoire est une grandeur positive et qu'il n'existe pas d'objet dont l'exitance serait celle d'une fréquence pure, à moins justement d'y inclure le fond continu. Nous allons cependant constater que cela n'empêche pas de traduire le comportement d'un système optique à l'aide de son effet sur une intensité vibratoire de la forme de celle donnée par la relation (8.37).

Reprenons le processus de formation d'une image par un objectif et, pour simplifier, supposons que la pupille soit une ouverture rectangulaire de largeur  $L$  (suivant  $x$ ) et de hauteur  $H$  (suivant  $y$ ) avec  $H \gg L$ , si bien qu'en pratique

il n'y a pas de filtrage suivant la direction  $y$  et que nous pouvons raisonner avec  $x$  (cela revient à prendre  $H$  infini ; la composante de la réponse percussionnelle selon  $y$  est une distribution de Dirac).

L'émetteur est  $\mathcal{A}$  et son image est  $\mathcal{A}'$ . En lumière cohérente, l'objet est le champ associé à la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$ , et comme nous ne considérons qu'une seule dimension, nous prenons  $\mathbf{F} = (F_0, 0)$ . Puisqu'il s'agit de comparer des éclairéments (ou des intensités vibratoires) il est plus judicieux de considérer le champ réel, parce que le champ complexe engendre un éclairément constant (homogène), quelle que soit la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$ . L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est

$$U_A(x, y) = U_0 \cos 2\pi F_0 x, \quad (8.38)$$

et la fonction pupille est (pour  $H$  infini)

$$p(\xi, \eta) = \text{rect}_L(\xi). \quad (8.39)$$

Si  $d$  est la distance de la pupille d'entrée au sommet de  $\mathcal{A}$ , la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  est transmise si, et seulement si,  $F_0 \leq L/|2\lambda d|$ . Dans ce cas, le champ sur  $\mathcal{A}'$  est

$$U_{A'}(x', y') = \frac{U_0}{g_s} \cos \frac{2\pi F_0 x'}{g_s}. \quad (8.40)$$

Dans le cas contraire  $U_{A'} = 0$ .

L'intensité vibratoire sur l'objet est ( $I_0 = U_0^2$ )

$$I_A(x, y) = I_0 \cos^2 2\pi F_0 x = \frac{I_0}{2} (1 + \cos 4\pi F_0 x), \quad (8.41)$$

et l'intensité vibratoire sur l'image est

$$I_{A'}(x', y') = \frac{I_0}{g_s^2} \cos^2 \frac{2\pi F_0 x'}{g_s} = \frac{I_0}{2g_s^2} \left( 1 + \cos \frac{4\pi F_0 x'}{g_s} \right). \quad (8.42)$$

**Remarque 8.3.2.** Le résultat précédent s'établit aussi à l'aide des relations (8.1) et (8.4) avec

$$U_{AG}(x', y') = \frac{U_0}{g_s} \cos \frac{2\pi F_0 x'}{g_s}, \quad (8.43)$$

et

$$h(x, y) = \frac{L}{\lambda d g_s} \frac{\sin \frac{\pi L x}{\lambda d g_s}}{\frac{\pi L x}{\lambda d g_s}} \delta(y), \quad (8.44)$$

qui se déduit de la relation (8.3). On utilise le résultat suivant. Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par

$$f(x) = \cos 2\pi F_0 x, \quad (8.45)$$

$$g(x) = F_1 \frac{\sin \pi F_1 x}{\pi F_1 x}, \quad (8.46)$$

où  $F_0$  et  $F_1$  sont deux nombres positifs. Si  $2F_0 \leq F_1$ , alors  $f * g = f$ , et si  $2F_0 > F_1$  alors  $f * g = 0$  (cela se montre en passant par les transformées de Fourier de  $f$  et  $g$ ) ; on retrouve finalement la relation (8.40).  $\diamond$

Si l'objet est spatialement incohérent, nous supposons que son intensité vibratoire est celle de la relation (8.41), laquelle est l'intensité vibratoire correspondant à une fréquence spatiale pure (en cohérent). L'éclairement de l'image se déduit de la relation (8.36) avec

$$|h(x, y)|^2 = \frac{L^2}{\lambda^2 d^2 g_s^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi L x}{\lambda d g_s}}{\frac{\pi L x}{\lambda d g_s}} \right)^2 \delta(y), \quad (8.47)$$

et en remplaçant  $I_{BG}$  par

$$I_{AG}(x', y') = \frac{I_0}{2g_s^2} \left( 1 + \cos \frac{4\pi F_0 x'}{g_s} \right). \quad (8.48)$$

Pour le calcul explicite nous définissons les fonctions  $f$  et  $g$  par

$$f(x) = \cos 4\pi F_0 x, \quad (8.49)$$

$$g(x) = \left( F_1 \frac{\sin \pi F_1 x}{\pi F_1 x} \right)^2. \quad (8.50)$$

Alors  $f * g = (F_1 - 2F_0)f$  si  $2F_0 \leq F_1$ , et  $f * g = 0$  si  $2F_0 > F_1$ . Il en résulte

$$I_{A'}(x', y') = \frac{I_0}{2g_s^2} \frac{L}{\lambda d g_s} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2F_0 \lambda |d|}{L} \right) \cos \frac{4\pi x' F_0}{g_s} \right], \quad (8.51)$$

si  $F_0 \leq L/|2\lambda d|$ , et  $I_{A'} = 0$  dans le cas contraire.

L'analyse de la relation (8.51) montre qu'en éclairage incohérent :

- le fond continu se transmet ;
- la modulation se transmet à la même fréquence que celle de l'objet (au grandissement transversal près) ;
- l'amplitude de la modulation est atténuée.

La conclusion est double. D'abord la notion de fréquence spatiale, bien que définie pour une onde cohérente (ou plus précisément pour l'amplitude du champ), permet d'analyser le comportement d'un système optique en lumière incohérente. D'autre part, la réponse du système optique dépend de l'éclairage, et les fréquences spatiales sont mieux transmises en lumière cohérente qu'en lumière incohérente puisque dans ce dernier cas il y a atténuation (la comparaison étant faite pour les éclairagements).

### 8.3.3 Spectre quadratique

En lumière incohérente, un système optique est linéaire pour l'intensité vibratoire, conformément à la relation (8.36). Nous appelons spectre quadratique du champ sur l'émetteur  $\mathcal{A}$  la transformée de Fourier  $\widehat{I}_A$  de son intensité vibratoire  $I_A$  [71]. Si  $U_A$  est l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$ , soit  $\widetilde{U}_A$  défini par

$$\widetilde{U}_A(\mathbf{r}) = U_A(-\mathbf{r}), \quad (8.52)$$

de telle sorte que de  $I_A = |U_A|^2$  résulte

$$\widehat{I}_A(\mathbf{F}) = \widehat{U}_A * \widetilde{\widehat{U}_A}(\mathbf{F}). \quad (8.53)$$

### 8.3.4 Fonction de transfert en lumière incohérente

La relation entre le spectre quadratique de l'image et celui de l'objet (ou plus exactement de l'image géométrique) s'obtient par transformation de Fourier à partir de la relation (8.36). Pour appliquer cette transformation, il est naturel d'introduire la transformée de Fourier  $H_{\text{inc}}$  de la réponse percussionnelle incohérente  $|h|^2$  : elle est telle que

$$H_{\text{inc}}(\mathbf{F}) = \widehat{h} * \widetilde{\widehat{h}}(\mathbf{F}). \quad (8.54)$$

La relation (8.36), appliquée à l'émetteur incohérent  $\mathcal{A}$  et à son image  $\mathcal{A}'$ , conduit à

$$\widehat{I}_{A'}(\mathbf{F}) = \widehat{I}_A(\mathbf{F}) H_{\text{inc}}(\mathbf{F}). \quad (8.55)$$

La fonction  $H_{\text{inc}}$  est la fonction de transfert (spatiale) incohérente du système optique. Or  $H_c$ , la fonction de transfert cohérente, est la transformée de Fourier de  $h$  (la réponse percussionnelle cohérente), et la relation (8.54) s'écrit

$$H_{\text{inc}}(\mathbf{F}) = H_c * \widetilde{\widehat{H}_c}(\mathbf{F}). \quad (8.56)$$

La relation (8.56) signifie que la fonction  $H_{\text{inc}}$  est la fonction d'autocorrélation<sup>8</sup> de la fonction  $H_c$ , ce qui s'écrit

$$H_{\text{inc}} = H_c \circledast H_c. \quad (8.57)$$

À une homothétie près, la fonction  $H_c$  est la fonction pupille (voir le paragraphe 8.2.4). Il en résulte que la fonction de transfert en lumière incohérente est la fonction d'autocorrélation de la fonction pupille. La relation (8.21) conduit à

<sup>8</sup> La fonction d'autocorrélation de la fonction  $f$  est la fonction  $g = f * \widetilde{\widehat{f}}$ . Explicitement, en dimension 1, on écrit  $g = f \circledast f$  avec

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x') \overline{f(x' - x)} dx'.$$

$$H_{\text{inc}}(\mathbf{F}') = \int_{\mathbb{R}^2} p(-\lambda dg_s \mathbf{F}) \overline{p(-\lambda dg_s [\mathbf{F} - \mathbf{F}'])} d\mathbf{F}. \quad (8.58)$$

Avec les paramètres de l'espace image, la relation (8.58) devient

$$H_{\text{inc}}(\mathbf{F}') = \int_{\mathbb{R}^2} p'(-\lambda' d' \mathbf{F}) \overline{p'(-\lambda' d' [\mathbf{F} - \mathbf{F}'])} d\mathbf{F}. \quad (8.59)$$

Il est habituel de normaliser la fonction de transfert incohérente et de définir la fonction

$$\mathcal{H}(\mathbf{F}') = \frac{H(\mathbf{F}')}{H(0)}. \quad (8.60)$$

Le module  $|\mathcal{H}(\mathbf{F}')|$  s'appelle la fonction de transfert de modulation du système optique [157].

**Remarque 8.3.3.** La fonction de transfert de modulation d'un objectif se mesure par diverses méthodes. La production de mires sinusoïdales à pas variable<sup>9</sup>, par exemple à l'aide d'un interféromètre à polarisation, conduit à une mesure point par point de cette fonction (c'est-à-dire fréquence spatiale par fréquence spatiale) [151]. D'autres méthodes se fondent sur l'expression de la fonction de transfert de modulation comme fonction d'autocorrélation de la fonction pupille [151].

### 8.3.5 Exemple d'une pupille circulaire

Soit un objectif à pupille circulaire. Le diamètre de la pupille d'entrée est  $D$ , et la fonction pupille est définie par  $p(\mathbf{r}) = \text{circ}_D(\mathbf{r})$ ; sa valeur est 1, si  $r \leq D/2$ , et 0 sinon. L'objet est à la distance  $d$  de la pupille d'entrée. Comme la fonction  $\text{circ}_D$  est réelle et paire, la fonction de transfert incohérente s'écrit

$$H_{\text{inc}}(\mathbf{F}') = \int_{\mathbb{R}^2} \text{circ}_D(\lambda dg_s \mathbf{F}) \text{circ}_D(\lambda dg_s [\mathbf{F} - \mathbf{F}']) d\mathbf{F}. \quad (8.61)$$

Le diamètre de la pupille de sortie est  $D' = |g_p|D$ , et

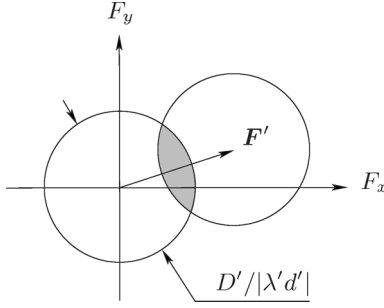
$$H_{\text{inc}}(\mathbf{F}') = \int_{\mathbb{R}^2} \text{circ}_{D'}(\lambda' d' \mathbf{F}) \text{circ}_{D'}(\lambda' d' [\mathbf{F} - \mathbf{F}']) d\mathbf{F}. \quad (8.62)$$

La valeur de cette intégrale est celle de l'aire commune à un disque de diamètre  $D'/|\lambda' d'|$  et à ce même disque translaté de  $\mathbf{F}'$ , comme le montre la figure 8.11.

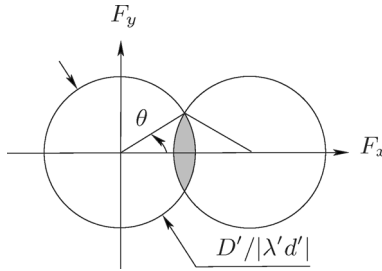
Pour le calcul explicite, on met à profit les symétries de la fonction  $\text{circ}_D$ , et on utilise l'angle  $\theta$  indiqué par la figure 8.12. Alors

$$F' = \frac{D'}{|\lambda' d'|} \cos \theta. \quad (8.63)$$

<sup>9</sup> Un telle mire a une exitance de la forme de celle donnée par la relation (8.37).



**FIG. 8.11.** La valeur au point  $\mathbf{F}'$  de la fonction d'autocorrélation de la fonction  $\text{circ}_{D'}(\lambda'd'\mathbf{F})$  est proportionnelle à la zone ombrée.



**FIG. 8.12.** Données pour le calcul explicite de la fonction d'autocorrélation de la fonction  $\text{circ}_{D'}(\lambda'd'\mathbf{F})$ .

L'aire commune aux deux disques est

$$S(\theta) = \frac{D'^2}{2\lambda'^2 d'^2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) , \quad (8.64)$$

et comme  $S(\theta)$  est maximal en  $\theta = \pi/2$ , la fonction  $S$  se normalise sous la forme

$$s(\theta) = \frac{2}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta) , \quad (8.65)$$

si bien que  $s(\pi/2) = 1$ . Par conséquent la fonction de transfert de modulation de l'instrument est

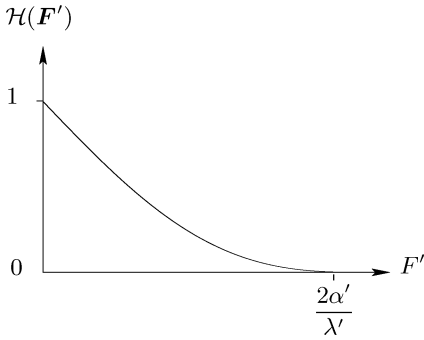
$$|\mathcal{H}(\mathbf{F}')| = s\left(\arccos \frac{|\lambda'd'|}{D'} F'\right) . \quad (8.66)$$

La figure 8.13 représente le profil de la fonction  $\mathcal{H}(\mathbf{F}')$  et la figure 8.14 la fonction même (cette fonction est ici à valeurs positives et donc égale à son module). On en conclut qu'en lumière incohérente un système optique à pupille circulaire est un filtre passe-bas, le module de la fréquence de coupure étant

$$F' = \frac{D'}{|\lambda'd'|} . \quad (8.67)$$

Si  $\alpha'$  est le demi-angle sous lequel on voit la pupille de sortie depuis le sommet de l'image, alors  $\alpha' = D'/|2d'|$ , et

$$F' = \frac{2\alpha'}{\lambda'} . \quad (8.68)$$



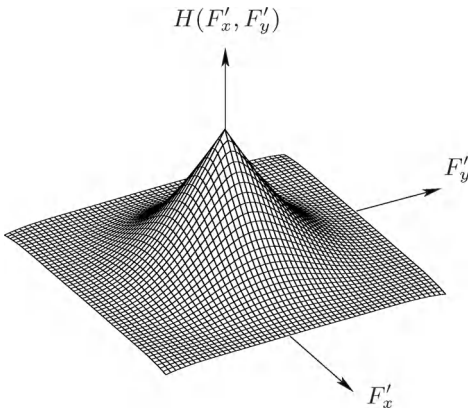
**FIG. 8.13.** Section de la fonction de transfert incohérente d'un système optique à pupille circulaire (voir la figure 8.14).

La fréquence spatiale  $F'$  de la relation (8.68) a une signification dans l'espace image. Dans l'espace objet il lui correspond la fréquence de coupure  $F$ , de module

$$F = |g_s F'| = \left| \frac{g_s D'}{\lambda' d'} \right| = \frac{D'}{|\lambda d g_p|} = \frac{D}{|\lambda d|} = \frac{2\alpha}{\lambda}, \quad (8.69)$$

où  $\alpha$  est le demi-angle sous lequel on voit la pupille d'entrée depuis le sommet de l'objet.

La comparaison des relations (8.69) et (8.31) montre que la fréquence de coupure en lumière incohérente est le double de la fréquence de coupure en lumière cohérente. Mais il existe en éclairage incohérent une atténuation pour les fréquences spatiales intermédiaires, qui n'existe pas en éclairage cohérent. D'autre part il est préférable de comparer l'éclairement dans les deux cas comme il a été fait au paragraphe 8.3.2 ; la fréquence de coupure est alors la même.



**FIG. 8.14.** Fonction de transfert incohérente d'un système optique centré à pupille circulaire.

**Remarque 8.3.4.** Les aberrations géométriques (non considérées ici) ont une grande influence sur la fonction de transfert de modulation d'un système réel et elles doivent être prises en compte pour comparer deux objectifs [157].

## 8.4 Caractérisation d'un instrument d'optique

### 8.4.1 La résolution d'un instrument d'optique

La fonction de transfert fournit une information sur la transmission des fréquences spatiales par un instrument d'optique. Il existe notamment une fréquence de coupure au-delà de laquelle l'instrument ne transmet plus rien. Or les hautes fréquences spatiales décrivent les détails fins de l'objet à reproduire et l'existence de la fréquence de coupure fait que certains détails de l'objet ne sont pas reproduits dans l'image. La fonction de transfert indique de plus comment chaque fréquence est transmise et elle contient pour cela une information complète sur le comportement de l'instrument. Cette information est particulièrement utile quand on s'intéresse aux effets des aberrations, dans la mesure où ces dernières ne changent pas la fréquence de coupure, mais se manifestent par une atténuation de la fonction de transfert de modulation plus marquée pour les fréquences intermédiaires [143, 157]. Par conséquent, la comparaison de deux instruments doit se faire à ces fréquences intermédiaires plutôt qu'à la fréquence de coupure (pour une même ouverture).

La notion de résolution d'un instrument est antérieure à celle de fonction de transfert. Même si elle contient une information moins riche, elle mérite une brève présentation à cause de son emploi encore fréquent. La résolution traduit la capacité qu'a un instrument de distinguer deux objets ponctuels. Il peut s'agir de deux points lumineux (deux étoiles observées au moyen d'un télescope) ou de deux points sombres sur un fond lumineux (deux personnes sur fond neigeux, observées de loin [157]).

Nous nous limitons au cas d'un objectif formant l'image d'un objet situé à distance finie et supposons la pupille circulaire. Soit un point lumineux  $A$  sur l'axe du système optique, à la distance  $d$  de la pupille d'entrée. Cet objet se représente par une distribution de Dirac  $U_0 \ell_0^2 \delta(\mathbf{r})$  (règle 2 p. 56) et, par définition, l'amplitude de l'image est la réponse percutiennelle spatiale du système, c'est-à-dire, en lumière cohérente

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{U_0 \ell_0^2}{\lambda^2 d^2 g_s^2} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda d g_s}\right), \quad (8.70)$$

où  $p$  est la fonction pupille de l'objectif et  $g_s$  le grandissement transversal pour la position de l'objet. Comme la pupille est circulaire de diamètre  $D$ , nous avons

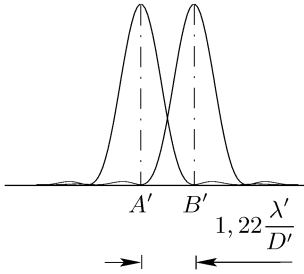
$$p(\mathbf{r}) = \text{circ}_D(\mathbf{r}), \quad (8.71)$$

et ensuite

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{\pi D^2 U_0 \ell_0^2}{2 \lambda d g_s} \frac{J_1\left(\frac{\pi D r'}{\lambda d g_s}\right)}{\pi D r'} = \frac{\pi D'^2 U_0 \ell_0^2}{2 \lambda' d'} \frac{J_1\left(\frac{\pi D' r'}{\lambda' d'}\right)}{\pi D' r'}, \quad (8.72)$$

où  $\lambda'$  est la longueur d'onde dans l'espace image,  $d'$  la distance de la pupille de sortie à l'image et  $D'$  le diamètre de la pupille de sortie.

Supposons qu'il y ait un autre point lumineux  $B$  près de  $A$ . À quelle condition peut-on distinguer les images  $A'$  et  $B'$  de  $A$  et  $B$ ? En vérité chaque image est une tache de diffraction (figure d'Airy pour une pupille circulaire). On distingue les deux images si les deux taches sont suffisamment séparées l'une de l'autre. Nous adoptons le critère suivant : on distingue les deux images si le maximum de la tache de diffraction associée à  $B'$  est au-delà du premier zéro de la tache associée à  $A'$  (critère de Rayleigh, fig. 8.15). Ce critère comporte une part d'arbitraire, et sans doute qu'un observateur exercé peut affirmer la présence de deux points quand les deux taches sont légèrement en deçà de la distance définie par le critère précédent. Le critère de Rayleigh se révèle d'emploi facile pour un calcul numérique explicite et, de toutes façons, il fixe un ordre de grandeur à la résolution, ce qui est finalement le plus important. (Il existe d'autres critères de résolution, comme celui de Sparrow [150] qui reste très proche du critère de Rayleigh<sup>10</sup>.)



**FIG. 8.15.** Limite de résolution angulaire d'un objectif à pupille circulaire de diamètre  $D$ , selon le critère de Rayleigh.

Pour  $z \neq 0$ , le premier 0 de la fonction  $J_1(\pi z)$  se trouve en  $z = 1,22$  ( $\pi z = 3,83$  [3]), de telle sorte que la distance minimale entre  $A'$  et  $B'$ , qui permet de les distinguer, est  $r'_0$ , tel que

$$r'_0 = 1,22 \frac{\lambda' d'}{D'} . \quad (8.73)$$

La résolution angulaire de l'objectif est

$$\alpha'_0 = 1,22 \frac{\lambda'}{D'} . \quad (8.74)$$

Exprimée dans l'espace objet, la résolution angulaire est

$$\alpha_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D} . \quad (8.75)$$

**Remarque 8.4.1.** Dans la réalité, l'analyse de la résolution est en général plus complexe que celle que nous venons de mener [92]. Il arrive qu'on doive distinguer deux points d'éclairements différents ; par exemple en astronomie l'image

<sup>10</sup> Selon le critère de Rayleigh, à la limite de résolution, la distance des maxima des éclairements des images est égale au rayon du disque central de la figure d'Airy. Selon le critère de Sparrow, cette distance est réduite à 0,84 fois ce rayon.

d'une étoile peut être masquée par le premier anneau de l'image d'une étoile de plus faible magnitude (qui est vue plus brillante) : la séparation des deux étoiles est supérieure à la limite de résolution donnée par le critère de Rayleigh, et pourtant une des deux est occultée. En éclairage cohérent le déphasage qui existe entre les images de deux points influe sur la résolution.

Le degré de cohérence de l'objet (cohérence partielle) a aussi une influence sur la résolution. L'analyse du paragraphe 10.5.5 montre comment l'éclairement d'une image dépend de la pupille de l'objectif qui la forme et de la cohérence partielle de l'objet. Elle s'applique à l'image de deux points lumineux.

Il faut donc prendre les résultats précédents comme indicatifs et fixant un ordre de grandeur.

**Remarque 8.4.2.** À la suite de la remarque 8.4.1 constatons qu'il serait plus correct de parler de la résolution d'un instrument d'optique pour un éclairage donné (tenant compte de la cohérence partielle).

### 8.4.2 Résolution et figure de diffraction de la pupille

La résolution d'un instrument d'optique est liée à sa réponse percussionnelle spatiale, c'est-à-dire à la transformée de Fourier de sa fonction pupille. Nous en déduisons que la résolution d'un instrument est caractérisée par la figure de diffraction d'une ouverture identique à sa pupille. Ainsi les exemples de figures de diffraction donnés au chapitre 5 fournissent un moyen d'analyser la résolution d'instruments ayant des pupilles de diverses formes. Cela reste vrai pour les antennes : les diagrammes de rayonnement, qui correspondent à des antennes à l'émission, servent aussi à analyser la résolution des antennes à la réception.

### 8.4.3 Application à la photographie

L'analyse du paragraphe 8.2.6 reste vraie en éclairage incohérent : un instrument d'optique à pupille circulaire est essentiellement un filtre passe-bas et le résultat schématisé par la figure 8.8 fournit encore un moyen d'évaluer si une fréquence spatiale est transmise ou non par l'instrument. Nous tirons de cela deux conclusions pour la photographie.

Considérons d'abord un objectif photographique formant l'image d'un objet placé à une distance fixée. Si l'objectif est stigmatique (stigmatisme approché), c'est-à-dire s'il n'est limité que par la diffraction, la meilleure résolution est obtenue à pleine ouverture et, pour chaque fréquence spatiale, le module de la fonction de transfert atteint le maximum possible à cette ouverture (autrement dit, pour une fréquence spatiale donnée, le module de la fonction de transfert de l'objectif est maximum si l'objectif fonctionne à pleine ouverture).

Dans la réalité les aberrations modifient ce résultat<sup>11</sup>. Pour une ouverture donnée, la fréquence de coupure n'est pas affectée par les aberrations [157] ; ces

<sup>11</sup> Nous ne mentionnons que les aberrations géométriques. Le chromatisme complique encore la situation, mais dans le même sens.

dernières se traduisent, pour une fréquence spatiale donnée, par une diminution du module de la fonction de transfert, et cela affecte la qualité de l'image. L'effet des aberrations est surtout sensible aux fréquences intermédiaires [157]. Dans la pratique, un objectif présente un optimum à environ deux à trois diaphragmes de la pleine ouverture (par exemple, un objectif « qui ouvre à  $f/2$  » donnera le meilleur résultat à  $f/4$  ou  $f/5,6$ ). Ce résultat se transpose à l'objectif d'un agrandisseur.

Nous établissons ensuite une comparaison entre les objectifs de divers formats ( $6 \times 6$ ,  $24 \times 36$ , appareil numérique à détecteur à transfert de charges (*CCD*) ou *CMOS* d'une dizaine de millimètres de côtés). La qualité finale d'une image dépend du nombre de points résolus que le support photographique est capable d'enregistrer. Nous voulons montrer cependant comment les résultats précédents fixent une limite à ce qui peut être vu sur l'objet. De l'analyse schématisée par les figures 8.8 ou 8.10 il ressort que de deux objectifs donnés, celui qui a le plus grand diamètre<sup>12</sup> est celui qui peut transmettre les plus hautes fréquences spatiales, c'est-à-dire les détails les plus fins de l'objet, cela sans considération des distances focales, ni des ouvertures relatives. Ce résultat avantage les objectifs de grand format ; ces derniers sont toutefois plus difficiles à corriger des aberrations (par exemple l'aberration sphérique transversale croît comme le cube du diamètre de la pupille).

**Remarque 8.4.3.** Un objectif de microscope a une très grande résolution et un petit diamètre. Cela ne contredit pas ce qui précède : l'objet observé étant placé très près de l'objectif, les hautes fréquences spatiales sont bien collectées, conformément au schéma de la figure 8.8.

## 8.5 Analyse de la formation des images par la méthode de la transformation de Fourier fractionnaire

Nous proposons une généralisation du théorème 4 (p. 221) à des émetteurs non nécessairement centrés sur la pupille d'entrée de l'objectif. Le résultat que nous allons établir se fonde sur la notion de produit de convolution fractionnaire, lui-même lié à la transformation de Fourier fractionnaire.

### 8.5.1 Produit de convolution fractionnaire

Le produit de convolution fractionnaire d'ordre  $\alpha$  des fonctions  $f$  et  $g$  se définit par la relation

$$f *^\alpha g = \mathcal{F}_{-\alpha}[\mathcal{F}_\alpha[f] \mathcal{F}_\alpha[g]], \quad (8.76)$$

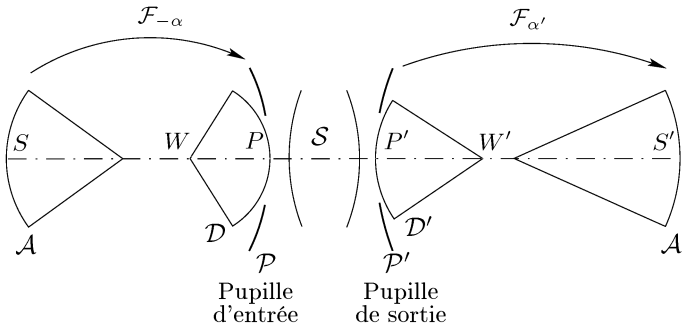
où  $\mathcal{F}_\alpha$  désigne la transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . En particulier  $f *^0 g = fg$ , et  $f *^{\pi/2} g = f * g$ .

<sup>12</sup> En toute rigueur, c'est le diamètre de la pupille d'entrée qui compte.

### 8.5.2 Imagerie en lumière cohérente

Nous mentionnons seulement les principales étapes qui conduisent au résultat ; les détails des calculs se trouvent dans un article publié par ailleurs [185]. Soit un objectif de pupille d'entrée  $\mathcal{P}$  de sommet  $P$ , et de pupille de sortie  $\mathcal{P}'$  de sommet  $P'$  (ces pupilles sont sphériques comme images cohérentes de la pupille matérielle (iris) qui existe dans le système). Le grandissement transversal pour la conjugaison des pupilles est  $g_p$ .

L'émetteur est  $\mathcal{A}$ , de sommet  $S$ , situé à la distance  $d$  de  $P$ , et son image est la sphère  $\mathcal{A}'$ , de sommet  $S'$ , à la distance  $d'$  de  $P'$  (fig. 8.16).



**FIG. 8.16.** Formation d'une image analysée par la méthode de la transformation de Fourier fractionnaire.

Soit  $\mathcal{D}$  une sphère intermédiaire, tangente à  $\mathcal{P}$  en  $P$  et centrée en  $W$  (son rayon de courbure est  $R_D = \overline{PW}$ ). L'image de  $\mathcal{D}$  est la sphère  $\mathcal{D}'$ , tangente à  $\mathcal{P}'$  en  $P'$ , centrée en  $W'$ , l'image paraxiale de  $W$  (fig. 8.16). Son rayon de courbure est  $R_{D'}$ .

La formation de l'image de  $\mathcal{A}$  se décompose en un transfert réciproque de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$ , une imagerie cohérente de  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{D}'$  avec ouverture limitée, et un transfert direct de  $\mathcal{D}'$  à  $\mathcal{A}'$ . La raison du choix d'un transfert réciproque est la même qu'au paragraphe 7.1.1 : cela permet la composition des transformations de Fourier fractionnaires concernées. Il est possible de choisir le rayon  $R_D$  de  $\mathcal{D}$  de telle façon que le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  s'effectue par une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre réel. On montre alors qu'il en est de même du transfert de  $\mathcal{D}'$  à  $\mathcal{A}'$ .

Le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{D}$  est relatif aux paramètres  $\mu$ ,  $\varepsilon$  et  $\alpha$ , et il se traduit par la transformation  $\mathcal{F}_{-\alpha}$  (transfert réciproque). Le transfert de  $\mathcal{D}'$  à  $\mathcal{A}'$  est lié aux paramètres  $\mu'$ ,  $\varepsilon'$  et  $\alpha'$ , et il se traduit par la transformation  $\mathcal{F}_{\alpha'}$ .

Si  $p$  et  $p'$  sont les fonctions pupilles, les fonctions pupilles réduites se définissent ainsi

$$p_s(\boldsymbol{\sigma}) = p\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_D}\boldsymbol{\sigma}\right), \quad (8.77)$$

$$p'_s(\boldsymbol{\sigma}') = p'\left(\sqrt{\lambda'\varepsilon' R_{D'}}\boldsymbol{\sigma}'\right), \quad (8.78)$$

où  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont les variables réduites respectives sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

On montre les deux lemmes suivants [185].

**Lemme 8.5.1.** *Les variables et amplitudes réduites sont telles que*

$$V_{D'}(\sigma') = \frac{1}{g_p} p_s(\sigma') V_D(\sigma'), \quad \text{si } g_p > 0, \quad (8.79)$$

$$V_{D'}(\sigma') = \frac{1}{g_p} p_s(-\sigma') V_D(-\sigma'), \quad \text{si } g_p < 0. \quad (8.80)$$

Le lemme 8.5.1 est nécessaire pour composer les deux transformations  $\mathcal{F}_{-\alpha}$  et  $\mathcal{F}_{\alpha'}$ . Le résultat de cette composition s'exprime, pour les amplitudes réduites sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ , sous la forme

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_p} \exp[i(\alpha' - \alpha)] \frac{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_{\alpha'}[p_s \mathcal{F}_{-\alpha}[V_A]](\rho'),$$

si  $g_p > 0$ ,

(8.81)

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_p} \exp[i(\alpha' - \alpha)] \frac{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_{\alpha' + \pi}[p_s \mathcal{F}_{-\alpha}[V_A]](\rho'),$$

si  $g_p < 0$ .

(8.82)

**Lemme 8.5.2.** *Les ordres  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont tels que*

i.  $\alpha' = \alpha$  si  $g_p g_s > 0$ , et dans ce cas

$$\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha' = \frac{g_p}{g_s} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha), \quad (8.83)$$

ii.  $\alpha' = \alpha \pm \pi$  si  $g_p g_s < 0$ , et alors

$$\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha' = -\frac{g_p}{g_s} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha). \quad (8.84)$$

On déduit du lemme 8.5.2 et des relations (8.81) et (8.82)

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_s} \mathcal{F}_{\alpha}[p_s \mathcal{F}_{-\alpha}[V_A]](\rho'), \quad \text{si } g_s > 0, \quad (8.85)$$

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_s} \mathcal{F}_{\alpha}[p_s \mathcal{F}_{-\alpha}[V_A]](-\rho'), \quad \text{si } g_s < 0. \quad (8.86)$$

Nous exprimons maintenant les résultats précédents en termes de réponse percussionnelle. Nous introduisons la fonction  $h_{\alpha} = \mathcal{F}_{\alpha}[p_s]$ , et écrivons les relations (8.85) et (8.86) sous la forme

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_s} \left( h_{\alpha} \overset{-\alpha}{*} V_A \right) (\rho'), \quad \text{si } g_s > 0, \quad (8.87)$$

$$V_{A'}(\rho') = \frac{1}{g_s} \left( h_{\alpha} \overset{-\alpha}{*} V_A \right) (-\rho'), \quad \text{si } g_s < 0. \quad (8.88)$$

Pour comparer les résultats précédents avec la relation (8.4), nous utilisons l'amplitude réduite  $V_{AG}$ , associée à l'image géométrique  $U_{AG}$ , définie par

$$V_{AG}(\boldsymbol{\rho}) = U_{AG} \left( \frac{\sqrt{\lambda' \varepsilon' R_{D'}}}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} \boldsymbol{\rho} \right), \quad (8.89)$$

et telle que

$$V_{AG}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{g_s} V_A(\boldsymbol{\rho}), \quad \text{si } g_s > 0, \quad (8.90)$$

$$V_{AG}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{g_s} V_A(-\boldsymbol{\rho}), \quad \text{si } g_s < 0. \quad (8.91)$$

Nous arrivons à

$$V_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = \left( h_\alpha \overset{-\alpha}{*} V_{AG} \right) (\boldsymbol{\rho}'), \quad \text{si } g_s > 0, \quad (8.92)$$

$$V_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = \left( h_\alpha \overset{-\alpha}{*} V_{AG} \right) (-\boldsymbol{\rho}'), \quad \text{si } g_s < 0. \quad (8.93)$$

Les relations (8.92) et (8.93) sont une autre forme des relations (8.85) et (8.86) et constituent le principal résultat de la formation des images en lumière cohérente. Elles généralisent la relation (8.4) et sont valables pour tout émetteur, qu'il soit centré ou non sur la pupille d'entrée de l'objectif. Tout cela se synthétise dans la proposition suivante.

**Proposition 8.5.1.** *Soit un système optique centré formant l'image  $\mathcal{A}'$  d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ . Soit  $\alpha$  l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire qui exprime le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à la pupille d'entrée sous la forme d'un transfert réciproque. La formation de l'image cohérente de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{A}'$  se traduit par un produit de convolution fractionnaire d'ordre  $-\alpha$ . Plus précisément, la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $-\alpha$  (si  $\alpha < 0$ ) ou d'ordre  $\pi - \alpha$  (si  $\alpha > 0$ ) du champ réduit sur  $\mathcal{A}'$  est le produit de la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $-\alpha$  ou  $\pi - \alpha$  du champ réduit sur  $\mathcal{A}$  avec la fonction pupille réduite.*

**Interprétation.** La proposition 8.5.1 contient le théorème 4 comme cas particulier : ce dernier correspond à  $\alpha = \pi/2$ . Cependant il y a une sorte d'anomalie dans le théorème 4, à laquelle échappe la proposition 8.5.1. Cette anomalie vient non seulement de la restriction d'un émetteur centré sur la pupille d'entrée, mais d'une autre restriction qui se déduit de la première : le théorème 4 ne s'applique pas par exemple à l'imagerie pupillaire. Autrement dit, il ne couvre pas tous les cas d'imagerie ! Son domaine de validité est limité par la courbure de l'émetteur, mais aussi par la distance de l'objet à la pupille d'entrée.

Que devient la proposition 8.5.1 dans le cas où l'objet  $\mathcal{A}$  se confond avec la pupille d'entrée de l'objectif<sup>13</sup> ? L'image est la pupille de sortie. Dans ce cas

<sup>13</sup> En toute rigueur il faudrait considérer la pupille d'entrée avec un rayon de courbure, puisqu'il s'agit de l'image cohérente de la pupille physique (plane en général).

$\alpha = 0$  et la fonction  $h_\alpha$  est la fonction pupille ; de plus le passage des variables spatiales aux variables réduites est le même sur la pupille d'entrée et sur la pupille de sortie, si bien que la relation (8.92) donne l'amplitude du champ sur la pupille de sortie ( $U_{P'}$ ) en fonction de celle sur la pupille d'entrée ( $U_P$ ) sous la forme

$$U_{P'}(\mathbf{s}') = U_P(\mathbf{s}') p(\mathbf{s}'), \quad (8.94)$$

en supposant positif le grandissement pupillaire. La formation de l'image de la pupille d'entrée s'exprime par un simple produit ! C'est d'ailleurs ce que nous avons implicitement supposé au paragraphe 8.2.

La proposition 8.5.1 complète le théorème 4 pour un émetteur non centré sur la pupille d'entrée. Il le complète également pour un émetteur proche de la pupille d'entrée, et cela grâce à la notion de produit de convolution fractionnaire. Grosso modo, pour un objet éloigné de la pupille, la formation d'une image s'exprime par la convolution de l'objet avec la transformée de Fourier de la fonction pupille ; près de la pupille d'entrée, la formation d'une image s'exprime par un produit simple. Comme pour la diffraction, il y a continuité du processus de formation d'une image entre les deux cas extrêmes cités. Le cas général, intermédiaire, s'exprime par une convolution fractionnaire d'ordre compris entre  $\pi/2$  et 0, qui relie les transformées de Fourier fractionnaires des amplitudes réduites sur l'objet et sur son image.

### 8.5.3 Imagerie en lumière incohérente

En lumière incohérente un système optique est linéaire pour l'intensité vibratoire, et la courbure de l'objet et de l'image n'ont pas d'importance. Il est utile de vérifier qu'on arrive de nouveau à ce résultat par la méthode de la transformation de Fourier fractionnaire.

Si  $I_A$  et  $I_{A'}$  sont les intensités vibratoires de l'objet et de l'image, les intensités (vibratoires) réduites sont

$$J_A(\boldsymbol{\rho}) = |V_A(\boldsymbol{\rho})|^2 = I_A \left( \frac{\sqrt{\lambda \varepsilon R_D}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \boldsymbol{\rho} \right), \quad (8.95)$$

$$J_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = |V_{A'}(\boldsymbol{\rho}')|^2 = I_{A'} \left( \frac{\sqrt{\lambda' \varepsilon' R_{D'}}}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} \boldsymbol{\rho}' \right), \quad (8.96)$$

$$J_{AG}(\boldsymbol{\rho}') = |V_{AG}(\boldsymbol{\rho}')|^2 = I_{AG} \left( \frac{\sqrt{\lambda' \varepsilon' R_{D'}}}{\cos \alpha' + \varepsilon' \sin \alpha'} \boldsymbol{\rho}' \right). \quad (8.97)$$

**Proposition 8.5.2.** *Si  $h_p$  est la fonction définie par*

$$h_p(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}{\sqrt{\lambda \varepsilon R_D} \sin^2 \alpha} \widehat{p}_s \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{\sin \alpha} \right), \quad (8.98)$$

*la réponse percussionnelle incohérente pour les intensités réduites est  $|h_p|^2$ . Explicitement*

$$J_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = (J_{AG} * |h_p|^2)(\boldsymbol{\rho}'), \quad \text{si } g_s > 0, \quad (8.99)$$

$$J_{A'}(\boldsymbol{\rho}') = (J_{AG} * |h_p|^2)(-\boldsymbol{\rho}'), \quad \text{si } g_s < 0. \quad (8.100)$$

Il reste à montrer que le résultat de la proposition 8.5.2 n'est rien d'autre que le résultat classique (celui qui s'obtient selon la théorie classique<sup>14</sup> [97, 157]).

**Proposition 8.5.3.** *Les relations (8.99) et (8.100) sont équivalentes à la relation (8.36) (où  $I_{B'}$  est remplacé par  $I_{A'}$  et  $I_{BG}$  par  $I_{AG}$ ).*

Les preuves des propositions 8.5.2 et 8.5.3 sont proposées en exercices.

## 8.6 Exercices

**Exercice 8.1.** Démontrer la relation (8.42) à partir des relations (8.1) et (8.4). Pour cela définir d'abord la réponse percussionnelle spatiale correspondant à la pupille considérée, conformément à la relation (8.3).

**Exercice 8.2.** Démontrer les propositions 8.5.2 et 8.5.3.

**Exercice 8.3 (Loi de Foucault).** Montrer que la résolution (angulaire) d'un télescope ne dépend que du diamètre de celui-ci. Vérifier la loi empirique de Foucault qui donne, à  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , une résolution égale à  $13''/D$ , où  $D$  est le diamètre de la pupille exprimé en centimètres.

**Exercice 8.4.** On souhaite observer une grille sinusoïdale périodique, de période  $p = 20 \mu\text{m}$ , à l'aide d'un objectif de distance focale  $f' = 10 \text{ mm}$ . La mise au point se fait 5 mm avant le foyer objet. La longueur d'onde est  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ . Quelle doit être l'ouverture de l'objectif pour que la grille soit effectivement résolue ? On suppose l'éclairage cohérent et on assimile l'objectif à une lentille mince dont la monture sert de pupille.

<sup>14</sup> Il est normal de retrouver ainsi les résultats de la théorie classique en éclairage incohérent, car ce qui distingue l'approche métaxiale (même à travers son expression fractionnaire) c'est notamment la prise en compte de termes de phase quadratique, lesquels n'influencent pas sur l'éclairement. Il en va autrement en éclairage cohérent, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, et plus généralement en éclairage partiellement cohérent (voir le chapitre 10).

## Chapitre 9

# Diffraction polychromatique

En prévision de l'étude de la cohérence, il convient de s'intéresser aux ondes à spectre étroit et plus généralement aux ondes polychromatiques. L'étude qui suit reste dans le cadre d'une théorie scalaire de la diffraction et se fonde sur les résultats établis dans les chapitres antérieurs.

### 9.1 La notion de signal et ses représentations

Il est pertinent de concevoir un signal comme une grandeur abstraite qu'on connaît à travers des représentations [18]. Avant de voir comment cela s'applique aux signaux optiques, nous commençons, à titre d'illustration, par l'exemple des ondes sonores.

Il existe essentiellement deux manières de décrire le signal émis par un diapason qui produit le « la » de référence (dont la fréquence est  $\nu_0 = 440$  Hz). On a recours d'abord à la représentation temporelle selon laquelle la vibration sonore en un point de l'espace est proportionnelle à  $\cos 2\pi\nu_0 t$ . Avec des notations complexes, on utilise la fonction  $f$  telle que

$$f(t) = a_0 \exp[2i\pi\nu_0 t], \quad (9.1)$$

où  $a_0$  est un facteur dimensionnel (par exemple une pression). La fonction  $f$  est la représentation temporelle du signal.

Une autre façon de voir les choses considère que le diapason émet un son de fréquence  $\nu_0$ . Avec cette seule donnée numérique, le son est parfaitement défini (parce qu'on sait qu'il est sinusoïdal) et cela constitue la description fréquentielle du signal. Mathématiquement, cette représentation s'écrit sous la forme d'une distribution de Dirac  $\delta(\nu - \nu_0)$  (au facteur dimensionnel  $a_0$  près).

En résumé, le signal sonore émis par un diapason a deux représentations : une représentation temporelle sous la forme d'une fonction exponentielle ; une représentation fréquentielle sous la forme d'une distribution de Dirac. Ainsi  $a_0 \exp[2i\pi\nu_0 t]$  et  $a_0 \delta(\nu - \nu_0)$  représentent le *même* signal, mais dans deux espaces différents, lesquels sont duaux pour la transformation de Fourier : on passe en effet de la représentation temporelle à la fréquentielle par une transformation de Fourier. Ni la fonction exponentielle, ni la distribution de Dirac ne *sont* le signal : elles n'en sont que des représentations.

Ce qui précède s'étend à des signaux non monochromatiques. Un signal abstrait est noté  $|S\rangle$  ; sa représentation temporelle est la fonction (ou distribution)  $S$  et sa représentation fréquentielle la fonction (ou distribution)  $\widehat{S}$ .

L'énergie d'un signal  $|S\rangle$  à énergie finie est

$$E = \int_{\mathbb{R}} |S(t)|^2 dt, \quad (9.2)$$

et le théorème de Parseval (voir l'appendice B) conduit à écrire

$$E = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{S}(\nu)|^2 d\nu. \quad (9.3)$$

L'égalité des deux intégrales précédentes résulte d'un calcul mathématique, mais la notion de signal abstrait et de ses représentations en fait une nécessité physique. De fait, comme  $S$  et  $\widehat{S}$  représentent le même signal, calculer l'énergie de ce dernier à partir de sa représentation temporelle ou de sa représentation fréquentielle doit produire le même résultat. C'est justement ce qu'exprime le théorème de Parseval.

## 9.2 Représentations d'un signal optique

### 9.2.1 Représentation spatio-temporelle

Soit  $\mathcal{A}$  un émetteur ou un récepteur sphérique. L'amplitude du champ électrique à l'instant  $t$  et au point  $\mathbf{r}$  de  $\mathcal{A}$  est  $E_A(\mathbf{r}, t)$  : c'est une représentation d'un signal abstrait  $|E_A\rangle$ . Il s'agit de la représentation spatio-temporelle puisqu'elle se réfère à une variable d'espace (à deux dimensions) et à une variable temporelle.

Le champ  $E_A(\mathbf{r}, t)$  est le champ analytique associé au champ réel (voir l'appendice D) ; cela est implicite par la suite. En toute généralité  $E_A$  est une distribution tempérée ; nous conservons cependant l'écriture fonctionnelle  $E_A(\mathbf{r}, t)$ .

Enfin, dans ce chapitre, le signal  $|E_A\rangle$  est déterministe (ou certain). Ce n'est qu'au chapitre 10 que nous traiterons de signaux aléatoires.

### 9.2.2 Représentation mixte. Composante spectrale

La représentation mixte de  $|E_A\rangle$ , nous disons aussi sa composante spectrale, notée  $e_A$ , se déduit de la représentation spatio-temporelle par une transformation de Fourier temporelle

$$E_A(\mathbf{r}, t) \xrightarrow{t} e_A(\mathbf{r}, \nu), \quad (9.4)$$

c'est-à-dire, quand l'écriture intégrale est licite,

$$e_A(\mathbf{r}, \nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu t} E_A(\mathbf{r}, t) dt. \quad (9.5)$$

La composante spectrale est mixte en ce sens qu'elle se réfère à une variable d'espace et à une variable fréquentielle.

Pour une onde monochromatique de fréquence  $\nu_0$ , la composante spectrale  $e_A(\mathbf{r}, \nu_0)$  est reliée à l'amplitude complexe du champ, notée  $U_A(\mathbf{r})$  jusqu'à présent, par la relation<sup>1</sup>

$$e_A(\mathbf{r}, \nu) = U_A(\mathbf{r}) \delta(\nu - \nu_0). \quad (9.6)$$

La relation (9.6) se déduit par exemple de la relation (1.2) p. 17 en remplaçant  $\nu$  par  $\nu_0$ . Elle conduit à décrire la propagation d'une onde polychromatique au moyen de sa composante spectrale, en utilisant les résultats des chapitres antérieurs ; c'est ce qui est fait par la suite dans ce chapitre.

### 9.2.3 Représentation fréquence totale

La représentation « fréquence totale » de  $|E_A\rangle$  s'obtient en appliquant à la composante spectrale  $e_A(\mathbf{r}, \nu)$  une transformation de Fourier spatiale (à deux dimensions) : elle se note  $\mathcal{E}_A$  et

$$e_A(\mathbf{r}, \nu) \xrightarrow{\mathbf{r}} \mathcal{E}_A(\mathbf{F}, \nu). \quad (9.7)$$

soit encore, si  $e_A(\mathbf{r}, \nu)$  est intégrable,

$$\mathcal{E}_A(\mathbf{F}, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}} e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r}. \quad (9.8)$$

Pour une onde monochromatique, la représentation fréquence totale est liée au spectre angulaire  $V$  (voir le chapitre 2) de la façon suivante

$$\mathcal{E}_A(\mathbf{F}, \nu) = \frac{v^2}{\nu_0^2} V\left(\frac{v\mathbf{F}}{\nu_0}\right) \delta(\nu - \nu_0), \quad (9.9)$$

où  $v$  est la vitesse de phase de l'onde dans le milieu de propagation.

### 9.2.4 Représentation fréquentio-temporelle

Il existe une quatrième représentation, qui se rapporte aux variables  $\mathbf{F}$  et  $t$ , et qui s'obtient à partir de  $E_A(\mathbf{r}, t)$  par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier spatiale, sous la forme

$$\varepsilon_A(\mathbf{F}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}} E_A(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (9.10)$$

C'est la représentation fréquentio-temporelle de  $|E_A\rangle$ .

<sup>1</sup> En toute rigueur, pour que  $e_A$  et  $U_A$  aient la même dimension, il faudrait homogénéiser la distribution de Dirac, c'est-à-dire écrire  $\delta[(\nu - \nu_0)/f_0]$ , où  $f_0$  est l'unité de fréquence (1 Hz en S.I.), comme il est fait au paragraphe 3.4.1 pour la variable spatiale.

### 9.2.5 Losange de Fourier

Les quatre représentations précédentes sont associées à un même signal « champ électrique »  $|E_A\rangle$  et contiennent chacune la même information sur lui. Tout cela se synthétise à l'aide du schéma suivant, appelé losange de Fourier<sup>2</sup>,

$$\begin{array}{ccc}
 & E_A(\mathbf{r}, t) & \\
 \swarrow \scriptstyle r & & \searrow \scriptstyle t \\
 \varepsilon_A(\mathbf{F}, t) & & e_A(\mathbf{r}, \nu) \\
 \nwarrow \scriptstyle t & & \nearrow \scriptstyle r \\
 & \mathcal{E}_A(\mathbf{F}, \nu) &
 \end{array} \quad (9.11)$$

(Dans ce schéma  $\rightleftharpoons$  représente une transformation de Fourier (et son inverse), et la lettre placée à côté de ce symbole désigne la variable concernée par la transformation directe.)

## 9.3 Opérateur linéaire de transfert du champ

### 9.3.1 Généralité du modèle de transfert du champ

Le transfert du champ sous la forme d'un opérateur linéaire se rencontre dans diverses situations dont il est important de souligner la similitude formelle.

1. *Diffraction.* Au chapitre 3 (relation (3.34) p. 52), le transfert par diffraction de l'amplitude du champ associée à une onde monochromatique, depuis un émetteur  $\mathcal{A}$  jusqu'à un récepteur  $\mathcal{B}$ , se décrit par une relation de la forme

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (9.12)$$

où  $h_{BA}$  est la réponse percussionnelle spatiale du phénomène de diffraction. La forme explicite de  $h_{BA}$  est connue (voir la relation (3.35) p. 53) mais ne sera utilisée que plus loin. Cette modélisation vaut pour la diffraction de Fraunhofer comme pour celle de Fresnel.

2. *Imagerie.* Le transfert du champ par imagerie s'exprime par une relation du même type que la relation (9.12) : c'est ce que montrent la relation (8.4) ou la relation (8.15), qui se ramènent à

$$U_{A'}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{A'A}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (9.13)$$

où la sphère image  $\mathcal{A}'$  tient lieu de récepteur, et où  $h_{A'A}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = h(\mathbf{s} - \mathbf{r})$ , la fonction  $h$  étant donnée par la relation (8.3) p. 221.

<sup>2</sup> Emprunté à G. Bonnet [20].

3. *Imagerie et diffraction.* Les relations (4.40) ou (4.42), qui expriment le transfert du champ d'un émetteur quelconque vers un récepteur quelconque après traversée d'un système optique centré, se mettent sous la forme

$$U_{B'}(\mathbf{s}') = \int_{\mathbb{R}^2} h_{B'A}(\mathbf{s}', \mathbf{r}) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (9.14)$$

c'est-à-dire sous la forme de la relation (9.12).

4. *Filtrage.* Des opérations de filtrage, étudiées au chapitre 16, se traduisent par une relation du type de (9.12), appliquée au signal d'entrée d'un processeur optique.

En conclusion, la relation (9.12), prise comme modèle de transfert d'un champ monochromatique, traduit une situation générale qui inclut l'imagerie, la diffraction-propagation et certaines opérations de traitement du signal. Nous allons en tirer quelques conséquences pour le transfert du champ en lumière polychromatique, puis examinerons plus en détail le transfert par diffraction.

**Remarque 9.3.1.** Une écriture plus générale que celle de la relation (9.12), déjà utilisée au paragraphe 3.5, est

$$U_B(\mathbf{s}) = \langle h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}), U_A(\mathbf{r}) \rangle. \quad (9.15)$$

Par exemple, dans le cas particulier de l'imagerie géométrique – telle qu'elle est développée au chapitre 4 –, la fonction  $h_{A'A}$  devient une distribution de Dirac, et la relation (9.15) s'écrit

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} \left\langle \delta\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s} - \mathbf{r}\right), U_A(\mathbf{r}) \right\rangle, \quad (9.16)$$

où  $g_s$  est le grandissement transversal de l'imagerie entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ .

### 9.3.2 Le transfert du champ en représentation mixte. Gain complexe

Dans la relation (9.12), la fréquence (temporelle) est implicite. Si l'onde émise par  $\mathcal{A}$  est monochromatique (de fréquence  $\nu_0$ ), la composante spectrale du champ sur  $\mathcal{A}$  s'écrit

$$e_A(\mathbf{r}, \nu) = U_A(\mathbf{r}) \delta(\nu - \nu_0), \quad (9.17)$$

et celle sur le récepteur  $\mathcal{B}$

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = U_B(\mathbf{s}) \delta(\nu - \nu_0). \quad (9.18)$$

L'amplitude  $U_B$  se déduit de l'amplitude  $U_A$  par la relation (9.12) et il en résulte

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = \delta(\nu - \nu_0) \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu_0) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (9.19)$$

Toutefois, dans la relation (9.19),  $h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu_0)$  n'est rien d'autre que  $h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  avec, en plus, l'écriture explicite de la fréquence.

Si l'onde considérée est polychromatique, le procédé antérieur se répète pour chaque fréquence du spectre, et de

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu_0) \delta(\nu - \nu_0) = h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) \delta(\nu - \nu_0), \quad (9.20)$$

résulte

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r}. \quad (9.21)$$

La relation (9.21) vaut pour les composantes spectrales de champs polychromatiques sur  $\mathcal{A}$  et sur  $\mathcal{B}$ .

La relation (9.15) conduit pour sa part à

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = \langle h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu), e_A(\mathbf{r}, \nu) \rangle, \quad (9.22)$$

plus générale que la relation (9.21).

Nous appelons « gain complexe<sup>3</sup> » la fonction (ou distribution)  $h_{BA}$  (plus précisément, c'est le gain complexe du transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$ ).

### 9.3.3 Le transfert du champ en représentation spatio-temporelle. Réponse percussionnelle

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{B}$  se déduit de  $e_B$  par une transformation de Fourier inverse temporelle, soit explicitement

$$\begin{aligned} E_B(\mathbf{s}, t') &= \int_{\mathbb{R}} \exp[2i\pi\nu t'] e_B(\mathbf{s}, \nu) d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\nu \exp[2i\pi\nu t'] \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \int_{\mathbb{R}} dt E_A(\mathbf{r}, t) \int_{\mathbb{R}} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) \exp[-2i\pi\nu(t - t')] d\nu. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Il est naturel d'introduire la transformée de Fourier inverse temporelle de la fonction  $h_{BA}$  : c'est  $H_{BA}$ , telle que

$$H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) \rightleftharpoons h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu). \quad (9.24)$$

La relation (9.23) devient

$$\begin{aligned} E_B(\mathbf{s}, t') &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t' - t) E_A(\mathbf{r}, t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) * E_A(\mathbf{r}, t)](t') d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (9.25)$$

<sup>3</sup> Nous choisissons ce terme plutôt que celui de « réponse percussionnelle », parce que la fonction  $h_{BA}$  n'est la réponse percussionnelle que pour les variables d'espace. Cela devrait éviter de la confondre avec la réponse percussionnelle spatio-temporelle introduite au paragraphe suivant (voir la remarque 4 p. 221). Le terme de gain complexe a déjà été employé au chapitre 3.

où le produit de convolution est temporel.

La fonction  $H_{BA}$  est la réponse percussionnelle spatio-temporelle associée à la propagation du champ de l'émetteur  $\mathcal{A}$  au récepteur  $\mathcal{B}$ . Elle est invariante par translation temporelle, ce qui signifie que, vue comme un opérateur, la diffraction–propagation est un système linéaire stationnaire (temporellement).

La fonction  $H_{BA}$  sert à exprimer le transfert du champ dans sa représentation spatio-temporelle, selon la relation (9.25). La fonction  $h_{BA}$  joue le même rôle, mais pour la représentation mixte ; la relation correspondante est la relation (9.21).

**Théorème 5 (Transfert du champ spatio-temporel [20]).** *Dans les limites de l'approximation métaxiale, le transfert du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$ , à travers un système électromagnétique (linéaire) quelconque, est effectué par un opérateur linéaire spatio-temporel dont la partie temporelle est un filtrage linéaire. Ce transfert se traduit par la relation (9.25) en représentation spatio-temporelle et par la relation (9.21) en représentation mixte. La fonction (ou distribution)  $H_{BA}$  est la réponse percussionnelle spatio-temporelle du transfert, et  $h_{BA}$  son gain complexe.*

**Remarque 9.3.2.** L'emploi du terme « système électromagnétique quelconque » dans l'énoncé du théorème 5 veut traduire les diverses formes de transfert du champ, citées au paragraphe 9.3.1.

## 9.4 Diffraction des ondes polychromatiques

### 9.4.1 Forme explicite de la réponse percussionnelle spatio-temporelle

Pour appliquer le théorème 5 à la diffraction des ondes polychromatiques d'un émetteur  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$ , nous disposons de la forme explicite du gain complexe  $h_{BA}$ , déduite de l'étude de la diffraction des ondes monochromatiques (première partie) et donnée, dans les limites de l'approximation métaxiale, par la relation (3.35) p. 53, c'est-à-dire

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right]. \quad (9.26)$$

Cette écriture était valable pour les ondes monochromatiques et omettait un terme de la forme  $\exp[-2i\pi\nu D/v]$ , lié au temps de parcours de la lumière de l'émetteur au récepteur (règle 1 p. 48). Mais ce terme dépend de la fréquence et, pour une onde polychromatique, n'est pas constant. Il faut désormais l'écrire. Par conséquent, la fonction  $h_{BA}$  est telle que

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i\nu}{vD} \exp \left[ -\frac{i\pi\nu}{v} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] \exp \left[ \frac{-2i\pi\nu D}{v} \right], \quad (9.27)$$

où nous utilisons la fréquence comme variable plutôt que la longueur d'onde. La fonction  $H_{BA}$  s'en déduit par une transformation de Fourier inverse temporelle. Bien sûr l'écriture de la relation (9.27) suppose l'abandon de la règle 1.

Avant de calculer  $H_{BA}$ , remarquons que  $h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu)$  dépend encore de la fréquence par l'intermédiaire de la vitesse de phase  $\nu$ . Nous ferons l'hypothèse que les variations de la vitesse de phase sont négligeables sur tout le spectre du signal. Cela revient à admettre que la vitesse de phase est constante; elle est alors notée  $\tilde{\nu}$ . Cette hypothèse est raisonnable dans un milieu dilué (un gaz), ou pour des ondes à spectre étroit, dans des conditions qui sont analysées en détail au paragraphe 9.4.2. Si le milieu de propagation est le vide, la vitesse de phase est la constante  $c$ , et ce qui suit s'applique rigoureusement.

Si les variations de la vitesse de phase sont négligeables sur le domaine spectral considéré, conformément à l'hypothèse précédente, la fonction  $H_{BA}$  se déduit de  $h_{BA}$  par transformation de Fourier inverse et s'écrit

$$H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi\tilde{\nu}D} \delta' \left[ t - \frac{1}{\tilde{\nu}} \left( D + \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{2D} + \frac{s^2}{2R_B} - \frac{r^2}{2R_A} \right) \right]. \quad (9.28)$$

Pour interpréter l'argument de la dérivée de la distribution de Dirac dans la relation (9.28) nous introduisons la distance  $D(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  qui sépare le point  $\mathbf{r}$  de l'émetteur du point  $\mathbf{s}$  du récepteur. Les notations sont celles de la figure 9.1 :  $D(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = PP' = \|\mathbf{P}\mathbf{P}'\|$  avec

$$\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{P}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{S}' + \mathbf{S}'\mathbf{p}' + \mathbf{p}'\mathbf{P}'. \quad (9.29)$$

De plus :  $\|\mathbf{S}\mathbf{S}'\| = D$ ,  $\mathbf{p}\mathbf{S} = -\mathbf{r}$  et  $\mathbf{S}'\mathbf{p}' = \mathbf{s}$ . Des approximations au second ordre de  $\mathbf{p}\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}'\mathbf{p}'$  conduisent à

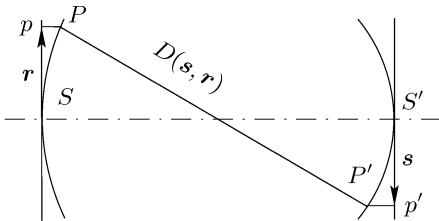
$$PP'^2 = \left( D - \frac{r^2}{2R_A} + \frac{s^2}{2R_B} \right)^2 + \|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2, \quad (9.30)$$

puis, toujours au deuxième ordre,

$$D(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = PP' = D - \frac{r^2}{2R_A} + \frac{s^2}{2R_B} + \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{2D}. \quad (9.31)$$

La relation (9.28) devient

$$H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi\tilde{\nu}D} \delta' \left( t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\tilde{\nu}} \right), \quad (9.32)$$



**FIG. 9.1.** Paramètres pour le calcul de la distance d'un point quelconque  $P$  de l'émetteur à un point quelconque  $P'$  du récepteur (ici  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{s}$  sont choisis colinéaires pour faciliter la représentation par une figure plane).

et la relation (9.25)

$$E_B(\mathbf{s}, t) = \frac{1}{2\pi\tilde{v}D} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial E_A}{\partial t} \left( \mathbf{r}, t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\tilde{v}} \right) d\mathbf{r}. \quad (9.33)$$

Ce qui précède se synthétise dans la proposition suivante, qui est finalement un cas particulier du théorème 5, valable pour la diffraction–propagation.

**Proposition 9.4.1 (Diffraction d’un champ polychromatique).** *L’effet de la diffraction–propagation sur une onde polychromatique est, outre une intégration spatiale, un retard temporel – lié au temps de propagation de l’émetteur au récepteur – suivi d’une dérivation temporelle.*

**Remarque 9.4.1.** Si la vitesse de phase n’est pas considérée constante, il n’est pas possible, en général, de déduire formellement  $H_{BA}$  de  $h_{BA}$  par une transformation de Fourier inverse, faute d’une expression explicite de  $v(\nu)$ . Ce problème est étudié au chapitre 11 dans un cadre plus général que celui de la diffraction.

#### 9.4.2 Justification de l’approximation d’une vitesse de phase constante

Comme nous l’avons annoncé au paragraphe précédent, nous revenons sur les conditions de l’approximation d’une vitesse de phase constante. Ce qui nous intéresse, c’est la variation du terme  $\nu/v$ , qui intervient dans l’expression du gain complexe  $h_{BA}$  telle que celle de la relation (9.27), c’est-à-dire, au fond, la variation du nombre d’ondes avec la fréquence. Il revient au même de s’intéresser à la variation de  $\kappa = n\nu$ , où  $n$  est l’indice de réfraction du milieu de propagation considéré.

Dans une expression comme celle de  $h_{BA}$  – relation (9.27) – nous disons que la fréquence se manifeste à la fois de façon directe – par les facteurs qui contiennent explicitement  $\nu$  – et de façon indirecte, par l’intermédiaire de  $v$ , ou de l’indice de réfraction.

La variation relative de  $\kappa$  due à une variation  $\Delta\nu$  de la fréquence est

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \frac{\Delta\nu}{\nu} + \frac{\Delta n}{n}, \quad (9.34)$$

où  $\Delta n$  dépend de  $\Delta\nu$ .

L’hypothèse faite au paragraphe précédent (vitesse de phase constante) revient à négliger la variation relative de  $n$  par rapport à celle de la fréquence  $\nu$  et à écrire, à la place de la relation (9.34),

$$\frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \quad (9.35)$$

La relation (9.35) est exacte pour le vide, milieu non dispersif (pour les ondes électromagnétiques). Elle reste justifiée dans certaines situations qui vont être examinées.

**TAB. 9.1.** Indice de réfraction de quelques substances [77].

Longueur d'onde (nm)	Eau à 20° C	Fluorine	Silice vitreuse	Crown moyen	Flint dense
434,0	1,340 4	1,439 6	1,467 3	1,526 4	1,684 7
486,1	1,337 1	1,437 0	1,463 6	1,521 4	1,673 5
589,3	1,330 0	1,433 8	1,458 8	1,515 3	1,660 5
656,3	1,331 1	1,432 5	1,456 8	1,512 7	1,655 3
759,4	—	—	—	1,509 6	1,649 5
768,2	1,328 9	1,430 9	1,454 4	—	—

Le tableau 9.1 donne des valeurs de l'indice de réfraction de quelques substances vitreuses ou cristallines (fluorine) et de l'eau. La variation de l'indice sur l'ensemble du spectre visible est la plus forte pour le flint dense : elle vaut un peu moins de 0,05 (en absolu), soit encore environ  $3 \cdot 10^{-2}$  en valeur relative. Pour la silice, la variation est de 0,013, soit  $0,9 \cdot 10^{-2}$  en valeur relative.

Le tableau 9.2 donne l'indice de réfraction de l'air (milieu dilué). Sa variation sur tout le spectre visible est de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-6}$  (c'est à la fois la variation absolue et pratiquement la variation relative puisque l'indice est voisin de 1).

D'une extrémité à l'autre du spectre visible, la variation relative de la fréquence est d'environ 1/2, si bien que pour l'air

$$\frac{\Delta n}{n} = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{\Delta \nu}{\nu} . \tag{9.36}$$

Il en résulte que la relation (9.35) est vraie à mieux que  $1,2 \cdot 10^{-5}$  près pour un milieu dilué comme l'air (pour un gaz en général), sur tout le spectre visible, ce qui signifie

$$0,999\,988 \frac{\Delta \nu}{\nu} \leq \frac{\Delta \kappa}{\kappa} \leq 1,000\,012 \frac{\Delta \nu}{\nu} . \tag{9.37}$$

**TAB. 9.2.** Indice de réfraction de l'air [29].

Longueur d'onde (nm)	Indice de réfraction
430,8	1,000 296 6
467,7	1,000 295 1
486,1	1,000 294 8
518,4	1,000 294 0
537,8	1,000 293 5
589,6	1,000 292 6
656,3	1,000 291 6
759,4	1,000 290 5

Elle est vraie à  $2 \cdot 10^{-2}$  près pour la silice et à environ  $6 \cdot 10^{-2}$  pour un verre dense (flint du tableau 9.1), ici encore, pour tout le spectre visible.

Cela précisé, l'analyse de l'influence indirecte de la fréquence (par l'intermédiaire de la vitesse de phase) est la suivante.

1. Si, dans l'expression d'une grandeur ou d'une fonction, les variations de la fréquence sont négligeables dans leur influence directe, alors les variations de la vitesse de phase (ou de l'indice de réfraction) le sont *a fortiori*. Cela signifie que l'influence indirecte des variations de la fréquence est négligeable. Cela est vrai dans tout milieu.
2. Si les variations de la fréquence ne sont pas négligeables sous forme directe, il y a lieu d'examiner leur influence indirecte via la vitesse de phase, essentiellement sous forme absolue. Deux situations conduisent éventuellement à négliger l'influence indirecte de la fréquence. Ce sont les suivantes :
  - a) Le rayonnement est à spectre étroit. Par exemple, une variation relative de  $10^{-4}$  de la fréquence se traduit, dans un milieu dense comme la silice, par une variation relative de la vitesse de phase inférieure à  $10^{-5}$  ;
  - b) Le milieu de propagation est dilué. Les variations de l'indice sont elles aussi inférieures à  $10^{-5}$  sur tout le spectre visible.

Nous verrons aux paragraphes 9.5.2 et 11.2.3 des mises en œuvre de ces approximations et nous verrons que la condition 2a) n'est pas facilement remplie.

### 9.4.3 Diffraction de Fraunhofer d'une onde polychromatique

La diffraction de Fraunhofer constitue un cas particulier de ce qui a été discuté au paragraphe 9.4.1 et se rencontre si  $D = R_A = -R_B$ . La sphère de Fourier de l'émetteur  $\mathcal{A}$  ne dépend pas de la fréquence (temporelle) : elle est achromatique. Au lieu de  $\mathcal{B}$  comme récepteur nous utilisons  $\mathcal{F}$  (sphère de Fourier) : le gain complexe du transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  s'écrit

$$h_{FA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i\nu}{vD} \exp \left[ \frac{2i\pi\nu}{vD} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{v} \right]. \quad (9.38)$$

Dans les limites de l'approximation métaxiale, la composante spectrale de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}$  est

$$e_F(\mathbf{s}, \nu) = \frac{i\nu}{vD} \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{v} \right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi\nu}{vD} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r}, \quad (9.39)$$

ou encore, si on emploie la représentation fréquence totale sur l'émetteur,

$$e_F(\mathbf{s}, \nu) = \frac{i\nu}{vD} \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{v} \right] \mathcal{E}_A \left( \frac{\nu \mathbf{s}}{vD}, \nu \right). \quad (9.40)$$

Ainsi la composante spectrale sur la sphère de Fourier est liée à la représentation fréquence totale sur l'émetteur, laquelle est la transformée de Fourier spatiale de la composante spectrale sur l'émetteur. C'est une généralisation du théorème 1 : la diffraction de Fraunhofer des ondes polychromatiques se traduit par une transformation de Fourier spatiale portant sur les composantes spectrales.

### 9.4.4 Chromatisme de diffraction

La relation (9.40) montre que la diffraction s'accompagne de chromatisme<sup>4</sup>, c'est-à-dire que la figure de diffraction n'est pas la même pour chaque fréquence (temporelle). Ce chromatisme se manifeste sous trois formes<sup>5</sup> :

- chromatisme d'amplitude : terme  $i\nu/vD$  ;
- chromatisme de phase : terme  $\exp[-2i\pi\nu D/v]$  ;
- chromatisme de grandeur<sup>6</sup> : terme  $\nu s/vD$  qui apparaît dans l'argument de la fonction  $\mathcal{E}_A$  et qui traduit une homothétie (spatiale) de la figure de diffraction.

Le chromatisme dont il est question ici existe même dans le vide (pour lequel  $v = c$ ), et cela montre que son origine ne réside pas seulement dans la dispersion du milieu de propagation. Il est dû à la présence explicite de la fréquence  $\nu$  dans l'expression des trois types de chromatismes cités plus haut. Il existe donc un « chromatisme de diffraction pur » (non lié à la dispersion chromatique du milieu). Il en est de même, en première approximation, pour un milieu dilué dans la mesure où la dispersion de la vitesse de phase est négligeable.

Dans le cas général, le chromatisme de diffraction a une double origine : dans le phénomène de diffraction lui-même (chromatisme de diffraction pur) ; dans la dispersion chromatique du milieu de propagation (par l'intermédiaire de la vitesse de phase). Sa variation avec la fréquence est de même sens pour les deux origines : par exemple le chromatisme de grandeur, qui vaut  $\nu s/vD$ , augmente avec la fréquence à cause de la présence explicite de  $\nu$  dans cette expression, et aussi parce que la vitesse de phase diminue si  $\nu$  croît (dispersion normale).

Finalement, le chromatisme de diffraction varie à l'inverse du chromatisme des matériaux, lequel résulte de la dispersion de l'indice de réfraction. Une radiation bleue est davantage déviée par un prisme qu'une radiation rouge ; ou encore, la valeur absolue de la distance focale d'une lentille simple est plus petite dans le bleu que dans le rouge. Au contraire, l'angle de diffraction d'un faisceau lumineux incident sur un réseau de diffraction est plus grand dans le rouge que dans le bleu (c'est une conséquence de la loi  $\Phi = \lambda F$ ).

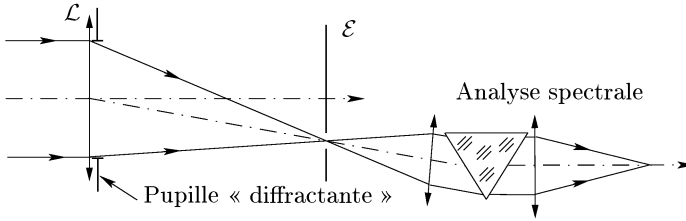
### 9.4.5 Réponse percutielle et fonction de transfert temporelles d'une pupille

Dans un article très novateur [90], Froelhy, Lacourt et Viénot ont introduit les notions de réponse percutielle et de fonction de transfert temporelles d'une pupille optique. La figure 9.2 illustre les expériences proposées et réalisées

<sup>4</sup> L'analyse est faite ici pour la diffraction de Fraunhofer ; elle se développerait dans le cas général au moyen de la relation (9.27). Le chromatisme décrit est propre à la diffraction en général.

<sup>5</sup> Il n'est pas nécessaire de supposer la vitesse de phase constante, puisque le chromatisme se décrit à l'aide de la composante spectrale, donnée par la relation (9.40).

<sup>6</sup> Le chromatisme de grandeur est une notion classique en optique géométrique [156].

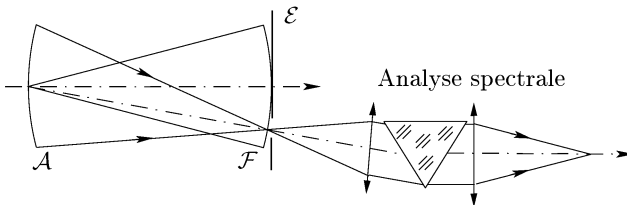


**FIG. 9.2.** Montage-type des expériences de Froelhy, Lacourt et Viénot [90]. La pupille diffractante est éclairée par une source blanche non représentée sur le schéma. L'objectif  $\mathcal{L}$  produit un éclairage convergent, si bien que le phénomène de diffraction est de Fraunhofer. L'écran  $\mathcal{E}$  isole un point du « plan » de Fourier. La partie droite de la figure (au-delà de  $\mathcal{E}$ ) schématise l'analyse spectrale de la lumière diffractée par la pupille, observée au point isolé par  $\mathcal{E}$ . On a choisi de symboliser cette analyse par un prisme, mais l'emploi d'un autre type de spectroscopie est envisageable.

par ces auteurs. Une pupille « diffractante » est éclairée par une onde convergente obtenue à l'aide d'un objectif  $\mathcal{L}$  à partir d'une source blanche<sup>7</sup> (régime de diffraction de Fraunhofer). Un écran  $\mathcal{E}$ , percé d'une petite ouverture, isole un point du « plan » de Fourier. Le spectre de la lumière en ce point est analysé par un spectroscopie.

La figure 9.3 donne l'interprétation « métaxiale » du montage de la figure 9.2. La pupille diffractante, éclairée par une onde convergente, est équivalente à un émetteur sphérique polychromatique  $\mathcal{A}$ . On observe la diffraction sur la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$  (diffraction de Fraunhofer).

La fonction de transfert temporelle, introduite par les auteurs précédents, n'est autre que le gain complexe associé à la diffraction de Fraunhofer en lu-



**FIG. 9.3.** Interprétation du montage de la figure 9.2 dans les termes de la théorie métaxiale. La pupille de la figure 9.2, éclairée par une onde convergente, est équivalente à un émetteur sphérique polychromatique  $\mathcal{A}$ . L'écran  $\mathcal{E}$  isole un point de la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$ .

<sup>7</sup> Parler de source (de lumière) blanche est une image commode, mais souvent abusive, pour désigner une source à spectre large couvrant à peu près le spectre visible. La définition précise, et conventionnelle, d'une lumière blanche relève de la colorimétrie et reflète un effet purement visuel [138, 139]. Il est pratique de supposer parfois que le spectre d'une telle source est représenté par une fonction rectangle, c'est-à-dire qu'il est constant sur tout le domaine visible ; l'impression visuelle produite par une telle source serait légèrement colorée et non blanche !

mière polychromatique, un point de la sphère de Fourier,  $\mathbf{s}_0$ , étant fixé. Ce point définit une direction d'observation. Autrement dit, la fonction de transfert temporelle de la pupille est  $h_{FA}(\mathbf{s}_0, \mathbf{r}, \nu)$ . La réponse percussionnelle temporelle est alors  $H_{FA}(\mathbf{s}_0, \mathbf{r}, t)$ .

Pour obtenir expérimentalement sa réponse percussionnelle temporelle, il faudrait envoyer sur le système étudié (pupille diffractante) une percussion de Dirac temporelle et être capable d'effectuer des mesures sur des durées très courtes. En pratique, éclairer continûment la pupille en lumière blanche revient à envoyer une succession de trains d'ondes très brefs, proches de percussions de Dirac. L'observation se fait sur le spectre de l'onde diffractée, qui est stationnaire (c'est-à-dire sur le module du carré de la composante spectrale, transformée de Fourier de l'amplitude de l'onde).

Dans les exemples qui suivent la composante spectrale de la source est  $e_S(\nu)$ ; elle est supposée homogène (pas de dépendance spatiale). Il lui correspond une densité spectrale de puissance  $\gamma_S(\nu) = |e_S(\nu)|^2$ . On suppose de plus être dans le vide ( $v = c$ ).

**Trous d'Young, spectre cannelé.** L'écran diffractant comporte deux trous d'Young, séparés de  $L$ , comme ceux étudiés au paragraphe 5.2.3 (figure 9.4).

Avec les notations du paragraphe 9.4.3, la composante spectrale de l'onde dans le plan des trous d'Young est ( $\ell_0$  est l'unité de longueur, voir §3.4.1)

$$e_A(x, y, \nu) = e_S(\nu) \ell_0^2 \left[ \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{L}{2}\right) \right] \delta(y). \quad (9.41)$$

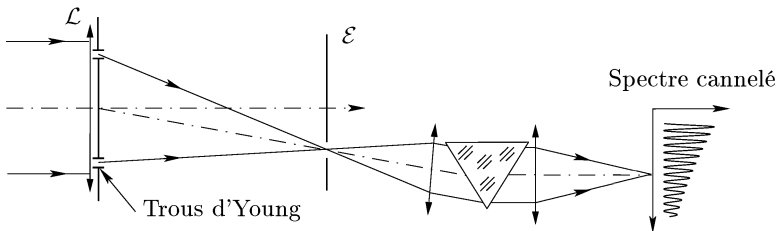
La relation (9.40) donne, sur la sphère de Fourier (coordonnées  $\xi$  et  $\eta$ ),

$$e_F(\xi, \eta, \nu) = 2\ell_0^2 \frac{i\nu}{cD} e_S(\nu) \cos \pi \frac{\xi\nu}{cD}. \quad (9.42)$$

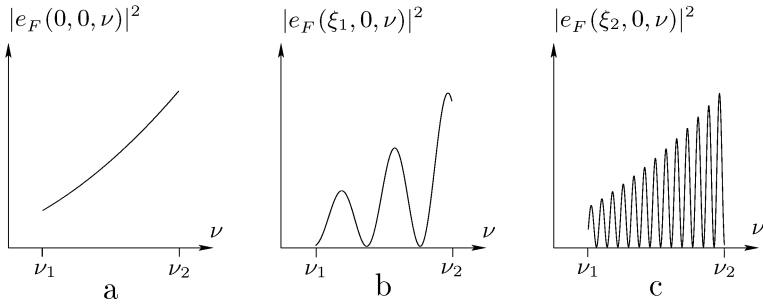
Le spectre de puissance observé au point  $(\xi, \eta)$  s'écrit

$$|e_F(\xi, \eta, \nu)|^2 = \frac{2\ell_0^4 \nu^2}{c^2 D^2} \gamma_S(\nu) \left(1 + \cos 2\pi \frac{\xi\nu}{cD}\right). \quad (9.43)$$

Sauf au sommet de la sphère de Fourier ( $\xi = 0, \eta = 0$ ), c'est un spectre cannelé, comme le montre la figure 9.5.



**FIG. 9.4.** Observation d'un spectre cannelé, diffracté par des trous d'Young en un point de la sphère de Fourier, situé hors de l'axe de la pupille.



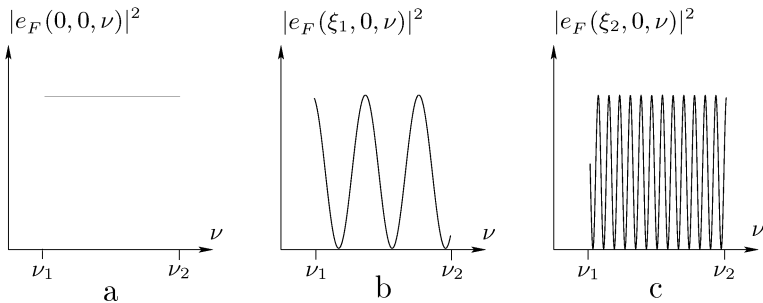
**FIG. 9.5.** Spectre cannelé diffracté par des trous d'Young éclairés par une source « blanche » dont le spectre est uniforme sur l'intervalle  $[\nu_1, \nu_2]$  : (a) au sommet de la sphère ( $\xi = 0$ ), on n'observe pas de cannelures ; (b) près du sommet ; (c) loin du sommet. ( $0 < \xi_1 < \xi_2$ .)

**Remarque 9.4.2.** La relation (9.43) s'interprète de deux façons, et cela vaut pour toute ouverture diffractante. Si la fréquence  $\nu$  est fixée, la fonction du membre de droite est une fonction des variables d'espace, et la relation précédente donne l'expression mathématique de la figure de diffraction de l'ouverture. C'est au fond le point de vue adopté au chapitre 5. Si au contraire les variables d'espace  $\xi$  et  $\eta$  sont fixées, la variable est la fréquence et la même relation donne le spectre (temporel) diffracté. C'est le point de vue étudié dans ce paragraphe.

**Fente infiniment mince, de largeur finie.** La fente, infiniment étroite, est de largeur  $\ell$ . La composante spectrale de l'amplitude du champ sur la fente est  $e_A(x, y, \nu) = \ell_0 e_S(\nu) \text{rect}_\ell(x) \delta(y)$  ( $\ell_0$  est l'unité de longueur). La représentation fréquence totale s'écrit

$$\mathcal{E}_A(F_x, F_y, \nu) = \ell_0 e_S(\nu) \ell \frac{\sin \pi \ell F_x}{\pi \ell F_x}. \quad (9.44)$$

La relation (9.40) donne



**FIG. 9.6.** Spectre cannelé diffracté par une fente de largeur finie. Même légende que celle de la figure 9.5.

$$e_F(\xi, \eta, \nu) = \frac{i\ell_0}{\pi\xi} e_S(\nu) \exp\left[-\frac{2i\pi\nu D}{v}\right] \sin \frac{\pi\ell\xi\nu}{cD}, \quad (9.45)$$

et finalement

$$|e_F(\xi, \eta, \nu)|^2 = \frac{\ell_0^2}{\pi^2\xi^2} \gamma_S(\nu) \sin^2 \frac{\pi\ell\xi\nu}{cD}. \quad (9.46)$$

La figure 9.5 illustre ce résultat.

**Remarque 9.4.3.** Les résultats de ce paragraphe sont des cas particuliers de celui établi au paragraphe 10.7.1.

## 9.5 Diffraction et imagerie des ondes de spectre étroit

### 9.5.1 Ondes de spectre étroit

La fréquence des ondes lumineuses étant très élevée – de l'ordre de  $5 \cdot 10^{14}$  Hz pour le spectre visible –, la lumière émise par un laser est considérée comme monochromatique avec une très bonne approximation. Par exemple une largeur de bande de la source de 1 GHz (cas d'un petit laser hélium-néon) représente une variation relative de la fréquence de l'ordre de  $10^{-5}$ . Il existe des lasers dont la largeur de bande est encore beaucoup plus petite (parfois bien inférieure à 1 MHz ; on arrive même au Hz en métrologie).

Si on module la lumière temporellement, la largeur de bande résultante dépend à la fois de celle de l'onde porteuse qui est modulée, et de la modulation elle-même. Pour les besoins des télécommunications optiques actuelles on module à 10 GHz des diodes lasers dont la largeur de bande est couramment inférieure à 1 MHz : c'est pratiquement la modulation seule qui détermine la largeur de bande. Bien qu'on puisse considérer comme monochromatique le faisceau ainsi obtenu, l'étude de la dispersion chromatique dans une fibre optique exige cependant de modéliser l'onde comme une onde de spectre étroit.

La lumière émise par une lampe spectrale, éventuellement filtrée pour ne correspondre qu'à une raie spectrale, est une autre illustration d'onde à spectre étroit.

Ces exemples montrent que les ondes à spectre étroit sont une réalité physique. Leur représentation mathématique est une nécessité et constitue un bon modèle pour traiter des phénomènes de cohérence, de modulation et de dispersion (voir le chapitre 11).

Soit  $E_A(\mathbf{r}, t)$  le champ analytique associé à une onde de spectre étroit produite par un émetteur  $\mathcal{A}$ . Nous appelons amplitude complexe du signal, et nous notons  $A_A(\mathbf{r}, t)$ , la fonction (ou distribution) définie par

$$A_A(\mathbf{r}, t) = E_A(\mathbf{r}, t) \exp[-2i\pi\tilde{\nu}t], \quad (9.47)$$

où  $\tilde{\nu}$  est une fréquence du spectre du signal<sup>8</sup>. La fonction  $A_A$  est à variations lentes par rapport à  $\exp[-2i\pi\tilde{\nu}t]$ . Si les composantes spectrales correspondant à  $E_A$  et  $A_A$  sont  $e_A(\mathbf{r}, \nu)$  et  $a_A(\mathbf{r}, \nu)$ , en appliquant la transformation de Fourier à chaque membre de la relation (9.47) on obtient

$$a_A(\mathbf{r}, \nu) = e_A(\mathbf{r}, \nu + \tilde{\nu}). \quad (9.48)$$

La composante spectrale de l'amplitude complexe sur  $\mathcal{A}$  est la composante spectrale du champ translatée de  $-\tilde{\nu}$ .

Si  $\mathcal{B}$  est un récepteur situé à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$ , la composante spectrale de l'amplitude complexe du signal sur  $\mathcal{B}$  est  $a_B(\mathbf{s}, \nu)$ , et la relation (9.21) donne

$$a_B(\mathbf{s}, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu + \tilde{\nu}) a_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r}, \quad (9.49)$$

où  $h_{BA}$  est le gain complexe du transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$ . Le gain complexe du transfert de l'amplitude complexe est le gain complexe du transfert du champ translaté de  $-\tilde{\nu}$ .

### 9.5.2 Diffraction de Fresnel des ondes de spectre étroit

Considérons le transfert général du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$ , de spectre étroit autour de  $\tilde{\nu}$ , vers un récepteur  $\mathcal{B}$  situé à la distance  $D$  (prise de sommet à sommet). Avec les variables spatiales  $\mathbf{r}$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{s}$  sur  $\mathcal{B}$ , et conformément à la relation (9.27), le gain complexe du transfert est  $h$  tel que<sup>9</sup>

$$h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i\nu}{vD} \exp \left[ -\frac{i\pi\nu}{v} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{v} \right]. \quad (9.50)$$

La fréquence  $\nu$  apparaît trois fois explicitement dans le membre de droite de relation (9.50) et la question se pose de savoir s'il est légitime d'approcher  $\nu$  par  $\tilde{\nu}$  dans cette expression.

Elle intervient aussi indirectement par l'intermédiaire de la vitesse de phase  $v$ . L'hypothèse faite au paragraphe 9.4.1, selon laquelle la vitesse de phase sur l'ensemble du spectre est quasiment une constante, est tout à fait réaliste pour une onde à spectre étroit, si ce spectre se situe dans une région du spectre électromagnétique où le milieu de propagation est transparent, une région éloignée des zones de dispersion anormale (c.-à-d. loin des zones de forte absorption) [29].

L'analyse des possibles approximations est la suivante.

1. Il est légitime d'approcher  $\nu$  par  $\tilde{\nu}$  dans le terme  $\nu/vD$  dont la variation relative est aussi celle de  $\nu$ . Ainsi, pour une onde de largeur spectrale relative  $10^{-3}$ , ce coefficient varie de  $10^{-3}$ . Nous remplaçons  $\nu$  par  $\tilde{\nu}$ , et  $v$

<sup>8</sup> La fréquence  $\tilde{\nu}$  est une fréquence arbitraire du spectre. On pourrait la définir comme la fréquence « centrale » du spectre [25, 26].

<sup>9</sup> Pour alléger, nous écrivons  $h$  au lieu de  $h_{BA}$ .

par  $\tilde{\nu}$ , sans changer notablement les valeurs de  $h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu)$ . Nous sommes ici dans le cas 1 de l'analyse du paragraphe 9.4.2 (p. 261).

Dans chaque expression où nous ferons l'approximation de  $\nu$  par  $\tilde{\nu}$  nous choisirons plutôt la longueur d'onde  $\tilde{\lambda}$  que la fréquence comme variable ( $\tilde{\lambda}\tilde{\nu} = \tilde{\nu}$ ). Ainsi pour toute fréquence du spectre (étroit) de l'onde nous écrivons

$$\frac{\nu}{vD} \approx \frac{1}{\tilde{\lambda}D}. \quad (9.51)$$

2. Considérons l'argument  $-2i\pi\nu D/v$  de la deuxième fonction exponentielle de la relation (9.50). Pour le vide  $v = c = 3 \cdot 10^8$  m/s, ce qui fixe un ordre de grandeur à  $v$ ; la fréquence  $\nu$  est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{14}$  Hz. Si  $D$  est de l'ordre du mètre, alors

$$\frac{\nu D}{v} \sim 1,5 \cdot 10^6. \quad (9.52)$$

Une variation relative de  $10^{-5}$  de  $\nu$  – c'est un spectre plus étroit que celui pris comme exemple au point précédent – se traduit par une variation absolue de l'ordre de  $10^2$  du terme de phase (en y incluant le facteur  $2\pi$ ). Il s'agit là de ce que nous avons qualifié d'influence directe de la fréquence. Cette variation est beaucoup plus grande que 1 et l'argument de la fonction exponentielle varie beaucoup quand on passe d'une extrémité du spectre à l'autre. Il n'est pas légitime de remplacer  $\nu$  par  $\tilde{\nu}$  dans ce cas, car cela se traduirait par une modification radicale des valeurs de la fonction exponentielle.

Il faut ensuite évaluer l'influence indirecte de la fréquence (qui se manifeste par l'intermédiaire de la vitesse de phase). Nous sommes ici dans le cas 2a) de l'analyse du paragraphe 9.4.2 (p. 261). Une variation relative de  $10^{-5}$  de la fréquence se traduit, dans un milieu dense, par une variation de  $10^{-7}$  de  $v$  et finalement par une variation absolue de  $2\pi\nu D/v$  de l'ordre de 1,5 – soit environ  $\pi/2$  –, ce qui se situe à la limite de l'acceptable. Considérer la vitesse de phase constante n'est possible que pour un spectre très étroit (de l'ordre de  $10^{-5}$  au maximum en valeur relative) ou bien si à l'hypothèse de spectre étroit on ajoute celle d'un milieu dilué.

3. La situation est intermédiaire pour le troisième facteur du membre de droite de la relation (9.50). Notons

$$\tau = \frac{\pi\nu}{v} \left( \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right), \quad (9.53)$$

et évaluons sa variation absolue pour une variation de  $\nu$ . Supposons pour fixer les idées  $D$ ,  $R_A$  et  $R_B$  de l'ordre de 1 m et  $r$  et  $s$  de l'ordre de 0,05 m. Alors  $|\tau| \leq 0,75 \cdot 10^5$ . Une variation relative de  $10^{-5}$  de  $\nu$  se traduit par une variation de  $\tau$  inférieure à 0,75, c'est-à-dire à une variation de la phase inférieure à  $\pi/4$ , une valeur acceptable. Dans ce cas on peut remplacer  $\nu$

par  $\tilde{\nu}$  dans l'expression de  $\tau$ . (Nous avons choisi des données à la limite de l'acceptable, comme pour fixer une borne supérieure à l'approximation.)

Ici l'influence indirecte de la fréquence est négligeable conformément à l'analyse faite au point 1 du paragraphe 9.4.2.

**Remarque 9.5.1.** Une meilleure définition de la notion de spectre étroit, plus opérationnelle, est la suivante : une onde est de spectre étroit s'il est possible de remplacer  $\nu$  par  $\tilde{\nu}$  dans l'équation (9.53) sans avoir de différence appréciable dans le résultat. Cela dépend bien sûr de la précision exigée pour connaître ce dernier. Le troisième point de l'énumération précédente fixe quelques ordres de grandeurs.  $\diamond$

Finalement, pour une onde de spectre étroit, l'approximation de la fonction  $h$  s'écrit

$$h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{\tilde{\nu}} \right]. \quad (9.54)$$

La réponse percutieuse spatio-temporelle se déduit de  $h$  par transformation de Fourier inverse temporelle. Pour rendre le calcul théorique possible, la vitesse de phase, notée  $\tilde{v}$ , est supposée constante, conformément à la double hypothèse d'un spectre étroit et d'un milieu dilué. Ainsi

$$H(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] \delta \left[ t - \frac{D}{\tilde{v}} \right]. \quad (9.55)$$

Il y a séparation entre la partie spatiale de  $H$  et sa partie temporelle. La partie temporelle représente un retard lié au temps nécessaire à la lumière pour aller de l'émetteur vers le récepteur. La relation (9.25) s'écrit

$$E_B(\mathbf{s}, t) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] E_A \left( \mathbf{r}, t - \frac{D}{\tilde{v}} \right) d\mathbf{r}. \quad (9.56)$$

**Proposition 9.5.1.** *Pour une onde de spectre étroit, et dans les limites de l'approximation métaxiale, l'effet de la diffraction se décompose en un opérateur linéaire spatial et un retard temporel. Il y a séparation des deux effets (ils opèrent indépendamment l'un de l'autre).*

**Remarque 9.5.2.** La séparation de l'effet temporel et de l'effet spatial se comprend en comparant la proposition 9.5.1 à la proposition 9.4.1, ou encore les relations (9.56) et (9.33). Dans cette dernière, la distance  $D(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  dépend du point courant sur l'émetteur ( $\mathbf{r}$ ) et du point d'observation du phénomène de diffraction ( $\mathbf{s}$ ), alors que dans la relation (9.56)  $D$  est une constante.

**Remarque 9.5.3.** Supposer la vitesse de phase constante pour justifier l'approximation du point 2 de l'analyse précédente exige de satisfaire des conditions sévères de milieu dilué et de spectre très étroit (sauf dans le vide!). Le chapitre 11 traite du cas où ces conditions ne sont pas remplies.

### 9.5.3 Diffraction de Fraunhofer des ondes de spectre étroit

C'est le cas du paragraphe précédent avec  $D = R_A = -R_B$ . Le gain complexe s'écrit

$$h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{\tilde{v}} \right], \quad (9.57)$$

et la réponse percussionnelle spatio-temporelle

$$H(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] \delta \left[ t - \frac{D}{\tilde{v}} \right]. \quad (9.58)$$

L'amplitude du champ sur la sphère de Fourier de l'émetteur  $\mathcal{A}$  est

$$E_F(\mathbf{s}, t) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] E_A \left( \mathbf{r}, t - \frac{D}{\tilde{v}} \right) d\mathbf{r}. \quad (9.59)$$

### 9.5.4 Transparence de courbure en spectre étroit

Soient un émetteur  $\mathcal{A}$  de rayon de courbure  $R_A$  et deux récepteurs tangents  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  situés à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$ . Le gain complexe du transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $h'(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu)$  et c'est  $h''(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu)$  de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}''$ . De la relation (9.54) résulte l'expression des composantes spectrales du champ sur  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$ ,  $e_{B'}(\mathbf{s}, \nu)$  et  $e_{B''}(\mathbf{s}, \nu)$ , sous la forme

$$e_{B''}(\mathbf{s}, \nu) = e_{B'}(\mathbf{s}, \nu) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_{B''}} - \frac{1}{R_{B'}} \right) s^2 \right]. \quad (9.60)$$

Comme les calottes sphériques  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  sont tangentes, la relation (9.60) traduit le transfert du champ par une transparence de courbure (il s'agit de la représentation mixte).

La représentation spatio-temporelle du transfert du champ par transparence de courbure, en spectre étroit, se déduit de la relation (9.60) par une transformation de Fourier inverse temporelle et prend la forme

$$E_{B''}(\mathbf{s}, t) = E_{B'}(\mathbf{s}, t) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_{B''}} - \frac{1}{R_{B'}} \right) s^2 \right]. \quad (9.61)$$

**Remarque 9.5.4.** On arrive au même résultat – c'est-à-dire à la relation (9.61) – en déduisant de la relation (9.60) la forme explicite du gain complexe du transfert associé à une transparence de courbure, soit

$$h(\mathbf{s}', \mathbf{s}, \nu) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_{B''}} - \frac{1}{R_{B'}} \right) s^2 \right] \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}), \quad (9.62)$$

puis celle de la réponse percussionnelle spatio-temporelle (déduite de  $h$  par transformation de Fourier inverse temporelle)

$$H(\mathbf{s}', \mathbf{s}, t) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_{B''}} - \frac{1}{R_{B'}} \right) s^2 \right] \delta(\mathbf{s}' - \mathbf{s}) \otimes \delta(t). \quad (9.63)$$

La relation (9.61) s'obtient enfin par convolution temporelle de  $H$  avec  $E_{B'}$  et intégration spatiale, conformément à la relation (9.56), ou même (9.25).

### 9.5.5 Imagerie d'un émetteur à spectre étroit

L'imagerie cohérente obéit à la double conjugaison, comme il a été vu au chapitre 4 : conjugaison des sommets et conjugaison des centres de courbure. Ici, le système optique qui forme l'image d'un émetteur  $\mathcal{A}$  est supposé achromatique, c'est-à-dire corrigé des aberrations chromatiques [156]. Certes l'achromatisme est difficile à obtenir techniquement, sur un large domaine : en pratique on « replie le spectre » et il reste toujours un résidu de chromatisme. L'hypothèse d'un chromatisme parfaitement corrigé est toutefois réaliste en spectre étroit. Cela revient à supposer que l'image  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$  est indépendante de la fréquence et que le grandissement aux sommets, comme celui aux centres de courbure, sont des constantes.

Dans ces conditions, de la relation (4.30) (c'est le théorème 2 p. 78)

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_s} U_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s} \right), \quad (9.64)$$

on déduit la relation suivante qui lie les composantes spectrales des champs sur l'émetteur et sur son image

$$e_{A'}(\mathbf{r}', \nu) = \frac{1}{g_s} e_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s}, \nu \right). \quad (9.65)$$

La relation (9.65) s'écrit aussi

$$e_{A'}(\mathbf{r}', \nu) = \frac{1}{g_s} \left\langle \delta \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s} - \mathbf{r} \right), e_A(\mathbf{r}, \nu) \right\rangle, \quad (9.66)$$

et elle fournit l'expression du gain complexe du transfert du champ par imagerie

$$h(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{g_s} \delta \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s} - \mathbf{r} \right). \quad (9.67)$$

La réponse percussionnelle spatio-temporelle est

$$H(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = \frac{1}{g_s} \delta \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s} - \mathbf{r} \right) \otimes \delta(t - t_p), \quad (9.68)$$

où  $t_p$  est le temps de propagation de la lumière<sup>10</sup> du sommet de  $\mathcal{A}$  au sommet de  $\mathcal{A}'$ . Finalement, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  (représentation spatio-temporelle) est

$$E_{A'}(\mathbf{r}', t) = \frac{1}{g_s} E_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_s}, t - t_p \right). \quad (9.69)$$

<sup>10</sup> L'achromatisme signifie que  $t_p$  est indépendant de la fréquence.

### 9.5.6 Conclusion pour les ondes de spectre étroit

Les formules de diffraction d'une onde de spectre étroit sont similaires à celles d'une onde monochromatique dont la fréquence serait  $\tilde{\nu}$ , fréquence arbitrairement choisie dans le spectre de l'onde. La seule différence réside dans le retard engendré par le temps de propagation de l'émetteur au récepteur. Ce retard se traduit par un terme de phase qui dépend de la fréquence. Par exemple, pour la diffraction de Fresnel, on a (avec  $\lambda\tilde{\nu} = \tilde{\nu}$ )

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp\left[-\frac{2i\pi\nu D}{\tilde{\nu}}\right] \exp\left[-\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D}\right)s^2\right] \quad (9.70)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_A}\right)r^2\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}D}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}\right] e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r},$$

à comparer avec l'équation (3.31) p. 52, qui, dans son expression complète<sup>11</sup> et avec les notations de ce chapitre, prend la forme

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp\left[-\frac{2i\pi D}{\tilde{\lambda}}\right] \exp\left[-\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D}\right)s^2\right] \quad (9.71)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_A}\right)r^2\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}D}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

On établit des comparaisons analogues pour la diffraction de Fraunhofer, pour une transparence de courbure, ou pour l'imagerie cohérente.

## 9.6 Exercices

**Exercice 9.1.** Écrire l'expression du gain complexe d'une transparence de courbure en lumière polychromatique.

En déduire l'expression de la réponse percussionnelle spatio-temporelle d'une transparence de courbure.

**Exercice 9.2.** Appliquer l'analyse du paragraphe 9.4.5 à une ouverture circulaire. Puis à une ouverture annulaire (pupille d'un télescope). Dans les deux cas, tracer les graphes correspondant à la figure 9.5.

<sup>11</sup> C'est-à-dire en réintroduisant le terme  $\exp[-2i\pi D\tilde{\nu}/\tilde{\nu}]$  que nous n'écrivons pas, suivant la règle 1.

## Chapitre 10

# La cohérence et son transfert

La lumière a des variations temporelles aléatoires : une étude statistique est nécessaire pour décrire les fluctuations du champ, celles de l'éclairement incident sur un détecteur, etc., et prédire les résultats de mesures effectuées sur ces grandeurs. Ce chapitre examine les propriétés statistiques d'ordre 2 du champ électrique, c'est-à-dire sa cohérence, et la propagation de cette dernière par diffraction. Dans les limites de la théorie métaxiale, tous les résultats liés à la cohérence se déduisent du seul transfert de l'amplitude du champ. La méthode suivie s'écarte des méthodes classiques [16, 29, 98, 153, 245] dans la mesure où elle met en œuvre des émetteurs et récepteurs sphériques.

Le paragraphe 10.1 est consacré à une approche élémentaire et intuitive de la notion de cohérence en optique classique ; son but est de rendre naturelle la définition de la cohérence donnée au paragraphe 10.2 et de justifier certaines hypothèses sur les propriétés que possède *a priori* le champ électromagnétique et sur lesquelles se fondent les résultats de ce chapitre.

Certaines notions et certains théorèmes appliqués dans ce chapitre sont exposés dans les appendices F et G ; l'appendice H précise les propriétés essentielles codes fonctions de cohérence.

## 10.1 Considérations élémentaires sur la cohérence en optique

### 10.1.1 Échelles de temps et cohérence

En optique classique<sup>1</sup>, la cohérence traduit la capacité d'une source de lumière à produire des interférences. Cette définition est sans doute trop sommaire pour ne pas cacher quelques subtilités ; elle mérite d'être précisée. Dans le cadre d'une théorie classique<sup>1</sup> du rayonnement, la notion de cohérence est liée aux échelles de temps caractéristiques de la manière dont la lumière est émise par les atomes et de celle dont on observe<sup>2</sup> un phénomène lumineux.

---

<sup>1</sup> Non quantique.

<sup>2</sup> L'observation suppose en pratique la détection de l'onde électromagnétique. En optique classique on mesure un éclairement. Conformément à ce que nous avons expliqué au chapitre 1, la grandeur observée « potentiellement » est ramenée à l'intensité vibratoire. Une théorie de la détection plus complète relève de l'optique quantique.

L'émission de lumière par les atomes et les molécules est au cœur de la physique atomique [43]; son étude relève de la mécanique quantique. Nous nous limitons ici à un exposé élémentaire, en des termes naïfs, nécessairement approximatifs, mais dont nous croyons qu'ils peuvent toutefois fournir une justification plausible aux définitions et notions utilisées dès le paragraphe 10.2.

Nous admettons que les atomes émettent la lumière sous la forme de trains d'ondes de durée finie [87]. Un modèle mathématique simple consiste à représenter l'amplitude d'un train d'onde par une fonction sinusoïdale tronquée (temporellement). Au besoin, on améliore le modèle en choisissant une fonction sinusoïdale amortie, de la forme  $e^{-t/\tau_0} \cos 2\pi\nu_0 t$  ( $\nu_0$  est la fréquence fondamentale et  $\tau_0$  une constante d'amortissement temporelle), qu'on tronque éventuellement (en la multipliant par une fonction « rectangle »).

Dans ces conditions, trois échelles de temps sont à prendre en compte :

- 1° La première échelle est fixée par la période des vibrations lumineuses :  $\tau_1 = 1/\nu_0$ , si  $\nu_0$  est la fréquence fondamentale. Cette période est de l'ordre de  $10^{-15}$  s (environ de  $1,3 \cdot 10^{-15}$  s à  $2,6 \cdot 10^{-15}$  s pour le spectre visible).
- 2° La deuxième échelle est fixée par la durée des trains d'ondes. C'est la durée d'émission de la lumière par un atome quand il passe d'un état excité à un état moins excité. La physique atomique nous enseigne<sup>3</sup> que cette durée  $\tau_2$  est de l'ordre de  $10^{-9}$  s.
- 3° La troisième échelle est fixée par la durée d'observation  $\tau_3$  : elle est bornée inférieurement par la durée que requiert un détecteur pour donner une réponse à une excitation lumineuse. Le domaine des valeurs de  $\tau_3$  s'étale sur plusieurs ordres de grandeur : de  $10^{-6}$  s à plusieurs secondes (et d'ailleurs, c'est-à-dire une durée aussi longue qu'on le souhaite). Comme valeur typique nous prenons 1 s.

Les trois durées s'ordonnent ainsi :  $\tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_3$ ; et ce qui est important c'est qu'elles ont des ordres de grandeurs bien différents (c'est pourquoi considérer  $\tau_3 \sim 1$  s est caractéristique).

Finalement, en optique, on observe sur une longue durée (à l'échelle de  $\tau_3$ ) des phénomènes oscillant à des périodes très petites (de l'ordre de  $\tau_1$ ) et qui ont eux-mêmes une durée intermédiaire (de l'ordre de  $\tau_2$ ). On n'observe que la moyenne, prise à l'échelle de  $\tau_3$ , d'un phénomène qui varie à l'échelle de  $\tau_2$  et qui oscille à l'échelle de  $\tau_1$ .

Dans ces conditions, la cohérence d'une source lumineuse est sa capacité à produire des interférences à l'échelle de  $\tau_3$ , fixée par la durée d'observation. La

<sup>3</sup> Il est nécessaire de donner ici des explications supplémentaires et pour cela d'anticiper sur la suite. Nous verrons que la durée des trains d'ondes est liée au spectre de la source qui les émet. Les trains d'ondes dont nous parlons ici correspondent à la largeur « naturelle » d'une raie spectrale; par la suite nous les qualifions de trains d'ondes physiques. De fait, les raies spectrales sont élargies par divers phénomènes : effet Doppler, chocs entre atomes d'un gaz. De tels phénomènes auront par conséquent un effet sur la cohérence de la source; pour cette raison, nous introduisons au paragraphe 10.1.4 la notion de train d'onde apparent, liée à la largeur spectrale effective de la source.

possibilité effective d'observer (ou de détecter) des interférences à une échelle comparable à  $\tau_2$ , conduirait à revoir la notion de cohérence d'une source <sup>4</sup>.

### 10.1.2 Superposition de deux vibrations

Soient deux vibrations sinusoïdales, d'amplitudes

$$x_1(t) = a_1 \cos(2\pi\nu_1 t - \varphi_1), \quad (10.1)$$

$$x_2(t) = a_2 \cos(2\pi\nu_2 t - \varphi_2), \quad (10.2)$$

qui, superposées, produisent l'amplitude

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (10.3)$$

En optique (théorie scalaire),  $x$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont des amplitudes du champ électrique, et la détection porte sur la moyenne temporelle du carré de  $x(t)$  (ou carré du module en représentation complexe), à un facteur dimensionnel près : l'intensité vibratoire est (le symbole  $\langle \rangle_t$  indique la moyenne temporelle)

$$I = \langle x(t)^2 \rangle_t. \quad (10.4)$$

Avant de préciser sur quelle échelle de temps est prise la moyenne temporelle, nous écrivons

$$\begin{aligned} x(t)^2 &= a_1^2 \cos^2(2\pi\nu_1 t - \varphi_1) + a_2^2 \cos^2(2\pi\nu_2 t - \varphi_2) \\ &\quad + a_1 a_2 \cos[2\pi(\nu_1 + \nu_2)t - \varphi_1 - \varphi_2] \\ &\quad + a_1 a_2 \cos[2\pi(\nu_1 - \nu_2)t + \varphi_2 - \varphi_1]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Les fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont des fréquences du domaine optique et la moyenne temporelle est prise sur une durée grande par rapport à  $\tau_1 = 1/\nu_1$  (ou  $1/\nu_2$  qui lui est comparable), si bien que (pour  $j = 1, 2$ )

$$\langle \cos 2\pi\nu_j t \rangle_t = \langle \cos(2\pi\nu_j t - \varphi_j) \rangle_t = 0, \quad (10.6)$$

$$\langle \cos^2(2\pi\nu_j t - \varphi_j) \rangle_t = \frac{1}{2}, \quad (10.7)$$

et à plus forte raison (car  $\nu_1 + \nu_2 > \nu_1$ )

$$\langle \cos[2\pi(\nu_1 + \nu_2)t - \varphi_1 - \varphi_2] \rangle_t = 0. \quad (10.8)$$

<sup>4</sup> On ne voit pas d'interférences si on regarde une feuille blanche éclairée par une source blanche. Une photographie de cette feuille montre une image d'éclairement homogène (les appareils photographiques actuels peuvent descendre à des temps de pose de  $(1/8\,000)$  s). Si l'on pouvait toutefois prendre une photographie de la même feuille, éclairée de la même façon, avec un temps de pose de l'ordre de  $10^{-9}$  s, on enregistrerait des interférences, du type *speckle*. Un tel champ de *speckle* se modifie à l'échelle de  $\tau_2$  : l'œil (humain) ne perçoit qu'une moyenne temporelle sur un temps finalement long, de l'ordre d'un quinzième de seconde ; il en résulte une homogénéisation de l'éclairement.

Il en résulte

$$\langle x(t)^2 \rangle_t = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + a_1 a_2 \langle \cos[2\pi(\nu_1 - \nu_2)t + \varphi_2 - \varphi_1] \rangle_t. \quad (10.9)$$

Dans la relation (10.9), le terme  $\langle \cos[2\pi(\nu_1 - \nu_2)t + \varphi_2 - \varphi_1] \rangle_t$  représente des battements dont la fréquence est  $|\nu_1 - \nu_2|$ . Observe-t-on ces battements ? Pour cela il faut détecter des variations d'éclairement à une échelle de temps de l'ordre de  $1/|\nu_1 - \nu_2|$ . Il faut donc, en général, compte tenu des moyens techniques dont on dispose, que  $|\nu_1 - \nu_2|$  soit assez petit. On obtient cela, en principe, en contrôlant parfaitement la fréquence des sources ; mais c'est difficile à réaliser en optique, et on pallie cet écueil en dédoublant l'onde émise par une seule source et en superposant les deux ondes dérivées, après avoir décalé la fréquence de l'une d'elles (un tel décalage s'obtient par exemple en déplaçant un des deux miroirs d'un interféromètre de Michelson dans un mouvement de translation uniforme ; le décalage de la fréquence résulte de l'effet Doppler). Dans ce dernier cas, on a pratiquement des interférences.

**Formule des interférences.** On a des interférences, au sens strict<sup>5</sup>, si le phénomène de battements est « statique », c'est-à-dire si  $\nu_1 = \nu_2$ . Posons  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , si bien que l'intensité vibratoire qui résulte de la superposition des vibrations est

$$I = \langle x(t)^2 \rangle_t = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + a_1 a_2 \cos \varphi. \quad (10.10)$$

Il est toujours possible de supposer  $a_1 a_2 \geq 0$ , quitte à changer l'origine du temps : le déphasage entre  $x_1$  et  $x_2$  est encore égal à  $\varphi$  et la valeur de  $I$  n'est pas modifiée. En notant  $I_1 = a_1^2/2$  et  $I_2 = a_2^2/2$  (ce sont les intensités vibratoires des vibrations  $x_1$  et  $x_2$ ) la relation (10.10) devient (formule des interférences)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi. \quad (10.11)$$

Le terme  $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$  de la relation (10.11) est le terme d'interférences.

L'éclairement résultant (intensité vibratoire ici) dépend essentiellement de la différence de phase qui existe entre les deux vibrations superposées. De là le phénomène d'interférences : interférences constructives si  $\varphi = 0 [\pi]$ , destructives si  $\varphi = \pi [\pi]$ . Le calcul de l'éclairement s'effectue en tout point d'un écran éclairé par deux ondes ; l'état d'interférences en chaque point de l'écran dépend du déphasage des vibrations incidentes en ce point. La méthode est générale en ce sens qu'elle s'applique à tout type d'interféromètre (à deux ondes ici) : trous d'Young, interféromètre de Michelson par exemple.

En général les détecteurs optiques ont une réponse de durée grande par rapport à  $\tau_2$  (la durée d'émission d'un train d'ondes). La moyenne temporelle qui donne l'éclairement s'effectue à l'échelle de  $\tau_3$ , c'est-à-dire sur une durée grande par rapport à  $\tau_2$ . Les interférences sont un phénomène stationnaire, à

<sup>5</sup> Dans un sens élargi, des battements à basse fréquence sont considérés comme un phénomène d'interférences lentement variable.

l'échelle de  $\tau_3$ ; c'est à cette échelle que se définit la cohérence d'une source. L'hypothèse de stationarité à l'échelle de  $\tau_3$  est nécessaire pour expliquer les interférences.

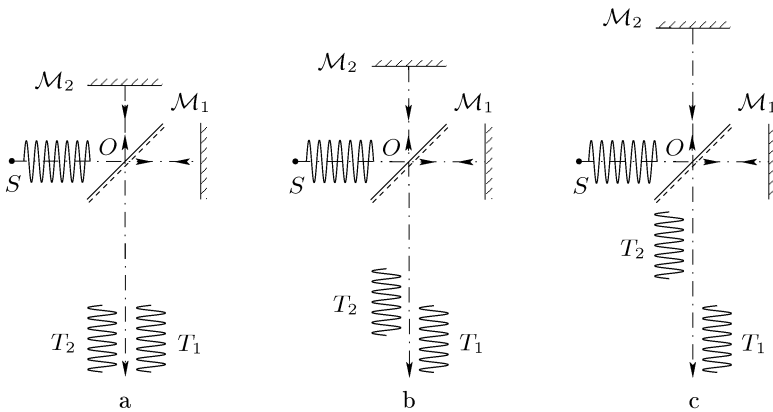
Comme  $\tau_2$  est grand par rapport à  $\tau_1$ , une moyenne effectuée à l'échelle de  $\tau_2$  aurait un sens. On peut concevoir des interférences à l'échelle de  $\tau_2$ , car le déphasage  $\varphi$  est maintenu constant à cette échelle. Les détecteurs habituels ne permettent toutefois pas de les observer.

### 10.1.3 Trains d'ondes et cohérence

Contrairement à ce qui se passe en radio-électricité, il est difficile de maintenir constante la différence de phase entre deux sources lumineuses de même fréquence. Dans ces conditions, la meilleure façon de produire des interférences, c'est-à-dire des battements statiques, consiste à dédoubler<sup>6</sup> l'onde issue d'une seule source de façon à obtenir deux répliques qu'on superpose dans un deuxième temps. Chaque train d'onde se trouve dédoublé, puis ses deux répliques, souvent décalées dans l'espace, sont superposées.

Puisque la durée d'un train d'onde est limitée, on comprend que si le décalage des deux répliques est trop grand, ces dernières ne se superposent pas et il n'y a pas d'interférences. La figure 10.1 illustre cela à l'aide d'un interféromètre de Michelson.

Un train d'onde de durée  $\tau$  a une longueur  $L = c\tau$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière (on suppose l'interféromètre placé dans le vide). Un train d'onde issu de



**FIG. 10.1.** Mise en évidence des possibilités d'interférences pour un train d'onde à l'aide d'un interféromètre de Michelson. Le schéma de l'interféromètre est simplifié (pas de lame compensatrice). Il y a des interférences dans les situations a) et b), pas dans la situation c). Les explications sont données dans le texte.

<sup>6</sup> Nous prenons ici le cas d'un dédoublement. Il existe des interféromètres à ondes multiples, comme l'interféromètre de Fabry-Perot. On distingue les interféromètres à division d'amplitude – interféromètre de Michelson – des interféromètres à division du front d'onde (les trous d'Young en sont un exemple).

la source  $S$ , schématisé par une sinusoïde tronquée, se scinde en deux répliques quand il arrive en  $O$  sur la séparatrice. Les deux répliques se réfléchissent l'une sur  $\mathcal{M}_1$ , l'autre sur  $\mathcal{M}_2$ , puis se superposent en sortie de l'interféromètre. Pour plus de clarté elles sont décalées latéralement sur les schémas de la figure 10.1. Examinons les trois situations présentées.

1. L'interféromètre est réglé à la différence de marche nulle si les miroirs sont équidistants de  $O$  (fig. 10.1 a). Dans ce cas les deux répliques parcourent des distances égales et émergent de l'interféromètre en phase<sup>7</sup>. Les deux répliques interfèrent en sortie de l'interféromètre.
2. On déplace le miroir  $\mathcal{M}_2$  de  $\Delta$ . Le train d'onde  $T_2$  est en retard de  $2\Delta$  par rapport à  $T_1$ . Si  $2\Delta < L$ , comme c'est le cas sur le schéma de la figure 10.1 b, les trains d'ondes  $T_1$  et  $T_2$  se superposent partiellement et interfèrent sur leur partie commune. Nous anticipons sur la notion de contraste : ici le contraste des franges a diminué par rapport à la situation précédente (le modèle d'une amplitude de la forme d'une sinusoïde amortie permet de comprendre cela simplement).
3. Le miroir  $\mathcal{M}_2$  est décalé de telle sorte que  $2\Delta > L$  (fig. 10.1 c). Les trains d'ondes  $T_1$  et  $T_2$  ne se superposent plus et ne donnent pas lieu à interférences.

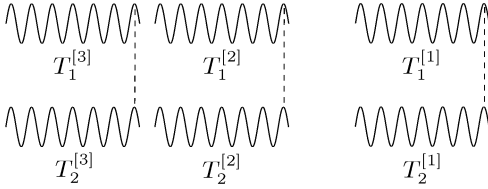
Dans la réalité un atome émet une série de trains d'ondes successifs  $T^{[1]}$ ,  $T^{[2]}$ ,  $T^{[3]}$  etc., chacun donnant lieu à des répliques  $T_1^{[j]}$  et  $T_2^{[j]}$ . Prenons comme référence le prolongement de la portion de sinusoïde que constitue  $T^{[1]}$ , à laquelle nous comparons tous les trains d'ondes  $T^{[j]}$ , en définissant pour chacun d'eux une phase relative. Nous distinguons deux cas extrêmes :

- le cas incohérent (la dénomination se justifiera d'elle-même par la suite) pour lequel les phases sont aléatoires et équiréparties sur  $[0, 2\pi]$ . Les trains d'ondes successifs n'ont aucune relation de phase fixe entre eux ;
- le cas cohérent pour lequel les différents trains d'ondes sont les portions d'une même sinusoïde. Ils ont une relation de phase fixe entre eux.

Revenons à l'interféromètre de la figure 10.1, réglé à la différence de marche nulle comme sur la partie a) du schéma. La figure 10.2 montre les répliques telles qu'elles émergent de l'interféromètre. Chaque train d'onde interfère avec lui-même<sup>8</sup> et tous les trains d'ondes produisent la même figure d'interférences, que la source soit cohérente ou incohérente (c'est-à-dire indépendamment des relations de phase entre les trains d'ondes successifs). Il y a des interférences dans ce cas à l'échelle de  $\tau_3$ , parce que les interférences produites par chaque

<sup>7</sup> Pour simplifier nous ne tenons pas compte d'un éventuel déphasage à la réflexion. Si la surface réfléchissante de la séparatrice est diélectrique, ce déphasage vaut  $\pi$  : il transforme ce qui serait un phénomène d'interférences à centre blanc en un phénomène à centre noir ! Nous n'avons pas représenté non plus la lame compensatrice, indispensable pour obtenir l'égalité des chemins optiques (à toute longueur d'onde).

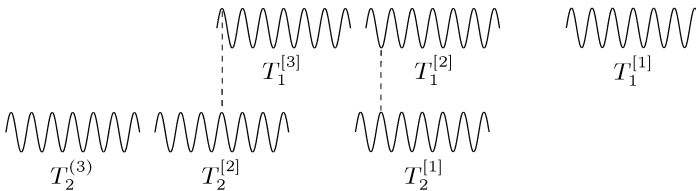
<sup>8</sup> Plus précisément, ce sont les répliques  $T_1^{[j]}$  et  $T_2^{[j]}$  de chaque train d'onde  $T^{[j]}$  qui interfèrent.



**FIG. 10.2.** À la différence de marche nulle, les interférences dues aux trains d'ondes successifs sont les mêmes. Le phénomène est stationnaire : on observe des interférences.

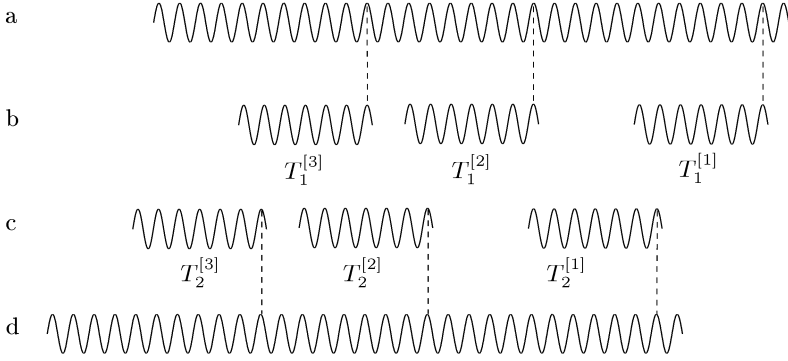
train d'onde, d'une durée de l'ordre de  $\tau_2$ , sont identiques : chaque train d'onde, à son arrivée, maintient le phénomène.

Plaçons-nous dans la situation c) de la figure 10.1 : le décalage des trains d'ondes est supérieur à leur longueur. La figure 10.3 montre schématiquement ce qui se passe avec une source incohérente (l'emploi de ce mot pour décrire cette situation sera justifié *a posteriori*). Les trains d'ondes successifs n'ont pas de déphasage fixe entre eux. Du fait du décalage du miroir  $\mathcal{M}_2$ , la réplique  $T_1^{[2]}$  se superpose (partiellement) à la réplique  $T_2^{[1]}$ . Ces deux répliques produisent des interférences, sur leur partie commune, dont la durée est de l'ordre de  $\tau_2$ . De la même façon, la réplique  $T_1^{[3]}$  se superpose à la réplique  $T_2^{[2]}$  : elles donnent des interférences, sur une durée de l'ordre de  $\tau_2$ , qui remplacent celles dues aux deux répliques précédentes. Mais la relation de phase qui existe entre  $T_1^{[2]}$  et  $T_2^{[1]}$  n'est pas la même (en général) que celle qui existe entre  $T_1^{[3]}$  et  $T_2^{[2]}$  : les deux phénomènes d'interférences sont différents. Si on poursuit l'analyse avec la suite des trains d'ondes  $T^{[j]}$  on obtient une suite de figures d'interférences qui se succèdent à une fréquence de l'ordre de  $1/\tau_2$ , qui sont différentes entre elles. Ce qui est détecté, à l'échelle de  $\tau_3$ , c'est la moyenne de l'éclairement de chaque figure : c'est un éclairement uniforme. Il n'y a pas d'interférences à une échelle de temps de l'ordre de  $\tau_3$ . Il n'y a pas cohérence.



**FIG. 10.3.** Source incohérente. Les trains d'ondes successifs n'ont pas de déphasage fixe entre eux. Si le décalage des répliques est supérieur à la longueur des trains d'ondes, il n'y a pas d'interférences.

Examinons maintenant le cas d'une source cohérente, comme le montre la figure 10.4. Les trains d'ondes successifs sont émis à des instants aléatoires, mais la phase est conservée de l'un à l'autre : les trains d'ondes du schéma b) sont, de fait, les parties tronquées de la sinusoïde du schéma a). Ceux du schéma c) le



**FIG. 10.4.** Source cohérente. Les trains d'ondes successifs sont en phase et sont pour cette raison les tronçons d'une même sinusoïde.

sont d'une sinusoïde représentée en d) : c'est la sinusoïde du schéma a) décalée par la translation du miroir  $\mathcal{M}_2$ . On constate que le déphasage qui existe entre les répliques  $T_1^{[1]}$  et  $T_2^{[1]}$ , qui ont une partie commune, est aussi celui qui existe entre les répliques  $T_1^{[2]}$  et  $T_2^{[2]}$ , entre les répliques  $T_1^{[3]}$  et  $T_2^{[3]}$  etc. Chaque paire de répliques produit la même figure d'interférences à l'échelle de  $\tau_2$ . De plus  $T_1^{[2]}$  et  $T_2^{[2]}$  ont aussi une partie commune et leur déphasage est le même que précédemment. C'est encore le cas de  $T_1^{[4]}$  (non représenté) et de  $T_2^{[3]}$  etc. Le phénomène est stationnaire : on observe des interférences à l'échelle de  $\tau_3$ . Il y a cohérence (ce qui justifie *a posteriori* le vocabulaire employé).

**Interférences et corrélation temporelle.** Considérons un interféromètre de Michelson dont un miroir est décalé de  $\Delta$  par rapport à la position qu'il occuperait à la différence de marche nulle. En sortie de l'interféromètre on superpose deux vibrations qui s'écrivent

$$x_1(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t - \varphi_1), \quad (10.12)$$

$$x_2(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t - \varphi_2), \quad (10.13)$$

et dont la différence de phase est

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi\nu_0\Delta}{c} = 2\pi\nu_0\tau, \quad (10.14)$$

si on est dans le vide, et où  $\tau$  est le temps que met la lumière pour parcourir la distance  $2\Delta$  (à cause de la réflexion, un décalage de  $\Delta$  d'un des miroirs produit une différence de chemin optique  $2\Delta$ ).

Ce qui est intéressant ici, c'est qu'on superpose une vibration  $x_1$  avec la vibration  $x_2$  qui n'est autre qu'une version de  $x_1$  déphasée, c'est-à-dire au fond translatée dans le temps. On a en effet

$$x_2(t) = x_1(t - \tau), \quad (10.15)$$

si bien que l'intensité vibratoire en sortie de l'interféromètre est

$$I(\tau) = \langle |x_1(t) + x_1(t - \tau)|^2 \rangle_t. \quad (10.16)$$

Avec des notations complexes, l'intensité vibratoire de la vibration  $x(t)$  est <sup>9</sup>

$$I(\tau) = \langle |x_1(t) + x_1(t - \tau)|^2 \rangle_t, \quad (10.17)$$

soit explicitement

$$\begin{aligned} I(\tau) &= 2I_0 + \langle x_1(t) \overline{x_1(t - \tau)} \rangle_t + \langle \overline{x_1(t)} x_1(t - \tau) \rangle_t \\ &= 2I_0 + 2\Re \left[ \langle x_1(t) \overline{x_1(t - \tau)} \rangle_t \right]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

où  $I_0 = \langle |x_1(t)|^2 \rangle_t = \langle |x_1(t - \tau)|^2 \rangle_t$ .

Le terme d'interférences de l'intensité vibratoire en sortie de l'interféromètre est la partie réelle de la fonction d'autocorrélation <sup>10</sup> de l'amplitude de la vibration, définie par

$$\Gamma(\tau) = \langle x_1(t) \overline{x_1(t - \tau)} \rangle_t. \quad (10.19)$$

Cela justifie l'introduction de cette fonction pour décrire la cohérence du champ ; en optique elle prend même le nom de fonction de cohérence.

Enfin, l'intensité vibratoire de la source est, avec les notations précédentes,  $I_0 = \langle |x_1(t)|^2 \rangle_t = \Gamma(0)$ . Ce sera la définition retenue par la suite (paragraphe 10.2.3).

#### 10.1.4 Cohérence temporelle et largeur spectrale

**Spectre d'un train d'onde.** Une source de lumière comporte un grand nombre d'atomes : tous n'émettent pas en phase, ni rigoureusement à la même fréquence <sup>11</sup>. Avant d'examiner les conséquences de cela, que peut-on dire du spectre de l'onde émise par un atome dans les conditions du paragraphe précédent ? C'est une onde à spectre étroit. Le spectre d'une fonction sinusoïdale tronquée est une fonction  $(\sin x/x)^2$  ; le rapport  $\tau_2/\tau_1$  étant de l'ordre de  $10^6$ , le spectre est concentré autour de la fréquence fondamentale  $\nu_0$ . Le modèle d'une sinusoïde amortie fournit un résultat plus réaliste. Il est commode d'employer la notation complexe et de tenir compte de la paire de Fourier ( $\mathcal{Y}$  est la fonction de Heaviside)

<sup>9</sup> Si on voulait rendre compatible cette définition de l'intensité vibratoire avec celle obtenue en notation réelle – relation (10.16) –, il faudrait introduire un coefficient 1/2 devant le membre de droite de la relation (10.17) et écrire

$$I(\tau) = \frac{1}{2} \langle |x_1(t) + x_1(t - \tau)|^2 \rangle_t,$$

ce que nous ne ferons pas. Cela revient à modifier la définition de l'intensité vibratoire, ce qui n'est guère gênant puisque nous omettons déjà l'impédance du milieu (voir le chapitre 1).

<sup>10</sup> Voir la note en bas de page 8 p. 234.

<sup>11</sup> Les raies spectrales ont justement une certaine « largeur ». Par exemple l'effet Doppler est une cause d'élargissement.

$$\mathcal{Y}(t) \exp \left[ -\frac{t}{\tau_2} \right] \rightleftharpoons \frac{\tau_2}{1 + 2i\pi\nu\tau_2}, \quad (10.20)$$

pour écrire l'amplitude associée à un train d'onde et son spectre sous la forme ( $a$  est une constante dimensionnelle)

$$a\mathcal{Y}(t) \exp \left[ -\frac{t}{\tau_2} \right] \exp[2i\pi\nu_0 t] \rightleftharpoons \frac{a\tau_2}{1 + 2i\pi(\nu - \nu_0)\tau_2}. \quad (10.21)$$

Le module au carré du spectre est

$$\gamma(\nu) = \frac{a^2\tau_2^2}{1 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2\tau_2^2}, \quad (10.22)$$

et son graphe est une « lorentzienne ». Cela correspond bien au profil naturel des raies spectrales. Compte tenu de  $\nu_0 \sim 5 \cdot 10^{14}$  Hz et de  $\tau_2 \sim 10^{-9}$  s, le spectre est très étroit, centré autour de  $\nu_0$ .

**Spectre d'une source cohérente composée d'un grand nombre d'atomes.** Il n'y a aucune raison *a priori* pour que tous les atomes d'une source lumineuse émettent des trains d'ondes de même longueur d'onde, et même si c'était le cas, qu'ils les émettent en phase. C'est pourtant ce qui se passe dans un laser, où la lumière est amplifiée par émission stimulée : un atome excité retrouve son état initial s'il est stimulé par une onde (de fréquence appropriée) : il émet une onde identique à l'onde stimulante dont l'amplitude est ainsi doublée, la phase conservée. D'autre part le laser comporte une cavité optique et la résonance privilégie des ondes en phase. Les trains d'ondes successifs émis par un atome du milieu amplificateur d'un laser apparaissent comme les tronçatures d'une même sinusoïde. Puisque les atomes émettent des trains d'ondes à tout instant, tous ces trains d'ondes reconstituent une seule et même sinusoïde. L'onde émise par le laser est pratiquement une onde harmonique<sup>12</sup> (sinusoïdale).

Dans ce cas, tout se passe comme si on avait une augmentation de la longueur des trains d'ondes. Nous parlons de train d'onde apparent. Pour une source cohérente, la longueur des trains d'ondes apparents est beaucoup plus grande que celle des trains d'ondes physiques, effectivement émis par les atomes.

Les schémas a) et d) de la figure 10.4 montrent qu'on obtient des interférences même pour un décalage plus grand que la longueur des trains d'ondes physiques : ce qui compte c'est bien la longueur des sinusoïdes en a) et d), c'est-à-dire la longueur des trains d'ondes apparents. Celle-ci se mesure à l'aide du montage de la figure 10.1.

**Spectre d'une source incohérente composée d'un grand nombre d'atomes.** Si aucun artifice n'est utilisé comme dans un laser, le spectre d'une source est plus large que celui des trains d'ondes physiques. L'élargissement

<sup>12</sup> Il y a bien sûr une limite à cela : par exemple les atomes d'un laser à gaz sont animés d'un mouvement, si bien que chaque radiation émise par un atome subit l'effet Doppler. Cela se traduit par un élargissement du spectre de l'onde émise.

provient ici du fait que les atomes de la source émettent des trains d'ondes dont les fréquences fondamentales ne sont pas les mêmes. De là résulte un brouillage des interférences, qui a lieu même pour un petit décalage des miroirs d'un interféromètre de Michelson par rapport à la position de la différence de marche nulle. Tout se passe cette fois-ci comme si on avait des trains d'ondes apparents beaucoup plus courts que les trains d'ondes physiques.

**Cohérence temporelle. Longueur de cohérence.** Le montage de la figure 10.1 permet de mesurer la longueur des trains d'ondes apparents d'une source  $S$  définis dans les conditions précédentes. On part de la différence de marche nulle, pour laquelle on observe des interférences, puis on déplace par exemple le miroir  $\mathcal{M}_2$ . Il arrive un moment où les interférences ont disparu : on met ainsi en évidence la longueur de cohérence de la source, qui caractérise sa cohérence temporelle.

La longueur de cohérence est liée au spectre de la source. Indiquons quelques ordres de grandeur.

1. On obtient des interférences avec de la lumière blanche, dont la longueur de cohérence est de l'ordre de  $5\text{ }\mu\text{m}$ . Les distances des miroirs à  $O$  doivent être égales avec une précision de l'ordre de  $2,5\text{ }\mu\text{m}$ .
2. Les lampes spectrales ont des longueurs de cohérence de l'ordre de quelques centimètres. Cela dépend de la pression du gaz dans l'ampoule : la longueur de cohérence augmente quand la pression diminue.
3. Les lasers ont des longueurs de cohérence allant de quelques centimètres à plusieurs kilomètres. Un petit laser hélium-néon courant a une longueur de cohérence d'une dizaine de centimètres, voire du double. Un laser ionique à argon a une longueur de cohérence d'environ  $5\text{ cm}$ . Cette longueur devient de l'ordre de quelques mètres si on place un étalon Fabry-Perot dans la cavité laser. Pour les besoins des télécommunications optiques, on fabrique des diodes lasers dont la longueur de cohérence se chiffre en centaines de mètres. C'est aussi le cas pour des lasers employés en métrologie, de très grande pureté spectrale.

**Remarque 10.1.1.** La notion de cohérence et celle de monochromaticité sont différentes et doivent être distinguées. Certes une source qui serait parfaitement monochromatique serait nécessairement cohérente (temporellement et spatialement) puisque tous ses points émettraient des trains d'ondes arbitrairement longs : en tous les points d'un écran qu'elle éclaire, la source produirait des vibrations ayant entre elles une relation de phase fixe dans le temps : c'est la définition de la cohérence. Dans la réalité, les sources lumineuses sont seulement quasi-monochromatiques : un émetteur de spectre étroit spatialement incohérent est concevable. Enfin on produit des interférences avec de la lumière à spectre large (lumière blanche) : la cohérence (spatiale) est suffisante pour l'observation de franges stationnaires.

### 10.1.5 Cohérence spatiale

La notion de cohérence spatiale, liée à l'étendue de la source, se comprend de la façon suivante. On obtient des franges d'égales épaisseur avec un interféromètre de Michelson en inclinant légèrement un des deux miroirs, comme l'indique la figure 10.5. On parle de franges du coin d'air (le coin est formé par les deux miroirs, ou plus précisément par leurs images à travers l'objectif  $\mathcal{L}$ ).

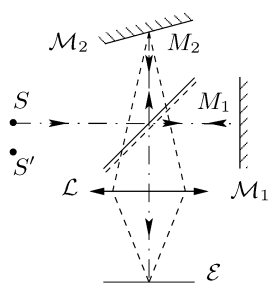
Dans un premier temps, la source est quasi ponctuelle. Les franges d'interférences sont du type de celles obtenues dans l'expérience d'Young. En effet chaque miroir donne une image de la source :  $S_1$  pour  $\mathcal{M}_1$  et  $S_2$  pour  $\mathcal{M}_2$  ;  $S_1$  et  $S_2$  se comportent comme deux trous d'Young. Si la source est de spectre étroit, les franges ont un profil sinusoïdal. Il est possible toutefois d'obtenir des franges d'interférences avec une source blanche.

Si on déplace  $S$  en  $S'$ , dans le plan de la figure 10.5, perpendiculairement à l'axe  $SM_1$ , les franges se déplacent dans le plan  $\mathcal{E}$ , perpendiculairement à l'axe optique de  $\mathcal{L}$ , d'une quantité  $\delta$  proportionnelle à  $SS'$ . Si  $SS'$  est petit,  $\delta$  est assez petit pour que les franges dues à  $S'$  se superposent pratiquement à celles dues à  $S$ . Dans ce cas, les deux systèmes de franges se renforcent l'un l'autre.

En revanche, si on augmente  $SS'$ , on passe par une valeur de  $\delta$  telle que les franges d'interférences dues à  $S'$  sont en opposition avec celles dues à  $S$  : les deux systèmes de franges se neutralisent.

Considérons désormais une source de lumière ayant une étendue variable. On obtient cela en plaçant un diaphragme iris devant une source étendue. La source est composée d'un très grand nombre d'atomes ; chaque atome émet la lumière indépendamment des autres atomes, sans aucune relation de phase fixe entre les différents trains d'ondes. Si la source est assez petite (diaphragme très fermé), les franges dues à tous les atomes se superposent et donnent des franges d'interférences de bon contraste. Si on augmente le diamètre de l'iris, le contraste diminue. On arrive même à une valeur de ce diamètre pour laquelle les interférences ont disparu : les atomes du bord de l'iris produisent des interférences qui neutralisent celles dues aux points centraux de l'iris. On a perdu la cohérence.

Les dimensions de la source influent sur sa capacité à produire des interférences. On parle de cohérence spatiale dans ce cas.



**FIG. 10.5.** Observation de franges du coin d'air sur l'écran  $\mathcal{E}$ . L'objectif  $\mathcal{L}$  projette les images des deux miroirs sur  $\mathcal{E}$ .

### 10.1.6 Description de la cohérence

Les explications des paragraphes précédents, pour schématiques qu'elles soient, permettent de comprendre certains choix dans les modèles théoriques adoptés pour définir la cohérence [16, 87, 98, 114, 153, 241]. Voici quelques éléments à prendre en compte dans la description de cette dernière :

1. *Stationnarité*. L'observation d'interférences sur une durée longue par rapport aux périodes d'oscillations du champ conduit à l'hypothèse de stationnarité de ce dernier ;
2. *Corrélation temporelle*. La cohérence temporelle traduit la corrélation qui existe entre les oscillations du champ prises à deux instants différents, séparés d'une durée fixe (qui correspond au décalage obtenu à l'aide d'un interféromètre). Cela justifie la représentation de la cohérence par la fonction de corrélation de l'amplitude du champ ;
3. *Corrélation spatiale*. La cohérence spatiale traduit la corrélation qui existe entre les oscillations du champ en deux points de la source ;
4. *Largeur spectrale*. Plus que la longueur des trains d'ondes physiques, effectivement émis par la source, c'est la longueur des trains d'ondes apparents qui caractérise la cohérence : c'est d'elle que dépend la corrélation des vibrations. Cette longueur est d'autre part liée à l'étendue spectrale de la source. Il apparaît une relation naturelle entre cohérence et largeur spectrale, exprimée théoriquement par le théorème de Wiener-Khintchine.

## 10.2 La cohérence du champ électrique

### 10.2.1 Notations. Moyenne temporelle

Le champ électrique sur un émetteur ou un récepteur est un signal aléatoire ; sa représentation temporelle est, en toute généralité, une distribution aléatoire. Nous traitons toutefois seulement de fonctions aléatoires, dont l'appendice G expose quelques propriétés, et utilisons les notations intégrales habituelles. Pour rendre les écritures plus simples, nous adoptons même des notations légèrement différentes de celles de l'appendice G et moins rigoureuses qu'elles.

Ainsi la moyenne temporelle de la fonction aléatoire (temporelle)  $X$  s'écrit

$$\langle X \rangle_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt, \quad (10.23)$$

où  $X(t)$  remplace  $X_\omega(t)$  – voir la relation (G.8). ( $X_\omega$  est une réalisation de  $X$ .)

Nous ferons systématiquement l'hypothèse que l'amplitude du champ est une fonction aléatoire stationnaire et ergodique, de façon à appliquer le théorème de Wiener-Khintchine sous la forme du corollaire G.2.2. (Voir aussi la remarque G.2.1 p. 518.)

### 10.2.2 Premier ordre

Soit  $E_A(\mathbf{r}, t)$  la représentation spatio-temporelle du champ électrique à l'instant  $t$  et au point  $\mathbf{r}$  d'un émetteur (ou récepteur) sphérique  $\mathcal{A}$ . La valeur moyenne temporelle de  $E_A(\mathbf{r}, t)$  est  $\langle E_A(\mathbf{r}, t) \rangle_t$  et correspond à un champ statique qui ne se propage pas, comme le montrent les équations de Maxwell. Nous pouvons donc supposer

$$\langle E_A(\mathbf{r}, t) \rangle_t = 0, \quad (10.24)$$

sans que la propagation de la lumière ne soit affectée.

### 10.2.3 Deuxième ordre. Cohérence

On a l'habitude en optique de baptiser « cohérence » les fonctions de corrélation dont le paragraphe 10.1 examine le rôle dans la description des interférences. Ainsi les explications du paragraphe 10.1 justifient intuitivement les définitions qui suivent. Celles-ci ont toutefois une portée plus générale, n'étant plus liées à une expérience d'interférométrie particulière. En effet les fonctions de corrélation s'introduisent dans la théorie des fonctions aléatoires, comme exposé dans l'appendice G. Les propriétés de la cohérence, les résultats établis à son propos, ne sont que la traduction, dans le langage de l'optique, des propriétés des fonctions (ou distributions) aléatoires<sup>13</sup> (voir la remarque G.2.2).

Soient  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  deux points d'un émetteur (ou récepteur)  $\mathcal{A}$  (fig. 10.6). La cohérence mutuelle entre les vibrations lumineuses en ces deux points est<sup>14</sup>

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t - \tau)} \rangle_t. \quad (10.25)$$

Elle vérifie

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau) = \overline{\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; -\tau)}. \quad (10.26)$$

Si  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , la cohérence mutuelle devient la cohérence propre au point  $\mathbf{r}_1$ , c'est-à-dire  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \tau)$ . Ainsi

$$\Gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau) = \langle E_A(\mathbf{r}, t) \overline{E_A(\mathbf{r}, t - \tau)} \rangle_t. \quad (10.27)$$

L'intensité vibratoire au point  $\mathbf{r}$  de l'émetteur, notée  $I(\mathbf{r})$ , est

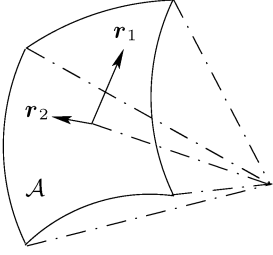
$$I(\mathbf{r}) = \Gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0). \quad (10.28)$$

L'intensité (vibratoire) mutuelle aux points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  est, par définition,

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) = \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} \rangle_t. \quad (10.29)$$

<sup>13</sup> Parfois l'inverse vaut aussi : il existe une « formule des interférences » en théorie des fonctions aléatoires [17], terme proprement ondulatoire.

<sup>14</sup> Ici l'indice  $A$  indique un émetteur ou un récepteur, et non une fonction aléatoire comme dans l'appendice G. La fonction aléatoire étudiée est toujours l'amplitude du champ électrique, et il n'y a pas lieu de l'indiquer par un indice.



**FIG. 10.6.** La cohérence mutuelle traduit la corrélation qui existe entre les vibrations émises (ou reçues) en deux points quelconques  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  d'un émetteur (ou récepteur)  $A$ .

L'appendice H présente quelques propriétés mathématiques de la cohérence mutuelle et de la cohérence propre. On déduit par exemple de l'inégalité de Schwarz la relation

$$|\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq [I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_2)]^{1/2}. \quad (10.30)$$

**Remarque 10.2.1.** Ce n'est pas l'intensité vibratoire qui se mesure en pratique mais l'éclairement, dont l'unité S.I. est le  $\text{W}/\text{m}^2$  (voir le chapitre 1). L'éclairement est le produit de l'intensité vibratoire par l'inverse de l'impédance. De la même façon que l'intensité vibratoire, la cohérence a une unité qui est le  $\text{W} \cdot \Omega / \text{m}^2$  ou encore  $\text{V}^2 / \text{m}^2$ .

#### 10.2.4 Représentation mixte. Densités spectrales

**Densités spectrales de puissance et d'interaction.** L'intensité vibratoire  $I_A$  du signal polychromatique  $|E_A\rangle$ , supposé certain, se répartit (en principe) sur tout le spectre électromagnétique. En un point  $\mathbf{r}$ , l'intensité vibratoire contenue dans le domaine  $[\nu, \nu + d\nu]$  est

$$dI_A(\mathbf{r}) = \gamma_A(\mathbf{r}; \nu) d\nu, \quad (10.31)$$

où  $\gamma_A(\mathbf{r}; \nu)$  est la densité spectrale de puissance.

La définition de la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire est donnée à l'appendice G : c'est la définition G.2.1. Elle s'applique à un champ électrique polychromatique aléatoire.

La densité spectrale de puissance est un cas particulier de la densité spectrale d'interaction  $\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)$ , définie à l'appendice G, et correspond à  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . Pour cette raison nous écrivons parfois  $\gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \nu)$  au lieu de  $\gamma_A(\mathbf{r}; \nu)$ .

Selon le théorème de Wiener–Khinchine [17, 97, 153, 203], démontré dans l'appendice G, et sous l'hypothèse que le champ est une fonction aléatoire stationnaire et ergodique au sens large, la densité spectrale d'interaction  $\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)$  aux points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , est la transformée de Fourier temporelle de la cohérence mutuelle  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$ , c'est-à-dire

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu). \quad (10.32)$$

Il résulte de la relation (10.26)

$$\gamma_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \nu) = \overline{\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)}. \quad (10.33)$$

Si  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ , il résulte de la relation (10.32) que la densité spectrale de puissance  $\gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \nu)$  est la transformée de Fourier temporelle de la cohérence propre. Par conséquent, l'intensité vibratoire au point  $\mathbf{r}$  est

$$I_A(\mathbf{r}) = \Gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \nu) d\nu. \quad (10.34)$$

La relation (10.34) est la forme intégrale de la relation (10.31).

La densité spectrale d'interaction est relative à la représentation mixte du champ : elle est la représentation mixte de la cohérence.

**Décorrélation de bandes spectrales disjointes.** Avec les notations du paragraphe G.2.5 de l'appendice G, la densité spectrale de puissance  $\gamma_X$  d'une fonction aléatoire  $X$  vérifie la relation

$$E[dx_1(\nu_1) \overline{dx_2(\nu_2)}] = \gamma_X(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2, \quad (10.35)$$

dont il résulte une propriété fondamentale des ondes lumineuses : deux vibrations dont les spectres ont une intersection vide sont totalement incohérentes entre elles et ne peuvent donner lieu à interférences. Cette propriété reste vraie pour des radiations issues d'une même source (c'est-à-dire pour des domaines spectraux disjoints d'une même source, et pour un temps d'observation long).

### 10.2.5 La notion de cohérence abstraite et ses représentations

De la même façon que le signal champ électrique  $|E_A\rangle$  admet quatre représentations, on conçoit la notion de signal de cohérence  $|C_A\rangle$  sur  $\mathcal{A}$  muni de quatre représentations. Ainsi la représentation spatio-temporelle de la cohérence est  $\Gamma_A$ , tandis que sa représentation mixte est  $\gamma_A$ . On dresse un losange de Fourier pour la cohérence de la façon suivante

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) & \\ \nearrow \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 & & \nwarrow \tau \\ g_A(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \tau) & & \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \\ \nwarrow \tau & & \nearrow \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \\ & G_A(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \nu) & \end{array} \quad (10.36)$$

Puisque  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont des vecteurs de dimension 2, la correspondance entre  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$  et  $g_A(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \tau)$  s'établit par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier à quatre dimensions, qui s'écrit sous la forme

$$g_A(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \tau) = \int_{\mathbb{R}^4} \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \exp[2i\pi(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (10.37)$$

Il en est de même de la correspondance entre  $\gamma_A$  et  $G_A$ .

### 10.2.6 Cohérence spatiale, cohérence temporelle

Un émetteur  $\mathcal{A}$  (ou une source lumineuse) est réductible [98] si sa cohérence mutuelle s'écrit, pour  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  et  $\tau$  quelconques, sous la forme

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \beta(\tau). \quad (10.38)$$

La fonction  $\alpha$  représente la cohérence « spatiale » de l'émetteur, et la fonction  $\beta$  sa cohérence « temporelle ».

On parle également de rayon de cohérence. Il s'agit d'une notion spatiale : le rayon de cohérence au point  $\mathbf{r}_1$  (pris comme référence) est  $R$  tel que

$$\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad \text{si } \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| > R. \quad (10.39)$$

Dans la pratique, une condition telle que  $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx 0$  est plus réaliste. Si  $\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| > R$ , la cohérence mutuelle  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$  est nulle (ou pratiquement nulle) : les vibrations en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont incohérentes entre elles.

Dans les exemples suivants, l'émetteur  $\mathcal{A}$  peut être remplacé par un récepteur.

**Exemple 10.2.1 (Émetteur totalement cohérent).** Une source monochromatique de fréquence  $\nu_0$  est telle que

$$\beta(\tau) = e^{2i\pi\nu_0\tau}, \quad (10.40)$$

et constitue un exemple d'émetteur totalement cohérent. Il s'agit d'un cas limite, qui n'existe pas vraiment (physiquement). Mais la lumière émise par certains lasers permet de rapprocher ces sources de la limite évoquée ici.

Les modules des amplitudes du champ en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont proportionnels, et on est dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz (appendice H), si bien que

$$|\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| = [I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_2)]^{1/2}. \quad (10.41)$$

Dans la relation (10.41) on suppose par exemple  $\mathbf{r}_1$  donné : la relation est alors vérifiée pour tout  $\tau$  et tout  $\mathbf{r}_2$ . Le col d'un faisceau laser est un exemple de source totalement cohérente (dans les limites déjà évoquées). Une source lumineuse ponctuelle et monochromatique l'est également.

**Exemple 10.2.2 (Émetteur totalement incohérent).** Il s'agit d'un émetteur spatialement et temporellement incohérent. Sa cohérence mutuelle s'écrit <sup>15</sup>

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \tau) \ell_0^2 t_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\tau), \quad (10.42)$$

et représente encore un cas limite, essentiellement à cause du terme  $\delta(\tau)$ . Une source étendue de spectre large – par exemple une lampe à incandescence ou un tube fluorescent – est totalement incohérente.

<sup>15</sup> Le facteur  $\ell_0^2 t_0$  homogénéise les distributions de Dirac ;  $\ell_0$  est l'unité de longueur et  $t_0$  l'unité de temps (voir le paragraphe 3.4.1).

**Exemple 10.2.3 (Émetteur spatialement incohérent).** Un tel émetteur correspond à  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = 0$  pour  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ . Alors, quel que soit  $\tau$ ,

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = I_A(\mathbf{r}_1) \ell_0^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \beta(t). \quad (10.43)$$

Cela s'écrit encore

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \tau) \ell_0^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (10.44)$$

Le rayon de cohérence est nul en tout point. Une source thermique (lampe à incandescence par exemple) filtrée à l'aide d'un filtre chromatique passe-bande est spatialement incohérente (on suppose que la source a une certaine étendue spatiale).

**Exemple 10.2.4 (Émetteur temporellement incohérent).** C'est le cas

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) t_0 \delta(\tau). \quad (10.45)$$

Une source à spectre étendu est temporellement incohérente. Une ampoule assez petite comme le sont les ampoules à halogènes, si elle est vue à une distance suffisante pour paraître quasi ponctuelle, est une source temporellement incohérente. Une étoile, vue de la Terre, constitue un autre exemple.

## 10.3 Superposition de deux champs. Interférences

Avant d'étudier le transfert de la cohérence par diffraction, nous appliquons les définitions du paragraphe 10.2.3 aux situations décrites au paragraphe 10.1 et précisons la formule des interférences établie au paragraphe 10.1.2.

### 10.3.1 Formule des interférences. Degré de cohérence temporelle

Soit un récepteur  $\mathcal{A}$  sur lequel on superpose deux champs d'amplitudes  $E_A^{[1]}$  et  $E_A^{[2]}$ . Il s'agit de calculer la cohérence mutuelle du champ résultant  $E_A = E_A^{[1]} + E_A^{[2]}$ . Pour expliquer certains phénomènes d'interférences, il est utile de considérer que  $E_A^{[1]}$  est un champ « retardé » (les deux ondes qui se superposent ont parcouru des chemins optiques différents). Si  $\tau_c$  est ce retard, l'amplitude résultante est

$$E_A(\mathbf{r}, t) = E_A^{[1]}(\mathbf{r}, t + \tau_c) + E_A^{[2]}(\mathbf{r}, t), \quad (10.46)$$

et la cohérence mutuelle sur  $\mathcal{A}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) &= \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t - \tau)} \rangle_t \\ &= \left\langle \left[ E_A^{[1]}(\mathbf{r}_1, t + \tau_c) + E_A^{[2]}(\mathbf{r}_1, t) \right] \left[ \overline{E_A^{[1]}(\mathbf{r}_2, t + \tau_c - \tau)} + \overline{E_A^{[2]}(\mathbf{r}_2, t - \tau)} \right] \right\rangle_t \\ &= \Gamma_A^{[11]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) + \Gamma_A^{[22]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) + \Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau + \tau_c) \\ &\quad + \Gamma_A^{[21]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau - \tau_c), \end{aligned} \quad (10.47)$$

où

$$\Gamma_A^{[ij]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle E_A^{[i]}(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A^{[j]}(\mathbf{r}_2, t - \tau)} \rangle_t. \quad (10.48)$$

L'intensité vibratoire au point  $\mathbf{r}$  est

$$\begin{aligned} I_A(\mathbf{r}) &= \Gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) \\ &= \Gamma_A^{[11]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) + \Gamma_A^{[22]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) + \Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau_c) + \Gamma_A^{[21]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; -\tau_c). \end{aligned} \quad (10.49)$$

Du fait que

$$\Gamma_A^{[21]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau_c) = \overline{\Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; -\tau_c)}, \quad (10.50)$$

l'intensité vibratoire en  $\mathbf{r}$  s'écrit encore

$$\begin{aligned} I_A(\mathbf{r}) &= \Gamma_A^{[11]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) + \Gamma_A^{[22]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) + \Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau_c) + \overline{\Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau_c)} \\ &= I_A^{[1]}(\mathbf{r}) + I_A^{[2]}(\mathbf{r}) + 2\Re\{\Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau_c)\}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

La relation (10.51) est une formule des interférences, à comparer à la relation (10.18).

**Degré de cohérence temporelle.** Le degré de cohérence temporelle  $\mu_A^{[12]}$  est défini par

$$\mu_A^{[12]}(\mathbf{r}, \tau_c) = \frac{\Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau_c)}{\sqrt{I_A^{[1]}(\mathbf{r}) I_A^{[2]}(\mathbf{r})}}. \quad (10.52)$$

C'est une fonction à valeurs complexes, et l'inégalité de Schwarz conduit à

$$|\mu_A^{[12]}(\mathbf{r}, \tau_c)| \leq 1. \quad (10.53)$$

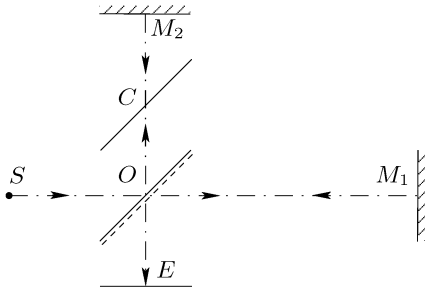
La formule des interférences (10.51) devient

$$I_A(\mathbf{r}) = I_A^{[1]}(\mathbf{r}) + I_A^{[2]}(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_A^{[1]}(\mathbf{r}) I_A^{[2]}(\mathbf{r})} \Re[\mu_A^{[12]}(\mathbf{r}, \tau_c)], \quad (10.54)$$

à comparer à la relation (10.11).

### 10.3.2 Mesure de la cohérence temporelle

Soit une source ponctuelle  $S$  de spectre étroit autour de la longueur d'onde  $\tilde{\lambda}$ . Dédoublons-la, par exemple à l'aide d'un interféromètre de Michelson (fig. 10.7) : nous obtenons deux images de la source. Tout se passe comme si nous disposions de deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , comme l'indique la figure 10.8. Leur décalage est  $S_1 S_2 = \delta = 2(OM_1 - OM_2)$  (c'est la différence de marche). L'éclairement est observé à la distance  $D$ , plus précisément sur la sphère  $\mathcal{A}$  de centre  $S_2$  et de rayon  $D$  ( $D \gg \delta$ ) ; la distance  $D$  est telle que  $D = SO + OM_2 + M_2 E$ .



**FIG. 10.7.** Schéma d'un interféromètre de Michelson comprenant une lame semi-réfléchissante passant par  $O$ , une lame compensatrice en  $C$  et deux miroirs passant par  $M_1$  et  $M_2$ . À la différence de marche nulle les distances  $OM_1$  et  $OM_2$  sont égales.

Si l'interféromètre est placé dans le vide, le retard de la vibration issue de  $S_1$  par rapport à celle issue de  $S_2$  est <sup>16</sup>  $\tau_c = \delta/c$ . Si  $D$  est assez grand, ce retard est le même pour tous les points de la sphère  $\mathcal{A}$ .

La source  $S_2$  crée sur la sphère  $\mathcal{A}$  un champ homogène (spatialement), de la forme

$$E_A^{[2]}(\mathbf{r}, t) = U_0 \beta(t), \quad (10.55)$$

où  $U_0$  est une constante dimensionnelle et où la fonction  $\beta$ , qui décrit l'évolution du champ, est telle que  $|\beta(0)| = 1$ . La source  $S_1$  crée un champ de la forme

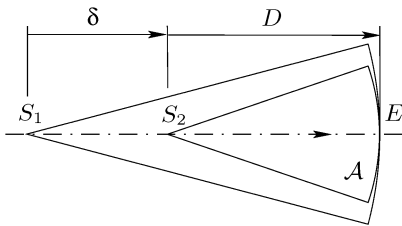
$$\begin{aligned} E_A^{[1]}(\mathbf{r}, t + \tau_c) &= U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{D + \delta} - \frac{1}{D} \right) r^2 \right] \beta(t + \tau_c) \\ &\approx U_0 \exp \left[ \frac{i\pi \delta r^2}{\tilde{\lambda} D^2} \right] \beta(t + \tau_c). \end{aligned} \quad (10.56)$$

La cohérence de la source est définie par la fonction  $\Gamma$ , telle que

$$\Gamma(\tau) = \langle \beta(t) \overline{\beta(t - \tau)} \rangle_t, \quad (10.57)$$

qui se met sous la forme  $\Gamma(\tau) = |\Gamma(\tau)| \exp[-i\psi(\tau)]$ . On a  $\Gamma(0) = 1$ , car  $|\beta(0)| = 1$ . Il en résulte

$$\Gamma_A^{[12]}(\mathbf{r}, \tau_c) = |U_0|^2 \exp \left[ \frac{i\pi \delta r^2}{\tilde{\lambda} D^2} \right] \Gamma(\tau_c), \quad (10.58)$$



**FIG. 10.8.** L'interféromètre de la figure 10.7 donne deux images de la source  $S$ . Pour les interférences en  $E$ , tout se passe comme si on avait deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , séparées de la distance  $\delta = 2(OM_1 - OM_2)$ .

<sup>16</sup> Voir la note en bas de page 7 p. 278. Si besoin est, le déphasage supplémentaire est supposé inclus dans  $\tau_c$ .

et le module du degré de cohérence est

$$|\mu_A^{[12]}(\tau_c)| = |\Gamma(\tau_c)|. \quad (10.59)$$

La formule des interférences devient

$$I_A(\mathbf{r}) = 2|U_0|^2 \left[ 1 + |\mu_A^{[12]}(\tau_c)| \cos \left( \frac{\pi \delta r^2}{\lambda D^2} - \psi(\tau_c) \right) \right]. \quad (10.60)$$

On observe des interférences sur  $\mathcal{A}$  (ou dans le plan tangent en  $E$  à  $\mathcal{A}$ ). Il s'agit d'anneaux du type de ceux de Newton (leur rayon est proportionnel à l'inverse de la racine carrée des nombres entiers). Le contraste des franges d'interférences est (par définition)

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}, \quad (10.61)$$

où  $I_M$  est la valeur maximale de  $I_A$  et  $I_m$  sa valeur minimale. La relation (10.60) conduit à

$$C = |\mu_A^{[12]}(\tau_c)|. \quad (10.62)$$

La mesure du contraste des franges d'interférences fournit une mesure du module de la cohérence temporelle de la source (à travers celui du degré de cohérence). La mesure est faite « point par point », c'est-à-dire pour toute une série de positions d'un des miroirs de l'interféromètre.

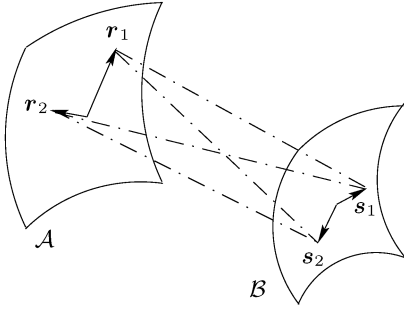
**Remarque 10.3.1.** L'analyse précédente est menée pour une source à spectre étroit, essentiellement parce que la mesure du degré de cohérence repose sur celle du contraste de franges d'interférences. Si la source est à spectre large, quand un des miroirs de l'interféromètre est décalé par rapport à la position de la différence de marche nulle, on observe un éclaircissement homogène correspondant à un « blanc d'ordre supérieur », c'est-à-dire à un spectre cannelé. La spectroscopie par transformation de Fourier [30] (non abordée dans ce livre, faute de place) permet l'étude expérimentale du spectre d'une telle source, et donc de sa cohérence (temporelle).

## 10.4 Transfert de la cohérence

### 10.4.1 Filtrage de la cohérence

Il s'agit d'étudier le transfert de la cohérence dans les situations mentionnées au paragraphe 9.3.1 (diffraction, imagerie, filtrage).

Nous supposons connue la cohérence sur l'émetteur  $\mathcal{A}$ , et nous souhaitons calculer la cohérence mutuelle sur le récepteur  $\mathcal{B}$ . Soient  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  deux points de  $\mathcal{A}$ , et  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  deux points de  $\mathcal{B}$  (fig. 10.9). Si  $H_{BA}$  est la réponse percussionnelle spatio-temporelle, le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  s'écrit, selon la relation (9.25)



**FIG. 10.9.** Éléments pour l'analyse du transfert de la cohérence d'un émetteur  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$ .

$$E_B(\mathbf{s}_1, t) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t_1) E_A(\mathbf{r}_1, t - t_1) dt_1. \quad (10.63)$$

La cohérence mutuelle sur  $\mathcal{B}$  se calcule ainsi<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) &= \langle E_B(\mathbf{s}_1, t) \overline{E_B(\mathbf{s}_2, t - \tau)} \rangle_t \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t_1) E_A(\mathbf{r}_1, t - t_1) dt_1 \right. \\ &\quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_2 \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, t_2) E_A(\mathbf{r}_2, t - \tau - t_2) dt_2 \right\rangle_t \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_2 \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t_1) dt_1 \int_{\mathbb{R}} \overline{H_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, t_2)} \\ &\quad \times \langle E_A(\mathbf{r}_1, t - t_1) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t - \tau - t_2)} \rangle_t dt_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_2 \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t_1) dt_1 \int_{\mathbb{R}} \overline{H_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, t_2)} \\ &\quad \times \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau + t_2 - t_1) dt_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_2 \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t_1) \\ &\quad \times \left[ \overline{H_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, -t)} * \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) \right] (\tau - t_1) dt_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} [H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t) * \overline{H_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, -t)} \\ &\quad * \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)] (\tau) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Les produits de convolution de deux dernières lignes de la relation (10.9) portent sur le temps.

La relation (10.9) montre que, outre une intégration spatiale,  $\Gamma_B$  se déduit de  $\Gamma_A$  par application d'un filtre linéaire temporel, dont la réponse percussive est la réponse percussive de cohérence, définie par

$$K_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = [H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, t) * \overline{H_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, -t)}] (\tau), \quad (10.65)$$

de telle sorte que

<sup>17</sup> Au lieu de  $h(\tau) = f * g(\tau)$ , nous écrivons  $h(\tau) = [f(t) * g(t)](\tau)$ .

$$\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = \int_{\mathbb{R}^4} [K_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) * \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)](\tau) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (10.66)$$

La densité spectrale d'interaction s'obtient par transformation de Fourier temporelle appliquée à  $\Gamma_B$  et s'écrit

$$\gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \int_{\mathbb{R}^4} h_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, \nu) \overline{h_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, \nu)} \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (10.67)$$

où  $h_{BA}$  est le gain complexe du transfert du champ. Le gain complexe du transfert de la cohérence est

$$k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = h_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, \nu) \overline{h_{BA}(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2, \nu)}, \quad (10.68)$$

si bien que la relation (10.67) s'écrit

$$\gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \int_{\mathbb{R}^4} k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (10.69)$$

Il existe une relation simple entre  $K_{BA}$  et  $k_{BA}$  : puisque  $h(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, \nu)$  est la transformée de Fourier (temporelle) de  $H_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$ , on déduit des relations (10.65) et (10.68) que  $k_{BA}$  est la transformée de Fourier temporelle de  $K_{BA}$

$$K_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \Rightarrow k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu). \quad (10.70)$$

En conclusion, le transfert de la cohérence est parfaitement connu si le transfert du champ est connu. Cela est vrai dans toutes les situations : diffraction de Fraunhofer, formation d'une image... Le prochain paragraphe examine le cas de la diffraction de Fresnel.

Les résultats précédents s'expriment sous la forme du théorème 6 qui est l'équivalent, pour la cohérence, du théorème 5 pour l'amplitude du champ.

**Théorème 6 (Transfert de la cohérence [20]).** *Le transfert de la cohérence d'un émetteur  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$ , à travers un système électromagnétique quelconque, est effectué par un opérateur linéaire spatio-temporel dont la partie temporelle est un filtrage linéaire. Ce transfert se traduit par la relation (10.66) en représentation spatio-temporelle et par la relation (10.69) en représentation mixte. Si  $h_{BA}$  est le gain complexe du transfert du champ, le gain complexe du transfert de la cohérence est  $k_{BA}$ , donné par la relation (10.68); si  $H_{BA}$  est la réponse percussionnelle spatio-temporelle du transfert du champ, la réponse percussionnelle du transfert de la cohérence est  $K_{BA}$ , donnée par la relation (10.65).*

#### 10.4.2 Transfert de la cohérence par diffraction

La relation (9.27) donne le gain complexe du transfert du champ (représentation mixte) sous la forme

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i\nu}{vD} \exp \left[ -\frac{i\pi\nu}{v} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] \exp \left[ \frac{-2i\pi\nu D}{v} \right]. \quad (10.71)$$

Le gain complexe de cohérence se déduit de la relation (10.68) et prend la forme

$$k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{\nu^2}{v^2 D^2} \exp \left[ -i\pi\nu \frac{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2}{vD} \right] \times \exp \left[ -i\pi\nu \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{vR_B} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{vR_A} \right) \right]. \quad (10.72)$$

On obtient  $K_{BA}$  à partir de  $k_{BA}$  par une transformation de Fourier inverse (temporelle). Pour que le calcul soit praticable, la vitesse de phase est supposée constante sur le domaine spectral considéré, comme au paragraphe 9.4.1 ; elle est notée  $\tilde{v}$ . Pour alléger les écritures, nous utilisons le paramètre

$$\tau_0 = \frac{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2}{2\tilde{v}D} + \frac{s_1^2 - s_2^2}{2\tilde{v}R_B} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\tilde{v}R_A}. \quad (10.73)$$

La présence de  $\nu^2$  dans  $k_{BA}$  introduit une dérivée seconde dans sa transformée de Fourier, si bien que

$$K_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{-1}{4\pi^2 \tilde{v}^2 D^2} \delta''(\tau - \tau_0). \quad (10.74)$$

Il en résulte

$$\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = \frac{-1}{4\pi^2 \tilde{v}^2 D^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\partial^2 \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau - \tau_0)}{\partial \tau^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (10.75)$$

Ce qui précède est vrai pour la diffraction de Fresnel comme pour la diffraction de Fraunhofer, à condition d'adapter le paramètre  $\tau_0$ . Pour la diffraction de Fraunhofer (distance  $D = R_A = -R_B$ ), il s'écrit

$$\tau_0 = \frac{\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{\tilde{v}D}. \quad (10.76)$$

Le résultat exprimé par la relation (10.75) s'énonce sous la forme de la proposition suivante qui est, pour la cohérence, ce que la proposition 9.4.1 est pour l'amplitude du champ.

**Proposition 10.4.1 (Transfert de la cohérence par diffraction).** *L'effet de la diffraction sur la cohérence mutuelle d'une onde polychromatique est, outre une double intégration spatiale, un retard temporel suivi d'une dérivation temporelle d'ordre 2.*

**Remarque 10.4.1 (Autocorrélation et dérivation).** La cohérence propre en un point d'un émetteur ou d'un récepteur est la fonction d'autocorrélation de l'amplitude du champ en ce point. Or la fonction d'autocorrélation d'une fonction aléatoire  $X$  satisfait la proposition suivante (dont une preuve est donnée dans l'ouvrage de Mandel et Wolf [153]).

**Proposition 10.4.2.** *Soit un processus aléatoire (ou fonction aléatoire)  $X$  et soit sa dérivée  $Y$ , c'est-à-dire  $Y(t) = X'(t)$ . On note  $\Gamma_X$  la fonction d'autocorrélation de  $X$ , définie par*

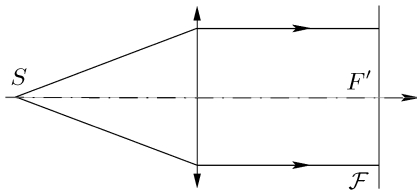
$$\Gamma_X(\tau) = \langle X(t) \overline{X(t - \tau)} \rangle_t. \quad (10.77)$$

*Alors  $\Gamma_Y(\tau) = -\Gamma_X''(\tau)$  (dérivée seconde par rapport à  $\tau$ ).*

Dans un phénomène de diffraction polychromatique, l'amplitude du champ sur un récepteur  $\mathcal{B}$  se déduit de l'amplitude du champ sur l'émetteur  $\mathcal{A}$  par dérivation temporelle et intégration spatiale (c'est la relation (9.33) et la proposition 9.4.1 p. 259). Conformément à la proposition 10.4.2, nous nous attendons à ce que la cohérence propre sur le récepteur soit liée à la dérivée seconde de la cohérence propre sur l'émetteur ; c'est bien ce qu'exprime la proposition 10.4.1.

### 10.4.3 Exemple : récepteur étendu, spatialement cohérent à spectre large

La figure 10.10 montre comment obtenir un tel récepteur. Tous les points du plan focal image de l'objectif reçoivent de la source polychromatique une même vibration : ce plan est un récepteur cohérent spatialement (quel que soit le point  $I$  de ce plan, le chemin optique  $[SI]$  est le même). Dans la réalité, la cohérence n'est obtenue que dans une région voisine du centre du champ, d'abord parce que la source  $S$  n'est pas strictement ponctuelle ; ensuite parce que la pupille de l'objectif joue un rôle (voir le paragraphe 10.5.5).

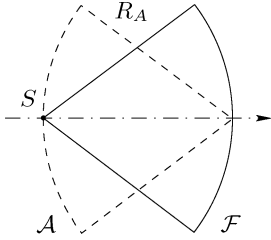


**FIG. 10.10.** La source ponctuelle  $S$  à spectre large engendre sur  $\mathcal{F}$  un champ cohérent spatialement, à spectre large.

Il est intéressant de mener les calculs qui confirment la cohérence des vibrations du plan  $\mathcal{F}$ , même si le modèle précédent, modèle limite, paraît trivial. La situation théorique est celle de la figure 10.11 : la cohérence est obtenue sur la sphère  $\mathcal{F}$  centrée sur  $S$ . La distance de  $S$  à  $\mathcal{F}$  est  $D$ . La source ponctuelle  $S$  est le sommet de la sphère  $\mathcal{A}$  (rayon  $R_A = D$ ) dont  $\mathcal{F}$  est la sphère de Fourier. La diffraction de  $S$  à  $\mathcal{F}$  est un phénomène de Fraunhofer, ce qu'on retrouve sur la figure 10.10 ( $\mathcal{A}$  est alors le plan passant par  $S$ ).

Soit  $\gamma(\nu)$  la densité spectrale de la source  $S$ . La densité spectrale d'interaction sur  $\mathcal{A}$  s'écrit

$$\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \gamma(\nu) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1) \otimes \delta(\mathbf{r}_2). \quad (10.78)$$



**FIG. 10.11.** Situation théorique analogue à celle de la figure 10.10.

Conformément à la relation (10.72), et en supposant être dans le vide, le gain complexe de cohérence pour le transfert de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  s'écrit

$$k_{FA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{\nu^2}{c^2 D^2} \exp \left[ \frac{2i\pi\nu}{cD} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2) \right], \quad (10.79)$$

si bien que la densité spectrale d'interaction sur la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  est

$$\gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \frac{\nu^2 \ell_0^4}{c^2 D^2} \gamma(\nu). \quad (10.80)$$

Si  $\Gamma(t)$  est l'antécédent de Fourier de  $\gamma(\nu)$  et  $\Gamma''$  la dérivée seconde de  $\Gamma$ , la cohérence mutuelle sur  $\mathcal{F}$  s'écrit<sup>18</sup>

$$\Gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, t) = \frac{-\ell_0^4}{4\pi^2 c^2 D^2} \Gamma''(t). \quad (10.81)$$

Elle est indépendante des points  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$  : le rayon de cohérence sur la sphère de Fourier est « infini » (plus précisément, il est limité aux dimensions transversales de cette sphère). Le champ sur  $\mathcal{F}$  est cohérent spatialement : tous les points de  $\mathcal{F}$  vibrent en phase. Toutefois, le spectre de la lumière sur  $\mathcal{F}$  n'est pas le même qu'en  $S$  (multiplication par  $\nu^2$ ).

Le montage de la figure 10.10 est utilisé dans les projecteurs de profil.

#### 10.4.4 Équation d'onde de la cohérence

La relation (10.75) est la version intégrale d'une équation qui s'apparente à l'équation des ondes et qui s'applique à la cohérence. Pour le montrer nous nous reportons au paragraphe 9.4.1 et en particulier à la relation (9.33), qui s'écrit

$$E_B(\mathbf{s}, t) = \frac{1}{2\pi\tilde{v}D} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial E_A}{\partial t} \left( \mathbf{r}, t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\tilde{v}} \right) d\mathbf{r}, \quad (10.82)$$

où  $D(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  est la distance du point  $\mathbf{r}$  de l'émetteur  $\mathcal{A}$  au point  $\mathbf{s}$  du récepteur  $\mathcal{B}$ . La relation (9.31) fournit une approximation métaxiale de  $D(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  (approximation du deuxième ordre). Dans ces conditions, le paramètre  $\tau_0$ , défini par la relation (10.73), s'écrit

<sup>18</sup> Le résultat correspondant à la situation de la figure 10.10 s'obtient en remplaçant la distance de diffraction  $D$  par la distance focale image  $f'$  de l'objectif.

$$\tau_0 = \frac{D(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1) - D(\mathbf{s}_2, \mathbf{r}_2)}{2\tilde{v}}. \quad (10.83)$$

L'équation cherchée, du type de l'équation des ondes, fait intervenir des dérivées secondes par rapport au temps ou aux variables d'espace. La relation (10.75) conduit ainsi à

$$\frac{\partial^2 \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{-1}{4\pi^2 \tilde{v}^2 D^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\partial^4 \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau - \tau_0)}{\partial \tau^4} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (10.84)$$

Pour les variables d'espace, écrivons  $\mathbf{s}_1 = (x_1, y_1)$ , si bien que

$$\frac{\partial^2 \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau)}{\partial x_1^2} = \frac{-1}{4\pi^2 \tilde{v}^2 D^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\partial^4 \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau - \tau_0)}{\partial \tau^4} \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial x_1} \right)^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (10.85)$$

et, si  $\Delta_1$  désigne l'opérateur laplacien portant sur  $x_1, y_1$  et  $z_1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right] \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) \\ &= \frac{-1}{4\pi^2 \tilde{v}^2 D^2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\partial^4 \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau - \tau_0)}{\partial \tau^4} \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial z_1} \right)^2 \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Il reste à évaluer la quantité entre crochets sous l'intégrale de la relation (10.86). Si  $\mathbf{s} = (x, y)$ , la relation (10.82) conduit à écrire le laplacien de  $E_B$  sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta E_B(\mathbf{s}, t) &= \left[ \frac{\partial^2 E_B(\mathbf{s}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_B(\mathbf{s}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_B(\mathbf{s}, t)}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi \tilde{v}^3 D} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 E_A}{\partial t^3} \left( \mathbf{r}, t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\tilde{v}} \right) \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{\partial D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10.87)$$

Cette même relation donne encore

$$\frac{\partial^2 E_B(\mathbf{s}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi \tilde{v} D} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 E_A}{\partial t^3} \left( \mathbf{r}, t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\tilde{v}} \right) d\mathbf{r}. \quad (10.88)$$

L'équation des ondes satisfaite par le champ  $E_B$  est

$$\left[ \Delta - \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] E_B(\mathbf{s}, t) = 0, \quad (10.89)$$

et en tenant compte des relations (10.88) et (10.87) on en déduit

$$\left[ \left( \frac{\partial D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{\partial z} \right)^2 \right] - 1 = 0. \quad (10.90)$$

Comme  $\tau_0 = D(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_1)/\tilde{v}$ , la relation (10.90) se traduit par

$$\left[ \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_0}{\partial z_1} \right)^2 \right] - \frac{1}{\tilde{v}^2} = 0. \quad (10.91)$$

Les relations (10.84) et (10.86) conduisent finalement à l'équation

$$\left[ \Delta_1 - \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = 0. \quad (10.92)$$

On fait la même chose à partir de  $\mathbf{s}_2$  au lieu de  $\mathbf{s}_1$ ; l'équation (10.92) se synthétise sous la forme

$$\left[ \Delta_j - \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (10.93)$$

L'équation (10.93) est due à Wolf [98, 153]. Elle s'établit aussi directement à partir de l'équation des ondes du champ et de la définition même de la cohérence [98, 153, 245]. Nous l'avons déduite de la théorie que nous avons développée, dans les limites de l'approximation métaxiale. Elle est équivalente à la relation (10.75) qui en est une forme intégrale.

## 10.5 Ondes à spectre étroit

Voici des exemples de transfert de la cohérence pour des émetteurs à spectre étroit.

### 10.5.1 Cohérence sur la sphère de Fourier

Soit un émetteur  $\mathcal{A}$  (rayon  $R_A$ , variable  $\mathbf{r}$ ) et soit  $\mathcal{F}$  sa sphère de Fourier (variable  $\mathbf{s}$ ). Pour une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  (fréquence  $\nu$ ), le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  s'effectue selon

$$E_F(\mathbf{s}, t) = \frac{i}{\lambda R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda R_A} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] E_A(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (10.94)$$

Mais cette écriture omet un terme de phase qui représente le temps nécessaire à la lumière pour aller de l'émetteur au récepteur (voir la règle 1 p. 48). Comme ce terme dépend de la fréquence, nous l'introduisons à nouveau, de sorte que le gain complexe  $h_{FA}$  s'écrit

$$h_{FA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i\nu}{R_A} \exp \left[ \frac{2i\pi\nu}{R_A} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi D\nu}{v} \right]. \quad (10.95)$$

Pour les ondes de spectre étroit autour de la fréquence  $\tilde{\nu}$  (longueur d'onde  $\tilde{\lambda}$ , vitesse de phase  $\tilde{v}$ ), le gain complexe se réduit à (voir le paragraphe 9.5.1 et en particulier la relation (9.54) p. 269)

$$h_{FA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i}{\tilde{\lambda} R_A} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} R_A} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi \nu D}{\tilde{v}} \right]. \quad (10.96)$$

Il résulte de la relation (10.68) que le gain complexe de cohérence est

$$k_{FA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 R_A^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} R_A} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2) \right], \quad (10.97)$$

et par conséquent la réponse percussionnelle de cohérence est

$$K_{FA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 R_A^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} R_A} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2) \right] \delta(\tau). \quad (10.98)$$

Comme sur  $\mathcal{A}$ , la cohérence sur la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  possède quatre représentations, et nous dressons le losange de Fourier suivant

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) & \\ \nearrow^{s_1 s_2} & & \nwarrow^{\tau} \\ g_F(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \tau) & & \gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) \\ \searrow_{\tau} & & \nearrow_{s_1, s_2} \\ & G_F(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \nu) & \end{array} \quad (10.99)$$

De la relation

$$\gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu) = \int_{\mathbb{R}^4} k_{FA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (10.100)$$

se déduisent les relations suivantes entre les diverses représentations de la cohérence sur  $\mathcal{A}$  et sur sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$

$$\Gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 R_A^2} g_A \left( \frac{\mathbf{s}_1}{\tilde{\lambda} R_A}, \frac{-\mathbf{s}_2}{\tilde{\lambda} R_A}; \tau \right), \quad (10.101)$$

$$\gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 R_A^2} G_A \left( \frac{\mathbf{s}_1}{\tilde{\lambda} R_A}, \frac{-\mathbf{s}_2}{\tilde{\lambda} R_A}; \nu \right), \quad (10.102)$$

$$g_F(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \tau) = \tilde{\lambda}^2 R_A^2 \Gamma_A \left( \tilde{\lambda} R_A \mathbf{F}_1, -\tilde{\lambda} R_A \mathbf{F}_2; \tau \right), \quad (10.103)$$

$$G_F(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \nu) = \tilde{\lambda}^2 R_A^2 \gamma_A \left( \tilde{\lambda} R_A \mathbf{F}_1, -\tilde{\lambda} R_A \mathbf{F}_2; \nu \right). \quad (10.104)$$

Le transfert de l'amplitude du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  s'effectue par une transformation de Fourier (diffraction de Fraunhofer). C'est encore le cas pour le transfert de la cohérence, mais la transformation de Fourier est de dimension quatre. Par exemple la cohérence mutuelle sur  $\mathcal{F}$ , calculée aux points  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$ , est la transformée de Fourier spatiale de la cohérence mutuelle sur  $\mathcal{A}$ , calculée pour les fréquences spatiales  $-\mathbf{s}_1/\tilde{\lambda} R_A$  et  $-\mathbf{s}_2/\tilde{\lambda} R_A$  (à un facteur multiplicatif près).

### 10.5.2 Transfert de la cohérence par transparence de courbure

Soient deux sphères tangentes, de rayons de courbure  $R'$  et  $R''$ . La réponse percussionnelle du transfert de cohérence d'une sphère à l'autre est

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R''} - \frac{1}{R'} \right) (r_1^2 - r_2^2) \right] \times \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_1) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}_2) \otimes \delta(\tau), \quad (10.105)$$

et il en résulte pour la cohérence sur chaque sphère (ici les primes ne désignent pas des dérivations)

$$\Gamma''(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R''} - \frac{1}{R'} \right) (r_1^2 - r_2^2) \right]. \quad (10.106)$$

La méthode précédente conduit à

$$\gamma''(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R''} - \frac{1}{R'} \right) (r_1^2 - r_2^2) \right]. \quad (10.107)$$

La cohérence propre sur chacune des deux sphères se déduit de la relation (10.106) en faisant  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  : on obtient  $\Gamma''(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau) = \Gamma'(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau)$ . Cela signifie que la cohérence propre sur une calotte sphérique est indépendante de la courbure de cette dernière. Ce résultat généralise une propriété de l'intensité vibratoire (ou de l'éclairement).

### 10.5.3 Transfert de la cohérence par diffraction de Fresnel

Soient un émetteur  $\mathcal{A}$  et un récepteur  $\mathcal{B}$  à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$ . Le gain complexe de cohérence se déduit du gain complexe du transfert de l'amplitude du champ, et la relation (10.68) conduit à

$$k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{1}{\lambda^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (||\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1||^2 - ||\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2||^2) \right] \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{R_B} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{R_A} \right) \right]. \quad (10.108)$$

La réponse percussionnelle de cohérence  $K_{BA}$  se déduit  $k_{BA}$  par une transformation de Fourier inverse temporelle ; on obtient

$$K_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{1}{\lambda^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (||\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1||^2 - ||\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2||^2) \right] \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{R_B} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{R_A} \right) \right] \delta(\tau). \quad (10.109)$$

La fonction  $k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)$  ne dépend pas de  $\nu$  :  $K_{BA}$  est proportionnelle à une distribution de Dirac temporelle de la forme  $\delta(\tau)$ . Il en résulte que l'opérateur de transfert de la cohérence se réduit à un filtre purement spatial.

**Remarque 10.5.1.** On retrouve la relation (10.108) en employant une méthode analogue à celle utilisée pour établir l'expression du transfert du champ (paragraphe 3.3.1), c'est-à-dire en composant une transparence de courbure, une transformation de Fourier et enfin une deuxième transparence de courbure. On introduit la sphère  $\mathcal{A}'$ , tangente à  $\mathcal{A}$  et centrée sur  $\mathcal{B}$ , et sa sphère de Fourier  $\mathcal{F}$ , qui est tangente à  $\mathcal{B}$  et centrée sur  $\mathcal{A}$ . Alors

$$\gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu), \quad (10.110)$$

$$\gamma_F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 D^2} G_{A'} \left( \frac{\mathbf{s}_1}{\tilde{\lambda} D}, \frac{-\mathbf{s}_2}{\tilde{\lambda} D}; \nu \right), \quad (10.111)$$

$$\gamma_{A'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) (r_1^2 - r_2^2) \right] \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu). \quad (10.112)$$

Comme  $\gamma_{A'}$  est la transformée de Fourier à quatre dimensions de  $G_{A'}$ , on écrit

$$\begin{aligned} \gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) &= \frac{1}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \\ &\times \int_{\mathbb{R}^4} \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} D} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) (r_1^2 - r_2^2) \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (10.113)$$

et finalement

$$\gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \int_{\mathbb{R}^4} k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (10.114)$$

où  $k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)$  est exactement le même que dans la relation (10.108).

#### 10.5.4 Transfert de la cohérence par imagerie

**Approche intuitive : conservation de la cohérence.** Soit un objectif qui forme l'image d'un objet. Que pouvons-nous dire de la cohérence de l'image si nous connaissons celle de l'objet ? Ne tenons pas compte dans un premier temps de l'ouverture limitée de l'objectif, ni des aberrations, de telle sorte que l'image d'un point de l'objet est un point et que l'image se déduit de l'objet par une homothétie (le facteur d'homothétie est le grandissement transversal pour la conjugaison considérée).

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'objet et  $A'$  et  $B'$  leurs images. Selon le principe de Fermat, il se forme une image de  $A$  en  $A'$  si le chemin optique entre  $A$  et  $A'$  est constant ; écrire  $[AA']$  ce chemin optique a bien un sens puisqu'il ne dépend pas du rayon lumineux considéré. Par conséquent la différence de phase entre la vibration lumineuse émise en  $A$  et celle reçue en  $A'$  est parfaitement définie et dépend du chemin optique  $[AA']$ . Autrement dit, la vibration lumineuse au point  $A'$  présente un retard de phase bien défini par rapport à la

vibration lumineuse en  $A$  : la phase en  $A'$  est la phase en  $A$  retardée, et elle l'est d'une quantité bien définie. Nous pouvons affirmer la même chose pour  $B$  et  $B'$ . Le retard de phase entre la vibration émise en  $B$  et celle reçue par  $B'$  est certes différent *a priori* de celui qui existe entre la vibration en  $A$  et celle en  $A'$ , mais il a cependant avec lui une relation bien définie, qui dépend de la différence des chemins optiques  $[AA']$  et  $[BB']$ .

Si l'objet est cohérent, il existe une relation de phase fixe (temporellement) entre la vibration émise par  $A$  et celle émise par  $B$ . Comme la phase en  $A'$  est celle en  $A$  mais retardée d'une quantité fixe, que la phase en  $B'$  est celle en  $B$  elle aussi retardée d'une quantité fixe, la relation de phase entre la vibration au point  $A'$  et celle au point  $B'$  est parfaitement définie et reste la même au cours du temps. La vibration reçue en  $A'$  et celle reçue en  $B'$  sont cohérentes entre elles et l'image est cohérente.

Si l'objet est incohérent, il n'existe aucune relation de phase fixe entre la vibration émise en  $A$  et celle émise en  $B$ , et il en est de même pour la vibration reçue en  $A'$  et celle reçue en  $B'$ , car la phase en  $A'$  n'est rien d'autre que la phase en  $A$  translatée d'une quantité fixe et celle en  $B'$  est la phase en  $B$  translatée d'une autre quantité fixe. L'image est incohérente.

En conclusion, la formation d'une image par un objectif conserve la cohérence : la cohérence entre deux points de l'image est la même que celle qui existe entre les deux points objets correspondants.

**Conservation de la cohérence : calcul.** Soit  $\mathcal{A}$  l'image d'un émetteur  $\mathcal{A}$  à travers un système centré et soit  $g_s$  le grandissement aux sommets. La composante spectrale du champ se transfère suivant la relation

$$e_{A'}(\mathbf{r}', \nu) = \frac{1}{g_s} e_A\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s}, \nu\right) = \frac{1}{g_s} \left\langle \delta\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s} - \mathbf{r}\right), e_A(\mathbf{r}, \nu) \right\rangle. \quad (10.115)$$

Le gain complexe de transfert du champ est

$$h(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{g_s} \delta\left(\frac{\mathbf{r}'}{g_s} - \mathbf{r}\right), \quad (10.116)$$

si bien que le gain complexe de transfert de la cohérence est

$$k(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{1}{g_s^2} \delta\left(\frac{\mathbf{s}_1}{g_s} - \mathbf{r}_1\right) \otimes \delta\left(\frac{\mathbf{s}_2}{g_s} - \mathbf{r}_2\right). \quad (10.117)$$

On en conclut

$$\gamma_{A'}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \frac{1}{g_s^2} \gamma_A\left(\frac{\mathbf{s}_1}{g_s}, \frac{\mathbf{s}_2}{g_s}; \nu\right), \quad (10.118)$$

et finalement

$$\Gamma_{A'}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \tau) = \frac{1}{g_s^2} \Gamma_A\left(\frac{\mathbf{s}_1}{g_s}, \frac{\mathbf{s}_2}{g_s}; \tau\right). \quad (10.119)$$

La cohérence de l'objet se conserve par imagerie. Cela est vrai parce que nous n'avons pas tenu compte de l'ouverture limitée du système optique.

**Remarque 10.5.2.** Les résultats de ce paragraphe, et en particulier les relations (10.118) et (10.119), sont différents de ceux qu'on trouve dans la littérature classique sur le sujet, par exemple de ceux donnés dans le livre de Goodman [98]. Pour une comparaison, nous anticipons sur les résultats du prochain paragraphe dont les relations (10.118) et (10.119) sont des cas limites, valables quand la pupille est infinie, c'est-à-dire quand la transformée de Fourier de la fonction pupille est une distribution de Dirac. Pour le transfert de la cohérence par imagerie, la théorie fournit une relation dans laquelle la fonction pupille joue un rôle (c'est la relation (7.1–39) p. 299 [98] selon la théorie classique, ou bien la relation (10.122) pour notre approche). Selon cette même relation, si on donne une extension infinie à la pupille, il n'y a pas conservation de la cohérence par imagerie si l'on suit la théorie classique. Cela résulte de la présence de termes de phase quadratique. Nous avons déjà rencontré une telle différence entre la théorie métaxiale et la théorie classique à propos de l'imagerie cohérente. Le fait de ne considérer que des objets plans et de ne vouloir observer l'image que sur un plan introduit des termes de phase quadratique dans l'amplitude de l'image (ou prétendue telle). On peut admettre cependant que corriger ces termes par des courbures appropriées est aisé et, qu'au fond, l'inconvénient d'avoir des récepteurs plans ne masque pas les propriétés essentielles de la formation des images. Les choses se compliquent pourtant pour la cohérence et pour la même raison : si on ne souhaite travailler qu'avec des plans, on n'observe pas l'image sur la bonne surface. La complication vient des termes de phase quadratique qui n'ont aucune signification pour la formation de l'image (ils viennent du choix d'une courbure inappropriée). Ces termes de phase quadratique mettent en jeu quatre variables d'espace, puisqu'ils interviennent dans des relations entre corrélations mutuelles, et cela occulte complètement un fait élémentaire du transfert de la cohérence : sa conservation par imagerie (quand la pupille est infinie).

### 10.5.5 Transfert de la cohérence par imagerie avec des ouvertures limitées

**Effet de la pupille.** Reprenons l'explication intuitive du paragraphe précédent. L'ouverture de la pupille étant limitée, l'image d'un point n'est plus un point mais une figure de diffraction (nous nous plaçons dans les conditions du stigmatisme approché). L'amplitude du champ en un point  $A'$  de l'image est la somme des amplitudes issus des points voisins de  $A$ . De même, l'amplitude en un point  $B'$  de l'image est la somme des amplitudes de points voisins de  $B$ .

Si l'objet est spatialement incohérent, les vibrations émises en  $A$  et  $B$  n'ont aucune relation de phase entre elles, même si  $A$  et  $B$  sont voisins l'un de l'autre. Mais les vibrations reçues en  $A'$  et  $B'$  sont la somme de vibrations émises par une multitude de points voisins de  $A$  et  $B$ . Chaque vibration émise par un de ces points est indépendante de celle émise par un point voisin, mais la somme de toutes ces vibrations est à peu près la même pour les deux points  $A'$  et  $B'$ . Ceux-ci ont donc une certaine cohérence entre eux. La conséquence de la

limitation de la pupille est que l'image acquiert de la cohérence, même si l'objet est totalement incohérent.

**Expressions explicites.** Soit un émetteur centré sur la pupille d'entrée d'un objectif; les notations sont celles du chapitre 8. Le gain complexe du transfert du champ de l'émetteur au récepteur est

$$h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{\lambda^2 D^2 g_s^2} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\lambda D g_s}\right). \quad (10.120)$$

Il en résulte, pour le transfert de la cohérence par imagerie,

$$k(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{1}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right) \overline{\hat{p}\left(\frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2}{\lambda D g_s}\right)}, \quad (10.121)$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_{A'}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) &= \frac{1}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^4} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right) \overline{\hat{p}\left(\frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2}{\lambda D g_s}\right)} \\ &\quad \times \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (10.122)$$

**Remarque 10.5.3.** La justification intuitive du début de ce paragraphe s'explique si on écrit  $\gamma_A$  sous la forme

$$\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \nu) \ell_0^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (10.123)$$

qui correspond à un émetteur spatialement incohérent. La relation (10.122) montre que  $\gamma_{A'}$  ne se réduit pas à une distribution de Dirac; on obtient plutôt

$$\gamma_{A'}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \frac{\ell_0^2}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right) \overline{\hat{p}\left(\frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right)} \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \nu) d\mathbf{r}_1. \quad (10.124)$$

Ainsi l'image n'est pas totalement incohérente spatialement.

**Remarque 10.5.4.** La relation (10.118) se déduit de (10.122) quand  $\hat{p}$  est une distribution de Dirac, c'est-à-dire quand la pupille a une extension infinie.

**Éclairement de l'image (cas général).** L'éclairement (intensité vibratoire) de l'image  $\mathcal{A}'$  est

$$I_{A'}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{A'}(\mathbf{s}, \mathbf{s}; \nu) d\nu, \quad (10.125)$$

et la relation (10.122) conduit à

$$I_{A'}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^4} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right) \overline{\hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}_2}{\lambda D g_s}\right)} \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (10.126)$$

où  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0)$  est l'intensité mutuelle sur l'objet  $\mathcal{A}$ .

**Éclairement de l'image en lumière incohérente.** Pour un émetteur totalement incohérent (spatialement et temporellement), nous avons

$$\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \nu) \ell_0^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (10.127)$$

et la densité spectrale de puissance de l'image est

$$\gamma_{A'}(\mathbf{s}, \mathbf{s}; \nu) = \frac{\ell_0^2}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\lambda D g_s}\right) \right|^2 \gamma_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \nu) d\mathbf{r}. \quad (10.128)$$

L'intensité vibratoire sur l'image est alors

$$I_{A'}(\mathbf{s}) = \frac{\ell_0^2}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\lambda D g_s}\right) \right|^2 I_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (10.129)$$

En lumière incohérente le système optique est un filtre linéaire spatial opérant sur l'éclairement de l'objet. La relation (10.129) n'est rien d'autre que la relation (8.36) qui traduit la proposition 8.3.1 ; elle fournit bien l'expression explicite de la fonction  $|h|^2$ , qui intervient dans la relation (8.36), conformément à la relation (8.3).

**Éclairement de l'image en lumière cohérente.** Nous avons

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = [I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_2)]^{1/2}, \quad (10.130)$$

de telle sorte que l'intensité vibratoire de l'image est

$$\begin{aligned} I_{A'}(\mathbf{s}) &= \frac{1}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^4} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right) \overline{\hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}_2}{\lambda D g_s}\right)} \int_{\mathbb{R}} \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) d\nu d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &= \frac{1}{\lambda^4 D^4 g_s^4} \int_{\mathbb{R}^4} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}_1}{\lambda D g_s}\right) \overline{\hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}_2}{\lambda D g_s}\right)} [I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_2)]^{1/2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &= \left| \frac{1}{\lambda^2 D^2 g_s^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{p}\left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\lambda D g_s}\right) [I_A(\mathbf{r})]^{1/2} d\mathbf{r} \right|^2. \end{aligned} \quad (10.131)$$

**Remarque 10.5.5.** La remarque 10.5.2 s'applique à tous les résultats de ce paragraphe.

## 10.6 Mesure de la cohérence spatiale

### 10.6.1 Le degré de cohérence

Il est habituel de normaliser la cohérence mutuelle et de définir le degré de cohérence  $\mu_A$  sur un émetteur  $\mathcal{A}$  par

$$\mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)}{\sqrt{\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; 0) \Gamma_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; 0)}}. \quad (10.132)$$

La relation (10.132) généralise la relation (10.52). On écrit aussi

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \sqrt{I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_2)} \mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau). \quad (10.133)$$

La relation (10.26) se traduit par

$$\mu_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau) = \overline{\mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; -\tau)}. \quad (10.134)$$

### 10.6.2 Formule des interférences

Soient deux points lumineux d'un émetteur  $\mathcal{A}$ , situés en  $\mathbf{r}_0$  et  $-\mathbf{r}_0$  (par la suite nous considérerons qu'il s'agit de deux trous sources d'Young). Comment décrire la cohérence mutuelle  $\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$  sur  $\mathcal{A}$ ? Si  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0$  nous devons obtenir la cohérence propre en  $\mathbf{r}_0$  et avoir un terme de la forme  $\Gamma_A(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \tau)$ . Pour que cela soit vrai seulement en  $\mathbf{r}_0$  nous utilisons une distribution de Dirac et obtenons un terme  $\Gamma_A(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \tau) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$  ( $\ell_0$  est l'unité de longueur, elle homogénéise les distributions de Dirac). Le même raisonnement développé au point  $-\mathbf{r}_0$  fait que nous devons également avoir un terme de la forme  $\Gamma_A(-\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \tau) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0)$ . Finalement nous écrivons

$$\begin{aligned} \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = & \Gamma_A(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \tau) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \\ & + \Gamma_A(-\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \tau) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0) \\ & + \Gamma_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \tau) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0) \\ & + \Gamma_A(-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \tau) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (10.135)$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = & \gamma_A(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \nu) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \\ & + \gamma_A(-\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \nu) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0) \\ & + \gamma_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \nu) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0) \\ & + \gamma_A(-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \nu) \ell_0^4 \delta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0) \otimes \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (10.136)$$

Pour des sources à spectre étroit, la cohérence sur un récepteur  $\mathcal{B}$  situé à la distance  $D$  de  $\mathcal{A}$  est donnée par la relation (10.113)

$$\begin{aligned} \gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = & \frac{1}{\widetilde{\lambda}^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\widetilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \\ & \times \int_{\mathbb{R}^4} \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\widetilde{\lambda} D} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2) \right] \\ & \times \exp \left[ -\frac{i\pi}{\widetilde{\lambda}} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) (r_1^2 - r_2^2) \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (10.137)$$

Des simplifications apparaissent si nous calculons  $\gamma_B(\mathbf{s}, \mathbf{s}; \nu)$ . En effet le terme exponentiel devant l'intégrale devient égal à 1. De plus, la présence de distributions de Dirac en  $\mathbf{r}_1 = \pm \mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}_2 = \pm \mathbf{r}_0$  dans l'expression de  $\gamma_A$  donnée par la relation (10.136) se traduit par  $r_1^2 - r_2^2 = 0$ , dans tous les cas. Finalement, on arrive à l'expression suivante de la densité spectrale de puissance sur  $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \gamma_B(\mathbf{s}, \mathbf{s}; \nu) = \frac{\ell_0^4}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \left\{ \gamma_A(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \nu) + \gamma_A(-\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \nu) \right. \\ \left. + \gamma_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \nu) \exp \left[ -\frac{4i\pi}{\tilde{\lambda} D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0 \right] \right. \\ \left. + \gamma_A(-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \nu) \exp \left[ \frac{4i\pi}{\tilde{\lambda} D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.138)$$

L'intensité vibratoire au point  $\mathbf{s}$  du récepteur  $\mathcal{B}$  s'obtient par intégration de  $\gamma_B(\mathbf{s}, \mathbf{s}; \nu)$  en  $\nu$ . Comme  $\gamma_A$  est la transformée de Fourier (temporelle) de  $\Gamma_A$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \gamma_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; \nu) d\nu &= \Gamma_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; 0) \\ &= \sqrt{I(\mathbf{r}_0) I(-\mathbf{r}_0)} \mu_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; 0), \end{aligned} \quad (10.139)$$

et de même

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_A(-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0; \nu) d\nu = \sqrt{I(\mathbf{r}_0) I(-\mathbf{r}_0)} \overline{\mu_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; 0)}. \quad (10.140)$$

Il est commode d'écrire le degré de cohérence  $\mu_A$  sous la forme

$$\mu_A(\mathbf{r}_0, -\mathbf{r}_0; 0) = |\mu_A| \exp[-i\psi], \quad (10.141)$$

pour arriver finalement à

$$\begin{aligned} I_B(\mathbf{s}) = \frac{\ell_0^4}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \left[ I_A(\mathbf{r}_0) + I_A(-\mathbf{r}_0) \right. \\ \left. + 2|\mu_A| \sqrt{I_A(\mathbf{r}_0) I_A(-\mathbf{r}_0)} \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda_0 D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0 + \psi \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.142)$$

Si le point lumineux situé en  $\mathbf{r}_0$  est seul présent, l'intensité vibratoire sur  $\mathcal{B}$  est uniforme et s'écrit

$$I_+ = \frac{\ell_0^4}{\tilde{\lambda}^2 D^2} I_A(\mathbf{r}_0). \quad (10.143)$$

En faisant de même pour le point situé en  $-\mathbf{r}_0$  (intensité vibratoire  $I_-$ ), nous arrivons à la formule des interférences

$$I_B(\mathbf{s}) = I_+ + I_- + 2|\mu_A| \sqrt{I_+ I_-} \cos \left( \frac{4\pi}{\tilde{\lambda} D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0 + \psi \right). \quad (10.144)$$

En conclusion, quel que soit le rayon de courbure de l'émetteur  $\mathcal{A}$  et quel que soit celui du récepteur  $\mathcal{B}$ , on observe des franges d'Young sur  $\mathcal{B}$ . Elles sont obtenues ici pour deux points lumineux, à spectre étroit, ayant un certain degré de cohérence entre eux.

### 10.6.3 Contraste des franges

Si  $I_M$  est l'éclairement maximal des franges et  $I_m$  l'éclairement minimal, le contraste des franges est, par définition,

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}. \quad (10.145)$$

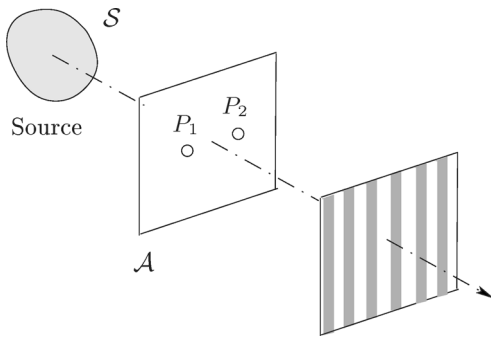
Le contraste est tel que  $0 \leq C \leq 1$ . Il résulte de la relation (10.144)

$$C = 2|\mu_A| \frac{\sqrt{I_+ I_-}}{I_+ + I_-}. \quad (10.146)$$

Examinons un cas particulier qui se rencontre dans la pratique : les deux points de l'émetteur  $\mathcal{A}$  ont la même exitance  $I_+ = I_-$ . Alors  $C = |\mu_A|$ .

Nous disposons par conséquent d'un moyen de mesurer le degré de cohérence entre les vibrations émises par deux points. Il consiste à produire des interférences et à mesurer le contraste de franges obtenues, lequel n'est autre que le module du degré de cohérence. Le décalage des franges par rapport au plan médian des deux points  $\mathbf{r}_0$  et  $-\mathbf{r}_0$  fournit la phase du degré de cohérence : c'est le paramètre  $\psi$  de la relation (10.141).

La figure 10.12 présente un montage possible. En pratique  $\mathcal{A}$  est un écran comportant deux trous,  $P_1$  et  $P_2$ , éclairés par une source  $\mathcal{S}$ . Nous verrons par la suite comment la cohérence des deux points dépend de la source. Pour le moment remarquons que la mesure du contraste des franges fournit un moyen de connaître le degré de cohérence entre les vibrations aux deux points considérés.



**FIG. 10.12.** Le contraste des franges d'interférences est égal au module du degré de cohérence entre les vibrations aux points  $P_1$  et  $P_2$  éclairés par la source lumineuse.

## 10.7 Émetteur spatialement incohérent

Des simplifications apparaissent dans l'expression du transfert de la cohérence si l'émetteur est spatialement incohérent. Cela résulte de la présence d'une distribution de Dirac dans l'écriture de la représentation mixte de la cohérence.

### 10.7.1 Transfert de la cohérence sur une sphère cardinale

Soit  $\mathcal{A}$  (rayon de courbure  $R_A$ ) un émetteur spatialement incohérent, et soit  $\mathcal{B}$  (rayon  $R_B$ ) un récepteur à la distance  $D$ . La densité spectrale d'interaction sur  $\mathcal{A}$  prend la forme

$$\gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \gamma_A(\mathbf{r}_1; \nu) \ell_0^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (10.147)$$

où  $\ell_0$  est l'unité de longueur (elle rend homogène la distribution de Dirac). La densité spectrale d'interaction sur  $\mathcal{B}$  s'écrit

$$\gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \int_{\mathbb{R}^4} k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (10.148)$$

Conformément à la relation (10.72), le gain complexe de transfert de la cohérence associé à un phénomène de diffraction est

$$\begin{aligned} k_{BA}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) &= \frac{\nu^2}{v^2 D^2} \exp \left[ -i\pi\nu \frac{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2}{vD} \right] \\ &\times \exp \left[ -i\pi\nu \left( \frac{s_1^2 - s_2^2}{vR_B} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{vR_A} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.149)$$

Si le récepteur  $\mathcal{B}$  est tel que  $D = -R_B$  ( $\mathcal{B}$  est une sphère cardinale : elle est centrée sur l'émetteur), il résulte de la relation (10.148)

$$\gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) = \frac{\nu^2 \ell_0^2}{v^2 D^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi\nu}{vD} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \cdot \mathbf{r} \right] \gamma_A(\mathbf{r}; \nu) d\mathbf{r}. \quad (10.150)$$

Ainsi le transfert de la cohérence de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  se fait par l'intermédiaire d'une transformation de Fourier.

**Proposition 10.7.1 (G. Bonnet – 1975 [20]).** *La densité spectrale d'interaction du champ diffracté par un émetteur spatialement incohérent, sur une sphère cardinale, est proportionnelle à la transformée de Fourier de la densité spectrale de puissance de l'émetteur.*

**Remarque 10.7.1.** La proposition 10.7.1 est vraie pour une onde polychromatique, pour la diffraction de Fraunhofer comme pour la diffraction de Fresnel puisque le résultat ne dépend pas de la courbure de l'émetteur.

**Remarque 10.7.2.** Les résultats du paragraphe 9.4.5 sont des cas particuliers de la proposition 10.7.1.

### 10.7.2 Le théorème de Van Cittert–Zernike

Appliqués à un émetteur spatialement incohérent, de spectre étroit, les résultats généraux établis pour le transfert de la cohérence conduisent à un grand classique de l'optique moderne : le théorème de Van Cittert–Zernike.

Soit un émetteur  $\mathcal{A}$  spatialement incohérent, de spectre étroit, et soit un récepteur  $\mathcal{B}$  à la distance  $D$ . L'intensité vibratoire mutuelle sur  $\mathcal{B}$  est  $\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0)$  telle que

$$\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) d\nu. \quad (10.151)$$

Pour un spectre étroit, l'expression de  $k_{BA}$  donnée par la relation (10.149) est à remplacer par la relation (10.108) si bien que, compte tenu de la relation (10.147),

$$\begin{aligned} \gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; \nu) &= \frac{\ell_0^2}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} D} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{r} \right] \gamma_A(\mathbf{r}; \nu) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10.152)$$

L'intensité vibratoire sur  $\mathcal{A}$  est

$$I_A(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_A(\mathbf{r}; \nu) d\nu, \quad (10.153)$$

et les relations (10.151) et (10.152) conduisent à

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0) &= \frac{\ell_0^2}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} D} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{r} \right] I_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (10.154)$$

soit encore

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0) &= \frac{\ell_0^2}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \\ &\times \hat{I}_A \left( \frac{1}{\tilde{\lambda} D} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \right). \end{aligned} \quad (10.155)$$

La relation (10.155) constitue une première forme du théorème de Van Cittert–Zernike. Une forme équivalente, portant sur le degré de cohérence sur le récepteur, s'obtient de la façon suivante. La relation (10.155) conduit à

$$\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1; 0) = \Gamma_B(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2; 0) = \frac{\ell_0^2}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \hat{I}_A(0) = \frac{\ell_0^2}{\tilde{\lambda}^2 D^2} \int_{\mathbb{R}^2} I_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (10.156)$$

et le degré de cohérence sur  $\mathcal{B}$  est, pour  $\tau = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mu_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0) &= \frac{\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0)}{\sqrt{\Gamma_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1; 0) \Gamma_B(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2; 0)}} \\ &= \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) (s_1^2 - s_2^2) \right] \frac{\hat{I}_A \left( \frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2}{\tilde{\lambda} D} \right)}{\int_{\mathbb{R}^2} I_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (10.157)$$

Si  $\mathcal{B}$  est une sphère cardinale ( $R_B = -D$ ), le terme de phase quadratique du dernier membre de la relation (10.157) disparaît. D'où le résultat suivant.

**Proposition 10.7.2 (Théorème de Van Cittert–Zernike).** *Le degré de cohérence du champ diffracté sur une sphère cardinale par un émetteur spatialement incohérent et de spectre étroit est proportionnel à la transformée de Fourier de l'intensité vibratoire (exitance) de l'émetteur. Explicitement, si  $\mathcal{B}$  est la sphère cardinale et  $\mathcal{A}$  l'émetteur (ou la source), alors*

$$\mu_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0) = \frac{\hat{I}_A\left(\frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2}{\tilde{\lambda}D}\right)}{\int_{\mathbb{R}^2} I_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \quad (10.158)$$

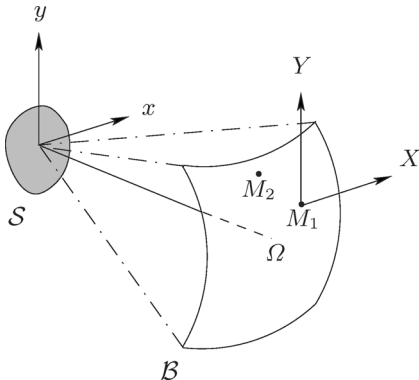
On ne considère souvent que le module du degré de cohérence. Dans ces conditions, quel que soit le rayon de courbure du récepteur, on a

$$|\mu_B(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2; 0)| = \frac{\left| \hat{I}_A\left(\frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2}{\tilde{\lambda}D}\right) \right|}{\int_{\mathbb{R}^2} I_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}, \quad (10.159)$$

et on énonce :

**Proposition 10.7.3 (Corollaire du théorème de Van Cittert–Zernike).** *Le module du degré de cohérence du champ diffracté par un émetteur incohérent de spectre étroit est proportionnel au module de la transformée de Fourier de l'intensité vibratoire de l'émetteur, et ce, quel que soit le rayon de courbure du récepteur.*

**Formulation pratique.** Soit une source spatialement incohérente  $\mathcal{S}$ , de spectre étroit, et soient  $M_1$  et  $M_2$  deux points d'une sphère cardinale  $\mathcal{B}$  (donc centrée sur la source) à la distance  $D$  (fig. 10.13). Le théorème de Van Cittert–Zernike fournit le degré de cohérence  $\mu_B$  (ou son module) entre les vibrations lumineuses en  $M_1$  et  $M_2$ . Le point  $M_1$  se repère par le vecteur  $\mathbf{s}_1$  et le point  $M_2$  par  $\mathbf{s}_2$ ; les deux vecteurs ont pour origine le sommet  $\Omega$  de  $\mathcal{B}$ . Mais  $\mu_B$  dépend



**FIG. 10.13.** Le théorème de Van Cittert–Zernike permet le calcul du degré de cohérence entre les vibrations reçues en un point donné  $M_1$  et en un point quelconque  $M_2$  du récepteur cardinal  $\mathcal{B}$ .

seulement de  $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$  et il est possible de choisir un système de coordonnées  $X, Y$  dont l'origine est  $M_1$ . Le point  $M_2$  devient un point quelconque de  $\mathcal{B}$  et le théorème de Van Cittert–Zernike donne le degré de cohérence de la vibration lumineuse en un point quelconque de  $\mathcal{B}$  par rapport à la vibration en  $M_1$ . Avec des coordonnées  $(x, y)$  sur la source, la relation (10.159) s'écrit

$$|\mu_B(-X, -Y)| = \frac{\left| \hat{I}_A \left( \frac{1}{\tilde{\lambda} D} (-X, -Y) \right) \right|}{\int_{\mathbb{R}^2} I_A(x, y) \, dx \, dy}, \quad (10.160)$$

où  $I_A(x, y)$  est l'intensité vibratoire au point  $(x, y)$  de la source. D'autre part  $|\mu_B(-X, -Y)| = |\mu_B(X, Y)|$ , si bien que, de façon plus explicite,

$$|\mu_B(X, Y)| = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^2} I_A(x, y) \exp \left[ 2i\pi \frac{xX + yY}{\tilde{\lambda} D} \right] \, dx \, dy \right|}{\int_{\mathbb{R}^2} I_A(x, y) \, dx \, dy}. \quad (10.161)$$

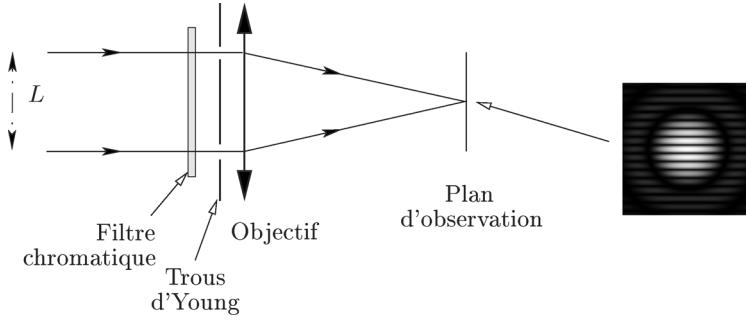
### 10.7.3 Une application : l'interféromètre stellaire de Michelson

L'interféromètre stellaire de Michelson a été mis au point en 1921, à la suite d'une idée de Fizeau, avant que ne soit formulé le théorème de Van Cittert–Zernike<sup>19</sup>. Cependant son principe est compréhensible à l'aide de ce théorème. Considérons un télescope ou une lunette astronomique (fig. 10.14). Plaçons sur la lunette (ou le télescope) un écran percé de deux trous et un filtre chromatique à bande étroite. La distance des trous entre eux est  $L$  et elle est réglable. L'objet observé est une étoile, et en général on obtient des franges d'Young dans le plan focal de la lunette. Plus précisément, si les deux trous d'Young, supposés identiques, sont circulaires, on observe une tache d'Airy (figure de diffraction d'une ouverture circulaire) modulée par des franges d'Young (fig. 10.14). Cette tache est relativement étendue (plus exactement, le disque central), les deux trous étant petits.

L'étoile est assimilée à un disque ayant un certain diamètre angulaire : c'est une source spatialement incohérente et, grâce au filtre chromatique, de spectre étroit. L'intensité vibratoire sur ce disque est enfin supposée uniforme.

Quand  $L$  est petit, les deux trous sont voisins l'un de l'autre et le degré de cohérence entre les vibrations qu'ils reçoivent est grand (proche de 1). On observe des franges bien contrastées. À mesure qu'on éloigne les trous l'un de l'autre,  $L$  augmente et le degré de cohérence diminue, comme diminue le contraste des franges. Il arrive un moment où le contraste est nul, ce qui signifie que le degré de cohérence est lui-même nul. De la valeur de  $L$  correspondante, on déduit la valeur du diamètre angulaire (on dit aussi diamètre apparent) de l'étoile.

<sup>19</sup> Les travaux de Van Cittert datent de 1934 [234], ceux de Zernike sur le sujet, de 1938 [251]. L'ouvrage de Labeyrie *et al.* [131], outre une très belle approche de la méthode, fournit quelques éléments historiques sur sa genèse et sa mise en œuvre.



**FIG. 10.14.** Principe de l'expérience de Michelson et Pease pour mesurer le diamètre apparent des étoiles. Le contraste des franges d'interférences dépend de la distance  $L$  entre les deux trous d'Young.

Puisque l'étoile étudiée est à l'infini, il faut adapter la relation (10.161). Si la distance  $D$  de l'émetteur au récepteur est finie (fig. 10.13), nous introduisons les variables angulaires  $\alpha = x/D$  et  $\beta = y/D$ , de telle sorte que la relation (10.161) devient<sup>20</sup>

$$|\mu(X, Y)| = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^2} I(\alpha, \beta) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}} (\alpha X + \beta Y) \right] d\alpha d\beta \right|}{\int_{\mathbb{R}^2} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}. \quad (10.162)$$

La relation (10.162) offre l'avantage de rester valable pour un objet à l'infini. Pour une étoile de diamètre angulaire  $\theta$ , à un facteur dimensionnel près, l'intensité vibratoire est

$$I(\alpha, \beta) = \text{circ}_\theta(\alpha, \beta), \quad (10.163)$$

et vaut 1 si  $\alpha^2 + \beta^2 \leq \theta^2/4$ , et 0 si  $\alpha^2 + \beta^2 > \theta^2/4$ .

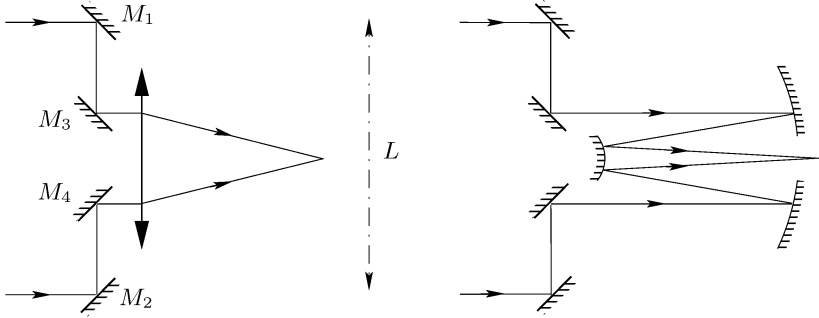
Le module du degré de cohérence sur la pupille de la lunette (ou du télescope) est

$$|\mu(X, Y)| = \frac{\left| J_1 \left( \frac{\pi\theta\sqrt{X^2 + Y^2}}{\tilde{\lambda}} \right) \right|}{\frac{\pi\theta\sqrt{X^2 + Y^2}}{\tilde{\lambda}}}. \quad (10.164)$$

Le module du degré de cohérence entre les vibrations sur les deux trous distants de  $L$  est

$$|\mu(L)| = \frac{\left| J_1 \left( \frac{\pi\theta L}{\tilde{\lambda}} \right) \right|}{\frac{\pi\theta L}{\tilde{\lambda}}}. \quad (10.165)$$

<sup>20</sup> Pour alléger les notations, nous omettons les indices et gardons la même lettre pour décrire l'intensité vibratoire sur l'émetteur :  $I(\alpha, \beta)$  remplace  $I(x, y)$ .



**FIG. 10.15.** Montage effectif pour l'expérience de Michelson et Pease. Les miroirs  $M_j$  permettent de rendre  $L$  supérieur au diamètre de l'objectif. Le déplacement des miroirs  $M_1$  et  $M_2$  permet d'obtenir la disparition des franges d'interférences. Pour simplifier, le filtre chromatique n'est pas représenté. Le schéma de gauche concerne une lunette astronomique, celui de droite un télescope de type Cassegrain. Dans l'expérience historique de Michelson et Pease, les miroirs  $M_j$  étaient montés sur une même poutre (de plusieurs mètres de longueur). Une des difficultés techniques du montage consistait à maintenir constante la différence de marche entre les deux chemins optiques suivis par les rayons qui interfèrent, avec une précision de l'ordre de  $0,1 \mu\text{m}$  – environ le quart de la longueur d'onde.

Le premier zéro de  $J_1(\pi z)$  (autre que celui qui s'obtient pour  $z = 0$ ) a lieu quand  $z = 1,22$  : le contraste des franges est nul si  $\theta$  et  $L$  sont tels que

$$\frac{\theta L}{\lambda} = 1,22. \quad (10.166)$$

De la mesure de  $L$  se déduit le diamètre apparent de l'étoile

$$\theta = \frac{1,22 \tilde{\lambda}}{L}. \quad (10.167)$$

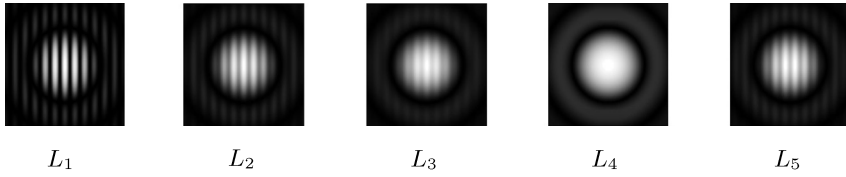
Interprétée en termes de résolution angulaire, la relation (10.167) n'est autre que la relation (8.75) : l'interféromètre stellaire de Michelson et Pease a la même résolution qu'un objectif de diamètre<sup>21</sup>  $L$ .

La figure 10.15 schématise un montage expérimental permettant d'obtenir une valeur de  $L$  supérieure au diamètre de l'objectif : pour un objectif donné, l'interféromètre stellaire repose sur une méthode de super-résolution.

Sur le plan technique, il est nécessaire de placer sur un des bras de l'interféromètre une lame compensatrice qui égalise avec précision les chemins optiques. Le montage de la figure 10.15 offre un autre avantage : le pas des franges formées au foyer de l'objectif est constant (indépendant de  $L$ ), puisqu'il ne dépend que de l'angle formé par les deux « rayons » qui interfèrent.

La figure 10.16 montre cinq aspects de la figure de diffraction obtenus pour cinq valeurs de  $L$ . Le contraste commence par diminuer quand  $L$  augmente.

<sup>21</sup> C'est une conséquence de l'assimilation de l'étoile à un disque lumineux homogène.



**FIG. 10.16.** Variation du contraste des franges en fonction de la distance  $L$  (voir la figure 10.15) dans l'expérience de Michelson et Pease, illustrée ici pour 5 valeurs de  $L$  telles que  $L_1 < L_2 < L_3 < L_4 < L_5$  (simulation numérique). La valeur  $L = L_4$  est la première valeur qui annule le contraste des franges. Sa mesure conduit au calcul du diamètre apparent de la source. Le contraste diminue quand  $L$  augmente de 0 jusqu'à  $L_4$ . Il y a ensuite inversion de contraste : un examen attentif montre que pour les figures de diffraction correspondant à  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  il y a une frange brillante au centre du champ, alors que pour  $L_5$  il y a une frange sombre.

Historiquement, la première réalisation de cette expérience a été réussie avec Bételgeuse ( $\alpha$  Orionis), et Michelson et Pease ont constaté que les franges disparaissaient pour  $L = 2,95$  m, à la longueur d'onde  $\tilde{\lambda} = 0,550$   $\mu\text{m}$ . On en déduit que le diamètre apparent<sup>22</sup> de Bételgeuse est  $\theta = 0,047''$ .

**Remarque 10.7.3.** L'étoile étant à l'infini, le rayon de courbure de l'onde qui arrive sur le télescope est infini et le plan des trous d'Young est une sphère cardinale pour l'étoile. Cela signifie que le terme de phase quadratique de la relation (10.158) vaut 1 : on obtient la relation suivante, plus générale que la relation (10.162),

$$\mu(X, Y) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} I(\alpha, \beta) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}} (\alpha X + \beta Y) \right] d\alpha d\beta}{\int_{\mathbb{R}^2} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}. \quad (10.168)$$

Il en résulte la relation suivante

$$\mu(L) = \frac{J_1 \left( \frac{\pi \theta L}{\tilde{\lambda}} \right)}{\frac{\pi \theta L}{\tilde{\lambda}}}, \quad (10.169)$$

plus générale que la relation (10.165).

**Remarque 10.7.4.** Si dans l'expérience de Michelson et Pease on augmente  $L$  au-delà de la valeur qui annule le contraste des franges, on obtient à nouveau des franges de contraste non nul, mais inversé par rapport à celui des franges

<sup>22</sup> La distance d'une étoile à la Terre peut s'estimer par des mesures de parallaxe (qui résulte du mouvement de la Terre autour du Soleil). La connaissance de cette distance et celle du diamètre apparent (angulaire) conduisent à une estimation du diamètre (linéaire) de l'étoile.

obtenues pour les valeurs de  $L$  inférieures, c'est-à-dire que les franges sombres d'une figure d'interférences sont à la place des franges brillantes de l'autre figure (fig. 10.16). Le contraste s'annule ensuite pour une deuxième valeur de  $L$ . Ces résultats se déduisent de la relation (10.169) et des propriétés de la fonction de Bessel  $J_1$ .

#### 10.7.4 Une explication intuitive du théorème Van Cittert–Zernike. Lien avec la diffraction

Contrairement à ce qui est affirmé dans la littérature sur le sujet [98], le théorème de Van Cittert–Zernike a un lien avec la diffraction de Fraunhofer. On sait que cette dernière s'exprime par une transformation de Fourier, et il n'est pas fortuit qu'il en soit de même pour le transfert de la cohérence, sous l'hypothèse d'une source incohérente de spectre étroit.

Avant de justifier notre opinion à ce sujet, rappelons quelques faits à ne pas perdre de vue. La diffraction de Fraunhofer s'applique essentiellement à un émetteur cohérent, et c'est une transformation de Fourier qui fait passer de l'amplitude du champ sur la source (l'émetteur) à celle du champ sur le récepteur situé à une certaine distance. L'effet de la diffraction est une modulation (spatiale) de l'éclairement dans le plan d'observation.

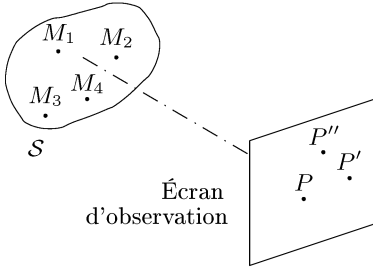
Le théorème de Zernike s'applique à une tout autre situation physique. D'abord la source, de spectre étroit, est incohérente spatialement ; il n'existe aucune variation d'éclairement dans le plan d'observation. Le théorème établit cependant des relations de phase entre les vibrations prises en certains points de ce plan. De façon précise, la cohérence autour d'un point de l'écran d'observation est liée à la transformée de Fourier de l'extinction de la source.

**Analyse d'une figure de diffraction.** Soit une ouverture diffractante, éclairée par une onde plane monochromatique, jouant le rôle de source cohérente  $\mathcal{S}$ . Pour une approche intuitive, nous admettons être en régime de Fraunhofer. Soient  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  trois points du plan d'observation (fig. 10.17). L'éclairement de la figure de diffraction est supposé maximal en  $P$  et  $P'$  (éventuellement normé à 1) et nul en  $P''$ .

Par souci de simplicité, nous ne raisonnons que sur quatre points  $M_j$  de la source ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), mais ce qui suit s'appliquerait à un nombre quelconque de points. Les vibrations émises par ces quatre points sont cohérentes entre elles et produisent quatre vibrations cohérentes en  $P$ . Il en est de même en  $P'$  et  $P''$ . Bien sûr les différences de trajets de  $M_j$  à  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  se traduisent, en ces trois derniers points, par des vibrations déphasées.

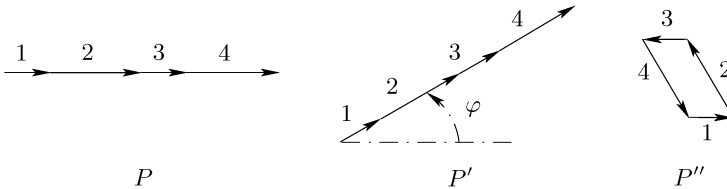
Le premier élément important est le suivant : puisqu'il y a un maximum d'éclairement en  $P$ , c'est que les vibrations issues des points  $M_j$  qui y arrivent, arrivent en phase, à  $2m\pi$  près ( $m$  est un entier).

Et puisqu'il y a un maximum d'éclairement en  $P'$ , les vibrations issues des points  $M_j$  y arrivent en phase également (à  $2m'\pi$  près). Soit  $\varphi$  la différence de phase entre la vibration reçue en  $P$  et émise par  $M_1$ , et la vibration reçue par  $P'$  et émise également par  $M_1$ . La présence d'un maximum d'éclairement en  $P$



**FIG. 10.17.** Si la source  $S$  est cohérente, on observe sur l'écran sa figure de diffraction. Si la source  $S$  est incohérente et de spectre étroit, l'éclairement dans le plan d'observation est uniforme, mais il y a une certaine cohérence entre les vibrations considérées en divers points, conformément au théorème de Zernike.

et  $P'$  montre que la différence de phase entre la vibration reçue par  $P$  et émise par  $M_j$  et celle reçue par  $P'$  et émise par  $M_j$  est aussi  $\varphi$ . Ainsi  $\varphi$  est encore la différence de phase entre la vibration résultante des quatre vibrations en  $P$  et la vibration résultante en  $P'$ , comme le montre schématiquement la figure 10.18.



**FIG. 10.18.** Résultantes des vibrations émises par les points  $M_j$  et reçues en  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  si la source  $S$  est cohérente. On désigne par  $j$  la vibration émise par  $M_j$ .

La conclusion de cette partie de l'analyse est que les vibrations résultantes en deux points de la figure de diffraction où l'éclairement est maximum (ici en  $P$  et  $P'$ ) ont entre elles une relation de phase bien définie.

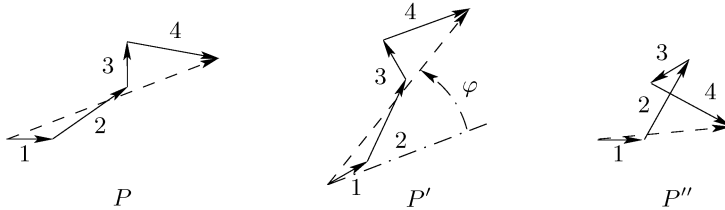
La situation est différente en  $P''$ . Puisque l'intensité vibratoire y est nulle, les quatre vibrations émises par les points  $M_j$  ont une somme nulle en  $P''$ .

**Analyse de la cohérence.** L'émetteur  $S$  est désormais supposé incohérent spatialement, de spectre étroit. De plus son exitance est supposée avoir la même expression mathématique que l'amplitude du champ dans le cas précédent<sup>23</sup>. Les points  $M_j$  émettent désormais des vibrations incohérentes entre elles.

Considérons, à un instant  $t$ , les vibrations reçues dans le plan d'observation. L'analyse de la figure de diffraction a montré que les vibrations en  $P'$  ont avec celles en  $P$  une relation de phase  $\varphi$  précise. Ainsi la construction de la vibration résultante en  $P'$  n'est autre que celle de la vibration résultante en  $P$ , mais tournée de  $\varphi$ , comme le montre la figure 10.19.

Considérons un autre instant  $t'$ . Les vibrations en  $M_j$  étant incohérentes entre elles, la vibration résultante en  $P$  n'a plus rien à voir avec ce qu'elle était

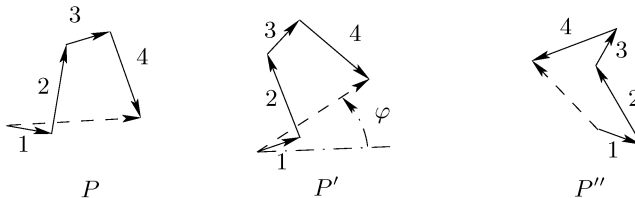
<sup>23</sup> Cela surprendra moins si l'on présente les choses à l'envers : c'est l'amplitude du champ qui se représente comme l'exitance : il n'y a pas de problème d'exitance négative !



**FIG. 10.19.** Résultantes des vibrations émises par les points  $M_j$  et reçues à un instant  $t$  en  $P$ ,  $P'$  et  $P''$  quand la source  $S$  est incohérente.

à l'instant  $t$ . Même chose en  $P'$ . Mais la construction de la vibration résultante en  $P'$  se déduit encore de celle en  $P$  par une rotation de  $\varphi$ . Ainsi la relation de phase qui existe à l'instant  $t'$  entre les vibrations résultantes en  $P$  et  $P'$  est celle qui existait à l'instant  $t$ . Au cours du temps, les vibrations résultantes en  $P$  et  $P'$  ont la même évolution : c'est la définition de la cohérence. Les vibrations en  $P$  et  $P'$  sont cohérentes entre elles.

Venons-en au point  $P''$ , pour lequel la figure de diffraction donne un éclairement nul. À l'instant  $t$ , les vibrations reçues en ce point se composent comme l'indique la figure 10.19. À l'instant  $t'$  comme l'indique la figure 10.20. Il n'y pas maintien de la relation de phase. Les vibrations en  $P$  et  $P''$  sont incohérentes entre elles.



**FIG. 10.20.** Même chose que sur la figure 10.19, mais à un instant  $t'$  différent de  $t$ .

**Conclusion.** Ce qui précède montre que la figure de diffraction d'une source cohérente contient une information sur la phase. Là où l'éclairement est maximum, la phase ne peut pas être quelconque. Cela vient de ce qu'il n'y a qu'une façon d'obtenir un maximum d'éclairement en un point : il faut sommer en phase toutes les vibrations élémentaires. En revanche, là où l'éclairement est nul, il n'y pas de relation de phase. Cela vient de ce qu'il y a de nombreuses façons de sommer des vibrations pour que leur résultante soit nulle.

Ainsi les maxima de la figure de diffraction sont les maxima du module de la transformée de Fourier de l'amplitude de la source ; les minima sont les zéros de la transformée de Fourier. Aux maxima de diffraction correspondent des maxima de cohérence, aux minima, de l'incohérence. Eh bien ! c'est encore une transformée de Fourier qui donne ce résultat, mais appliquée à l'exitance de la source. C'est ce qu'affirme le théorème de Van Cittert-Zernike.

## 10.8 Interférométrie d'intensité

Nous donnons ici une approche classique élémentaire de l'interférométrie d'intensité qui, historiquement, est à la base du développement de l'optique quantique et dont l'application à la radio-astronomie ou à l'optique astronomique prolonge celle du théorème de Zernike et permet la mesure du module du degré de cohérence de la lumière émise par une étoile, telle qu'elle est détectée sur la Terre [98, 107, 131, 153]. Nous renvoyons aux ouvrages spécialisés pour une description plus approfondie de cette très belle méthode de mesure [98, 153], ou pour une description quantique en termes simples [13, 95, 178].

### 10.8.1 Intensité vibratoire instantanée

Nous avons jusqu'ici défini l'intensité vibratoire mutuelle entre les points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  de l'émetteur  $\mathcal{A}$  comme étant

$$I_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) = \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} \rangle_t. \quad (10.170)$$

La moyenne temporelle ci-dessus est, en principe, prise sur une durée infiniment longue, en pratique, sur une durée « très longue ». Il existe cependant une échelle de temps intermédiaire entre cette durée (infinie) et la période d'oscillation du champ électromagnétique, et il est concevable de considérer la moyenne temporelle précédente sur des durées intermédiaires (voir le paragraphe 10.1.1). En poussant à l'extrême, nous définissons l'intensité vibratoire mutuelle « instantanée » entre les points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  de  $\mathcal{A}$  par

$$I_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)}, \quad (10.171)$$

si bien que

$$I_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle I_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \rangle_t. \quad (10.172)$$

Si  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ , on obtient l'intensité vibratoire instantanée au point  $\mathbf{r}$ .

**Remarque 10.8.1.** En toute rigueur, il faudrait une notation différente pour l'intensité vibratoire et pour l'intensité vibratoire instantanée. Nous utilisons la même lettre pour désigner les deux notions, la distinction se faisant par l'écriture explicite des variables : le temps intervient dans l'intensité instantanée seulement.  $\diamond$

L'intensité vibratoire instantanée possède un caractère aléatoire et on en étudie la statistique d'ordre 2 ; c'est au fond ce qui est mis à profit dans l'interférométrie d'intensité.

Nous commençons par donner un exemple de statistique de l'intensité vibratoire instantanée en choisissant le modèle d'une source thermique, utile par la suite.

### 10.8.2 Source thermique

Soit une source de lumière constituée d'un nombre  $N$  d'atomes, l'atome  $n$  pouvant émettre une onde lumineuse représentée par une amplitude de la forme

$$\mathcal{U}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} a_n e^{2i\pi\nu_n t - i\phi_n}. \quad (10.173)$$

Nous faisons une première hypothèse : la fréquence  $\nu_n$  est la même pour tous les atomes, si bien que nous écrivons l'amplitude complexe associée à un atome sous la forme

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{N}} a_n e^{-i\phi_n}. \quad (10.174)$$

Nous considérons ensuite que l'amplitude  $a_n$  et la phase  $\phi_n$  sont des variables aléatoires (réelles et indépendantes). Les variables aléatoires étant notées, dans cet ouvrage, par des lettres majuscules, l'amplitude lumineuse de l'onde émise par un atome, qui est une variable aléatoire, s'écrit

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{N}} A_n e^{-i\Phi_n}, \quad (10.175)$$

où  $A_n$  et  $\Phi_n$  sont elles-mêmes des variables aléatoires.

L'ensemble des  $N$  atomes produit une onde dont l'amplitude est la variable aléatoire  $U$ , somme des  $N$  variables aléatoires  $U_n$

$$U = A e^{-i\Phi} = \sum_{n=1}^{n=N} U_n = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{\sqrt{N}} A_n e^{-i\Phi_n}. \quad (10.176)$$

Une source telle que celle que nous venons de décrire est appelée source thermique. Une lampe à incandescence en est un exemple. (La remarque 10.8.2 p. 325 montre que notre modèle suppose implicitement la source totalement polarisée.)

Nous nous proposons de caractériser la statistique de  $U$  et celle de son module. Pour cela nous faisons les hypothèses suivantes :

1. Les variables aléatoires  $U_n$  sont conjointement indépendantes. Plus précisément les variables aléatoires  $A_n$  sont conjointement indépendantes ainsi que les  $\Phi_n$ .
2. Les variables aléatoires  $A_n$  ont la même loi de probabilité, de moyenne  $m$  et écart-type  $s$ .
3. Quel que soit  $n$ , la variable aléatoire  $\Phi_n$  est uniformément répartie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

Comme  $N$  est très grand <sup>24</sup>, le théorème « *central limit* » (voir le paragraphe F.4) affirme que  $U$  est une variable aléatoire gaussienne, sans qu'il ne soit nécessaire de préciser la loi des  $A_n$ .

<sup>24</sup> Rappelons que, par définition, une mole d'un corps pur contient  $N_A$  atomes ou molécules, où  $N_A \approx 6,022\,136\,7 \cdot 10^{23}$  est le nombre d'Avogadro [118]. Cela fixe un ordre de grandeur au nombre  $N$ .

Nous faisons apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de  $U$  et écrivons  $U = U_r + iU_i$ , où  $U_r$  et  $U_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes avec

$$U_r = A \cos \Phi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{n=N} A_n \cos \Phi_n, \quad (10.177)$$

$$U_i = -A \sin \Phi = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{n=N} A_n \sin \Phi_n. \quad (10.178)$$

**Proposition 10.8.1 (Statistique de l'amplitude d'une source thermique [98]).** *Sous les hypothèses 1–3 mentionnées plus haut, la variable aléatoire  $U = \sum_n U_n$  est une variable aléatoire gaussienne complexe circulaire centrée. Sa matrice de covariance est*

$$\Gamma_U = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (10.179)$$

où  $\sigma^2 = s^2/2$ .

*Preuve.* La définition d'un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire est donnée à l'appendice F (§F.3.3). (Ici la variable aléatoire  $U$  est un vecteur aléatoire complexe de dimension 1.)

On calcule

$$E[U_r] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{n=N} E[A_n] E[\cos \Phi_n] = 0, \quad (10.180)$$

puisque  $A_n$  et  $\Phi_n$  sont indépendantes et que  $\Phi_n$  est équirépartie sur  $[-\pi, \pi]$ . De même  $E[U_i] = 0$ . Ainsi  $U$  est une variable aléatoire centrée.

Pour  $n \neq \ell$ , les fonctions  $\cos \Phi_n$  et  $\cos \Phi_\ell$  sont deux variables aléatoires indépendantes, si bien que  $E[\cos \Phi_n \cos \Phi_\ell] = E[\cos \Phi_n] E[\cos \Phi_\ell] = 0$ . De plus  $E[\cos^2 \Phi_n] = 1/2$ , si bien que

$$E[\cos \Phi_n \cos \Phi_\ell] = \frac{1}{2} \delta_{n\ell}, \quad (10.181)$$

où  $\delta_{n\ell}$  est le symbole de Kronecker. De même

$$E[\sin \Phi_n \sin \Phi_\ell] = \frac{1}{2} \delta_{n\ell}. \quad (10.182)$$

On calcule, en utilisant encore l'indépendance des  $A_n$  et des  $\Phi_n$ ,

$$\begin{aligned} E[U_r^2] &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{\ell=1}^{\ell=N} E[A_n] E[A_\ell] E[\cos \Phi_n \cos \Phi_\ell] \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{n=N} \{E[A_n]\}^2 \\ &= \frac{1}{2} s^2. \end{aligned} \quad (10.183)$$

De même

$$\mathbb{E}[U_i^2] = \frac{1}{2} s^2. \quad (10.184)$$

D'autre part, pour  $n \neq \ell$ , on a  $\mathbb{E}[\cos \Phi_n \sin \Phi_\ell] = \mathbb{E}[\cos \Phi_n] \mathbb{E}[\sin \Phi_\ell] = 0$ , et

$$\mathbb{E}[\cos \Phi_n \sin \Phi_n] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\sin 2\Phi_n] = 0, \quad (10.185)$$

si bien que

$$\mathbb{E}[U_r U_i] = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{\ell=1}^{\ell=N} \mathbb{E}[A_n] \mathbb{E}[A_\ell] \mathbb{E}[\cos \Phi_n \sin \Phi_\ell] = 0. \quad (10.186)$$

La proposition en résulte.  $\square$

**Proposition 10.8.2 (Loi de probabilité du module et de la phase de l'amplitude d'une source thermique [98]).** *Sous les hypothèses de la proposition 10.8.1, la phase  $\Phi$  de la vibration  $U$  est équirépartie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et le module de l'amplitude  $|A|$  suit une loi de Rayleigh dont la densité de probabilité s'écrit ( $a$  est positif)*

$$p_{|A|}(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp \left[ -\frac{a^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (10.187)$$

*Preuve.* La fonction caractéristique de la variable aléatoire  $U$  s'écrit

$$\varphi_U(\nu_r, \nu_i) = \exp \left[ -2\pi^2 \sigma^2 (\nu_r^2 + \nu_i^2) \right], \quad (10.188)$$

et sa densité de probabilité s'en déduit par transformation de Fourier inverse

$$p_U(u_r, u_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{u_r^2 + u_i^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (10.189)$$

La densité de probabilité  $p_U$  est aussi la densité de probabilité de la loi conjointe de  $U_r$  et  $U_i$ . Or on passe au module  $|a|$  et à la phase  $\phi$  par les relations

$$u_r = |a| \cos \phi, \quad (10.190)$$

$$u_i = |a| \sin \phi, \quad (10.191)$$

si bien que de  $u_r^2 + u_i^2 = a^2$  et  $du_r du_i = a da d\phi$ , on déduit

$$p_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{+\infty} a \exp \left[ -\frac{a^2}{2\sigma^2} \right] da = \frac{1}{2\pi}, \quad (10.192)$$

ce qui prouve la partie de la proposition relative à la phase.

Enfin, pour  $a \geq 0$ ,

$$p_{|A|}(a) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\pi}^{+\pi} a \exp \left[ -\frac{a^2}{2\sigma^2} \right] d\phi = \frac{a}{\sigma^2} \exp \left[ -\frac{a^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (10.193)$$

La proposition est démontrée.  $\square$

**Proposition 10.8.3 (Statistique de l'intensité vibratoire d'une source thermique).** *Sous les hypothèses de la proposition 10.8.1, l'intensité vibratoire instantanée  $I$  d'une source thermique suit une loi de probabilité de densité<sup>25</sup> ( $i \geq 0$ )*

$$p_I(i) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp \left[ -\frac{i}{2\sigma^2} \right]. \quad (10.194)$$

Sa valeur moyenne  $m_I$  est égale à son écart-type  $\sigma_I$ , et

$$m_I = \sigma_I = 2\sigma^2. \quad (10.195)$$

*Preuve.* L'intensité vibratoire instantanée est  $I = |A|^2$ , et on connaît la loi de  $|A|$ . On écrit  $|A| = \sqrt{i}$  et

$$p_I(i) = p_A(\sqrt{i}) \frac{d|A|}{di} = \frac{1}{2\sigma^2} \exp \left[ -\frac{i}{2\sigma^2} \right]. \quad (10.196)$$

L'espérance mathématique de  $I$  est

$$m_I = \int_0^{+\infty} i \exp \left[ -\frac{i}{2\sigma^2} \right] di = 2\sigma^2. \quad (10.197)$$

On calcule, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} E[I^2] &= \int_0^{+\infty} i^2 \exp \left[ -\frac{i}{2\sigma^2} \right] di = 4\sigma^2 \int_0^{+\infty} i \exp \left[ -\frac{i}{2\sigma^2} \right] di \\ &= 8\sigma^4. \end{aligned} \quad (10.198)$$

Enfin

$$\sigma_I = \sqrt{E[I^2] - m_I^2} = 2\sigma^2, \quad (10.199)$$

et la proposition en découle.  $\square$

**Remarque 10.8.2.** La proposition 10.8.3 correspond à la statistique de l'intensité vibratoire d'une onde totalement polarisée, comme cela est montré dans le livre de Goodman [98]. Cela ne doit pas surprendre, même dans le cadre d'une théorie scalaire telle qu'elle est développée dans ce livre, qui ne prend pas en compte la polarisation de la lumière : de façon précise, nous avons supposé une polarisation fixe pour les ondes étudiées et avons fait l'hypothèse que la diffraction-propagation ne modifiait pas la polarisation, ce qui nous autorisait à nous intéresser à la seule amplitude du champ (cela est expliqué au paragraphe 1.3 du chapitre 1). Or il existe des ondes partiellement polarisées, et même non polarisées. La statistique de l'intensité vibratoire de telles ondes est différente de celle décrite dans la proposition 10.8.3 [98].

<sup>25</sup> Ne pas confondre  $i$ , qui est une valeur numérique (réelle) de la variable aléatoire  $I$ , avec le nombre imaginaire  $i$ .

Une onde partiellement polarisée se caractérise par son degré de polarisation, dont on montre qu'il est supérieur ou égal au coefficient de corrélation de deux composantes orthogonales du champ, analogue au degré de cohérence. Le modèle d'une source totalement polarisée autorise tous les degrés de cohérence possibles (compris entre 0 et 1) pour les composantes du champ. Il est ainsi légitime de parler de cohérence partielle pour les sources thermiques étudiées dans ce paragraphe (puisqu'elles sont supposées totalement polarisées).

La proposition 10.8.3 suffit à expliquer de façon élémentaire l'interférométrie d'intensité. Divers ouvrages décrivent de façon approfondie les statistiques de l'intensité vibratoire en relation avec la polarisation [37, 98, 153].

### 10.8.3 Application à la mesure du degré de cohérence

Nous nous intéressons à la statistique d'ordre 2 de l'intensité vibratoire instantanée  $I_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  et écrivons la corrélation mutuelle de l'intensité vibratoire sous la forme

$$\Gamma_A^{[2]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \tau) = \langle I_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) I_A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, t - \tau) \rangle_t. \quad (10.200)$$

La relation (10.200) s'écrit aussi

$$\Gamma_A^{[2]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \tau) = \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} E_A(\mathbf{r}_3, t - \tau) \overline{E_A(\mathbf{r}_4, t - \tau)} \rangle_t, \quad (10.201)$$

et cela montre que les moments d'ordre 2 de l'intensité vibratoire sont liés aux moments d'ordre 4 du champ.

Le calcul explicite de  $\Gamma_A^{[2]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \tau)$  est praticable dans un cas particulier : celui où le champ  $E_A$  est une variable aléatoire gaussienne complexe circulaire. Cela correspond à de la lumière d'origine thermique (source à incandescence par exemple) telle qu'étudiée au paragraphe 10.8.2. Dans ce cas, on montre (voir la relation (F.36) de l'appendice F, p. 510)

$$\begin{aligned} & \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} E_A(\mathbf{r}_3, t - \tau) \overline{E_A(\mathbf{r}_4, t - \tau)} \rangle_t \\ &= \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} \rangle_t \langle E_A(\mathbf{r}_3, t - \tau) \overline{E_A(\mathbf{r}_4, t - \tau)} \rangle_t \\ &+ \langle E_A(\mathbf{r}_1, t) \overline{E_A(\mathbf{r}_4, t - \tau)} \rangle_t \langle \overline{E_A(\mathbf{r}_2, t)} E_A(\mathbf{r}_3, t - \tau) \rangle_t. \end{aligned} \quad (10.202)$$

La relation (10.25), qui définit la cohérence mutuelle du champ, et la relation (10.202) conduisent à mettre la relation (10.201) sous la forme

$$\begin{aligned} \Gamma_A^{[2]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \tau) &= \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0) \Gamma_A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; 0) \\ &+ \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4; \tau) \overline{\Gamma_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; \tau)}, \end{aligned} \quad (10.203)$$

à condition que la source soit thermique et totalement polarisée, ce que nous supposons désormais.

Considérons enfin le cas particulier  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4$ . La relation (10.203) devient

$$\Gamma_A^{[2]}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3; \tau) = \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; 0) \Gamma_A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3; 0) + \Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \tau) \overline{\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \tau)}, \quad (10.204)$$

ou encore

$$\langle I_A(\mathbf{r}_1, t) I_A(\mathbf{r}_3, t - \tau) \rangle_t = I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_3) + |\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \tau)|^2. \quad (10.205)$$

Nous utilisons le degré de cohérence sous la forme

$$\Gamma_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \tau) = \sqrt{I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_3)} \mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3; \tau), \quad (10.206)$$

et obtenons

$$\langle I_A(\mathbf{r}_1, t) I_A(\mathbf{r}_3, t - \tau) \rangle_t = I_A(\mathbf{r}_1) I_A(\mathbf{r}_3) (1 + |\mu_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \tau)|^2). \quad (10.207)$$

La mesure de la corrélation des intensités vibratoires instantanées en deux points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_3$  fournit une mesure du module du degré de cohérence. C'est le principe de l'interférométrie d'intensité, mise au point par Hanbury Brown et Twiss [108].

En pratique, on détecte électriquement les intensités vibratoires instantanées et on remplace leur corrélation par celle des courants électriques produits par les détecteurs. On obtient une mesure du module du degré de cohérence et le théorème de Van Cittert–Zernike permet de remonter à l'exitance de la source. La méthode de Hanbury Brown et Twiss est une alternative « incohérente » à la méthode de Michelson et Pease de la mesure du diamètre apparent des étoiles. Elle a été appliquée à la radio-astronomie, ensuite à l'optique ; elle est à l'origine de l'optique astronomique moderne, qui corrèle les signaux lumineux captés par plusieurs télescopes (*Very Large telescope (VLT)* de l'*European Southern Observatory (ESO)* au Chili par exemple).

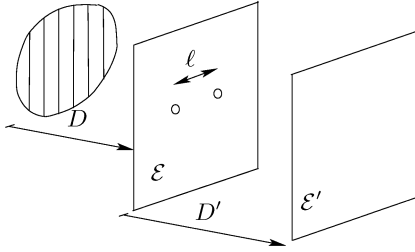
On trouve dans l'ouvrage de Goodman [97] le schéma du fonctionnement classique de l'interféromètre à intensité et celui de son fonctionnement quantique (qu'on trouve encore dans des ouvrages déjà cités [13, 95, 153, 178]).

## 10.9 Exercices

**Exercice 10.1.** Dédurre directement l'équation (10.93) de l'équation d'onde pour l'amplitude du champ.

**Exercice 10.2.** Soit une source de lumière blanche et deux trous d'Young percés dans un écran  $\mathcal{E}$  et séparés de  $\ell = 1$  mm (fig. 10.21). On place la source à la distance  $D = 50$  cm de  $\mathcal{E}$ . On observe l'éclairement produit sur un deuxième écran  $\mathcal{E}'$  situé à la distance  $D' = 1$  m de  $\mathcal{E}$ .

1. On place sur la source un réseau de diffraction en amplitude. Dire à quelles conditions il est possible d'observer des interférences d'Young sur l'écran  $\mathcal{E}'$ , pour un spectre autour de  $\tilde{\lambda} = 0,5 \mu\text{m}$ .



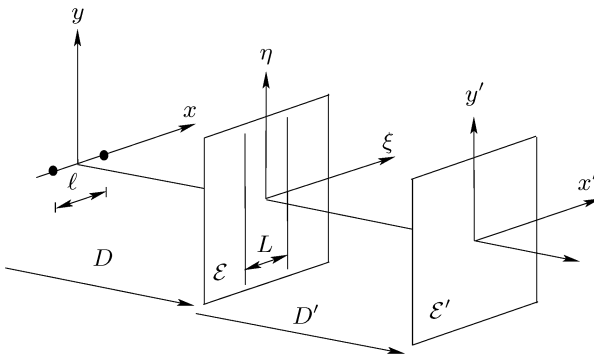
**FIG. 10.21.** Montage pour l'observation de franges d'Young obtenues avec une source large [87].

2. Calculer la période du réseau précédent qui permet la formation des interférences.

**Exercice 10.3.** *Examen de maîtrise de physique, université de Bretagne-Sud, Lorient, 2001.* On considère deux sources lumineuses ponctuelles distantes de  $\ell$ , émettant une lumière de spectre étroit autour de la fréquence  $\tilde{\nu}$  (la longueur d'onde correspondante est notée  $\tilde{\lambda}$ ).

Ces deux sources éclairent un écran percé de deux fentes supposées infiniment étroites et infiniment longues, distantes de  $L$  (fig. 10.22). La distance du plan des fentes aux sources est  $D$ . On observe la lumière qui passe par les fentes sur un écran situé à la distance  $D'$  du plan des fentes (et qui lui est parallèle).

1. Montrer qu'il existe certaines valeurs de  $\ell$  pour lesquelles on observe des franges d'interférences sur le deuxième écran. Préciser ces valeurs.
2. Montrer qu'il existe certaines valeurs de  $\ell$  pour lesquelles on n'observe plus les franges d'interférences sur le deuxième écran. Préciser ces valeurs.
3. Que peut-on dire du contraste des franges d'interférences si  $\ell = \tilde{\lambda}D/4L$  ? si  $\ell = \tilde{\lambda}D/L$  ?



**FIG. 10.22.** Montage d'observation d'interférences obtenues avec des trous sources incohérents mais de spectre étroit.

# Chapitre 11

## Dispersion de groupe

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la dispersion de groupe<sup>1</sup>, c'est-à-dire aux effets de la dispersion chromatique sur la propagation de paquets (ou groupes) d'ondes que nous supposons être à spectre étroit. La dispersion chromatique se rapporte à la fréquence temporelle des ondes, et cela la distingue de la dispersion spatiale associée à la diffraction et liée aux fréquences spatiales (voir le paragraphe 2.3.2 du chapitre 2).

La dispersion de groupe joue un grand rôle dans la propagation dans les lignes de transmission, les fibres optiques en particulier : l'élargissement temporel et la déformation des ondes qu'elle provoque limitent le débit de l'information transmise dans ces lignes [154]. Nous allons voir cependant que son étude se formalise dans un cadre plus vaste que celui des lignes de transmission et qu'elle concerne également la diffraction, dans son aspect temporel : ce qui suit est aussi un prolongement du chapitre 9.

Il est habituel d'étudier dans un premier temps la dispersion de groupe<sup>2</sup> d'ordre 2, parce que son effet sur un paquet d'ondes gaussien est simplement un élargissement temporel et qu'elle donne lieu au calcul analytique explicite de ce dernier. Dans ce cadre, on met en évidence une analogie formelle entre la propagation d'une onde dans une ligne de transmission dispersive et la diffraction de Fresnel d'un émetteur vers un récepteur sphériques : changent seulement les variables et la dimension du problème (une dimension temporelle ou bien deux dimensions spatiales). De cette analogie résulte la représentation de la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif par une transformation de Fourier fractionnaire<sup>3</sup>. Cette façon de faire est systématiquement développée ici et sera appliquée au chapitre 12 aux paquets d'ondes gaussiens.

---

<sup>1</sup> Ou « dispersion de la vitesse de groupe ».

<sup>2</sup> Qualifier la dispersion « d'ordre 2 » est discutable ; celle-ci est d'ordre 2 parce qu'elle dépend, comme nous le verrons, de la dérivée seconde de l'indice de réfraction par rapport à la fréquence. Mais exprimée par la dérivée de la vitesse de groupe par rapport à la fréquence, elle est d'ordre 1.

<sup>3</sup> L'analogie entre dispersion de groupe et diffraction de Fresnel est bien connue par ailleurs [25, 26, 69, 176]. L'idée de la traduire en termes de transformation de Fourier fractionnaire est à porter au crédit de S. Coëtmellec [50] ; l'approche que nous proposons diffère toutefois de ces travaux : elle s'appuie sur la représentation de la diffraction telle que développée dans la première partie de ce livre (notamment dans le chapitre 6).

## 11.1 Paquet d'ondes, vitesse de groupe et dispersion

En préambule à l'étude de la dispersion de groupe, nous rappelons les notions de vitesse de groupe et de paquet d'ondes [29, 52, 113, 121, 158, 218]. Ces notions, générales en physique, sont bien sûr très utilisées en télécommunications optiques, et le texte qui suit est parfois proche de ce qu'on trouve dans les ouvrages consacrés aux fibres optiques [4, 41, 214]. Sa portée est toutefois plus vaste : il s'applique à tout milieu dispersif, et notamment à la diffraction–propagation dans un tel milieu, comme le montre le paragraphe 11.2.2.

Suivant qu'on aborde la question sous l'angle de la physique ou sous celui de la théorie des lignes de transmission (ou des télécommunications), les notations qu'on rencontre dans la littérature ne sont pas toujours les mêmes, d'où une difficulté de présentation, si l'on souhaite que chacun s'y retrouve. Nous avons cherché à employer de plus des notations « cohérentes » avec celles de ce livre. Cela explique quelques changements de notations au cours du développement de ce chapitre.

### 11.1.1 Définitions

Nous considérons des ondes progressives dépendant d'une seule variable d'espace,  $z$ , qui indique la direction de propagation. Le milieu de propagation est vu comme une « ligne ». Nous écrivons  $E(z, t)$  l'amplitude du champ à l'abscisse  $z$  et instant  $t$  (plus loin nous écrirons  $E_z(t)$ , voir le paragraphe 11.2). Nous ne précisons pas encore la nature physique de  $E$ , cela sera fait par la suite.

L'amplitude  $E(z, t)$  est considérée comme la représentation spatio-temporelle d'un signal « champ abstrait », et nous dressons le losange de Fourier suivant qui indique les relations entre les représentations du champ :

$$\begin{array}{ccc}
 & E(z, t) & \\
 \nearrow z & & \nwarrow t \\
 \epsilon(f, t) & & e(z, \nu) \\
 \nwarrow t & & \nearrow z \\
 & \mathfrak{E}(f, \nu) &
 \end{array} \tag{11.1}$$

Outre la représentation spatio-temporelle  $E(z, t)$ , nous utilisons surtout la composante spectrale  $e(z, \nu)$  et la représentation fréquentio-temporelle  $\epsilon(f, t)$ .

La variable  $f$  est la variable conjuguée de la variable d'espace  $z$  ; elle est homogène à l'inverse d'une longueur et nous l'appelons fréquence spatiale (éventuellement « longitudinale » pour la distinguer des fréquences spatiales introduites au chapitre 2).

Nous conservons les conventions de signes adoptées pour les transformations de Fourier spatiale et temporelle (voir l'appendice B), de telle sorte que les transformations directes du schéma (11.1) s'écrivent

$$\mathfrak{e}(f, t) = \int_{\mathbb{R}} E(z, t) e^{2i\pi f z} dz, \quad (11.2)$$

pour la transformation spatiale, et

$$e(z, \nu) = \int_{\mathbb{R}} E(z, t) e^{-2i\pi \nu t} dt, \quad (11.3)$$

pour la transformation temporelle.

Nous employons les notations précédentes pour maintenir la symétrie entre  $\nu$  et  $f$  (qui sont des fréquences), mais soulignons que dans la littérature c'est plutôt la pulsation  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) et le nombre d'ondes  $k$  ( $k = 2\pi f$ ) – ou la constante de propagation  $\beta$  –, qui sont utilisés comme paramètres, par exemple dans la définition de la vitesse de groupe ; nous exprimerons les résultats qui vont suivre en fonction de ces variables à la fin du paragraphe.

Remarquons enfin que  $f$  est l'inverse de la longueur d'onde<sup>4</sup> :  $f = 1/\lambda$ .

**Onde et signal.** L'amplitude  $E(z, t)$  représente le champ spatio-temporel qu'il est classique d'examiner sous deux points de vue<sup>5</sup>. On fixe l'abscisse  $z_0$  et considère l'évolution temporelle du champ en ce point ; on s'intéresse ainsi à la fonction

$$t \longmapsto E(z_0, t), \quad (11.4)$$

c'est-à-dire, si on veut, au « signal » que « verrait passer » un observateur placé à l'abscisse  $z_0$ .

De l'autre point de vue, on s'intéresse à la répartition spatiale du champ à un instant fixé  $t_0$ , c'est-à-dire à la fonction

$$z \longmapsto E(z, t_0), \quad (11.5)$$

qui représente une « onde » (qui se déplace au cours du temps).

**Vitesse de phase.** Un champ (spatio-temporel) harmonique, ou monochromatique, qui se propage vers les  $z$  croissants (seul cas considéré ici) est représenté par une amplitude de la forme<sup>6</sup>

$$E(z, t) = E_0 e^{2i\pi(\nu_0 t - f_0 z)}, \quad (11.6)$$

<sup>4</sup> Il s'agit de la longueur d'onde du rayonnement (supposé monochromatique) dans le milieu de propagation, distincte de la longueur d'onde (du même rayonnement) dans le vide, notée en général  $\lambda_0$  dans ce livre. Signalons à ce propos que les spectroscopistes notent souvent  $\sigma = 1/\lambda$ , qu'ils appellent nombre d'ondes (voir le paragraphe 13.5.4).

<sup>5</sup> Nous empruntons à G. Bonnet, une fois encore, ce qui suit, notamment le vocabulaire [25].

<sup>6</sup> L'écriture de la relation (11.6) inclut bien les deux aspects d'un champ harmonique (en notation complexe). Pour le comprendre, considérer la partie réelle du champ, c'est-à-dire  $\cos[2\pi(\nu_0 t - f_0 z)]$ . Le signal observé en  $z_0$  est sinusoïdal, représenté par l'amplitude « temporelle »  $\cos[2\pi(\nu_0 t - f_0 z_0)]$  ; pour  $t = t_0$ , l'onde est aussi sinusoïdale, représentée par la fonction « spatiale »  $\cos[2\pi(\nu_0 t_0 - f_0 z)]$ .

où  $E_0$ ,  $\nu_0$  et  $f_0$  sont des constantes.

L'amplitude du champ au point  $z + \Delta z$ , à l'instant  $t + \Delta t$ , s'écrit

$$E(z + \Delta z, t + \Delta t) = E_0 e^{2i\pi[\nu_0(t+\Delta t) - f_0(z+\Delta z)]}. \quad (11.7)$$

La phase est conservée quand on passe du point  $(z, t)$  au point  $(z + \Delta z, t + \Delta t)$  si, et seulement si <sup>7</sup>,

$$\nu_0 \Delta t - f_0 \Delta z = 0. \quad (11.8)$$

L'état de la phase en un point de la ligne se déplace à la vitesse

$$v_0 = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\nu_0}{f_0}, \quad (11.9)$$

et  $v_0$  est la vitesse de phase. Il existe donc une relation entre la fréquence temporelle et la fréquence spatiale d'une onde harmonique.

Pour un milieu de propagation donné, la vitesse de phase dépend de  $\nu_0$ , ou de façon équivalente, de  $f_0$ . De manière générale, la relation (11.9) se met sous la forme

$$f(\nu) = \frac{\nu}{v(\nu)}, \quad (11.10)$$

ou bien

$$\nu(f) = fV(f), \quad (11.11)$$

suivant le choix de  $\nu$  ou  $f$  pour caractériser l'onde harmonique. La fonction  $\nu \mapsto v(\nu)$  est la vitesse de phase temporelle; la fonction  $f \mapsto V(f)$ , la vitesse de phase spatiale.

Les relations (11.10) et (11.11) tiennent compte de la dispersion chromatique du milieu de propagation. Elles relient la fréquence temporelle et la fréquence spatiale longitudinale d'une onde harmonique se propageant dans le milieu considéré; par exemple, à une fréquence temporelle  $\nu_0$  correspond la fréquence spatiale  $f_0$  telle que  $v(\nu_0) = V(f_0)$ . Cette correspondance dépend du milieu de propagation (voir la figure 11.1).

Les fonctions

$$\nu \mapsto f(\nu) = \frac{\nu}{v(\nu)}, \quad (11.12)$$

et

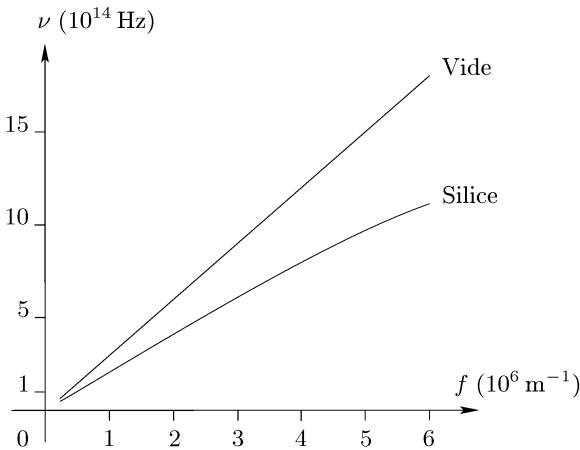
$$f \mapsto \nu(f) = fV(f), \quad (11.13)$$

<sup>7</sup> La condition (11.8) est manifestement suffisante. Une condition nécessaire devrait s'écrire, *a priori*, sous la forme plus générale  $\nu_0 \Delta t - f_0 \Delta z = q$ , où  $q \in \mathbb{Z}$ . Mais la relation cherchée doit être vraie quels que soient  $\Delta t$  et  $\Delta z$ , ou plus exactement pour  $\Delta t$  et  $\Delta z$  tendant vers 0. Seule la valeur  $q = 0$  est compatible avec cette limite.

sont réciproques (l'une est la fonction inverse de l'autre) [25]. Si  $\nu_0$  et  $f_0$  sont deux fréquences se correspondant par les deux fonctions précédentes, c'est-à-dire  $f_0 = f(\nu_0)$ , les dérivées de ces fonctions vérifient

$$\frac{df}{d\nu}(\nu_0) = \frac{1}{\frac{d\nu}{df}(f_0)} = \frac{1}{\frac{d\nu}{df}[f(\nu_0)]}. \quad (11.14)$$

La figure 11.1 illustre la relation  $f$ - $\nu$  pour le vide et la silice<sup>8</sup>. Les graphes tracés sont ceux de la fonction  $f \mapsto \nu(f)$ . On verra par la suite que la vitesse de groupe dans un milieu donné, pour une fréquence donnée, est la pente de la courbe tracée pour ce milieu, à la fréquence considérée.



**FIG. 11.1.** Relation entre la fréquence spatiale  $f$  et la fréquence temporelle  $\nu$  pour le vide (le graphe est une droite) et pour la silice. Le spectre visible correspond à des valeurs de  $\nu$  comprises entre  $3,8 \cdot 10^{14}$  Hz et  $7,5 \cdot 10^{14}$  Hz (environ), soit, dans le vide, à des valeurs de  $f$  comprises entre  $1,3 \cdot 10^6$  m<sup>-1</sup> et  $2,5 \cdot 10^6$  m<sup>-1</sup> (dans le vide,  $f = 1 \cdot 10^6$  m<sup>-1</sup> correspond à une longueur d'onde de 1  $\mu$ m et une fréquence de  $2,9979 \cdot 10^{14}$  Hz). Le graphe a été prolongé dans la région des hautes fréquences (ultra-violet) pour rendre discernable le caractère non linéaire de la relation  $f$ - $\nu$  pour la silice.

**Paquet d'ondes.** Décrire un champ, qui se propage, sous la forme d'un paquet d'ondes, c'est le considérer comme la somme (intégrale) d'ondes monochromatiques (on devrait dire : de champs spatio-temporels harmoniques). Pour cela remarquons que, par transformation de Fourier inverse, la relation (11.2) conduit à écrire l'amplitude  $E(z, t)$  sous la forme

$$E(z, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{e}(f, t) e^{-2i\pi f z} df, \quad (11.15)$$

<sup>8</sup> La courbe de la silice a été calculée à partir de la formule de Sellmeier (voir l'appendice I; voir aussi la figure 11.2).

et la relation (11.3) sous la forme

$$E(z, t) = \int_{\mathbb{R}} e(z, \nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (11.16)$$

Si l'on choisit la fréquence spatiale comme paramètre, on écrit

$$e(f, t) = a(f) e^{2i\pi\nu t}, \quad (11.17)$$

où  $a$  est une fonction (ou distribution), et cela conduit à faire apparaître l'amplitude de champs harmoniques sous l'intégrale de la relation (11.15), puisque cette dernière devient

$$E(z, t) = \int_{\mathbb{R}} a(f) e^{2i\pi\nu t} e^{-2i\pi f z} df. \quad (11.18)$$

La relation (11.18) décrit un paquet d'ondes comme étant la superposition linéaire de champs harmoniques, l'amplitude de chacun d'eux étant affectée d'un coefficient  $a(f)$ , fonction de sa fréquence spatiale.

Puisqu'on a choisi la fréquence spatiale comme paramètre, la fréquence (temporelle) est une fonction de  $f$ , selon la relation (11.11), si bien que la relation (11.18) s'écrit

$$E(z, t) = \int_{\mathbb{R}} a(f) e^{2i\pi[\nu(f)t - fz]} df. \quad (11.19)$$

Il existe une écriture alternative du paquet d'ondes qui résulte du choix de la fréquence temporelle comme variable. On définit la fonction  $a$  par

$$a(\nu) = a[f(\nu)] \frac{df}{d\nu}, \quad (11.20)$$

et la relation (11.19) devient

$$E(z, t) = \int_{\mathbb{R}} a(\nu) e^{2i\pi[\nu t - f(\nu)z]} d\nu. \quad (11.21)$$

La composante spectrale s'écrit

$$e(z, \nu) = a(\nu) e^{-2i\pi f(\nu)z}. \quad (11.22)$$

Les relations (11.17) et (11.22) fournissent deux représentations du paquet d'ondes considéré.

**Vitesse de groupe.** Pour l'étude d'un paquet d'ondes de spectre spatial étroit autour de  $\tilde{f}$ , il est légitime d'écrire la relation (11.11) sous la forme

$$\nu(f) = \tilde{\nu} + (f - \tilde{f}) \frac{d\nu}{df}(\tilde{f}) + \frac{1}{2}(f - \tilde{f})^2 \frac{d^2\nu}{df^2}(\tilde{f}) + \dots, \quad (11.23)$$

où  $\tilde{\nu} = \nu(\tilde{f})$ .

Pour définir et interpréter la notion de vitesse de groupe, supposons

$$\frac{d^j \nu}{d\tilde{f}^j}(\tilde{f}) = 0, \quad \text{pour tout } j \geq 2. \quad (11.24)$$

Cette hypothèse n'est certes pas satisfaite pour les milieux réels (physiques), autres que le vide. Elle n'en a pas moins un intérêt théorique. La dispersion de groupe, définie par la suite, résultera justement de l'écart entre ce modèle et la réalité.

Notons

$$V_g = \frac{d\nu}{d\tilde{f}}(\tilde{f}), \quad (11.25)$$

et remarquons que  $V_g$  est homogène à une vitesse : c'est la vitesse de groupe, dénomination qui sera justifiée par la suite. Ainsi, sous l'hypothèse (11.24), la fréquence temporelle est une fonction de la fréquence spatiale qui s'écrit

$$\nu(f) = \tilde{\nu} + (f - \tilde{f})V_g. \quad (11.26)$$

La définition précédente de la vitesse de groupe vaut pour la fréquence  $\tilde{f}$ , et il faudrait écrire *a priori*  $V_g(\tilde{f})$ . Mais on montre que la vitesse de groupe  $V_g$ , ainsi définie, ne dépend pas du choix de  $\tilde{f}$  (voir l'exercice 11.1) ; c'est une constante. Cela vient de ce que la relation entre  $\nu$  et  $f$  est linéaire. Il est donc légitime de noter seulement  $V_g$  la vitesse de groupe, sous l'hypothèse (11.24).

**Paquet d'ondes dans le repère de groupe.** Dans les conditions précédentes, la relation (11.19) devient

$$\begin{aligned} E(z, t) &= e^{2i\pi(\tilde{\nu}t - \tilde{f}V_g t)} \int_{\mathbb{R}} \alpha(f) e^{2i\pi f(V_g t - z)} df \\ &= e^{2i\pi(\tilde{\nu}t - \tilde{f}V_g t)} E(z - V_g t, 0). \end{aligned} \quad (11.27)$$

Nous concluons de la façon suivante : imaginons un repère mobile se déplaçant à la vitesse  $V_g$  ; nous l'appelons repère de groupe. Dans ce repère, le module de l'amplitude de l'onde est constant, conformément à la relation (11.27). Autrement dit, sous l'hypothèse (11.24), le paquet (groupe) d'ondes conserve sa forme quand il se propage dans la ligne ; il ne subit qu'un déphasage. De plus, il se déplace à une vitesse égale à la vitesse de groupe, ce qui justifie l'emploi de ce terme pour désigner  $V_g$ .

**Remarque 11.1.1.** Seule l'hypothèse (11.24) est nécessaire à la définition de  $V_g$  par la relation (11.25). L'hypothèse de spectre étroit est introduite ici en prévision de la suite. Ainsi un paquet d'ondes quelconque se déplace sans déformation dans un milieu où fréquence temporelle et fréquence spatiale sont liées linéairement. C'est bien sûr le cas dans le vide : le graphe de la fonction  $f \mapsto \nu(f)$  est une droite (voir la figure 11.1).

**Remarque 11.1.2.** La définition habituelle de la vitesse de groupe en fonction de la pulsation et du nombre d'ondes  $k$  se déduit de la précédente définition, relation (11.25), et prend la forme

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}(\tilde{\omega}), \quad (11.28)$$

puisque  $\omega = 2\pi\nu$  et  $k = 2\pi f$ . Si on utilise la constante de propagation  $\beta$  au lieu de  $k$ , comme plus loin dans ce livre, alors

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta}(\tilde{\omega}). \quad (11.29)$$

Quant à la vitesse de phase, c'est

$$v = \frac{\tilde{\omega}}{k}. \quad (11.30)$$

**Vitesse de groupe dans un milieu dispersif.** Pour un milieu matériel quelconque, l'hypothèse de la relation (11.24) doit être abandonnée, et le développement limité de la relation (11.23) montre que la relation entre la fréquence spatiale et la fréquence temporelle n'est plus linéaire. Il nous est cependant loisible de définir encore la vitesse de groupe en  $\tilde{f}$  par

$$V_g(\tilde{f}) = \frac{d\nu}{d\tilde{f}}(\tilde{f}). \quad (11.31)$$

Cela vaut pour toute fréquence  $f$ , et on écrit

$$V_g(f) = \frac{d\nu}{df}(f). \quad (11.32)$$

La vitesse de groupe devient une fonction de la fréquence spatiale. La fonction  $f \mapsto V_g(f)$  est la vitesse de groupe spatiale.

Il existe une vitesse de groupe temporelle  $v_g$ , qui apparaît si on choisit la fréquence temporelle comme variable ; elle est définie par

$$v_g(\nu) = V_g[f(\nu)]. \quad (11.33)$$

La dispersion de la vitesse de groupe traduit la dépendance de  $V_g(f)$  avec la fréquence  $f$  ; ou celle de  $v_g(\nu)$  avec la fréquence temporelle  $\nu$ .

La relation (11.32) montre que la vitesse de groupe en  $f$  est la pente du graphe de la fonction  $f \mapsto \nu(f)$  en ce point. Si ce graphe est une droite, la vitesse de groupe est constante : il n'y a pas de dispersion de groupe. C'est le cas du vide et du milieu hypothétique satisfaisant la relation (11.24). La figure 11.1 illustre la dispersion chromatique et la dispersion de groupe d'un milieu. Ainsi :

- le vide n'est pas dispersif, car  $\nu = cf$ . *A fortiori*, il ne donne pas lieu à dispersion de groupe : le graphe de la fonction  $f \mapsto \nu(f)$  est une droite ;

- pour la silice, la courbe de la fonction  $f \mapsto \nu(f)$  n'est pas une droite : la silice présente de la dispersion de groupe. Dans le domaine du spectre visible ou de l'infra-rouge, cela n'est guère décelable graphiquement ; c'est pour cette raison que les graphes de la figure 11.1 ont été étendus à l'ultra-violet.

**Remarque 11.1.3.** Il est des cas où la notion de vitesse de groupe ne correspond pas à la réalité de la propagation d'un paquet d'ondes, par exemple s'il y a une déformation importante de ce dernier [36, 121]. D'autre part, la mesure de la vitesse de groupe peut se révéler difficile dans la pratique. Pour ces raisons d'autres notions ont été introduites : vitesse de signal [25, 196, 221], vitesse d'onde [25]. La brève présentation de ce paragraphe ne saurait épuiser le sujet !

**Lien avec l'indice de réfraction et la dispersion chromatique.** À la fréquence  $\nu$ , l'indice de réfraction du milieu de propagation est  $n(\nu)$  défini par

$$n(\nu) = \frac{c}{v(\nu)}, \quad (11.34)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière (dans le vide) et  $v(\nu)$  la vitesse de phase (temporelle). La relation (11.10) conduit à

$$\nu n(\nu) = cf(\nu). \quad (11.35)$$

La dérivation par rapport à  $\nu$  des deux membres de la relation (11.35) donne

$$n(\nu) + \nu \frac{dn}{d\nu}(\nu) = c \frac{df}{d\nu}(\nu). \quad (11.36)$$

Il résulte des relations (11.32), (11.33) et (11.14)

$$v_g(\nu) = V_g[f(\nu)] = \frac{d\nu}{df}[f(\nu)] = \frac{1}{\frac{df}{d\nu}(\nu)} = \frac{c}{n(\nu) + \nu \frac{dn}{d\nu}(\nu)}. \quad (11.37)$$

La relation (11.37) lie la vitesse de groupe à la dispersion du milieu de propagation ( $dn/d\nu$ ).

**Indice de groupe.** On définit l'indice de groupe  $n_g$  par  $c = n_g v_g$ , si bien que

$$n_g(\nu) = n(\nu) + \nu \frac{dn(\nu)}{d\nu}. \quad (11.38)$$

S'il n'y avait pas de dispersion chromatique ( $dn/d\nu = 0$ ), on aurait  $n_g = n$  pour toute fréquence, c'est-à-dire  $v_g = v$ . En particulier, pour le vide :  $v_g = c$ .

La relation (11.38) conduit à

$$\frac{dn_g}{d\nu}(\nu) = 2 \frac{dn}{d\nu}(\nu) + \nu \frac{d^2n}{d\nu^2}(\nu), \quad (11.39)$$

qui exprime la dispersion de groupe.

### 11.1.2 Dispersion de groupe

Nous sommes en mesure de préciser les termes du problème auquel nous nous intéressons dans ce chapitre. Sauf le vide, les milieux de propagation sont dispersifs : l'indice de réfraction (ou la vitesse de phase) dépend de la fréquence. Quelle en est la conséquence pour un paquet d'ondes ?

La vitesse de groupe dans un milieu matériel dépend de la fréquence, et cela constitue le phénomène de dispersion de groupe. En toute généralité, nous considérons la relation (11.23). Si, pour tout  $j \geq 2$ ,

$$\frac{d^j \nu}{df^j} = 0, \quad (11.40)$$

un paquet d'ondes conserve sa forme dans le repère de groupe, comme expliqué au paragraphe précédent. Une modification – élargissement, déformation – du paquet d'ondes n'apparaît que si au moins un des  $d^j \nu / df^j$  ( $j \geq 2$ ) n'est pas nul. C'est ce qui se passe pour les milieux réels (seul le vide est rigoureusement sans dispersion). La première hypothèse à faire pour un milieu réel est  $d^2 \nu / df^2 \neq 0$ , ce qui revient à s'intéresser à la dispersion d'ordre 2. Une exception importante concerne toutefois la silice dont sont faites les fibres optiques :  $d^2 \nu / df^2 = 0$  près de la longueur d'onde de 1,3  $\mu\text{m}$ . Dans ce cas, c'est la dispersion d'ordre 3 qu'il faudrait prendre en compte pour expliquer l'élargissement ou la déformation d'un paquet d'ondes<sup>9</sup>.

### 11.1.3 Dispersion normale et dispersion anormale

Il est bien connu que l'indice de réfraction d'un verre optique croît avec la fréquence (ou si la longueur d'onde diminue) : la dispersion est dans ce cas qualifiée de normale. On montre que cette propriété est liée à la transparence du verre dans la région visible du spectre. Mais un verre absorbe la lumière dans des intervalles spectraux situés dans l'ultra-violet ou l'infra-rouge. Dans ces bandes de forte absorption, la dispersion présente une « anomalie » : l'indice de réfraction diminue quand la fréquence croît<sup>10</sup>. Dans de telles régions, on qualifie la dispersion d'anormale (on rencontre aussi le terme « anormale »). Cette situation n'est anormale que par rapport à celle observée couramment pour les verres d'optique qu'on utilise bien sûr là où ils sont transparents !

Une conséquence de ce qui précède est que pour les fibres optiques (qui fonctionnent dans une bande (spectrale) de transparence de la silice), on a

$$\frac{dn(\nu)}{d\nu} > 0, \quad (11.41)$$

<sup>9</sup> Pour les fibres optiques, la longueur d'onde pour laquelle la dispersion de groupe d'ordre 2 est nulle est légèrement différente de celle de la silice pure, à cause de la dispersion du guide. Elle est aussi différente dans les fibres à dispersion décalée. Voir la note en bas de page 17 p. 346.

<sup>10</sup> Le lien entre dispersion et absorption est une conséquence des relations de Kramers-Kronig [119, 247]. Pour plus de détails, nous renvoyons à des ouvrages classiques [29, 119, 121].

et par conséquent

$$n_g(\nu) \geq n(\nu). \quad (11.42)$$

Une façon d'exprimer la dispersion de groupe consiste à étudier les variations de  $n_g$  en fonction de la fréquence, donc la dérivée de  $n_g(\nu)$  par rapport à la fréquence, comme l'indique la relation (11.39). Toutefois, si  $\lambda_0$  est la longueur dans le vide ( $\lambda_0\nu = c$ ), l'indice de groupe est, conformément à la relation (11.38),

$$n_g(\lambda_0) = n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}(\lambda_0), \quad (11.43)$$

si bien que la relation (11.39) prend une forme plus simple, puisqu'elle devient

$$\frac{dn_g}{d\lambda_0}(\lambda_0) = -\lambda_0 \frac{d^2n}{d\lambda_0^2}(\lambda_0). \quad (11.44)$$

La relation (11.44) montre que la dispersion de l'indice de groupe est proportionnelle à la dispersion d'ordre 2 de l'indice de réfraction, exprimée en prenant la longueur d'onde dans le vide comme variable<sup>11</sup>.

Supposons que dans le domaine spectral considéré on ait

$$\frac{dn_g(\lambda_0)}{d\lambda_0} < 0. \quad (11.45)$$

L'indice de groupe diminue si la longueur d'onde croît. Cette situation est comparable à celle qu'on rencontre pour l'indice de réfraction des verres d'optique dans les régions de transparence (où la dispersion est normale). On parle pour cela de dispersion de groupe normale.

Par analogie avec la dispersion anormale d'un verre d'optique, on dit que la dispersion de groupe est anormale dans un domaine spectral si

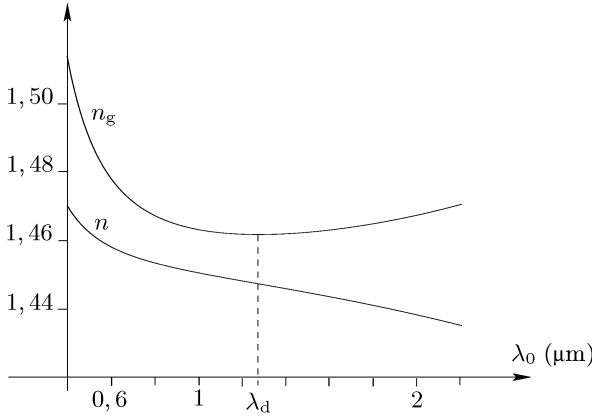
$$\frac{dn_g(\lambda_0)}{d\lambda_0} > 0, \quad (11.46)$$

pour toute longueur d'onde du domaine considéré.

**Exemple de la silice.** La figure 11.2 donne le graphe de l'indice de réfraction  $n$  de la silice (dont sont faites les fibres optiques) pour le spectre visible et le proche infra-rouge, tracé en fonction de la longueur d'onde dans le vide. Ce graphe a été calculé par la formule de Sellmeier (voir l'appendice I [4, 41]). La silice est transparente dans le domaine considéré et sa dispersion est normale (l'indice de réfraction décroît quand la longueur d'onde croît).

La figure 11.2 donne également le graphe de l'indice de groupe  $n_g$  de la silice, calculé à partir de la même formule de Sellmeier.

<sup>11</sup> Cela n'est pas vrai si la variable est la fréquence. La raison en est que la relation entre  $\nu$  et  $\lambda_0$  n'est pas linéaire.



**FIG. 11.2.** Indice de réfraction ( $n$ ) et indice de groupe ( $n_g$ ) de la silice pure, calculés en fonction de la longueur d'onde (dans le vide) par la formule de Sellmeier (voir l'appendice I) [4, 41]. L'indice de groupe est minimal pour une longueur d'onde  $\lambda_d$  voisine de  $1,3 \mu\text{m}$ .

Il existe une longueur d'onde  $\lambda_d$ , proche de  $1,3 \mu\text{m}$ , pour laquelle l'indice de groupe est minimal : la longueur d'onde  $\lambda_d$  est telle que

$$\frac{dn_g}{d\lambda_0}(\lambda_d) = 0 = \frac{d^2n}{d\lambda_0^2}(\lambda_d). \quad (11.47)$$

Le minimum de la fonction  $n_g(\lambda_0)$  correspond à une inflexion de la courbe de  $n(\lambda_0)$ , ce qu'on constate sur la figure 11.2.

La région  $\lambda_0 < \lambda_d$  correspond à la dispersion de groupe normale et la région  $\lambda_0 > \lambda_d$  à celle de dispersion de groupe anormale.

La silice étant parfaitement transparente dans le domaine du proche infrarouge voisin de  $\lambda_d$ , on est dans une région de dispersion normale, ce qui signifie que  $v(\lambda_1) < v(\lambda_2)$ , si  $\lambda_1 < \lambda_2$  ( $v$  est la vitesse de phase considérée ici aux deux longueurs d'onde dans le vide  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ). Soient deux paquets d'ondes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , de spectre étroit autour de  $\lambda_1$  pour l'un et de  $\lambda_2$  pour l'autre. Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_d$ , on est dans une région de dispersion de groupe normale, ce qui signifie que le paquet d'ondes  $\mathcal{P}_1$  se déplace plus lentement que  $\mathcal{P}_2$ . Si  $\lambda_d < \lambda_1 < \lambda_2$ , la dispersion de groupe est anormale et le paquet d'ondes  $\mathcal{P}_1$  se déplace plus vite que le paquet d'ondes  $\mathcal{P}_2$ , bien que la vitesse de phase à la longueur d'onde  $\lambda_1$  soit inférieure à la vitesse de phase à la longueur d'onde  $\lambda_2$ .

#### 11.1.4 Choix des paramètres pour décrire la dispersion de groupe

La dispersion de groupe résulte de la dépendance de la vitesse de groupe avec la fréquence, qu'elle soit temporelle ( $\nu$ ) ou spatiale ( $f$ ). Par la suite nous choisissons la fréquence temporelle  $\nu$  pour la décrire. Pour nous rapprocher de ce qui se fait généralement en télécommunications, nous remplaçons la fréquence

spatiale  $f$  par la constante de propagation<sup>12</sup>  $\beta = 2\pi f$  et nous écrivons  $\beta(\nu)$  pour indiquer qu'elle est liée à la fréquence par  $\beta(\nu) = 2\pi\nu/v(\nu)$ , où  $v(\nu)$  est la vitesse de phase.

Pour un paquet d'ondes de spectre étroit autour de la fréquence  $\tilde{\nu}$ , la relation (11.23) est à remplacer par

$$\beta(\nu) = \beta(\tilde{\nu}) + (\nu - \tilde{\nu}) \frac{d\beta}{d\nu}(\tilde{\nu}) + \frac{1}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 \frac{d^2\beta}{d\nu^2}(\tilde{\nu}) + \dots \quad (11.48)$$

(Cela résulte de la réciprocity des fonctions  $f \mapsto \nu(f)$  et  $\nu \mapsto f(\nu)$  des relations (11.12) et (11.13) p. 332.)

On écrit encore

$$\beta(\nu) = \beta_0 + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2 + \dots \quad (11.49)$$

Conformément aux relations (11.14) et (11.31), la vitesse de groupe à la fréquence  $\tilde{\nu}$  est

$$V_g = \frac{2\pi}{\frac{d\beta}{d\nu}(\tilde{\nu})} = \frac{2\pi}{\beta_1}. \quad (11.50)$$

L'indice de groupe est

$$n_g = \frac{c}{V_g} = \frac{c}{2\pi} \beta_1. \quad (11.51)$$

La dispersion de groupe d'ordre 2 est caractérisée par le paramètre

$$\beta_2 = \frac{d^2\beta}{d\nu^2}(\tilde{\nu}), \quad (11.52)$$

du développement de la relation (11.48). En effet, si  $d\beta^j/d\nu^j = 0$  pour  $j \geq 2$ , la relation entre  $\beta$  et  $\nu$  est linéaire et nous avons vu qu'il n'y avait pas de dispersion de groupe dans ce cas.

On démontre d'autre part (voir l'exercice 11.2) la relation suivante

$$\frac{dn_g}{d\lambda_0}(\lambda_0) = -\frac{c^2}{2\pi\lambda_0^2} \frac{d^2\beta}{d\nu^2}(\tilde{\nu}) = -\frac{c^2}{2\pi\lambda_0^2} \beta_2, \quad (11.53)$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide associée à la fréquence  $\tilde{\nu}$  ( $\lambda_0\tilde{\nu} = c$ ). Il en résulte, conformément au vocabulaire employé au paragraphe 11.1.3, que  $\beta_2 > 0$ , si la dispersion de groupe est normale; et  $\beta_2 < 0$ , si la dispersion de groupe est anormale.

<sup>12</sup> Nous utilisons la constante de propagation  $\beta$  plutôt que le nombre d'ondes pour indiquer qu'il s'agit d'un problème à une dimension. Nous réservons la notation  $k$  pour le nombre d'ondes dans l'espace.

## 11.2 Cadre général de l'étude

### 11.2.1 Modèle pour l'étude de la dispersion de groupe

Soit une onde progressive se propageant dans un milieu dispersif, dans la direction  $z$ . Le problème de la dispersion se modélise par la suite en désignant par  $E_z(t) = E(z, t)$  l'amplitude complexe de l'onde<sup>13</sup> à l'abscisse  $z$  et à l'instant  $t$ , même si cette amplitude ne représente pas toute l'onde : il manque par exemple la dépendance spatiale transversale, et certains termes sont négligés. Le fait essentiel de ce modèle est de se rapporter à une seule variable spatiale (variable  $z$  précédente).

Les ondes ou les sources (émetteurs) considérées ici sont à spectre étroit. La composante spectrale du champ à l'abscisse  $z$  est, avec les restrictions habituelles sur la validité de cette écriture (voir le paragraphe 1.4),

$$e_z(\nu) = \int_{\mathbb{R}} E_z(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (11.54)$$

L'amplitude du champ s'écrit

$$E_z(t) = \int_{\mathbb{R}} e_z(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (11.55)$$

Nous désignons par  $\tilde{\nu}$  une fréquence du spectre de l'onde<sup>14</sup> et faisons apparaître l'enveloppe complexe de l'onde à l'abscisse  $z$ , soit  $A_z$ , telle que

$$E_z(t) = A_z(t) e^{2i\pi\tilde{\nu}t}. \quad (11.56)$$

La fonction  $A_z(t)$  est à variations lentes à l'échelle de  $1/\tilde{\nu}$ .

Les paragraphes suivants mentionnent des exemples d'ondes ou de situations auxquelles s'applique le modèle précédent.

**Remarque 11.2.1.** L'intérêt du modèle de l'onde à spectre étroit de la relation (11.56) n'est pas seulement théorique. En transmissions, il repose sur la distinction de deux notions : l'onde porteuse, monochromatique de fréquence  $\tilde{\nu}$ , représentée par la fonction exponentielle ; et la modulation  $A_z$ , représentée par l'enveloppe complexe. C'est cette dernière qui contient l'information qu'on veut transmettre. Étudier la façon dont elle se propage revêt un réel intérêt pratique.

### 11.2.2 Dispersion et diffraction en spectre étroit

Nous revenons sur les résultats obtenus au chapitre 9. Au fond nous les avons établis dans deux situations. La première est générale : elle s'applique

<sup>13</sup> Nous dirons encore amplitude du champ. La nature physique de ce champ – ce qu'il représente – dépend du problème étudié. Des exemples sont données dans les paragraphes suivants.

<sup>14</sup> Voir la note en bas de page 8, p. 267.

aux ondes polychromatiques et s'exprime par la proposition 9.4.1 p. 259. La deuxième situation ne concerne que les ondes à spectre étroit et s'exprime par la relation (9.70) p. 272.

Pour établir ces résultats, la vitesse de phase  $v$  était, par hypothèse, supposée constante : c'était une approximation plausible pour un milieu dilué – c'était rigoureux pour le vide – ou pour des ondes à spectre très étroit.

Le transfert de la composante spectrale par diffraction, d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  de spectre étroit vers un récepteur  $\mathcal{B}$ , se représentait sous la forme (voir la relation (9.70) p. 272)

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = \frac{i}{\tilde{\lambda} D} \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{v(\nu)} \right] \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \quad (11.57)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\tilde{\lambda} D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right] e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r},$$

où la longueur d'onde  $\tilde{\lambda}$  correspondait à la fréquence  $\tilde{\nu}$  (si  $v(\nu)$  est la vitesse de phase :  $\tilde{\lambda}\tilde{\nu} = v(\tilde{\nu}) = \tilde{v}$ ).

**Diffraction dans le vide.** Le vide n'est pas dispersif :  $v(\nu) = c$ , quelle que soit la fréquence. Il existe toutefois du chromatisme comme expliqué au paragraphe 9.4.4. En spectre étroit ce chromatisme est dû au seul terme  $\exp[-2i\pi\nu D/c]$  de la relation (11.57) et se réduit au chromatisme de phase.

Il n'y a pas de dispersion de groupe ici, car la relation entre la fréquence temporelle et la fréquence spatiale d'une onde est linéaire :  $\nu = cf$ .

**Milieu dispersif.** En spectre étroit, la relation (11.57) montre que la dispersion ne porte plus que sur le terme  $T(\nu) = \exp[-2i\pi\nu D/v(\nu)]$ . Au chapitre 9 (paragraphe 9.5.2) nous avons examiné à quelles conditions il était possible de négliger la dispersion de la vitesse de phase, c'est-à-dire de considérer cette dernière comme constante dans l'expression de  $T(\nu)$ . Seules des conditions sévères de spectre très étroit et de propagation dans un milieu dilué autorisaient les calculs explicites du chapitre 9.

Nous nous intéressons ici à une situation intermédiaire et examinons ce qui se passe, en spectre étroit, quand la vitesse de phase ne peut plus être considérée comme constante dans  $T(\nu)$ .

Il y a une difficulté à appliquer la méthode développée au paragraphe 9.4.1 qui vient de ce que nous ne pouvons pas obtenir explicitement la transformée de Fourier inverse de la composante spectrale donnée par la relation (11.57) puisque nous ne connaissons pas, *a priori*, l'expression de la vitesse de phase  $v(\nu)$  en fonction de la fréquence  $\nu$ . La méthode proposée au paragraphe 11.3 consistera essentiellement à remplacer  $v(\nu)$  par un développement limité au voisinage de la fréquence porteuse  $\tilde{\nu}$ . (De fait, nous choisirons de développer la constante de propagation, plutôt que la vitesse de phase.)

Avant de faire cela, nous ramenons l'étude de la dispersion par diffraction à celle du modèle général proposé au paragraphe 11.2.1. Nous considérons un émetteur  $\mathcal{A}$  de spectre étroit autour de la fréquence  $\tilde{\nu}$ . Pour harmoniser les notations, nous remplaçons  $D$  par  $z$  et écrivons

$$\exp\left[-\frac{2i\pi\nu D}{v(\nu)}\right] = \exp[-i\beta(\nu)z], \quad (11.58)$$

où

$$\beta(\nu) = \frac{2\pi\nu}{v(\nu)}, \quad (11.59)$$

est la « constante de propagation <sup>15</sup> ».

Introduisons la fonction  $E_z(\mathbf{r}, t)$  définie par

$$E_z(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \exp[-i\beta(\nu)z] e_A(\mathbf{r}, \nu), \quad (11.60)$$

si bien que la relation (11.57) conduit à

$$E_B(\mathbf{s}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \tilde{\lambda}) E_z(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (11.61)$$

où

$$\begin{aligned} h(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \tilde{\lambda}) = & \frac{i}{\tilde{\lambda}D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D}\right)s^2\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{i\pi}{\tilde{\lambda}}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_A}\right)r^2\right] \exp\left[-\frac{2i\pi}{\tilde{\lambda}D}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}\right]. \end{aligned} \quad (11.62)$$

Selon la relation (11.61), l'étude de la dispersion de la diffraction–propagation de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{B}$  consiste à examiner d'abord son effet sur  $E_z$ , avant de multiplier  $E_z$  par la fonction  $h$  et d'effectuer l'intégration spatiale sur tous les points de l'émetteur, car il n'y a pas de dispersion pour la fonction  $h$  de la relation (11.62). Il y a séparation de l'effet temporel (auquel est attachée la dispersion) et de l'effet spatial (en cela une partie de la proposition 9.5.1 est conservée). Dans cette façon de faire,  $\mathbf{r}$  est un point fixe de l'émetteur et le problème est bien à une seule dimension spatiale : nous nous ramenons à l'étude de  $E_z(\mathbf{r}, t)$ , noté simplement  $E_z(t)$  pour alléger l'écriture, c'est-à-dire, pour un spectre étroit, au modèle donné par la relation (11.56).

### 11.2.3 Fibre optique

Considérons une fibre optique à saut d'indice (c'est largement le modèle le plus répandu en télécommunications optiques actuelles). Nous désignons par  $n_1$  l'indice de réfraction du cœur et par  $n_2$  celui de la gaine. Il est habituel d'étudier le comportement d'une fibre en régime harmonique. Comme il est expliqué dans l'annexe D, cela revient à calculer les composantes spectrales des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  (champ électrique et champ magnétique qui constituent le champ électromagnétique).

Pour une onde guidée se propageant dans la direction  $z > 0$  (les directions  $x$  et  $y$  sont transversales), la composante spectrale du champ électrique s'écrit

<sup>15</sup> Voir la note en bas de page 12, p. 341.

$$e(x, y, z, \nu) = e_0(x, y, \nu) e^{-i\beta(\nu)z}. \quad (11.63)$$

Dans cette écriture, le vecteur  $e_0$  et la constante de propagation  $\beta(\nu)$  dépendent du mode considéré. L'étude développée ici concerne le mode fondamental, étant entendu que des conclusions similaires seraient établies pour chaque mode<sup>16</sup>. Il n'y a pas de dispersion modale à prendre en compte.

Le mode guidé fondamental est le mode hybride  $HE_{11}$  [41, 74, 237, 248]. Le champ électrique qui lui est associé est représenté, dans le cœur de la fibre, par le vecteur  $e_0$  dont les composantes, en coordonnées polaires  $(r, \phi)$ , sont

$$e_r(r, \phi, \nu) = \frac{-i\beta(\nu)}{p^2} \left[ ApJ'_1(pr) + \frac{i\pi\nu\mu}{\beta(\nu)r} BJ_1(pr) \right] e^{i\phi}, \quad (11.64)$$

$$e_\phi(r, \phi, \nu) = \frac{-i\beta(\nu)}{p^2} \left[ \frac{i}{r} AJ_1(pr) - \frac{\pi\nu\mu}{\beta(\nu)} BJ'_1(pr) \right] e^{i\phi}, \quad (11.65)$$

$$e_z(r, \phi, \nu) = AJ_1(pr) \sin \phi, \quad (11.66)$$

où  $\mu$  est la perméabilité du cœur,  $A$  et  $B$  sont des constantes (elles ne sont pas indépendantes),  $J_1$  la fonction de Bessel de premier ordre et première espèce,  $J'_1$  sa dérivée, et où  $p$  est tel que

$$p^2 = k_0^2 n_1^2 - [\beta(\nu)]^2, \quad (11.67)$$

avec  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide du rayonnement injecté dans la fibre).

**Remarque 11.2.2.** L'analyse qui suit, appliquée au champ électrique dans le cœur de la fibre, s'appliquerait aussi au champ  $\mathbf{H}$  ainsi qu'aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans la gaine, à condition de remplacer les relations (11.64)–(11.66) par celles qui décrivent ces champs [41, 237, 248]. Bornons-nous à remarquer que ces dernières sont du même type que celles écrites ici, les fonctions de Bessel de première espèce étant remplacées, dans la gaine, par des fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce [7, 41, 237].

Dans le cas du faible guidage (qui correspond à la réalité des fibres optiques effectivement utilisées en télécommunications) il serait possible de conduire l'analyse à partir d'expressions des champs simplifiées : par exemple l'amplitude du mode fondamental dans le cœur (mode  $LP_{01}$ ) est proportionnelle à la fonction  $J_0(pr)$  [4, 41, 237, 248].  $\diamond$

On constate que le vecteur  $e_0$  dépend de la fréquence, à la fois directement, puisque  $\nu$  figure explicitement dans les relations (11.64) et (11.65), et indirectement par l'intermédiaire de  $\beta$  et de  $p$  (qui dépendent de  $\nu$ ).

Dans le cas d'une fibre optique, la dispersion chromatique a deux origines<sup>17</sup> [220] : d'abord  $\beta$  dépend de la fréquence, parce que l'indice de réfraction du

<sup>16</sup> Ajoutons que les fibres monomodes sont devenues les plus utilisées en télécommunications optiques.

<sup>17</sup> La dispersion chromatique est la somme des deux termes mentionnés (dispersion du matériau et dispersion du guide). Pour la silice pure (constituant principal des fibres optiques), la dispersion du matériau (dispersion d'ordre 2) s'annule au voisinage

cœur et celui de la gaine de la fibre dépendent de la fréquence ; il s'agit là de la dispersion chromatique du matériau. Mais  $\beta$  dépend également de la fréquence à travers les paramètres qui définissent les conditions du guidage même d'un mode : c'est la dispersion chromatique du guide. Il est classique d'introduire le paramètre  $V$  (qu'on appelle fréquence normalisée) défini par

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (11.68)$$

où  $a$  est le rayon du cœur de la fibre. On sait que la fibre est monomode si  $V < 2,405$ . La variation de ce paramètre avec la fréquence (par l'intermédiaire des indices) modifie les conditions de guidage et par conséquent la valeur du paramètre  $\beta$ .

Examinons les raisons pour lesquelles il est légitime de négliger les variations de  $e_r$ ,  $e_\phi$  et  $e_z$  avec la fréquence.

1. Les plus hauts débits des télécommunications optiques actuelles<sup>18</sup> sont obtenus en modulant à environ 10 GHz des ondes porteuses de fréquence voisine de  $10^{14}$  Hz, d'où

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-4}. \quad (11.69)$$

Les variations relatives de  $e_r$  et  $e_\phi$ , dues à l'influence directe de la fréquence sont du même ordre de grandeur. Elles sont négligeables dans les limites des approximations faites ici.

2. Évaluons l'influence indirecte de la fréquence due à  $\beta$ . Des études expérimentales montrent que la variation relative de  $\beta$  est du même ordre que celle de la fréquence<sup>19</sup>, soit

$$\frac{\Delta\beta(\nu)}{\beta(\nu)} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-4}. \quad (11.70)$$

Nous pouvons développer les mêmes approximations que celles faites au paragraphes 9.5.2 et négliger les variations de  $e_r$ ,  $e_\phi$  avec  $\beta$ .

de la longueur d'onde  $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ . On arrive à faire en sorte que la dispersion chromatique (d'ordre 2) soit nulle pour une valeur proche de  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  : on joue pour cela avec les paramètres de la fibre (paramètre  $V$ , défini par la suite), tels que la différence des indices et le rayon du cœur, pour ajuster la dispersion du guide de manière à ce qu'elle compense celle du matériau (fibres à dispersion décalée). Les liaisons à fibres optiques utilisent des sources lumineuses rayonnant à  $1,55 \mu\text{m}$  parce que la silice a un minimum d'absorption à cette longueur d'onde (ce minimum vaut 0,18 dB/km). La longueur d'onde de  $1,3 \mu\text{m}$  correspond elle-même à un minimum d'absorption relatif. Ce sont toutes ces raisons qui ont imposé l'emploi de sources à ces longueurs d'ondes en télécommunications optiques.

<sup>18</sup> Des débits supérieurs sont obtenus par multiplexage en longueur d'onde, sans augmentation de la largeur de bande de la modulation pour chaque longueur d'onde.

<sup>19</sup> C'est ce que montre la figure 11.1, puisque  $\beta = 2\pi f$ . Voir aussi le graphe de la figure 5.8 du livre de Buck [41].

3. Le même type d'approximation est justifié pour évaluer la variation du paramètre  $p$  : la variation de l'indice de réfraction est négligeable devant celle de  $\beta$  (sur la bande du spectre étroit) ; cela résulte de l'analyse faite au paragraphe 9.4.2, d'autant plus valable en spectre étroit. Par conséquent, avec les données précédentes, il résulte de la relation (11.67)

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta \beta(\nu)}{\beta(\nu)} \sim 10^{-4}. \quad (11.71)$$

Le paramètre  $p$  intervient dans l'argument des fonctions de Bessel. Finalement, sa variation avec la fréquence est suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les variations des termes  $J_1(pr)$  ou  $J'_1(pr)$  avec la fréquence.

En conclusion, les variations relatives des composantes du vecteur  $\mathbf{e}_0$  sont de l'ordre de celle de  $\nu$ , donc négligeables, en spectre étroit. Il est légitime de supposer invariante la partie spatiale du mode fondamental quand la fréquence de l'onde varie (dans les limites d'un spectre étroit). Cela conduit à écrire la relation (11.63) sous la forme

$$\mathbf{e}(x, y, z, \nu) = \mathbf{e}_0(x, y, \tilde{\lambda}) e^{-i\beta(\nu)z}, \quad (11.72)$$

et, pour l'étude de la dispersion chromatique, à modéliser l'amplitude de l'onde par

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}_0(x, y, \tilde{\lambda}) E_z(t), \quad (11.73)$$

avec

$$E_z(t) \rightleftharpoons e^{-i\beta(\nu)z}. \quad (11.74)$$

En spectre étroit, l'étude de la dispersion dans une fibre optique se ramène essentiellement à celle de  $E_z(t)$ , qui a la forme donnée par la relation (11.56) ; le problème est à une seule dimension spatiale.

**Remarque 11.2.3.** Tout ce qui vient d'être décrit se transpose en principe aux guides d'ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences, même s'il y a des différences relatives à la nature des modes ou à l'origine de la dispersion. Il y a toutefois une différence plus gênante : la variation relative de la fréquence est plus grande que celle donnée par la relation (11.69) ; la largeur de bande de la modulation atteint parfois la moitié de la fréquence porteuse (on n'est plus en spectre étroit). Cela limite la validité du modèle du paragraphe 11.2.1, qui reste applicable dans la mesure où la composante transversale des modes n'est pas affectée par la variation de la fréquence.

#### 11.2.4 Ligne de transmission

Soit une ligne de transmission dans laquelle une grandeur scalaire se propage suivant la direction  $z$ . On a l'habitude de résoudre les équations des télégraphistes [237], qui s'écrivent, pour la tension <sup>20</sup>  $v$  et le courant  $i$ ,

<sup>20</sup> Dans ce paragraphe, la lettre  $v$  désigne la composante spectrale de la tension électrique. On distingue la lettre  $i$ , qui désigne l'intensité d'un courant électrique, de  $i$ , qui représente un nombre imaginaire.

$$\frac{dv}{dz} = -Z(\nu) i, \quad (11.75)$$

$$\frac{di}{dz} = -Y(\nu)v, \quad (11.76)$$

où  $Z$  est l'impédance linéique de la ligne et  $Y$  son admittance linéique. De ces deux équations on déduit que  $v$  et  $i$  satisfont l'équation des ondes, sous la forme de l'équation de Helmholtz<sup>21</sup> (à une dimension)

$$\frac{d^2v}{dz^2} - Z(\nu)Y(\nu)v = 0. \quad (11.77)$$

Ce qui est important, c'est qu'une fois encore, la résolution de cette équation donne la composante spectrale de l'onde qui se propage dans la ligne. On obtient une solution de la forme

$$v(z, \nu) = v_0 e^{-i\beta(\nu)z}, \quad (11.78)$$

où  $[\beta(\nu)]^2 = -Z(\nu)Y(\nu)$ , si on se limite à l'onde se propageant vers les  $z$  croissants (pour une écriture complète de la tension en un point, il faut ajouter l'onde qui se propage vers les  $z$  décroissants).

La représentation spatio-temporelle de la tension dans la ligne – obtenue à partir de  $v(z, \nu)$  par transformation de Fourier inverse (temporelle) – est de la forme

$$V(z, t) = v_0 E_z(t). \quad (11.79)$$

Pour l'étude de la dispersion dans la ligne, on se ramène au modèle du paragraphe 11.2.1.

## 11.3 Dispersion de groupe d'ordre 2

Les développements qui suivent concernent traditionnellement les lignes de transmission ; cependant l'étude du paragraphe précédent a montré que le modèle qui fonde notre étude inclut la dispersion chromatique par diffraction–propagation, dans des conditions déjà précisées.

Si le problème abordé ici est traditionnel, sa résolution, telle que nous la proposons, n'est pas classique : d'abord dans la mesure où nous développons l'analogie entre la dispersion et la diffraction métaxiale ; ensuite parce que la représentation mathématique adoptée s'appuie sur la notion de transformation de Fourier fractionnaire.

<sup>21</sup> Le signe moins ne doit pas surprendre : pour une ligne sans pertes,  $Z$  est l'impédance d'une self et  $Y$  l'admittance d'une capacité ; elles sont imaginaires pures avec un signe plus, et leur produit est négatif. On a  $\beta^2 = -Z(\nu)Y(\nu) > 0$ . Les solutions de l'équation de Helmholtz sont sinusoïdales.

### 11.3.1 Modulation de fréquence linéaire

La partie temporelle d'une onde monochromatique de fréquence  $\nu_0$  s'écrit

$$U_0(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}. \quad (11.80)$$

Si la fréquence est modulée (temporellement) sous la forme

$$\nu = \nu_0 + \nu_0 \theta t, \quad (11.81)$$

(le paramètre  $\theta$  est lui-même homogène à une fréquence), on obtient une onde dont la partie temporelle s'écrit

$$U(t) = e^{2i\pi\nu t} = e^{2i\pi\nu_0 t} e^{2i\pi\nu_0 \theta t^2} = U_0(t) e^{2i\pi\nu_0 \theta t^2}. \quad (11.82)$$

La modulation de la fréquence est linéaire autour de  $\nu_0$ . La modulation de la phase est quadratique en fonction du temps (*chirp* en anglais). Si  $\theta > 0$ , on a une modulation de fréquence par valeurs croissantes. Cela correspond à une exponentielle quadratique avec un signe  $+$  dans l'argument. Pour une modulation de fréquence par valeurs décroissantes, obtenue pour  $\theta < 0$ , le signe de la phase de l'exponentielle quadratique est négatif. On distingue ainsi les deux types de modulations, à la fois théoriquement et expérimentalement.

### 11.3.2 Propagation de l'amplitude complexe

Considérons le modèle d'onde à une dimension du paragraphe 11.2.1. Si  $\beta(\nu)$  est la constante de propagation à la fréquence  $\nu$ , la composante spectrale du champ à l'abscisse  $z$  est reliée à la composante spectrale à l'abscisse  $z = 0$  par

$$e_z(\nu) = e_0(\nu) e^{-i\beta(\nu)z}. \quad (11.83)$$

Notons  $\beta_0 = \beta(\tilde{\nu})$ , où  $\tilde{\nu}$  est une fréquence du spectre des ondes considérées. Puisque nous nous intéressons à des ondes à spectre étroit, il est légitime de remplacer  $\beta(\nu)$  par un développement limité au voisinage de  $\tilde{\nu}$  et nous écrivons – voir la relation (11.49) –, en nous limitant à l'ordre 2,

$$\beta(\nu) = \beta_0 + \beta_1(\nu - \tilde{\nu}) + \frac{\beta_2}{2}(\nu - \tilde{\nu})^2, \quad (11.84)$$

où  $\beta_1 = (d\beta/d\nu)(\tilde{\nu})$  et  $\beta_2 = (d^2\beta/d\nu^2)(\tilde{\nu})$ . Comme  $\beta_0$  et  $\beta(\nu)$  se mesurent en  $m^{-1}$ , le paramètre  $\beta_1$  se mesure en  $s/m$  (la relation (11.50) montre que c'est l'inverse de la vitesse de groupe, au facteur  $2\pi$  près), et  $\beta_2$  se mesure en  $s^2/m$  (en télécommunications optiques, on le mesure en  $(ps)^2/km$ ).

**Remarque 11.3.1 (Signe de  $\beta_2$ ).** Nous avons vu au paragraphe 11.1.3 que le paramètre  $\beta_2$  pouvait être positif (dispersion de groupe normale) ou négatif (dispersion de groupe anormale) et son signe interviendra dans l'étude qui suit.

Pour la silice,  $\beta_2$  s'annule près de  $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ . En télécommunications optiques,  $\beta_2$  s'annule soit près de  $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ , soit près de  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  pour une fibre à dispersion décalée. À titre d'exemple, pour une fibre optique standard (qui n'est pas à dispersion décalée), à  $1,55 \mu\text{m}$ , une valeur typique est  $\beta_2 \approx -20 \text{ ps}^2/\text{km}$  [41]).  $\diamond$

Le développement de  $\beta(\nu)$ , limité à l'ordre 2, reporté dans l'expression de  $E_z(t)$  donnée par la relation (11.55) conduit à

$$E_z(t) = \int_{\mathbb{R}} e_0(\nu) e^{2i\pi\nu t} e^{-i\beta_0 z} e^{-i\beta_1 z(\nu-\tilde{\nu})} e^{-i\beta_2 z(\nu-\tilde{\nu})^2/2} d\nu. \quad (11.85)$$

Puisque  $e_0(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $E_0(t)$ , il vient

$$\begin{aligned} E_z(t) &= e^{-i(\beta_0-\beta_1\tilde{\nu})z} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} E_0(t') e^{-2i\pi\nu t'} e^{2i\pi\nu t} e^{-i\beta_1 z\nu} e^{-i\beta_2 z(\nu-\tilde{\nu})^2/2} d\nu dt' \\ &= e^{-i(\beta_0-\beta_1\tilde{\nu})z} \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_2 z(\nu-\tilde{\nu})^2/2} \right. \\ &\quad \times \exp \left[ 2i\pi\nu \left( t - t' - \frac{\beta_1}{2\pi} z \right) \right] d\nu \left. \right\} dt'. \end{aligned} \quad (11.86)$$

L'intégrale entre accolades est une transformée de Fourier ; précisément (voir le tableau B.2 p. 484)

$$\sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\mathfrak{s}(\beta_2 z)\pi/4} e^{2i\pi\tilde{\nu}t} \exp \left[ \frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} t^2 \right] = \exp \left[ -\frac{i\beta_2 z}{2} (\nu - \tilde{\nu})^2 \right], \quad (11.87)$$

où  $\mathfrak{s}(\beta_2 z)$  désigne le signe de  $\beta_2 z$ . La relation (11.86) s'écrit

$$\begin{aligned} E_z(t) &= e^{-i(\beta_0-\beta_1\tilde{\nu})z} \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\mathfrak{s}(\beta_2 z)\pi/4} \\ &\quad \times \exp \left[ 2i\pi\tilde{\nu} \left( t - t' - \frac{\beta_1}{2\pi} z \right) \right] \exp \left[ \frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} \left( t - t' - \frac{\beta_1}{2\pi} z \right)^2 \right] dt' \\ &= e^{-i\beta_0 z} \int_{\mathbb{R}} E_0(t') \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\mathfrak{s}(\beta_2 z)\pi/4} \exp[2i\pi\tilde{\nu}(t-t')] \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} \left( t - t' - \frac{\beta_1}{2\pi} z \right)^2 \right] dt'. \end{aligned} \quad (11.88)$$

La relation (11.88) exprime la propagation de l'amplitude complexe d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif (dispersion de groupe d'ordre 2). Elle prend une forme plus simple si on l'applique à l'enveloppe complexe, à condition de se placer dans un repère mobile, comme nous allons voir. Auparavant, il est intéressant de constater que la dispersion de groupe introduit une modulation de fréquence linéaire de l'onde qui s'est propagée.

**Apparition d'une modulation de fréquence.** Compte tenu de la relation (11.56), la relation (11.88) s'écrit

$$A_z(t) = e^{-i\beta_0 z} \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\mathfrak{s}(\beta_2 z)\pi/4} \exp\left[\frac{2i\pi^2 t^2}{\beta_2 z}\right] \quad (11.89)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} A_0(t') \exp\left[\frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} \left(t' + \frac{\beta_1}{2\pi} z\right)^2\right] \exp\left[-\frac{4i\pi^2 t}{\beta_2 z} \left(t' + \frac{\beta_1}{2\pi} z\right)\right] dt'.$$

La présence du terme  $\exp[2i\pi^2 t^2/\beta_2 z]$  devant l'intégrale de la relation (11.89) montre que l'amplitude complexe  $A_z$  est modulée linéairement en fréquence. C'est là un des effets de la dispersion : la dispersion de groupe d'ordre 2 introduit, au cours de la propagation, une modulation de fréquence par fréquences croissantes ou décroissantes, selon le signe du paramètre  $\beta_2$  [249].

### 11.3.3 Enveloppe complexe dans le repère de groupe

Dans la relation (11.89) le temps  $t'$  apparaît translaté de  $-\beta_1 z/2\pi$ . La vitesse de groupe, à la fréquence  $\tilde{\nu}$ , est

$$V_g = \frac{2\pi}{d\beta/d\nu} = \frac{2\pi}{\beta_1}, \quad (11.90)$$

si bien que  $\beta_1 z/2\pi$  est un temps : c'est le temps de groupe, temps que met un paquet d'ondes pour parcourir la distance  $z$ . Il est judicieux de se placer dans un repère mobile se déplaçant à la vitesse de groupe, c'est le repère de groupe, et de choisir l'origine du temps dans ce repère.

Soit la fonction  $B_z(t)$  définie par

$$B_z(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i\mathfrak{s}(\beta_2 z)\pi/4} \int_{\mathbb{R}} A_0(t') \exp\left[\frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} (t - t')^2\right] dt', \quad (11.91)$$

de telle sorte que l'amplitude de l'onde à l'abscisse  $z$  et à l'instant  $t$  s'écrit

$$E_z(t) = e^{-i\beta_0 z} B_z\left(t - \frac{\beta_1 z}{2\pi}\right) \exp[2i\pi\tilde{\nu}t]. \quad (11.92)$$

Autrement dit, l'enveloppe complexe à l'abscisse  $z$  est

$$A_z(t) = e^{-i\beta_0 z} B_z\left(t - \frac{\beta_1 z}{2\pi}\right). \quad (11.93)$$

Ainsi  $B_z$  représente bien l'enveloppe complexe dans le repère de groupe. Le terme  $\exp[-i\beta_0 z]$  représente un retard de phase lié à la propagation sur la distance  $z$ .

Par abus de langage, nous appellerons encore  $B_z$  l'enveloppe complexe. Il n'y aura pas de confusion dans la mesure où nous n'utiliserons plus  $A_z$ .

Si  $z = 0$ , la relation (11.93) devient

$$A_0(t) = B_0(t). \quad (11.94)$$

Ce résultat se déduit aussi de la relation (11.91) en remarquant (voir la relation (A.7) p. 468)

$$\delta(t - t') = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i s(\beta_2 z) \pi/4} \exp \left[ \frac{2i\pi^2}{\beta_2 z} (t - t')^2 \right]. \quad (11.95)$$

### 11.3.4 L'enveloppe complexe modulée linéairement

Nous nous intéressons à la propagation de l'enveloppe complexe  $B_z$ . La relation (11.92) permet de remonter à l'amplitude de l'onde, une fois  $B_z$  connue.

Écrivons la relation (11.91) sous la forme

$$B_z(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-i s(\beta_2 z) \pi/4} \exp \left[ \frac{2i\pi^2 t^2}{\beta_2 z} \right] \times \int_{\mathbb{R}} B_0(t') \exp \left[ \frac{2i\pi^2 t'^2}{\beta_2 z} \right] \exp \left[ -\frac{4i\pi^2 t t'}{\beta_2 z} \right] dt'. \quad (11.96)$$

La relation (11.96) n'est qu'une forme des relations (11.88) ou (11.89). Elle fait encore apparaître la modulation de fréquence qui résulte de la dispersion.

Toute l'étude qui suit est fondée sur cette constatation : la relation (11.96) est, aux coefficients près, la relation (3.34) qui exprime la diffraction entre deux plans et dans laquelle, en passant de la dimension 2 à la dimension 1, on a remplacé les variables d'espace par le temps. L'enveloppe complexe est l'analogue de l'amplitude du champ sur un plan (en diffraction).

Il est dès lors envisageable d'appliquer à la propagation dans une ligne de transmission dispersive les méthodes utilisées pour la diffraction. La transformation de Fourier fractionnaire traduit la diffraction entre un émetteur et un récepteur sphériques et prend en compte les termes de phase quadratique dus à la courbure de l'émetteur et à celle du récepteur. Pour qu'apparaisse cette transformation dans la théorie des lignes dispersives, il est nécessaire d'introduire des termes de phase quadratique temporels. Or un tel terme est l'expression d'une modulation de fréquence linéaire : il faut donc étudier des paquets d'ondes à enveloppe complexe modulée en fréquence. L'introduction de modulations de fréquences est d'autant plus naturelle que la dispersion elle-même introduit ces modulations, comme constaté à la fin du paragraphe 11.3.2.

**Longueur d'onde temporelle. Courbure temporelle.** Afin de développer l'analogie entre la diffraction et la propagation dans les lignes de transmission dispersives, commençons par examiner la représentation des termes de phase quadratique. Dans le domaine spatial un tel terme est de la forme

$$T(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda R} r^2 \right], \quad (11.97)$$

et le signe de  $R$  indique l'orientation de la courbure. En effet la fonction  $T$  est une transparence de courbure qui fait passer d'un plan à une sphère de rayon  $R$  (de façon précise si  $\mathcal{A}$  est une calotte sphérique de rayon  $R$ , et  $\mathcal{P}$  le plan tangent à son sommet, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est égale à l'amplitude du champ sur  $\mathcal{P}$  multipliée par  $T$ ).

Dans le domaine temporel un terme de phase quadratique correspond à une modulation de fréquence linéaire autour de  $\tilde{\nu}$  et s'écrit (nous gardons la lettre  $T$  pour mettre en évidence l'analogie espace-temps)

$$T(t) = e^{2i\pi\tilde{\nu}\theta t^2}. \quad (11.98)$$

Pour copier ce qui se passe en diffraction, nous cherchons un équivalent à la longueur d'onde. Or celle-ci est la période spatiale des ondes, et il est naturel de la remplacer, dans le domaine temporel, par la période temporelle qui est  $1/\tilde{\nu}$ . Il faut aussi un équivalent au rayon de courbure  $R$  et cela conduit à introduire un rayon de courbure « temporel ». Nous verrons par la suite que le rayon de courbure temporel associé à une modulation de fréquence n'est pas intrinsèque en ce sens que son signe dépend du signe de  $\beta_2$ . Si  $\mathfrak{s}(\beta_2)$  est le signe de  $\beta_2$ , nous sommes conduits à définir la longueur d'onde « temporelle » par

$$\Lambda = \frac{\mathfrak{s}(\beta_2)}{\tilde{\nu}}, \quad (11.99)$$

et le rayon de courbure temporel de la modulation de fréquence linéaire, caractérisée par  $\theta$ , par

$$R = \frac{\mathfrak{s}(\beta_2)}{2\theta}, \quad (11.100)$$

si bien que

$$\Lambda R = \frac{1}{2\tilde{\nu}\theta}, \quad (11.101)$$

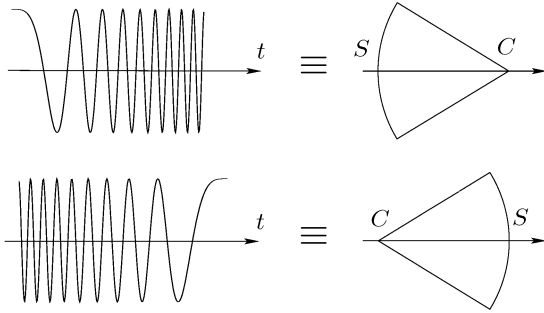
et que  $T(t)$  s'écrit

$$T(t) = \exp \left[ \frac{i\pi}{\Lambda R} t^2 \right]. \quad (11.102)$$

Une longueur d'onde temporelle et un rayon de courbure temporel sont homogènes à un temps.

Conformément aux conventions adoptées dans ce livre le passage du domaine temporel au domaine spatial s'accompagne du changement de  $i$  et  $-i$  (c'est le cas pour la définition de la transformation de Fourier temporelle ou spatiale; voir l'appendice B).

Dans ces conditions, l'expression du facteur  $T(t)$ , associé à une modulation de fréquence linéaire et donné par la relation (11.102), est formellement l'analogue temporel du facteur spatial de la relation (11.97).



**FIG. 11.3.** Avec les conventions adoptées dans ce livre, une modulation de fréquence linéaire par valeurs croissantes, dans une ligne de transmission de dispersion d'ordre 2 positive ( $\beta_2 > 0$ ), est l'équivalent temporel d'une courbure (spatiale) positive (schéma du haut – la lumière se propage de  $S$  vers  $C$ ). Une modulation par valeurs décroissantes correspond à la courbure opposée (schéma du bas, la lumière se propage de  $C$  vers  $S$ ). Il faut inverser les correspondances si  $\beta_2 < 0$ .

Si on multiplie l'amplitude d'une onde par  $T(t)$ , l'onde acquiert une courbure temporelle  $1/R$ . Une modulation de fréquence linéaire par valeurs croissantes correspond à  $\theta > 0$ , c'est-à-dire à  $R > 0$  si  $\beta_2 > 0$ , comme le montre la figure 11.3. Le signe de  $R$  a donc un sens, lié au type de modulation de fréquence considéré (pour une dispersion de signe donné).

La figure 11.3 montre l'équivalence entre le domaine temporel et le domaine spatial.

**Enveloppe complexe modulée linéairement.** Si  $B_z(t)$  est l'enveloppe complexe d'une onde se propageant dans une ligne transmission, nous appelons enveloppe complexe modulée<sup>22</sup> la fonction  $U_z$ , telle que

$$U_z(t) = B_z(t) \exp \left[ \frac{i\pi t^2}{\Lambda R_z} \right], \quad (11.103)$$

où  $R_z$  est une constante, homogène à un temps (c'est le rayon de courbure temporel à l'abscisse  $z$ ).

### 11.3.5 Propagation de l'enveloppe complexe modulée

Il s'agit de relier l'enveloppe modulée en  $z = 0$ , qui s'écrit

$$U_0(t) = B_0(t) \exp \left[ \frac{i\pi t^2}{\Lambda R_0} \right], \quad (11.104)$$

à l'enveloppe modulée en  $z$  ( $1/R_0$  est la courbure temporelle en  $z = 0$ ).

Introduisons le paramètre  $Z$  (homogène à un temps) tel que

$$Z = \frac{\beta_2 z}{2\pi\Lambda}. \quad (11.105)$$

<sup>22</sup> Sous-entendu : linéairement en fréquence.

**TAB. 11.1.** Équivalence entre les variables et les paramètres spatiaux (diffraction) et les variables et paramètres temporels (ligne de transmission). (Les termes correspondants se lisent par colonne.)

Diffraction	$r$	$s$	$\lambda$	$D$	$R_A$	$R_B$
Ligne de transmission	$t'$	$t$	$\Lambda$	$Z$	$R_0$	$R_z$

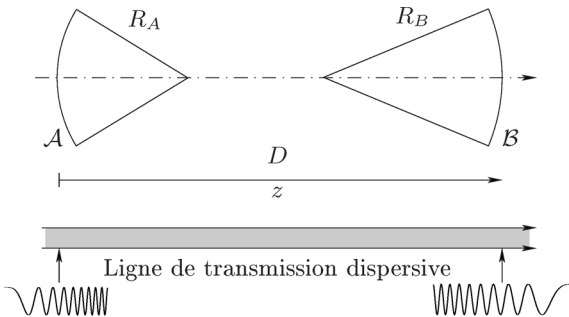
Le paramètre  $Z$  peut être négatif puisque c'est le cas de  $\beta_2$ . Il est concevable d'avoir aussi  $z < 0$ , ce qui correspond à une propagation virtuelle.

Dans ces conditions, l'équation (11.96) conduit à

$$U_z(t) = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda Z|}} e^{-is(\Lambda Z)\pi/4} \exp \left[ \frac{i\pi}{\Lambda} \left( \frac{1}{R_z} + \frac{1}{Z} \right) t^2 \right] \quad (11.106)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} U_0(t') \exp \left[ \frac{i\pi}{\Lambda} \left( \frac{1}{Z} - \frac{1}{R_0} \right) t'^2 \right] \exp \left[ -2i\pi \frac{tt'}{\Lambda Z} \right] dt'.$$

La relation (11.106) n'est autre, pratiquement, que l'équation (3.31) qui exprime le transfert par diffraction d'un émetteur sphérique vers un récepteur sphérique. On passe d'une intégrale double à une intégrale simple, ce qui explique le passage de  $i/\lambda D$  à  $e^{-is(\Lambda Z)\pi/4}/\sqrt{|\Lambda Z|}$ , le premier terme étant le carré du deuxième (au signe près). Enfin il y a un changement de signe dans les exponentielles : il correspond aux conventions adoptées pour les transformations de Fourier partielles (voir les règles 3 et 4 de l'appendice B). La correspondance des paramètres est indiquée par le tableau 11.1. La figure 11.4 schématise l'analogie entre diffraction et dispersion dans les lignes de transmission.



**FIG. 11.4.** Analogie entre la diffraction et la propagation d'un paquet d'ondes dans une ligne de transmission dispersive ( $\beta_2 > 0$ ).

### 11.3.6 Représentation de la propagation par une transformation de Fourier fractionnaire

Il suffit désormais de copier ce qui se fait pour la diffraction (chap. 6). Soit  $\varepsilon$  un nombre réel tel que  $\varepsilon \Lambda R_0 > 0$  (rappelons que nous pouvons avoir  $R_0 < 0$ ).

Soit  $\alpha$  dans  $] -\pi, \pi[$  tel que

$$\cot \alpha = \varepsilon \frac{R_0 - Z}{Z}, \quad \alpha Z \geq 0. \quad (11.107)$$

Choisissons les variables réduites

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \Lambda R_0}} t', \quad (11.108)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \Lambda R_0}} (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) t, \quad (11.109)$$

et les fonctions réduites (ce sont les enveloppes complexes réduites)

$$V_0(\tau') = U_0(\sqrt{\varepsilon \Lambda R_0} \tau'), \quad (11.110)$$

$$V_z(\tau) = U_z \left( \frac{\sqrt{\varepsilon \Lambda R_0}}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \tau \right). \quad (11.111)$$

La relation (11.106) s'écrit <sup>23</sup>

$$\begin{aligned} V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \exp \left[ i\pi \left( \frac{1}{R_z} + \frac{1}{Z} \right) \frac{\varepsilon \Lambda R_0 \tau^2}{(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2} \right] \\ \times \int_{\mathbb{R}} \exp[i\pi \tau'^2 \cot \alpha] \exp \left[ -\frac{2i\pi \tau \tau'}{\sin \alpha} \right] V_0(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (11.112)$$

On obtient une transformation de Fourier fractionnaire si

$$\left( \frac{1}{R_z} + \frac{1}{Z} \right) \frac{\varepsilon \Lambda R_0}{(\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2} = \cot \alpha. \quad (11.113)$$

Comme dans le cas spatial, deux points de vues sont envisageables.

1. On fixe  $\varepsilon$  et  $R_0$  (rayon de courbure temporel à l'origine). La relation (6.18) montre que la relation (11.113) est satisfaite si

$$R_z = \frac{\varepsilon^2 (R_0 - Z)^2 + Z^2}{\varepsilon^2 (R_0 - Z) - Z}. \quad (11.114)$$

Cette relation fixe la courbure temporelle qui permet d'observer à la distance  $z$  (liée à  $Z$ ) la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , où  $\alpha$  est donné par la relation (11.107). Elle indique comment démoduler  $V_z(\tau)$  pour retrouver  $U_z(t)$ .

2. On peut aussi fixer  $R_0$ ,  $R_z$  et  $Z$ , c'est-à-dire les rayons de courbure temporels et la distance de propagation, et chercher  $\varepsilon$  puis  $\alpha$ . La relation (6.21) donne

$$\varepsilon^2 = \frac{Z(R_z + Z)}{(R_0 - Z)(R_z - R_0 + Z)}. \quad (11.115)$$

Cette relation se déduit également de la relation (11.114). Le paramètre  $\alpha$  est encore donné par la relation (11.107).

<sup>23</sup> Les relations établies au début du paragraphe 6.1.2 restent vraies ici. En particulier  $\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha > 0$ .

Dans les deux cas, l'équation (11.112) s'écrit

$$V_z(\tau) = e^{i\alpha/2} \sqrt{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha} \mathcal{F}_\alpha[V_0](\tau). \quad (11.116)$$

La relation (11.116) montre que la propagation de l'amplitude complexe modulée dans une ligne de transmission dispersive s'exprime par une transformation de Fourier fractionnaire, qui s'applique à l'enveloppe complexe réduite. Ce résultat étend au domaine temporel les résultats obtenus pour la diffraction. Les méthodes d'analyse développées pour la diffraction et fondées sur la transformation de Fourier fractionnaire se transposent au domaine temporel. Nous verrons par la suite, à titre d'exemple, comment calculer l'élargissement temporel d'un paquet d'ondes gaussien (chapitre 12).

### 11.3.7 Cas particulier : transformation de Fourier

Ce qui précède correspond à la diffraction de Fresnel. La diffraction de Fraunhofer est un cas particulier qui se rencontre quand la distance d'observation est égale au rayon de courbure de l'émetteur :  $D = R_A$ . Si de plus le rayon du récepteur est  $R_B = -R_A$ , on sait que le phénomène de diffraction se traduit exactement par une transformation de Fourier (standard).

La condition  $D = R_A = -R_B$  (diffraction de Fraunhofer) devient, dans le domaine temporel,  $Z = R_0 = -R_z$ . La relation (11.106) s'écrit

$$U_z(t) = \frac{1}{\sqrt{|AZ|}} e^{-is(AZ)\pi/4} \int_{\mathbb{R}} U_0(t') \exp \left[ -2i\pi \frac{tt'}{AZ} \right] dt', \quad (11.117)$$

soit encore

$$U_z(t) = \frac{1}{\sqrt{|AZ|}} e^{-is(AZ)\pi/4} \widehat{U}_0 \left( \frac{t}{AZ} \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-is(\beta_2 z)\pi/4} \widehat{U}_0 \left( \frac{2\pi t}{\beta_2 z} \right). \quad (11.118)$$

Ne pas moduler l'enveloppe complexe à l'origine revient à choisir  $R_0$  infini. Dans ce cas, c'est à l'infini qu'on observe une enveloppe complexe qui est la transformée de Fourier de l'enveloppe complexe à l'origine, de la même façon qu'on observe à l'infini la transformée de Fourier optique du champ sur un émetteur plan.

**Exemple.** Soit un paquet d'ondes d'enveloppe rectangulaire à l'origine, de durée  $T$ , non modulé à l'origine, de la forme ( $a_0$  est une constante dimensionnelle)

$$U_0(t) = a_0 \text{rect}_T(t). \quad (11.119)$$

À la distance  $z$  assez grande, l'enveloppe du paquet d'ondes est

$$U_z(t) = a_0 T \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta_2 z|}} e^{-is(\beta_2 z)\pi/4} \text{sinc} \frac{2\pi^2 T t}{\beta_2 z}. \quad (11.120)$$

Le module de l'enveloppe est une fonction  $\sin x/x$ . Le paquet d'ondes s'est déformé : son enveloppe est devenue la transformée de Fourier de ce qu'elle était à l'origine.

## 11.4 Exercices

**Exercice 11.1.** Soit un milieu de propagation pour lequel la relation (11.24) est satisfaite. Montrer que la vitesse de groupe est indépendante de la fréquence spatiale  $f_0$  choisie pour la définir. Plus précisément : la vitesse de groupe étant définie par  $\nu(f) = \nu_0 + (f - f_0)V_g$  - c'est la relation (11.26) où  $\nu$  est la fréquence temporelle -, montrer que  $\nu(f) = \nu_1 + (f - f_1)V_g$ , quelle que soit  $f_1$  (avec  $\nu(f_1) = \nu_1$ ).

**Exercice 11.2.** Soit  $n_g$  l'indice de groupe d'un milieu dispersif, considéré comme fonction de la longueur d'onde (dans le vide)  $\lambda_0$ , et soit  $\beta$  la constante de propagation, considérée comme fonction de la fréquence  $\nu$  (voir les paragraphes 11.1.3 et 11.1.4). Démontrer la relation

$$\frac{dn_g}{d\lambda_0} = -\frac{c^2}{2\pi\lambda_0^2} \frac{d^2\beta}{d\nu^2}.$$

**Exercice 11.3.** Soit un paquet d'ondes gaussien, dont l'amplitude à l'abscisse  $z = 0$  et instant  $t$  s'écrit

$$E(0, t) = E_0 e^{-\pi t^2/T_0^2} e^{2i\pi\tilde{\nu}t},$$

où  $T_0$  est la durée du paquet d'ondes et  $\tilde{\nu}$  la fréquence de l'onde porteuse. Le paquet d'ondes se propage dans un milieu dispersif. On note  $V_g$  la vitesse de groupe à la fréquence  $\tilde{\nu}$  et  $\beta_2 = (d^2\beta/d\nu^2)(\tilde{\nu})$  le paramètre caractéristique de la dispersion de groupe d'ordre 2. Le temps de groupe à l'abscisse  $z \geq 0$  est  $\tau_g = z/V_g$ , et la différence de temps de groupe  $\Delta\tau = \beta_2 z/2\pi T_0$ .

1. Donner l'expression de la composante spectrale  $e(0, \nu)$  du paquet d'ondes à l'abscisse  $z = 0$ .
2. Faire un développement limité de la constante de propagation  $\beta(\nu)$  et donner l'expression de la composante spectrale  $e(z, \nu)$  du paquet d'ondes à l'abscisse  $z$ . Préciser jusqu'à quel ordre il faut aller dans le développement limité pour prendre en compte la dispersion de groupe.
3. On suppose  $(d^2\beta/d\nu^2)(\tilde{\nu}) \neq 0$ . Donner l'expression de l'amplitude  $E(z, t)$  du paquet d'ondes à l'abscisse  $z$ .
4. Quelle est la durée  $T$  du paquet d'ondes à l'abscisse  $z$  ?
5. Montrer qu'il existe une valeur de  $T_0$  qui minimise l'élargissement temporel à l'abscisse  $z$  ( $z > 0$ ). Montrer que cette valeur est proportionnelle à  $\sqrt{z}$ .
6. Montrer que le paquet d'ondes à l'abscisse  $z$  est modulé en fréquence.

## Chapitre 12

# Paquets d'ondes gaussiens. Lentilles temporelles

Les résultats du chapitre 11 sont appliqués à la propagation des paquets d'ondes gaussiens dans un milieu dispersif. Cette étude se révèle être la transposition de celle des faisceaux gaussiens menée au chapitre 7 et fondée sur la transformation de Fourier fractionnaire. Les formules concernant les faisceaux gaussiens ont leurs analogues temporelles.

L'analogie entre la diffraction et la dispersion, entre les variables d'espace et le temps, conduit à imaginer des lentilles temporelles, homologues des lentilles habituelles, « spatiales ». Leur étude est brièvement abordée dans ce chapitre.

### 12.1 Paquets d'ondes gaussiens

Conformément aux notations du chapitre 11, dans tout ce paragraphe, on considère une ligne de transmission dispersive dont la dispersion de groupe d'ordre 2 est caractérisée par le paramètre  $\beta_2$ . On désigne par  $A$  la longueur d'onde (ou période) temporelle de l'onde porteuse, et par  $Z$  l'équivalent temporel de la distance de propagation, donné par la relation (11.105).

#### 12.1.1 Représentation d'un paquet d'ondes gaussien

Soit une ligne de transmission<sup>1</sup> rapportée à une abscisse  $z$  dont l'origine est prise sur l'entrée de la ligne, et soit un paquet d'ondes gaussien injecté dans la ligne<sup>2</sup>.

La première idée qui vient à l'esprit consiste sans doute à représenter l'enveloppe complexe d'un paquet d'ondes gaussien, à l'origine des abscisses, sous la forme

$$B_0(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{t^2}{L_0^2} \right], \quad (12.1)$$

---

<sup>1</sup> Nous gardons ce terme, mais l'entendons au sens précisé au chapitre 11, qui inclut la diffraction-propagation dans son aspect purement temporel.

<sup>2</sup> Pour la diffraction, l'entrée de la ligne de transmission correspond à un émetteur sphérique ; c'est la partie temporelle de l'amplitude du champ sur cet émetteur qui constitue le paquet d'ondes. Si on observe le champ à une certaine distance sur un récepteur sphérique, celui-ci joue le rôle d'extrémité de sortie de la ligne.

où  $a_0$  est une constante dimensionnelle et  $L_0$  la durée du paquet d'ondes<sup>3</sup>. S'agissant d'un paquet d'ondes gaussien, la durée  $L_0$  est l'intervalle de temps pour lequel  $B_0(t) \geq 1/e$ .

En toute généralité, le paquet d'ondes est supposé modulé linéairement en fréquence. Dans ces conditions, si  $\Lambda$  est la période temporelle de l'onde porteuse (voir le chapitre 11) et si  $1/R_0$  est la courbure temporelle (liée à la modulation de fréquence), l'enveloppe complexe modulée à l'entrée de la ligne s'écrit

$$U_0(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{t^2}{L_0^2} \right] \exp \left[ \frac{i\pi t^2}{\Lambda R_0} \right]. \quad (12.2)$$

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, *a priori*, le choix précédent, où  $B_0$  et  $U_0$  sont donnés par les relations (12.1) et (12.2), apparaîtra particulier par la suite : il correspond à un « col temporel » (notion introduite plus loin) situé à l'origine des abscisses. Un choix différent de  $B_0(t)$  et de  $U_0(t)$  se justifie par comparaison avec un faisceau gaussien.

Sur une sphère équiphasée  $\mathcal{S}$  d'un faisceau gaussien, l'amplitude du champ est de la forme

$$U_S(x, y) = \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2} \right], \quad (12.3)$$

à une constante dimensionnelle près et à un terme de phase près qui ne dépend pas de  $x$  ni de  $y$ . L'amplitude du champ sur le plan  $\mathcal{P}$ , tangent à  $\mathcal{S}$  en son sommet, s'écrit

$$U_P(x, y) = \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2} \right] \exp \left[ i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda R} \right], \quad (12.4)$$

où  $R$  est le rayon de courbure de la sphère  $\mathcal{S}$ .

Or nous avons vu au paragraphe 11.3.4 du chapitre 11 que l'enveloppe complexe correspondait au champ sur un plan, et que pour avoir l'équivalent du champ sur une sphère, il fallait introduire une courbure temporelle et passer à l'enveloppe complexe modulée linéairement en fréquence. Ainsi, c'est  $B_0(t)$  qui doit correspondre à  $U_P(x, y)$ , et inclure un terme de phase quadratique ; et c'est  $U_0(t)$  qui doit correspondre à  $U_S(x, y)$ , et être strictement une gaussienne<sup>4</sup>. C'est la raison pour laquelle nous supposons, en toute généralité, que c'est l'enveloppe complexe modulée d'un paquet d'ondes gaussien qui s'écrit, à l'origine ( $z = 0$ ), sous la forme

$$U_0(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{t^2}{L_0^2} \right], \quad (12.5)$$

<sup>3</sup> Le mot « durée » n'est pas toujours à prendre dans le sens d'un intervalle de temps entre un début et une fin bien définis, comme ce serait le cas pour une enveloppe à support borné.

<sup>4</sup> Spatialement, la surface  $\mathcal{S}$  a la bonne courbure pour que l'amplitude du champ soit strictement une gaussienne, sans terme de phase quadratique superflu. Temporellement, c'est l'enveloppe complexe modulée linéairement en fréquence qui possède la bonne courbure temporelle pour se réduire effectivement à une gaussienne.

si bien que l'enveloppe complexe à l'origine est

$$B_0(t) = U_0(t) \exp \left[ -\frac{i\pi t^2}{\Lambda R_0} \right] = a_0 \exp \left[ -\frac{t^2}{L_0^2} \right] \exp \left[ -\frac{i\pi t^2}{\Lambda R_0} \right]. \quad (12.6)$$

Avec les notations du chapitre 11, l'enveloppe complexe réduite à l'origine s'écrit

$$V_0(\tau') = a_0 \exp[-\pi\tau'^2], \quad (12.7)$$

par analogie avec l'amplitude réduite d'un faisceau gaussien (de la forme  $\exp[-\pi\rho^2]$ , conformément à la relation (7.79) p. 200.

### 12.1.2 Propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans une ligne de transmission dispersive

Selon les résultats du chapitre 11, dans les limites de la dispersion de groupe d'ordre 2, la propagation d'un paquet d'ondes sur la distance  $z$  se représente par une transformation de Fourier fractionnaire dont l'ordre  $\alpha$  est lié à  $z$ . L'enveloppe réduite donnée par la relation (12.7) est une fonction propre de toute transformation de Fourier fractionnaire, si bien que l'enveloppe réduite à la distance  $z$  de l'entrée de la ligne s'écrit encore

$$V_z(\tau) = a_0 \exp[-\pi\tau^2], \quad (12.8)$$

à une constante multiplicative près (qui dépend de  $z$  par l'intermédiaire de l'ordre  $\alpha$ ). En variables réelles (non réduites) l'enveloppe complexe modulée à l'abscisse  $z$  est de la forme

$$U_z(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{t^2}{L^2} \right], \quad (12.9)$$

avec

$$L = \sqrt{\frac{\varepsilon \Lambda R_0}{\pi}} \frac{1}{\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}. \quad (12.10)$$

Le paramètre  $L$  est la durée du paquet d'ondes gaussien à l'abscisse  $z$ .

### 12.1.3 Col temporel

Un paquet d'ondes gaussien qui se propage dans une ligne de transmission dispersive a les propriétés suivantes.

**Proposition 12.1.1 (Existence du col temporel).** *La durée d'un paquet d'ondes gaussien admet un minimum, noté  $L_c$ .*

*Preuve.* C'est strictement celle de la proposition 7.2.6 p. 200 : il suffit d'y remplacer  $\varepsilon_r$  par  $\varepsilon$ .  $\square$

La preuve de la proposition 7.2.6 montre que le minimum de  $L$  est obtenu pour  $\alpha = \alpha_c$ , où  $\tan \alpha_c = \varepsilon$ . Cela correspond à une abscisse  $z_c$  de la ligne qui se déduit des relations (11.105) et (11.107) pour  $\alpha = \alpha_c$ . La valeur de  $z_c$  sera précisée par la proposition 12.1.3.

**Proposition 12.1.2.** *Le col temporel correspond à une courbure temporelle nulle. L'enveloppe complexe du col n'est pas modulée.*

*Preuve.* La relation (11.114) montre que pour  $z = z_c$ , le paramètre  $R_z$  est infini. En effet, si on pose, conformément à la relation (11.105),

$$Z_c = \frac{\beta_2 z_c}{2\pi\Lambda}, \quad (12.11)$$

de  $\tan \alpha_c = \varepsilon$  et de l'équation (11.107) on déduit

$$\varepsilon^2 = \frac{Z_c}{R_0 - Z_c}, \quad (12.12)$$

et on conclut grâce à la relation (11.114).  $\square$

La proposition 12.1.2 est la transposition temporelle de la proposition 7.2.7 selon laquelle le col d'un faisceau gaussien est situé sur un plan (courbure nulle).

**Proposition 12.1.3 (Abscisse du col temporel).** *Soit à l'origine d'une ligne de transmission dispersive un paquet d'ondes gaussien, dont l'enveloppe modulée est de la forme ( $a_0$  est une constante dimensionnelle)*

$$U_0(t) = a_0 \exp \left[ -\frac{t^2}{L_0^2} \right]. \quad (12.13)$$

*Le col temporel se rencontre à l'abscisse  $z_c$ , telle que*

$$z_c = \frac{2\pi\Lambda}{\beta_2} \frac{R_0}{1 + \frac{\Lambda^2 R_0^2}{\pi^2 L_0^4}}, \quad (12.14)$$

*où  $R_0$  est le rayon de courbure temporel de l'enveloppe complexe à l'origine des abscisses.*

*Preuve.* Le col de l'enveloppe modulée se trouve à l'abscisse  $z_c$  et le paramètre  $\varepsilon$  associé au paquet d'ondes vérifie la relation (12.12). En  $z = 0$ , on a  $\alpha = 0$  et la relation (12.10) donne  $L_0^2 = \varepsilon \Lambda R_0 / \pi$ . Il en résulte

$$L_0^4 = \frac{\Lambda^2 R_0^2 Z_c}{\pi^2 (R_0 - Z_c)}, \quad (12.15)$$

dont on déduit

$$Z_c = \frac{\pi^2 R_0 L_0^4}{\pi^2 L_0^4 + \Lambda^2 R_0^2} = \frac{R_0}{1 + \frac{\Lambda^2 R_0^2}{\pi^2 L_0^4}}. \quad (12.16)$$

On trouve la relation (12.14) en revenant à la vraie distance de propagation, c'est-à-dire en appliquant à  $z_c$  et  $Z_c$  la relation (11.105).  $\square$

**Proposition 12.1.4 (Durée au col temporel).** *Dans les conditions de la proposition 12.1.3, la durée du paquet d'ondes gaussien au col temporel est  $L_c$ , telle que*

$$L_c^2 = \frac{L_0^2}{1 + \frac{\pi^2 L_0^4}{\Lambda^2 R_0^2}}. \tag{12.17}$$

*Preuve.* La durée au col est  $L_c$  avec

$$L_c = \sqrt{\frac{\varepsilon \Lambda R_0}{\pi}} \frac{1}{(\cos \alpha_c + \varepsilon \sin \alpha_c)}, \tag{12.18}$$

où  $\alpha_c$  est la valeur de  $\alpha$  qui correspond au col. On a de plus  $\varepsilon = \pi L_0^2 / \Lambda R_0$  et  $\tan \alpha_c = \varepsilon$ , dont on déduit

$$L_c^2 = \frac{L_0^2}{(\cos \alpha_c + \varepsilon \sin \alpha_c)^2} = \frac{L_0^2}{1 + \tan^2 \alpha_c} = \frac{L_0^2}{1 + \frac{\pi^2 L_0^4}{\Lambda^2 R_0^2}}. \tag{12.19}$$

□

### 12.1.4 Correspondances entre paquet d'ondes et faisceau gaussien

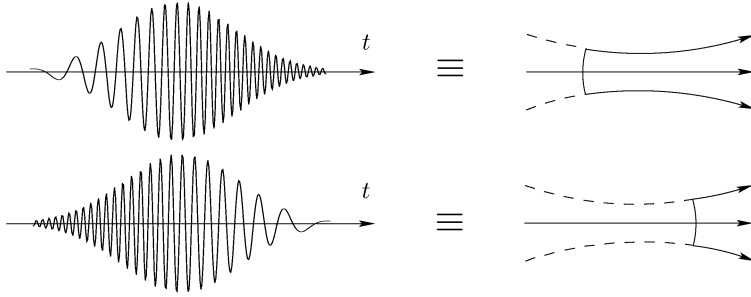
Ce qui précède permet d'établir une correspondance entre les paramètres d'un faisceau gaussien et ceux d'un paquet d'ondes gaussien. Elle est résumée par le tableau 12.1.

**TAB. 12.1.** Équivalences entre les paramètres d'un faisceau gaussien et ceux d'un paquet d'ondes gaussien.

Faisceau gaussien		Paquet d'ondes gaussien	
Rayon transversal du col	$w_0$	$L_c$	Durée au col
Rayon transversal sur une surface équiphas	$w$	$L$	Durée à une distance quelconque
Distance	$D$	$Z$	Temps proportionnel à la distance
Rayon de courbure	$R$	$R_z$	Rayon de courbure temporel

À l'équivalence des paramètres s'ajoute celle des propriétés. Ainsi la proposition 12.1.1 n'est autre que la version temporelle de la proposition 7.2.6. De même pour les propositions 12.1.2 et 7.2.7. La relation (12.16) est équivalente à la relation (7.102), et la relation (12.17) à la relation (7.101).

La figure 12.1 illustre l'équivalence entre faisceaux gaussiens et paquets d'ondes gaussiens à enveloppe modulée en fréquence, dans le cas d'une dispersion de groupe d'ordre 2 normale ( $\beta_2 > 0$ ).



**FIG. 12.1.** Équivalence entre paquets d'ondes gaussiens à enveloppe complexe modulée et faisceaux gaussiens. Pour une ligne dispersive à dispersion de groupe normale ( $\beta_2 > 0$ ), l'enveloppe d'un paquet d'ondes gaussien modulée en fréquence par valeurs croissantes est équivalente au champ sur une sphère équiphase d'un faisceau gaussien à courbure positive (schéma du haut). Au cours de la propagation, le faisceau gaussien va passer par son col avant de diverger ; de même, en se propageant dans la ligne dispersive, l'enveloppe du paquet d'ondes va se rétrécir avant de s'élargir. La situation est inverse dans le schéma du bas : le col du faisceau gaussien est virtuel, et l'enveloppe modulée va en s'élargissant. La correspondance est inversée si  $\beta_2 < 0$  (dispersion de groupe anormale).

### 12.1.5 Élargissement temporel d'un paquet d'ondes gaussien

**Calcul de l'élargissement.** Jusqu'à présent, nous nous sommes donné un paquet d'ondes gaussien modulé en  $z = 0$ , de durée  $L_0$ , puis nous avons calculé à quelle distance  $z_c$  ce paquet d'ondes avait son col temporel, c'est-à-dire une durée minimale  $L_c$ , et enfin nous avons calculé cette durée. Il est équivalent de se donner un col de durée  $L_c$  en  $z = z_c$ , et de trouver la durée initiale  $L_0$  du paquet d'ondes qui correspond à cela. Ainsi nous déduisons de la relation (12.17)

$$R_0^2 = \frac{\pi^2 L_0^4 L_c^2}{A^2 (L_0^2 - L_c^2)}, \quad (12.20)$$

et de la relation (12.16)

$$Z_c^2 = \frac{R_0^2}{\left(1 + \frac{A^2 R_0^2}{\pi^2 L_0^4}\right)^2} = \frac{\pi^2 L_c^2}{A^2} (L_0^2 - L_c^2). \quad (12.21)$$

Il en résulte

$$L_0^2 = L_c^2 + \frac{A^2 Z_c^2}{\pi^2 L_c^2}. \quad (12.22)$$

Considérons maintenant le problème suivant : soit un paquet d'ondes gaussien de durée  $L_0 = L_c$  en  $z = 0$  (cela signifie que le col est situé à l'origine, entrée de la ligne de transmission). Quelle est la durée  $L$  du paquet d'ondes à

l'abscisse  $z$ ? On résoud ce problème à partir de la situation qui a conduit à la relation (12.22) en changeant l'origine des abscisses – on la prend sur le col – et en remplaçant dans la relation (12.22)  $L_0$  par  $L$ ,  $L_c$  par  $L_0$  et  $Z_c$  par  $Z$ . Cela donne

$$L^2 = L_0^2 + \frac{\Lambda^2 Z^2}{\pi^2 L_0^2}. \quad (12.23)$$

La relation (12.23) est la version temporelle de la relation (7.99), établie p. 205 pour un faisceau gaussien.

**Application aux télécommunications optiques.** La relation  $Z = \beta_2 z / 2\pi\Lambda$  conduit à mettre la relation (12.23) sous la forme

$$L^2 = L_0^2 + \frac{\beta_2^2 z^2}{4\pi^4 L_0^2}. \quad (12.24)$$

La relation (12.24) est classique en télécommunications optiques. On a l'habitude de l'écrire sous une forme différente qui est la suivante. Définissons  $\Delta\ell$  par

$$\Delta\ell = \frac{\beta_2 z}{2\pi^2 L_0}, \quad (12.25)$$

si bien que la relation (12.24) devient [4, 41]

$$L = \sqrt{L_0^2 + \Delta\ell^2}. \quad (12.26)$$

Le paramètre  $\Delta\ell$  caractérise l'élargissement temporel du paquet d'ondes gaussien au cours de la propagation dans la ligne dispersive (fibre optique).

Il existe une durée initiale  $L_0 = L_{0m}$  qui minimise la durée du paquet d'ondes gaussien à une distance de propagation  $z$  donnée. En effet

$$\frac{dL}{dL_0} = \left( L_0 - \frac{\beta_2^2 z^2}{4\pi^4 L_0^3} \right) L^{-1/2}, \quad (12.27)$$

s'annule pour

$$L_0 = \sqrt{\frac{|\beta_2 z|}{2\pi^2}} = L_{0m}. \quad (12.28)$$

La durée  $L_{0m}$  est proportionnelle à la racine carrée de la distance de propagation, cela pour une fibre monomode. En général, on donne  $L_{0m}$  pour une longueur de fibre de 1 km. Ainsi, pour une longueur de fibre de 100 km,  $L_{0m}$  est multipliée par 10.

## 12.2 Lentilles temporelles

L'étude qui suit porte sur un sujet encore peu développé. On trouve cependant un certain nombre d'articles sur le thème des lentilles temporelles [127–129, 145, 249]; il nous paraît intéressant de le présenter brièvement.

### 12.2.1 Centre de courbure temporel

Au chapitre 11 un terme de la forme  $\exp[i\pi t^2/\Lambda R_z]$  est interprété comme un terme de phase quadratique associé à une courbure temporelle  $1/R_z$ . Le paramètre  $R_z$  est un rayon de courbure temporel, homogène à un temps.

Le temps  $Z = \beta_2 z / 2\pi\Lambda$  correspond à l'abscisse  $z$  d'une ligne de transmission de dispersion de deuxième ordre  $\beta_2$ . Pour les problèmes de propagation dans la ligne, le temps  $Z$  joue le rôle de la distance de propagation  $D$  en diffraction. La relation entre  $z$  et  $Z$  fournit un moyen d'associer un centre de courbure au terme de phase quadratique temporel mentionné plus haut. Autrement dit, au rayon de courbure temporel  $R_z$ , est associée la distance (mesure algébrique)

$$q = \frac{2\pi\Lambda R_z}{\beta_2}. \quad (12.29)$$

Cela permet de localiser dans la ligne le centre de courbure temporel du paquet d'ondes à l'abscisse  $z$ .

### 12.2.2 Lentille temporelle et modulation de fréquence

Considérons un système capable de produire une modulation de fréquence linéaire de la forme  $\exp[-i\pi t^2/\Lambda R]$ . Soit un paquet d'ondes incident sur le système, d'enveloppe complexe modulée

$$U_z(t) = B_z(t) \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda R_z} t^2\right]. \quad (12.30)$$

L'enveloppe complexe modulée émergeant du système s'écrit

$$U_z(t) = B_z(t) \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda} \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R}\right) t^2\right]. \quad (12.31)$$

La courbure temporelle a été modifiée et l'enveloppe précédente prend la forme

$$U_z(t) = B_z(t) \exp\left[\frac{i\pi}{\Lambda R'_z} t^2\right], \quad (12.32)$$

avec

$$\frac{1}{R'_z} = \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R}. \quad (12.33)$$

L'effet est comparable à celui d'une lentille en variables d'espace ; nous disons que la modulation de fréquence réalise une lentille temporelle.

Si l'enveloppe complexe modulée incidente possède une courbure nulle (rayon de courbure temporel infini) alors la focale de la lentille temporelle est  $\phi'$  avec

$$\frac{1}{\phi'} = -\frac{1}{R}. \quad (12.34)$$

La relation (12.33) devient

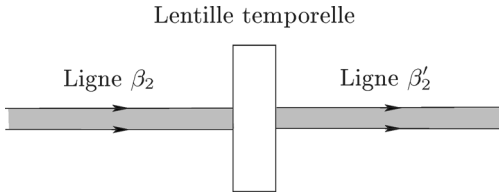
$$\frac{1}{R'_z} = \frac{1}{R_z} + \frac{1}{\phi'} . \quad (12.35)$$

C'est la relation de conjugaison d'une lentille temporelle. Elle prend une forme un peu plus générale comme le montre le paragraphe suivant.

### 12.2.3 Formule de conjugaison d'une lentille temporelle

La relation (12.35) est la version temporelle de la relation de conjugaison d'une lentille simple (spatiale) quand les milieux extrêmes sont identiques.

Considérons la situation plus générale schématisée par la figure 12.2. Une lentille temporelle est placée entre deux lignes de transmission de dispersion du deuxième ordre  $\beta_2$  et  $\beta'_2$ .



**FIG. 12.2.** Schéma d'une lentille temporelle entre deux lignes de transmission.

La relation (12.35) est encore valable, mais utilisons les abscisses des centres de courbure. Nous avons  $q = 2\pi\Lambda R_z/\beta_2$  et  $q' = 2\pi\Lambda R'_z/\beta'_2$ . Il est naturel de définir une distance focale image par  $f' = 2\pi\Lambda\phi'/\beta'_2$ , si bien que la relation de conjugaison devient

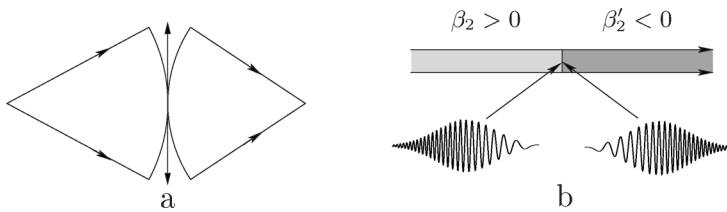
$$\frac{1}{\beta'_2 q'} = \frac{1}{\beta_2 q} + \frac{1}{\beta'_2 f'} . \quad (12.36)$$

Cette équation est la formule de conjugaison des lentilles temporelles. Les inverses des coefficients de dispersion d'ordre 2 jouent le rôle des indices de réfraction.

### 12.2.4 Réalisation pratique d'une lentille temporelle

Les lentilles temporelles constituent un sujet récent, assez peu développé d'un point de vue expérimental. Sur le principe, un modulateur de fréquence linéaire constitue une lentille temporelle ; il produit une modulation de phase quadratique (*chirp*). De telles modulations sont courantes dans le domaine des radars. Pour en revenir à l'optique, Kolner a proposé d'utiliser un modulateur électro-optique à onde progressive pour réaliser de façon approchée une telle lentille [127].

La jonction de deux fibres optiques dispersives avec des  $\beta_2$  de signes opposés constituent aussi une lentille temporelle, comme l'illustre la figure 12.3. Changer



**FIG. 12.3.** Lentille convergente (a) et son analogue temporel (b). Le passage d'une ligne de transmission, pour laquelle  $\beta_2 > 0$ , à une ligne avec  $\beta'_2 < 0$ , est vu comme un changement de courbure temporelle : c'est l'effet d'une lentille temporelle.

le signe de  $\beta_2$  revient en effet à changer le signe de la courbure temporelle de l'enveloppe complexe d'un paquet d'ondes, conformément à l'analyse du paragraphe 11.3.4. (De fait, il serait peut-être plus correct de parler de dioptre dans ce cas, puisqu'il y a juxtaposition de deux milieux.)

Il ne faut pas oublier cependant que tout ce qui est décrit ici ne concerne que la dispersion de groupe d'ordre 2. Dans la réalité, il faut tenir compte de la dispersion d'ordre supérieur.

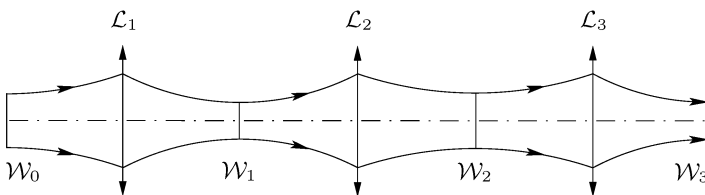
## 12.3 Transport d'un paquet d'ondes gaussien

### 12.3.1 Transport d'un faisceau gaussien

La figure 12.4 montre comment transporter un faisceau gaussien en maintenant périodiquement constant le rayon transversal de son col. On dispose d'une série d'objectifs  $\mathcal{L}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) convergents et identiques, représentés comme des lentilles minces. Pour chacun d'eux on met à profit la propriété décrite dans la remarque 7.3.8 p. 211 : le col du faisceau gaussien image est situé dans le plan focal image de l'objectif quand le col du faisceau objet se trouve dans le plan focal objet.

Deux objectifs successifs,  $\mathcal{L}_j$  et  $\mathcal{L}_{j+1}$ , forment un système afocal de grandissement transversal égal à  $-1$ , si bien que les cols  $\mathcal{W}_{j-1}$  et  $\mathcal{W}_{j+1}$  sont identiques. On a bien transport du col et maintien périodique de son rayon transversal.

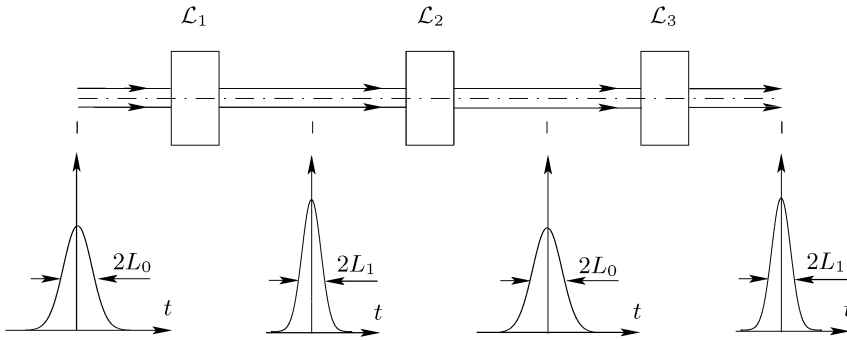
Éventuellement un choix approprié de la distance focale des objectifs permet d'obtenir l'égalité des rayons transversaux de deux cols successifs (on applique la relation (7.137) p. 213).



**FIG. 12.4.** Transport d'un faisceau gaussien par une série d'objectifs convergents identiques. Le rayon transversal est conservé après passage à travers deux objectifs.

### 12.3.2 Transport d'un paquet d'ondes gaussien par des lentilles temporelles

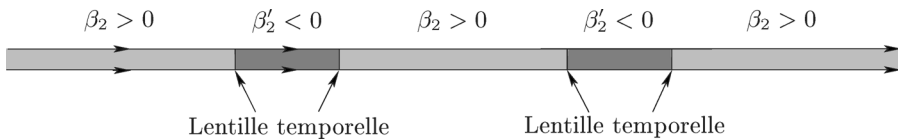
Le montage schématisé par la figure 12.4 se transpose au domaine temporel comme l'indique la figure 12.5. Les lentilles  $\mathcal{L}_j$  sont des lentilles temporelles, identiques, séparées par des lignes de transmission qu'on suppose identiques (ayant au moins la même dispersion d'ordre 2). On a représenté, sur la figure 12.5, les enveloppes complexes des paquets d'ondes gaussiens ; elles sont périodiquement de même durée.



**FIG. 12.5.** Transport d'un paquet d'ondes gaussien par une série de lentilles temporelles identiques. Si les lignes de transmission ont la même dispersion, la durée du paquet d'ondes au col est périodiquement maintenue.

### 12.3.3 Application à la compensation de la dispersion en télécommunications optiques

On utilise la juxtaposition de deux lignes de transmission comme lentille temporelle. Le montage de la figure 12.5 se ramène à une succession de tronçons de lignes de transmission dont la dispersion est alternativement positive ou négative, comme le montre la figure 12.6. Il y a compensation périodique de la dispersion. Les tronçons les plus courts ont des valeurs de  $\beta_2$  plus grandes, en valeur absolue, que celles des lignes les plus longues. De tels dispositifs sont effectivement utilisés en télécommunications optiques avec des fibres optiques [35, 69, 141, 142, 148, 155, 164, 224, 226, 249].



**FIG. 12.6.** Dispositif de compensation de la dispersion dans une liaison à fibres optiques. Il s'interprète en termes de lentilles temporelles conformément à la figure 12.5.

Rappelons encore que ce qui précède est valide pour des paquets d'ondes gaussiens et pour la dispersion de groupe d'ordre 2. Dans la réalité les choses sont plus complexes : la dispersion n'est pas seulement d'ordre 2, les paquets d'ondes ne sont pas nécessairement gaussiens. Apparaissent des effets non linéaires. Le modèle choisi permet cependant une première représentation des phénomènes.

L'analogie entre diffraction et dispersion dans les lignes de transmission permet ainsi de transposer au domaine temporel des schémas bien connus pour la propagation de la lumière dans l'espace libre.

## 12.4 Exercices

**Exercice 12.1.** Par analogie avec ce qui se passe pour un faisceau gaussien, définir une distance de Rayleigh pour un paquet d'ondes gaussien. Quelle est son interprétation physique ?

**Exercice 12.2.** On envoie dans une fibre optique dispersive (paramètre de dispersion de groupe  $\beta_2$ ), de longueur  $\ell$ , des paquets d'ondes sur une porteuse de fréquence  $\tilde{\nu}$ .

1. L'enveloppe complexe du paquet d'ondes à l'entrée de la fibre est de la forme  $B_0(t) = a_0 \text{rect}_{T_0}(t)$ . Quelle est l'enveloppe complexe du paquet d'ondes à l'abscisse  $\ell$  ? [Dans cette question la fibre est assez longue pour que  $\ell$  soit considérée comme infinie.]
2. L'enveloppe complexe du paquet d'ondes à l'entrée de la ligne est de la forme  $B_0(t) = a_0 \exp[-t^2/L_0^2]$ . Comment faire pour que la durée du paquet d'ondes soit minimale à l'abscisse  $\ell$  ?

Troisième partie

**Exemples d'applications et perspectives**

Les applications de l'optique de Fourier sont multiples, et le but de cette partie est davantage d'illustrer la doctrine métaxiale (complétée éventuellement par l'approche fractionnaire) plutôt que l'optique de Fourier en général. L'accent est donc mis sur la méthode, dont nous espérons démontrer l'efficacité.

Certaines applications de l'optique de Fourier ont déjà été décrites dans les chapitres précédents, parce qu'elles restent très proches de la théorie et en fournissent une illustration immédiate. Nous avons expliqué par exemple comment calculer l'éclairement d'une figure de diffraction (chapitre 5), ou encore étudié comment la pupille d'un objectif affectait la résolution de ce dernier (chapitre 8). Le chapitre 7 était une application directe de l'emploi de la transformation de Fourier fractionnaire en optique cohérente.

Le chapitre 13 expose des applications instrumentales pour lesquelles l'optique métaxiale offre un grand intérêt, car elle permet notamment de manipuler assez simplement les termes de phase quadratique. Le chapitre 14 revient sur la théorie des résonateurs optiques et des faisceaux gaussiens ; la plupart des résultats exposés relèvent de l'optique métaxiale, la partie du sujet liée à l'optique de Fourier fractionnaire ayant été abordée au chapitre 7. Le chapitre 15 est consacré à l'holographie et le chapitre 16 au traitement du signal optique.

Des applications sont également abordées sous la forme d'exercices à la fin des chapitres : strioscopie, contraste de phase, filtrage optique, réseau échelette, échelon de Michelson par exemple.

De nombreux ouvrages traitent des diverses applications de l'optique de Fourier [83, 97, 157, 219, 233, 235, 239]. Celles-ci peuvent bien sûr être abordées dans le cadre métaxial, et parfois fractionnaire.

Enfin il nous a paru intéressant de mentionner quelques perspectives de développement.

## Chapitre 13

# Considérations instrumentales

Outre son intérêt théorique, la diffraction métaxiale a des applications pratiques très utiles en optique cohérente instrumentale. Les premiers paragraphes de ce chapitre expliquent par exemple comment manipuler les émetteurs et récepteurs sphériques (c'est-à-dire, si on veut, les phases quadratiques) dans des situations réelles qu'on rencontre souvent.

Pour faciliter l'application des résultats établis dans les deux premières parties, nous mentionnons entre crochets la référence au théorème ou résultat utilisé.

### 13.1 Observation dans le plan focal d'un téléobjectif du spectre d'un objet transparent

#### 13.1.1 Analyse du problème et solution

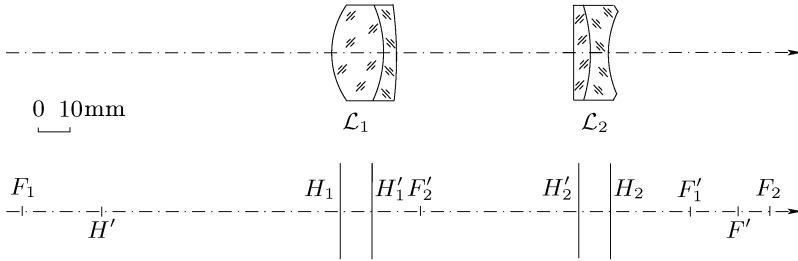
Un téléobjectif est composé d'un doublet convergent  $\mathcal{L}_1$ , de distance focale image  $f'_1$  (les foyers sont  $F_1$  et  $F'_1$ ), et d'un doublet divergent  $\mathcal{L}_2$ , de distance focale image  $f'_2$  (foyers  $F_2$  et  $F'_2$ ). Le milieu ambiant est l'air (indice de réfraction pratiquement égal à 1). La distance entre le point principal image  $H'_1$  du premier objectif et le point principal objet  $H_2$  du second est  $\ell$ . À titre d'illustration, nous choisissons les valeurs numériques suivantes (fig. 13.1) :  $f'_1 = 100$  mm,  $\overline{H_1 H'_1} = 10$  mm,  $f'_2 = -50$  mm,  $\overline{H_2 H'_2} = -10$  mm et  $\ell = 75$  mm.

Au point  $T$ , à la distance  $d_1 = \overline{H_1 T} = -50$  mm du premier doublet, est placée une transparence plane  $\mathcal{T}$ . Cette dernière est éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  (voir la figure 13.2 sur laquelle la source n'est pas représentée). La fonction de transmission de la transparence est  $t$ .

Nous nous proposons de déterminer l'amplitude du champ dans le plan focal image du téléobjectif, ou sur une sphère qui passe par le foyer image.

Commençons par caractériser le téléobjectif en termes paraxiaux (points cardinaux et distance focale). Le foyer image  $F'$  du téléobjectif est l'image du foyer image de  $\mathcal{L}_1$  à travers  $\mathcal{L}_2$ , et sa position est donnée par la relation (formule de conjugaison de Newton)

$$\overline{F'_2 F'} = -\frac{f'^2_2}{F_2 F'_1} . \quad (13.1)$$



**FIG. 13.1.** Téléobjectif de focale 200 mm composé de deux doublets  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ . Les foyers objet et image de  $\mathcal{L}_1$  sont  $F_1$  et  $F'_1$ , et les points principaux objet et images  $H_1$  et  $H'_1$ . On a les mêmes notations pour  $\mathcal{L}_2$  avec l'indice 2, et sans indice pour le téléobjectif.

Numériquement nous obtenons  $\overline{F'_2 F'} = 100$  mm.

La distance focale image  $f'$  du téléobjectif se déduit de la formule de Gullstrand [156]

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{\ell}{f'_1 f'_2}, \quad (13.2)$$

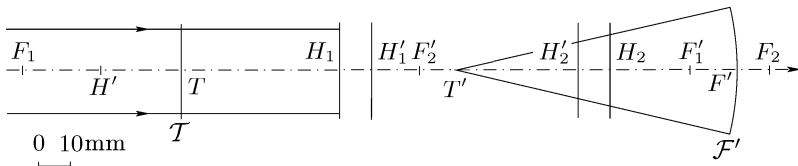
qui donne  $f' = 200$  mm.

La position du point  $H'$  (point principal image) se déduit de  $\overline{H' F'} = f'$ , et numériquement  $\overline{H_1 H'} = -75$  mm. Pour un téléobjectif, le point  $H'$  se trouve bien avant  $\mathcal{L}_1$  de telle sorte que la distance focale image  $f'$  est supérieure à la distance qui sépare  $\mathcal{L}_1$  de  $F'$ .

La sphère de Fourier de  $\mathcal{T}$  est la sphère  $\mathcal{F}$  qui est à l'infini et centrée en  $T$  [Diffraction de Fraunhofer, théorème 1]. Son image à travers le téléobjectif est la sphère  $\mathcal{F}'$  qui passe par le foyer  $F'$  et qui est centrée sur  $T'$ , l'image de  $T$  [Imagerie cohérente, théorème 2].

Comme nous n'avons pas calculé la position du foyer objet du téléobjectif, ni celle du point principal objet, nous ne pouvons pas utiliser les formules de conjugaison des systèmes centrés pour calculer la position de  $T'$ . Nous obtenons cette dernière en calculant d'abord la position de l'image  $T'_1$  de  $T$  à travers  $\mathcal{L}_1$  :

$$\overline{F'_1 T'_1} = -\frac{f_1'^2}{F_1 T} = -200 \text{ mm}, \quad (13.3)$$



**FIG. 13.2.** La transformée de Fourier optique de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{T}$  s'observe sur la sphère  $\mathcal{F}'$  qui passe par le foyer image  $F'$  du téléobjectif et qui est centrée sur l'image  $T'$  de  $T$ .

puis  $\overline{F_2 T'_1} = \overline{F_2 F'_1} + \overline{F'_1 T'_1} = -225$  mm. Le point  $T'$  est l'image de  $T'_1$  à travers  $\mathcal{L}_2$  ; on calcule

$$\overline{F'_2 T'} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2 T'_1}} \approx 11,1 \text{ mm.} \quad (13.4)$$

Le rayon de la sphère  $\mathcal{F}'$  est  $R_{F'} = \overline{F' T'} = \overline{F' F_2} + \overline{F_2 T'} = -88,9$  mm. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}'$  est [Théorème 1, relation (5.8) et remarque 5.1.2 p. 104]

$$U_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{i}{\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\mathbf{s}'}{\lambda f'}\right). \quad (13.5)$$

Si  $\mathcal{P}'$  est le plan focal image du téléobjectif, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{P}'$  se déduit du champ sur  $\mathcal{F}'$  par une transparence de courbure sous la forme

$$\begin{aligned} U_{P'}(\mathbf{s}') &= \exp\left[\frac{i\pi s'^2}{\lambda R_{F'}}\right] U_{F'}(\mathbf{s}') \\ &= \frac{i}{\lambda f'} \exp\left[\frac{i\pi s'^2}{\lambda R_{F'}}\right] \hat{t}\left(\frac{\mathbf{s}'}{\lambda f'}\right) \\ &= \frac{i}{\lambda f'} \exp\left[\frac{i\pi s'^2}{\lambda R_{F'}}\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}}{\lambda f'}\right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

**Dimension du spectre.** À la fréquence spatiale  $\mathbf{F}$  sur la transparence  $\mathcal{T}$  correspond le point  $\mathbf{s}' = \lambda f' \mathbf{F}$  du plan focal image du téléobjectif. Si la résolution de la transparence est  $\rho$ , le spectre de  $t$  est inclus dans un disque de diamètre  $\lambda f' / \rho$ , à condition que l'ouverture du téléobjectif soit suffisamment grande pour laisser passer les fréquences spatiales correspondantes.

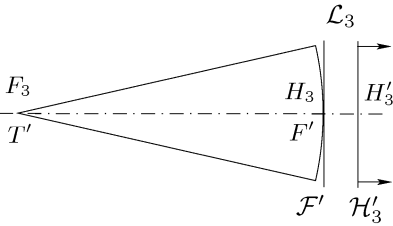
### 13.1.2 Passage du champ sur la sphère de Fourier au champ dans le plan focal

La transformée de Fourier optique « exacte » s'obtient sur la sphère  $\mathcal{F}'$  et non dans le plan focal image  $\mathcal{P}'$ . Bien sûr l'éclairement est le même sur ces deux surfaces, et si on enregistre par exemple cet éclairement dans une émulsion photographique, le terme de phase quadratique de la relation (13.6) est sans effet sur le résultat. Si on utilise toutefois l'onde dont l'amplitude est celle obtenue par transformation de Fourier de  $t$  pour éclairer un filtre de phase plan, il est concevable qu'il faille obtenir la transformée de Fourier sur un plan. On obtient un tel résultat grâce à un objectif, disons  $\mathcal{L}_3$ .

Quelles sont les caractéristiques de  $\mathcal{L}_3$  ? Nous voulons que l'image cohérente de  $\mathcal{F}'$  à travers  $\mathcal{L}_3$  soit un plan. Pour cela l'image de  $T'$ , le centre de courbure de  $\mathcal{F}'$ , doit être à l'infini [Imagerie cohérente, théorème 2]. L'objectif  $\mathcal{L}_3$  doit avoir son foyer objet  $F_3$  en  $T'$ . Si nous souhaitons une image de la sphère  $\mathcal{F}'$  avec le grandissement 1, le point principal objet  $H_3$  doit être en  $F'$  (fig. 13.3).

Par conséquent, la distance focale objet de  $\mathcal{L}_3$  est  $f_3 = \overline{F'T'} = -88,9$  mm, et sa distance focale image est  $f'_3 = 88,9$  mm. Le champ dans le plan principal image  $\mathcal{H}'_3$  de  $\mathcal{L}_3$  est égal au champ sur la sphère  $\mathcal{F}'$ , c'est-à-dire

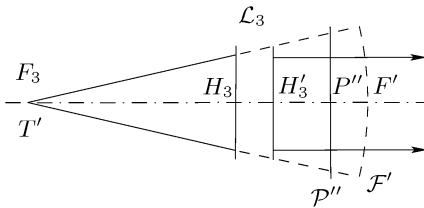
$$U_{H'_3}(\mathbf{s}') = U_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{i}{\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\mathbf{s}'}{\lambda f'}\right) = \frac{i}{\lambda f'} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}}{\lambda f'}\right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13.7)$$



**FIG. 13.3.** L'amplitude du champ dans le plan principal image  $\mathcal{H}'_3$  de  $\mathcal{L}_3$  est égale à l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{F}'$  si le foyer objet  $F_3$  de  $\mathcal{L}_3$  se confond avec  $T'$  et si la sphère  $\mathcal{F}'$  est tangente au plan principal objet de l'objectif.

L'emploi de l'objectif  $\mathcal{L}_3$ , tel que nous l'avons calculé, présente deux inconvénients. Il est d'abord difficile de trouver un objectif de distance focale image  $f'_3$  exactement égale à 88,9 mm. Ensuite le plan principal image peut être virtuel ou se situer dans le verre qui constitue l'objectif. La figure 13.4 montre comment « aplanir » le champ sur  $\mathcal{F}'$  à l'aide d'un objectif  $\mathcal{L}_3$  dont la distance focale image est inférieure à 88,9 mm. On forme en  $P''$  une image réelle de  $F'$  et le plan  $\mathcal{P}''$  est l'image cohérente de  $\mathcal{F}'$  à travers  $\mathcal{L}_3$  (cela vient de ce que  $\mathcal{F}'$  est centrée au foyer de  $\mathcal{L}_3$ ). Si  $g$  est le grandissement transversal entre  $F'$  et  $P''$  alors [Imagerie cohérente, théorème 2]

$$U_{P''}(\mathbf{s}'') = \frac{1}{g} U_{F'}\left(\frac{\mathbf{s}''}{g}\right) = \frac{i}{g\lambda f'} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi \mathbf{s}'' \cdot \mathbf{r}}{g\lambda f'}\right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13.8)$$

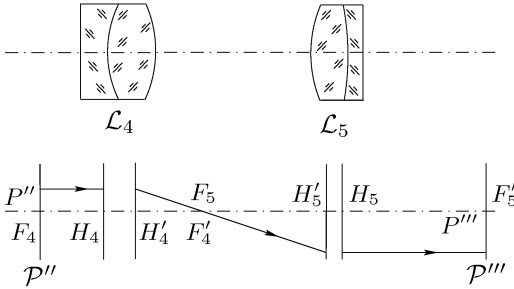


**FIG. 13.4.** L'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{P}''$  est égale à l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{F}'$ , mis à part le grandissement transversal.

**Remarque 13.1.1.** Dans la pratique, les points  $F'$  et  $P''$  (fig. 13.4) sont proches du point principal image de  $\mathcal{L}_3$ , de telle sorte que  $g$  n'est pas très différent de 1. L'objectif  $\mathcal{L}_3$  n'est pas très efficace pour augmenter la taille du spectre et pour cela nous proposons ce qui suit.

### 13.1.3 Augmentation de la taille du spectre

Supposons vouloir augmenter la dimension du spectre. On peut bien sûr employer un objectif de plus longue focale. On peut aussi avoir recours à un système afocal additionnel, composé de deux doublets convergents  $\mathcal{L}_4$  et  $\mathcal{L}_5$ , de distances focales respectives  $f'_4$  et  $f'_5$  (fig. 13.5). Ce système est afocal si le foyer image  $F'_4$  de  $\mathcal{L}_4$  se confond avec le foyer objet  $F_5$  de  $\mathcal{L}_5$ , le grandissement transversal étant  $g_a = -f'_5/f'_4$ .



**FIG. 13.5.** Système afocal permettant d'augmenter la taille du spectre obtenu selon la figure 13.4.

Le système afocal précédent s'adapte au téléobjectif complété par le doublet  $\mathcal{L}_3$ . En principe, on place le foyer objet  $F_4$  de  $\mathcal{L}_4$  en  $H'_3$  (fig. 13.3) ou en  $P''$  (fig. 13.4 et fig. 13.5). Son image à travers le système afocal est  $P''' \equiv F'_5$ . L'image du plan  $\mathcal{H}'_3$  (ou du plan  $\mathcal{P}''$ ) est le plan focal image  $\mathcal{P}'''$  de  $\mathcal{L}_5$ , parce que l'image cohérente d'un plan à travers un système afocal est un autre plan. Avec des coordonnées  $\mathbf{s}'''$  sur  $\mathcal{P}'''$ , on a

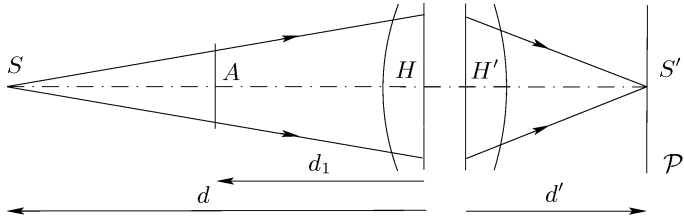
$$\begin{aligned} U_{P'''}(\mathbf{s}''') &= \frac{1}{g_a} U_{P'}\left(\frac{\mathbf{s}'''}{g_a}\right) = \frac{i}{gg_a \lambda f'} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi \mathbf{s}''' \cdot \mathbf{r}}{gg_a \lambda f'}\right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \frac{i}{gg_a \lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\mathbf{s}'''}{gg_a \lambda f'}\right) \end{aligned} \quad (13.9)$$

Remarquons qu'un défaut de mise au point du système afocal ne change pas la dimension du spectre sur  $\mathcal{P}'''$ . Cela vient de ce que le grandissement transversal d'un système afocal est une constante. La phase dans le plan focal image de  $\mathcal{L}_5$  n'est pas modifiée non plus.

## 13.2 Spectre d'un objet transparent éclairé par un faisceau divergent

### 13.2.1 Analyse du problème et solution

Reportons-nous à la figure 13.6 qui représente un objectif dont les points principaux sont  $H$  et  $H'$  (cet objectif est par exemple le téléobjectif du paragraphe précédent). La source lumineuse  $S$  est monochromatique, de longueur



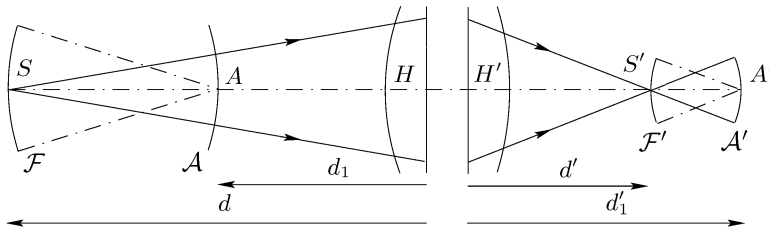
**FIG. 13.6.** Un objet plan, placé en  $A$ , est éclairé par une onde divergente issue de  $S$ . On cherche l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{P}'$ , là où se trouve l'image de la source.

d'onde  $\lambda$ , et son image à travers l'objectif est  $S'$ . Notons  $d = \overline{HS}$  et  $d' = \overline{H'S'}$ . On place en  $A$ , à la distance  $d_1 = \overline{HA}$  du plan principal objet, une transparence plane de fonction de transmission  $t$ . Quelle est l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{P}'$  qui passe par  $S'$ ? (Ce problème est exposé à la p. 118 de la deuxième édition du livre de Goodman [97].)

Pour résoudre ce problème, remarquons que la transparence plane éclairée par l'onde divergente est équivalente à un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  centré en  $S$  et passant par  $A$  (fig. 13.7) [Émetteur sphérique équivalent]. Sa sphère de Fourier est la sphère  $\mathcal{F}$ , centrée en  $A$ , qui passe par  $S$  [Théorème 1]. L'image de  $\mathcal{F}$  est la sphère  $\mathcal{F}'$  qui passe par  $S'$  et qui est centrée en  $A'$ , l'image paraxiale de  $A$  [Imagerie cohérente, théorème 2]. Finalement, l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}'$  se déduit de l'amplitude sur  $\mathcal{A}$  par transformation de Fourier optique. Mais l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  n'est rien d'autre que  $t$ . Ainsi l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}'$  est proportionnelle à  $\hat{t}$ . Cela reste vrai pour le champ dans le plan  $\mathcal{P}'$ , à un terme de phase quadratique près.

Nous poursuivons par les calculs explicites. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  est  $U_A(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r})$  ( $U_0$  est une constante dimensionnelle). Le champ sur  $\mathcal{F}$  s'obtient après une diffraction de Fraunhofer (virtuelle) à la distance  $d - d_1$  de  $\mathcal{A}$ , sous la forme

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{iU_0}{\lambda(d - d_1)} \hat{t}\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda(d - d_1)}\right). \quad (13.10)$$



**FIG. 13.7.** L'objet plan de la figure 13.6 est équivalent à un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$  dont la sphère de Fourier est  $\mathcal{F}$ . L'image cohérente de  $\mathcal{F}$  est la sphère  $\mathcal{F}'$  qui passe par  $S'$ , et l'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}'$  est proportionnelle à la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$ .

Le champ sur  $\mathcal{F}'$  est l'image cohérente du champ sur  $\mathcal{F}$ , et le grandissement est  $d'/d$ , de telle sorte que

$$U_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{d}{d'} U_F \left( \frac{\mathbf{s}'d}{d'} \right) = \frac{iU_0d}{\lambda d'(d-d_1)} \hat{t} \left( \frac{\mathbf{s}'d}{\lambda d'(d-d_1)} \right). \quad (13.11)$$

On passe au champ dans le plan  $\mathcal{P}'$  à l'aide d'une transparence de courbure. Si  $d'_1 = \overline{H'A'}$ , le rayon de courbure de la sphère  $\mathcal{F}'$  est  $d'_1 - d'$ , et nous écrivons

$$U_{P'}(\mathbf{s}') = U_{F'}(\mathbf{s}') \exp \left[ \frac{i\pi s'^2}{\lambda(d'_1 - d')} \right]. \quad (13.12)$$

Exprimons la distance  $d'_1$  en fonction des données du problèmes,  $d$ ,  $d_1$  et  $d'$ . On déduit de la formule de conjugaison des systèmes centrés<sup>1</sup>

$$\frac{1}{d'_1} - \frac{1}{d_1} = \frac{1}{d'} - \frac{1}{d}, \quad (13.13)$$

d'où

$$d'_1 = \frac{d'dd_1}{dd_1 - d'd_1 + d'd}. \quad (13.14)$$

Finalement

$$d'_1 - d' = \frac{d'^2(d_1 - d)}{dd_1 - d'd_1 + d'd}. \quad (13.15)$$

Remarquons la relation suivante qui se déduit de la relation (13.13) (et qui n'est rien d'autre que la loi de grandissement des rayons pour  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$ )

$$\frac{d'_1}{d_1(d' - d'_1)} = \frac{d}{d'(d - d_1)}. \quad (13.16)$$

En conclusion, la relation (13.12) s'écrit

$$\begin{aligned} U_{P'}(\mathbf{s}') &= \frac{iU_0d}{\lambda d'(d-d_1)} \exp \left[ \frac{i\pi(dd_1 - d'd_1 + d'd)s'^2}{\lambda d'^2(d_1 - d)} \right] \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi d}{\lambda d'(d-d_1)} \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r} \right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

<sup>1</sup> Si  $f'$  est la distance focale image du système,  $d$  la distance du point principal objet à l'objet, et  $d'$  la distance du point principal image à l'image, la formule de conjugaison de Descartes s'écrit – c'est la relation (4.66) –

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f'},$$

si l'indice de réfraction de l'espace objet et celui de l'espace image sont égaux.

### 13.2.2 Un autre point de vue

Dans le calcul précédent, la transformation de Fourier optique était considérée dans l'espace objet. On se rapporte à l'espace image de la façon suivante. L'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{A}$  est  $t(\mathbf{r})$ , et l'image cohérente de  $\mathcal{A}$  est la sphère  $\mathcal{A}'$  centrée en  $S'$  et qui passe par  $A'$ . Le grandissement transversal entre  $A$  et  $A'$  est  $d'_1/d_1$ , et l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est [Imagerie cohérente, théorème 2]

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{d_1}{d'_1} U_0 t\left(\frac{\mathbf{r}'d_1}{d'_1}\right). \quad (13.18)$$

La sphère  $\mathcal{F}'$  est la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}'$  et le transfert du champ de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{F}'$ , qui correspond à une diffraction de Fraunhofer à la distance  $d' - d'_1$ , s'écrit

$$U_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{i}{\lambda(d' - d'_1)} \widehat{U}_{A'}\left(\frac{\mathbf{s}'}{\lambda(d' - d'_1)}\right). \quad (13.19)$$

On déduit de la relation (13.18)

$$\widehat{U}_{A'}(\mathbf{F}) = \frac{d'_1}{d_1} U_0 \widehat{t}\left(\frac{\mathbf{F}d'_1}{d_1}\right), \quad (13.20)$$

puis

$$U_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{iU_0d'_1}{\lambda d_1(d' - d'_1)} \widehat{t}\left(\frac{\mathbf{s}'d'_1}{\lambda d_1(d' - d'_1)}\right). \quad (13.21)$$

On montre, grâce à la relation (13.16), que la relation (13.21) n'est rien d'autre que la relation (13.11). On passe à l'expression de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{P}'$  à l'aide de la relation (13.12) et on obtient à nouveau la relation (13.17).

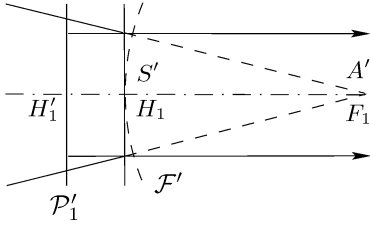
### 13.2.3 Passage du champ sur une sphère au champ sur un plan

La figure 13.7 montre que la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$  s'obtient sur une sphère, comme au paragraphe 13.1. Un objectif permettant d'observer sur un plan le champ obtenu sur la sphère doit avoir son foyer objet  $F_1$  en  $A'$ , et son point principal objet  $H_1$  peut être placé en  $S'$ . La distance focale objet de l'objectif est

$$f = \overline{S'A'} = d'_1 - d'. \quad (13.22)$$

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{F}'$  se trouve dans le plan principal image  $\mathcal{P}'_1$  de l'objectif. Sur la figure 13.7 la distance focale objet est positive et l'objectif doit être divergent. La figure 13.8 montre la situation. Nous avons

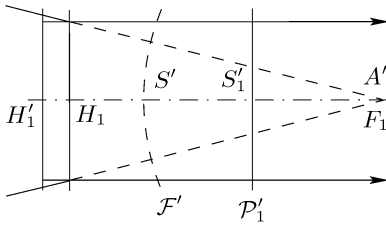
$$\begin{aligned} U_{P'_1}(\mathbf{s}') &= U_{F'}(\mathbf{s}') \\ &= \frac{iU_0d}{\lambda d'(d - d_1)} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi d}{\lambda d'(d - d_1)} \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}\right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13.23)$$



**FIG. 13.8.** L'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{P}'_1$  est égale à l'amplitude du champ sur la sphère  $\mathcal{F}'$  si on emploie un objectif dont le foyer objet  $F_1$  se confond avec  $A'$ . Sur la figure, l'objectif est divergent et est représenté seulement par ses points principaux ( $H_1$  et  $H'_1$ ) et son foyer objet ( $F_1$ ).

La situation de la figure 13.8 présente l'inconvénient que le plan principal image est virtuel. On obtient l'amplitude de  $\mathcal{F}'$  sur un plan réel si on accepte, entre  $\mathcal{F}'$  et ce plan, un grandissement transversal différent de 1. Le montage est celui de la figure 13.9. Si  $g$  est le grandissement transversal entre  $S'$  y  $S'_1$ , alors

$$\begin{aligned} U_{P'_1}(\mathbf{s}') &= \frac{1}{g} U_{F'}\left(\frac{\mathbf{s}'}{g}\right) \\ &= \frac{iU_0 d}{\lambda g d'(d-d_1)} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi d}{\lambda g d'(d-d_1)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}'\right] t(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (13.24)$$



**FIG. 13.9.** Le point  $S'_1$  est l'image de  $S'$  à travers l'objectif représenté par ses points (et plans) principaux ( $H_1$  et  $H'_1$ ) et son foyer objet ( $F_1$ ).

### 13.2.4 Défaut de mise au point de l'image d'un objet cohérent

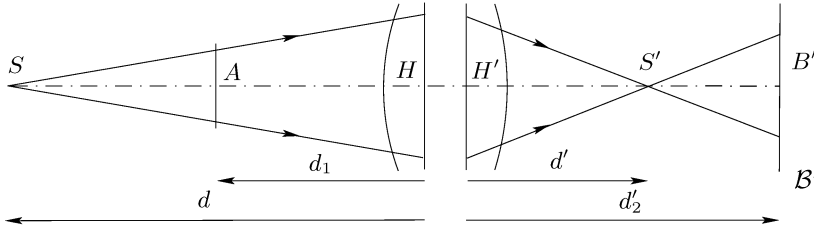
Nous considérons à nouveau l'objet du paragraphe 13.2.1, éclairé par une onde divergente, mais nous cherchons le champ dans un plan  $\mathcal{B}'$  de l'espace image, quelconque, passant par le point  $B'$ , différent de  $A'$  (fig. 13.10). Les notations sont celles du paragraphe 13.2 et  $d'_2 = \overline{H'B'}$ .

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  (l'image cohérente de  $\mathcal{A}$ ) est

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{d_1}{d'_1} U_A\left(\frac{\mathbf{r}' d_1}{d'_1}\right). \quad (13.25)$$

Rappelons que  $U_A(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r})$ . Le rayon de courbure de  $\mathcal{A}'$  se déduit de la loi de grandissement des rayons de Bonnet, qui prend la forme

$$R_{A'} = \frac{d' d'_1}{d d_1} R_A = \frac{d' d'_1}{d d_1} (d - d_1). \quad (13.26)$$



**FIG. 13.10.** On cherche l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{B}'$  qui passe par le point  $B'$  à la distance  $d'_2$  de  $H'$ .

Le transfert du champ de  $\mathcal{A}'$  à  $\mathcal{B}'$  s'effectue par diffraction Fresnel et s'exprime sous la forme [Transfert général]

$$U_{B'}(\mathbf{s}') = \frac{iU_0}{\lambda(d'_2 - d'_1)} \exp\left[\frac{i\pi \mathbf{s}'^2}{\lambda(d'_1 - d'_2)}\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi \mathbf{r}'^2}{\lambda} \left(\frac{1}{d'_2 - d'_1} - \frac{1}{R_{A'}}\right)\right] \\ \times \exp\left[\frac{2i\pi \mathbf{s}' \cdot \mathbf{r}'}{d'_2 - d'_1}\right] U_{A'}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (13.27)$$

La relation (13.14) reste vraie et elle permet d'exprimer  $d'_1$  en fonction de  $d$ ,  $d'$  et  $d_1$ . En faisant la même chose avec le rayon  $R_{A'}$  à partir de la relation (13.26) et en utilisant la relation (13.25), on arrive à exprimer  $U_{B'}(\mathbf{s}')$  en fonction des données du problème;  $d$ ,  $d'$ ,  $d_1$ ,  $d'_2$  et  $t$ .

Une méthode alternative consiste à introduire la sphère  $\mathcal{B}$  dont le plan  $\mathcal{B}'$  est l'image cohérente. On passe de l'émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ , défini comme au paragraphe 13.2, à  $\mathcal{B}$  par diffraction de Fresnel (en général), et on applique l'imagerie cohérente pour déduire enfin l'amplitude du champ sur  $\mathcal{B}'$ .

### 13.3 Calculs de courbures de phase

Les calculs de ce paragraphe sont valables dans des conditions de stigmatisme (au moins approché) et dans le cadre métaxial. Ils permettent d'évaluer les erreurs de phase commises quand on néglige la courbure des images ou des sphères de Fourier et de définir des tolérances sur la position et la courbure des émetteurs.

#### 13.3.1 Courbure de l'image cohérente d'un émetteur sphérique

Cette courbure est directement donnée par la loi du grandissement des rayons de Bonnet. Si  $\mathcal{A}'$  (sommet  $S'$ , centre de courbure  $C'$ , rayon  $R_{A'}$ ) est l'image cohérente de l'émetteur  $\mathcal{A}$  (sommet  $S$ , centre  $C$ , rayon de courbure  $R_A$ ) à travers le système centré  $\mathcal{S}$  alors

$$\frac{R_{A'}}{R_A} = \frac{n'}{n} g_s g_c, \quad (13.28)$$

où  $g_s$  est le grandissement transversal aux sommets et  $g_c$ , aux centres de courbure.

**Système afocal.** Si le système  $\mathcal{S}$  est afocal, le grandissement transversal est  $g = g_c = g_s$  (il est constant). Soit  $\mathbf{r}$  un point de l'objet et soit  $\mathbf{r}'$  son image ( $\mathbf{r}' = g\mathbf{r}$ ). L'écart de phase, dû à la courbure, qui existe entre  $\mathbf{r}$  et le sommet de l'objet, ou plus précisément entre le point  $\mathbf{r}$  de la sphère  $\mathcal{A}$  et sa projection sur le plan tangent à la sphère en son sommet, est

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{\lambda R_A} r^2, \quad (13.29)$$

l'origine de la phase étant prise sur le plan tangent.

Pour l'image, la différence de phase, due à la courbure, entre  $\mathbf{r}'$  et sa projection sur le plan tangent en  $\mathcal{A}'$  en son sommet est  $\varphi_{A'}(\mathbf{r}')$  telle que

$$\varphi_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{\pi}{\lambda' R_{A'}} r'^2 = \frac{\pi n}{n' \lambda' R_A g^2} r'^2 = \frac{\pi}{\lambda R_A} r^2 = \varphi_A(\mathbf{r}). \quad (13.30)$$

Un système afocal conserve les phases quadratiques (en deux points conjugués).

**Système à foyers.** Avec les mêmes notations que précédemment, les écarts de phase  $\varphi_A(\mathbf{r})$  et  $\varphi_{A'}(\mathbf{r}')$  par rapport aux plans tangents à  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  en leur sommet vérifient

$$\varphi_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{\pi}{\lambda' R_{A'}} r'^2 = \frac{\pi n}{n' \lambda' g_s g_c R_A} g_s^2 r^2 = \frac{g_s}{g_c} \varphi_A(\mathbf{r}). \quad (13.31)$$

### 13.3.2 Courbure de la sphère de Fourier image

Soient un système centré  $\mathcal{S}$  et un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ , de sommet  $S$  et centre  $C$ . La sphère de Fourier image est l'image  $\mathcal{F}'$  de la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$ . Elle passe par  $C'$  (l'image paraxiale de  $C$ ) et son centre de courbure est  $S'$  (l'image paraxiale de  $S$ ). C'est aussi la sphère de Fourier de  $\mathcal{A}'$ , la sphère image de  $\mathcal{A}$ .

La loi du grandissement des rayons de Bonnet donne

$$\frac{R_{F'}}{R_F} = \frac{R_{A'}}{R_A} = \frac{n'}{n} g_s g_c. \quad (13.32)$$

**Système afocal.** Si le système est afocal, de grandissement transversal  $g$ , alors  $R_{F'} = (n'/n)g^2 R_F = -(n'/n)g^2 R_A$ . Cela conduit cependant à des phases quadratiques égales, en valeur absolue, sur l'objet et sur la sphère de Fourier image (les différences de phases sont prises par rapport aux plans tangents aux sommets); cela se comprend en raisonnant comme suit. Soit  $\mathbf{r}$  un point de l'objet  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{r}' = g\mathbf{r}$  son image. Soit  $\mathbf{s}$  un point de la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{s}' = g\mathbf{s}$  son image. Nous comparons les écarts de phase dus aux courbures pour  $s = r$  et  $s' = r'$  (conditions plus générale que  $\mathbf{s} = \mathbf{r}$  et  $\mathbf{s}' = \mathbf{r}'$ ). Sur l'objet  $\mathcal{A}$

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{\lambda R_A} r^2, \quad (13.33)$$

et sur  $\mathcal{F}'$

$$\varphi_{F'}(\mathbf{s}') = \frac{\pi}{\lambda' R_{F'}} s'^2 = \frac{\pi n}{n' \lambda' R_F} s^2 = -\frac{\pi}{\lambda R_A} r^2 = -\varphi_A(\mathbf{r}). \quad (13.34)$$

Ce résultat est une conséquence de celui établi au paragraphe 13.3.1 pour un système afocal.

**Objet plan et système à foyers.** Le rayon de l'objet est infini et la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  est à l'infini. La sphère  $\mathcal{F}'$  est centrée en  $S'$  et passe par le foyer image  $F'$  de l'objectif. Son rayon de courbure est  $R_{F'} = \overline{F'S'}$ . Si  $f'$  est la distance focale image de l'objectif et  $f$  la distance focale objet, la formule de conjugaison de Newton donne

$$R_{F'} = \overline{F'S'} = \frac{ff'}{\overline{FS}}. \quad (13.35)$$

Sur la sphère  $\mathcal{F}'$ , l'écart de phase par rapport au plan focal est

$$\varphi_{F'}(s') = \frac{\pi}{\lambda' R_{F'}} s'^2 = \frac{\pi \overline{FS}}{\lambda' f f'} s'^2. \quad (13.36)$$

### 13.3.3 Phase quadratique dans le plan focal d'un objectif

Dans la situation décrite au paragraphe 13.1, la transformée de Fourier de l'amplitude sur  $\mathcal{T}$  s'observe sur la sphère de Fourier  $\mathcal{F}'$  (fig. 13.2). Le rayon de courbure de cette sphère est  $R_{F'} = \overline{F'T'}$  et le calcul donne  $\overline{F'T'} = -88,9$  mm. Cette distance (mesure algébrique) est la distance focale objet de l'objectif  $\mathcal{L}_3$  qui permet de « redresser » le champ.

Imaginons vouloir augmenter la taille du spectre à l'aide d'un système afocal comme au paragraphe 13.1.3. Nous supposons ôté l'objectif  $\mathcal{L}_3$ . Quelle est la courbure de phase dans le plan  $\mathcal{P}'''$ ? L'image de la sphère  $\mathcal{F}'$  est la sphère  $\mathcal{F}''$  tangente à  $\mathcal{P}'''$  et de rayon  $R_{F''} = \overline{P'''T''}$ , où  $T''$  est l'image de  $T'$  à travers le système afocal (ou encore de  $T$  à travers l'ensemble constitué du téléobjectif et du système afocal). Pour évaluer ce rayon de courbure, il n'est pas nécessaire de calculer la position de  $T''$  : il suffit d'appliquer la loi du grandissement des rayons de Bonnet ; le grandissement  $g_a$  du système afocal étant constant, cette loi s'écrit

$$\frac{R_{F''}}{R_{F'}} = g_{t'} g_{f'} = g_a^2 = \frac{f_5'^2}{f_4'^2}, \quad (13.37)$$

où  $g_{t'}$  désigne le grandissement transversal pour la conjugaison de  $T'$  et  $T''$ , et  $g_{f'}$  pour les sommets des sphères  $\mathcal{F}'$  et  $\mathcal{F}''$ . Comme on cherche à augmenter les dimensions du spectre, on a  $f_5' > f_4'$  (si on emploie des objectifs convergents) et  $|R_{F''}| > |R_{F'}|$  : on obtient le spectre sur une sphère de plus grand rayon de courbure. On n'a cependant rien gagné en termes de déphasage si on raisonne comme au paragraphe 13.3.1 pour un système afocal.

La compensation de cette phase s'obtient comme au paragraphe 13.1, à l'aide de l'objectif  $\mathcal{L}_3$ , ou bien encore dans le plan  $\mathcal{P}'''$  à l'aide d'un objectif  $\mathcal{L}_6$ , de distance focale  $f_6' = g_a^2 f_3'$ .

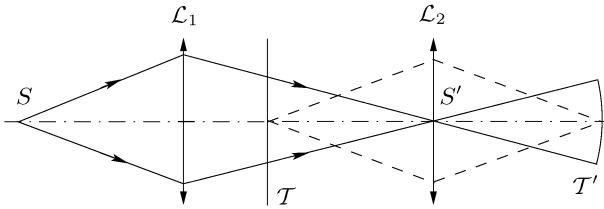
### 13.3.4 Localisation du centre de courbure d'une image

Il résulte de la notion d'émetteur sphérique équivalent et de la double conjugaison par imagerie cohérente la propriété suivante.

**Proposition 13.3.1.** *Soit un objet plan transparent  $\mathcal{T}$ , éclairé par une onde lumineuse issue d'une source  $S$  quasi ponctuelle. L'image de  $\mathcal{T}$  à travers un système optique centré est une calotte sphérique  $\mathcal{T}'$  centrée en  $S'$ , l'image (paraxiale) de  $S$  à travers le système. Plus précisément, si  $t$  est la fonction de transmission de  $\mathcal{T}$ , c'est sur  $\mathcal{T}'$  que, dans l'espace image, l'amplitude du champ est égale à  $t$ , au grandissement près.*

**Remarque 13.3.1.** La proposition 13.3.1 est vraie pour un système à foyers comme pour un système afocal (le centre de courbure de l'image est alors à l'infini : l'image est plane).

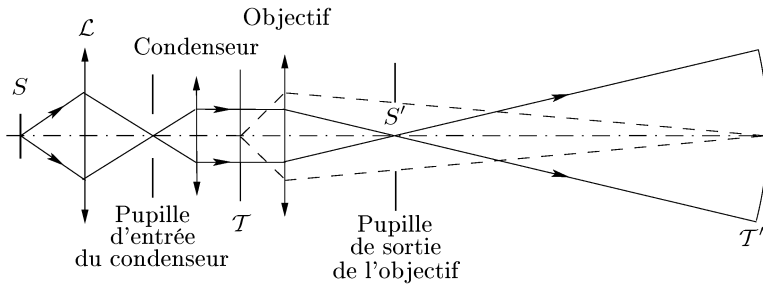
**Exemple 13.3.1.** La figure 13.11 illustre la proposition 13.3.1. L'objectif  $\mathcal{L}_1$  (représenté comme une lentille mince) forme l'image de la source  $S$  en  $S'$ , sur l'objectif  $\mathcal{L}_2$ . La transparence  $\mathcal{T}$ , éclairée par une onde convergente, est équivalente à un émetteur sphérique centré en  $S'$ . Son image à travers  $\mathcal{L}_2$  est  $\mathcal{T}'$ , centrée en  $S'$ . La position de  $\mathcal{T}'$  se calcule par l'optique géométrique paraxiale.



**FIG. 13.11.** L'image de la transparence  $\mathcal{T}$ , éclairée par la source  $S$ , est une calotte sphérique  $\mathcal{T}'$  centrée sur l'image  $S'$  de la source. Ici c'est  $\mathcal{L}_2$  qui forme l'image de  $\mathcal{T}$ . Le point  $S'$  est sa propre image à travers  $\mathcal{L}_2$ .

**Exemple 13.3.2 (Éclairage Köhler).** Ce type d'éclairage est utilisé en microscopie. La source  $S$  (fig. 13.12) est en général incohérente spatialement et temporellement. Cependant l'éclairage Köhler fournit un éclairage partiellement cohérent (spatialement) sur l'objet  $\mathcal{T}$ , supposé plan. En effet, un premier objectif  $\mathcal{L}$  (tous les objectifs sont représentés comme des lentilles minces pour simplifier le schéma) projette la source sur la pupille d'entrée du condenseur et fournit une source secondaire dont les dimensions sont celles de cette dernière pupille : cela revient à régler les dimensions de la source et donc sa cohérence spatiale. La pupille d'entrée du condenseur se trouve au foyer objet de celui-ci, de telle sorte que la pupille de sortie du condenseur est à l'infini ; elle se confond avec la pupille d'entrée de l'objectif du microscope, elle-même à l'infini. La source  $S$  a finalement une image  $S'$  située dans le plan de la pupille de sortie de l'objectif de microscope. L'image  $\mathcal{T}'$  de  $\mathcal{T}$  est une calotte sphérique centrée en  $S'$ .

Les courbures des différentes calottes sphériques satisfont les conditions d'application du théorème 4 p. 221. Si la pupille d'entrée du condenseur est assez petite, l'éclairage de  $\mathcal{T}$  est pratiquement cohérent spatialement. Le résultat du théorème 4 reste vrai en spectre étroit.



**FIG. 13.12.** Éclairage Köhler en microscopie.

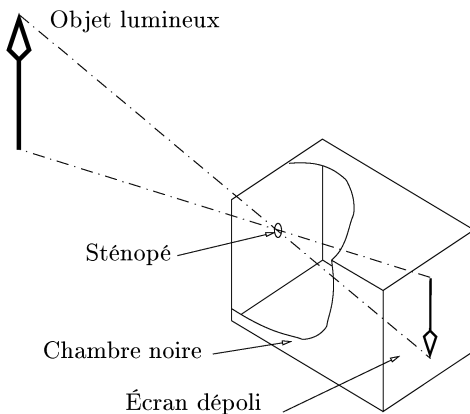
Dans la pratique, la courbure de l'image est faible à cause des dimensions transversales de l'image, elles-mêmes relativement faibles.

Une analyse plus complète de la formation des images en microscopie sous éclairage Köhler exige de tenir compte de la cohérence partielle induite par cet éclairage. On la trouve par exemple dans l'ouvrage de Maréchal et Françon [157], mais bien sûr en termes classiques.

## 13.4 Théorie du sténopé

### 13.4.1 Chambre noire

Un sténopé est un orifice percé dans un écran, qui permet la formation d'une image sur la paroi d'une chambre noire. Cette image est observée en général sur un écran dépoli (fig. 13.13).



**FIG. 13.13.** Observation de l'image formée à l'aide d'un sténopé sur l'écran d'une chambre noire. (La chambre noire est représentée découpée pour rendre le sténopé apparent.)

**Remarque 13.4.1.** La chambre noire et le sténopé étaient connus dans la Chine antique, c'est-à-dire au IV<sup>e</sup> ou III<sup>e</sup> siècle avant notre ère [227]. L'Égyptien

Ibn al-Haytham (Alhazen) s'en servait au début du XI<sup>e</sup> siècle en astronomie ; Roger Bacon (XII<sup>e</sup> siècle) les a utilisés pour observer une éclipse de Soleil [227]. Si on remplace le dépoli par une émulsion photographique et ajoute un obturateur (par exemple près du sténopé), on obtient une chambre photographique. Cela fut fait au XIX<sup>e</sup> siècle. On améliore les conditions de prise de vue (contrôle de l'exposition) et la qualité de l'image en remplaçant le sténopé par un objectif : on obtient un appareil photographique (ou caméra) moderne. De nos jours on remplace l'émulsion par un détecteur électronique (*CCD* par exemple).

Les sténopés sont utilisés dans le domaine des rayons X, et certaines techniques de codage et de traitement d'images permettent d'améliorer leurs performances [76, 209].

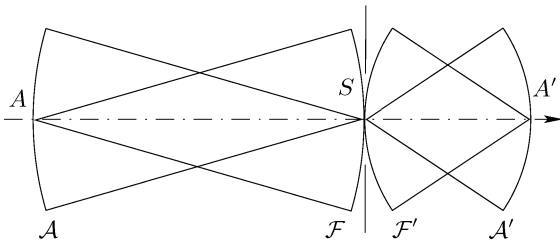
### 13.4.2 Image géométrique et image physique

Considérons la figure 13.14 : la sphère  $\mathcal{F}$  est la sphère de Fourier de l'émetteur  $\mathcal{A}$  (sommet  $A$ ). Le récepteur est la sphère  $\mathcal{A}'$  (sommet  $A'$ ) dont la sphère de Fourier est  $\mathcal{F}'$ . Nous supposons  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  concentriques (centre  $S$ ), si bien que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont tangentes. Nous notons  $d = \overline{SA}$  et  $d' = \overline{S'A'}$  et prenons des variables  $r$  sur  $\mathcal{A}$ ,  $r'$  sur  $\mathcal{A}'$  et  $s$  sur  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ .

Si nous ne plaçons aucun obstacle en  $S$ , le transfert du champ de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{A}'$  se compose de deux transformations de Fourier optiques (de  $\mathcal{A}$  à  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{F}'$  à  $\mathcal{A}'$ ) et d'une transparence de courbure de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{F}'$ . Cette transparence de courbure opère après la première transformation de Fourier et avant la seconde. Pour cette raison, le transfert du champ ne se réduit pas à la composition de deux transformations de Fourier. Or c'est bien la composition des deux transformations de Fourier qui conduirait à écrire l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  comme étant identique à l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}$ , à un facteur d'homothétie près (grandissement transversal).

Il n'y a donc pas formation d'une image (l'espace est supposé homogène). Toutefois nous apercevons ce qu'il faudrait faire pour que l'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  soit identique à celle du champ sur  $\mathcal{A}$  : il faudrait pouvoir négliger la transparence de courbure entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Cette dernière s'écrit

$$T(s) = \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{d'} - \frac{1}{d} \right) s^2 \right]. \quad (13.38)$$



**FIG. 13.14.** Éléments pour l'analyse de la formation d'une image par un sténopé placé en  $S$ .

Nous adoptons le critère suivant :  $T(\mathbf{s})$  est négligeable si on peut l'approcher par 1, ce qui a lieu si les variations de la phase sont inférieures à  $\pi/2$  (Rayleigh) – soit une différence de chemin optique inférieure à  $\lambda/4$ . Cette condition est remplie si

$$s \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left| \frac{\lambda d d'}{d - d'} \right|} = \sqrt{\frac{\lambda d d'}{2(d - d')}}. \quad (13.39)$$

(L'égalité de la relation (13.39) résulte de nos conventions :  $d < 0$  et  $d' > 0$ . En particulier  $d - d'$  n'est jamais nul.)

Plaçons en  $S$  un écran percé d'un trou (sténopé) de diamètre  $\phi$  tel que

$$\phi = \sqrt{\frac{2\lambda d d'}{d - d'}}, \quad (13.40)$$

si bien que la condition (13.39) est remplie pour tous les points du sténopé.

Nous analysons la formation d'une image en deux temps. Nous négligeons d'abord la diffraction du sténopé et ne considérons que le rôle de ce dernier sur la réduction à 1 du terme de phase quadratique. Cela peut sembler artificiel mais maintient le parallèle avec l'étude de la formation d'une image par un objectif, menée au chapitre 4 (ouverture illimitée), puis au chapitre 8 (rôle de la pupille).

Nous écrivons

$$U_F(\mathbf{s}) = -\frac{i}{\lambda d} \widehat{U}_A\left(-\frac{\mathbf{s}}{\lambda d}\right), \quad (13.41)$$

et grâce à la relation (13.40) nous obtenons  $U_{F'}(\mathbf{s}) \approx U_F(\mathbf{s})$ , si bien que

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{i}{\lambda d'} \widehat{U}_{F'}\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda d'}\right) = \frac{d}{d'} \widehat{U}_A\left(-\frac{d}{d'} \mathbf{r}'\right) = \frac{d}{d'} U_A\left(\frac{d}{d'} \mathbf{r}'\right). \quad (13.42)$$

Ainsi  $\mathcal{A}'$  est l'image cohérente de  $\mathcal{A}$ , le grandissement transversal étant égal à  $d'/d$ .

Nous obtenons de cette façon l'équivalent de ce que nous avons baptisé « image géométrique » au chapitre 8. Nous écrivons  $U_{AG}$  l'amplitude de cette image et remplaçons la relation (13.42) par

$$U_{AG}(\mathbf{r}') = \frac{d}{d'} U_A\left(\frac{d}{d'} \mathbf{r}'\right). \quad (13.43)$$

Puisque nous disposons d'une image géométrique, nous poursuivons l'analyse en reproduisant l'étude menée au chapitre 8 et tenons compte de la diffraction produite par le sténopé. Ce dernier joue le rôle de la pupille : il est représenté par la fonction pupille  $p$ , et la formation de l'image fait intervenir le gain complexe (ou réponse percussionnelle spatiale)  $h$  défini par

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2 d'^2} \widehat{p}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda d'}\right), \quad (13.44)$$

conformément à la relation (8.16).

Finalement l'amplitude de l'image formée par le sténopé s'écrit

$$U_{A'} = U_{AG} * h. \quad (13.45)$$

### 13.4.3 Image formée en éclairage incohérent

Le calcul est celui du paragraphe 8.3.1. Soient  $\mathcal{B}$  un émetteur incohérent placé en  $A$ , et  $\mathcal{B}'$  un récepteur placé en  $A'$ . L'éclairement de l'image géométrique de  $\mathcal{B}$  est

$$I_{BG}(\mathbf{r}') = \frac{d^2}{d'^2} I_B \left( \frac{d}{d'} \mathbf{r}' \right), \quad (13.46)$$

et celui de l'image physique

$$I_{B'} = I_{BG} * |h|^2. \quad (13.47)$$

Nous concluons par les commentaires suivants.

1. L'image d'un objet incohérent, formée par un sténopé, n'est pas localisée : quelle que soit la position de l'objet (et sa courbure), il se forme une image (plane) à une distance arbitraire.
2. Pour qu'une image se forme, le diamètre du sténopé doit être lié à la distance de l'objet au sténopé et du sténopé à l'écran d'observation de façon à ce que la relation (13.40) soit satisfaite. En particulier le diamètre du sténopé peut être relativement grand – par exemple quelques centimètres – si les distances  $d$  et  $d'$  sont elles-mêmes grandes<sup>2</sup>. Ce qui compte, c'est la variation du chemin optique entre l'objet et l'image. Plus précisément, si  $I$  est un point du sténopé, les variations du chemin optique  $[AIA']$  doivent être d'un ordre supérieur à 2 par rapport à  $SI$ , de telle sorte que s'applique le principe de Fermat : le chemin optique  $[AIA']$  est constant au deuxième ordre, condition de la formation d'une image.
3. La relation (13.40) fixe une borne supérieure au diamètre du sténopé pour la formation d'une image. Cette relation contient une part d'arbitraire, puisque fondée sur le critère de Rayleigh. Mais inversement, il ne faut pas que le diamètre  $\phi$  soit trop petit. Examinons le cas limite d'un sténopé infiniment petit. On doit remplacer la relation  $U_{F'}(\mathbf{s}) \approx U_F(\mathbf{s})$  par

$$U_{F'}(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}) \delta(\mathbf{s}) = U_F(0) \delta(\mathbf{s}). \quad (13.48)$$

Il en résulte, par transformation de Fourier, que  $U_{A'}(\mathbf{r}')$  est constant. Il y a diffraction par un trou quasiment ponctuel : l'onde émergente est une onde sphérique. Il ne se forme pas d'image !

<sup>2</sup> Le trou d'une serrure est un sténopé. On peut parfaitement observer sur la paroi (claire) d'une pièce sans ouverture autre que la serrure de sa porte la scène extérieure. (L'observateur est dans la chambre noire ; l'image est en couleurs... et à l'envers !)

4. Le point précédent est lié à la qualité de l'image formée par le sténopé. La figure 13.14 montre qu'il y a filtrage des fréquences spatiales par le sténopé. Le module d'une fréquence spatiale de l'objet transmise par le sténopé est majoré par  $\phi/|\lambda d|$ . Il lui correspond un module de fréquence spatiale  $F'$ , sur l'image, égal à  $\phi/\lambda d'$ . Si l'on tient compte de la relation (13.40) on obtient

$$F' \leq \sqrt{\frac{2d}{\lambda d'(d-d')}}. \quad (13.49)$$

5. Le résultat précédent s'exprime en termes de résolution. La résolution angulaire du sténopé circulaire de diamètre  $\phi$  est (exprimée dans l'espace image)

$$\alpha'_0 = 1,22 \frac{\lambda}{\phi}, \quad (13.50)$$

conformément à la relation (8.74). (Ici la longueur d'onde est la même dans l'espace objet et dans l'espace image.) Si le diamètre du sténopé est choisi selon la relation (13.40), la relation (13.50) conduit à

$$\alpha'_0 = 1,22 \sqrt{\frac{\lambda(d-d')}{2dd'}}. \quad (13.51)$$

6. Comparons le sténopé à un objectif, ou plus simplement une lentille mince, placée en  $S$ . Le rôle de la lentille n'est autre que de transformer la courbure de  $\mathcal{F}$  et de superposer  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ , c'est-à-dire d'imager  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Cela a lieu si la lentille compense le terme de phase quadratique  $T(s)$ . Compte tenu de la relation (4.55), la lentille doit satisfaire la relation

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{d'} - \frac{1}{d}, \quad (13.52)$$

qui indique que  $A'$  est l'image (paraxiale) de  $A$ . On perd bien sûr avec la lentille la propriété du sténopé de former une image à toute distance. L'analyse de la formation de l'image par la lentille repose sur la relation (13.41) et sur la relation  $U_{F'}(s) = U_F(s)$ , qui devient rigoureuse (si on ne tient pas compte des aberrations) ; c'est encore l'analyse du chapitre 8.

On conclut qu'à petite ouverture, la lentille est inutile ! Le sténopé offre la résolution d'une lentille de même diamètre que lui. L'intérêt d'un objectif est la formation d'une image avec des ouvertures plus grandes que celle autorisée par un sténopé et qui ne satisfaisaient plus la condition (13.40). Cela est favorable d'un point de vue photométrique ainsi que pour la résolution (dans la mesure où les aberrations sont corrigées).

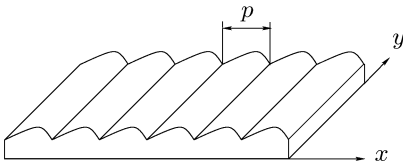
## 13.5 Spectrométrie instrumentale : spectromètres à réseaux

Il peut paraître surprenant d'illustrer l'optique de Fourier par la spectrométrie<sup>3</sup> instrumentale. En quoi l'optique de Fourier intervient-elle dans ce domaine ? Eh bien d'abord par l'intermédiaire de la diffraction : la résolution d'un spectromètre, qu'il soit à réseau ou à prisme, dépend de la dimension de sa pupille, et cela à cause de la diffraction. En outre, à y regarder de plus près, on constate que la fonction d'appareil de l'instrument<sup>4</sup> n'est autre que la fonction de corrélation des fentes d'entrée et de sortie de l'instrument. C'est, au fond, une généralisation du résultat établi pour les pupilles d'entrée et de sortie d'un objectif (en éclairage incohérent) dont les fentes du spectromètre jouent le rôle. Enfin, et de façon générale, la théorie des signaux et systèmes s'applique avec une bonne approximation à la description des spectromètres, et la transformation de Fourier y tient encore un rôle important.

Ce paragraphe n'est qu'une brève introduction à la spectrométrie instrumentale. On trouve des explications complémentaires dans des livres spécialisés [30].

### 13.5.1 Réseau de diffraction

Certains réseaux de diffraction sont étudiés au chapitre 5 : il s'agit de réseaux en transmission comportant des ouvertures périodiques percées dans un écran ; nous les qualifions de réseaux binaires. On conçoit plus généralement des réseaux de divers profils, en transmission ou en réflexion. Un réseau par réflexion est, de fait, un miroir dont la surface présente un profil périodique (figure 13.15). De façon imagée, on parle de « sillons » tracés sur la surface du miroir ; on dit aussi « lignes » ou « traits » (voir le paragraphe 5.4.1). L'étude commence ici par un réseau de dimensions infinies ; les effets de la limitation de la surface du réseau sont pris en compte par la suite.



**FIG. 13.15.** Schéma d'un réseau de diffraction en réflexion. La lumière, qui arrive par le haut, se réfléchit sur la surface supérieure.

<sup>3</sup> On rencontre aussi le terme de spectroscopie. La différence réside dans le récepteur employé pour détecter la lumière. On parle de spectroscopie si le récepteur est l'œil humain, ou plus généralement une émulsion photographique qui enregistre le spectre sous la forme d'une image (constituée par exemple par des raies spectrales). En spectrométrie, le récepteur est un détecteur de flux (en général il enregistre les variations temporelles du flux).

<sup>4</sup> C'est-à-dire sa réponse percutieuse, dans la mesure où l'instrument est considéré comme un filtre linéaire. Ce point sera précisé par la suite.

Avec des coordonnées  $x$  et  $y$  dans le plan du réseau, la fonction de réflexion s'écrit comme la répétition d'un motif  $m$  sous la forme ( $q$  est un nombre entier)

$$r(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} m * \delta_{qp}(x) = \frac{1}{p} m * \sqcup\sqcup_p(x), \quad (13.53)$$

où  $p$  est la période (ou pas) du réseau et où le produit de convolution porte sur la seule variable  $x$  (le motif  $m$  est une fonction d'une seule variable, définie sur l'intervalle  $] -p/2, p/2[$ ; des exemples sont donnés à la fin de ce paragraphe).

L'analyse de Fourier permet d'écrire

$$\widehat{r}(F_x, F_y) = \widehat{m}(F_x) \sqcup\sqcup_{1/p}(F_x) \delta(F_y). \quad (13.54)$$

Si une onde plane monochromatique d'amplitude  $U_0$  arrive sur le réseau sous incidence normale, l'amplitude réfléchie s'écrit<sup>5</sup>

$$U(x, y) = \frac{U_0}{p} m * \sqcup\sqcup_p(x), \quad (13.55)$$

et son spectre angulaire se déduit de la relation (13.54) sous la forme

$$\begin{aligned} V_{\perp}(\alpha, \beta) &= \frac{U_0}{\lambda^2} \widehat{m}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \sqcup\sqcup_{1/p}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \delta\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \\ &= \frac{U_0}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \widehat{m}\left(\frac{q\lambda}{p}\right) \delta\left(\alpha - \frac{q\lambda}{p}\right) \delta(\beta), \end{aligned} \quad (13.56)$$

où l'indice  $\perp$  indique que l'incidence est normale.

L'onde réfléchie est une superposition d'ondes planes, chacune d'elles se propageant dans une direction particulière. L'ordre de diffraction  $q$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) correspond au terme  $\delta[\alpha - (q\lambda/p)] \delta(\beta)$  de la somme de la relation (13.56), c'est-à-dire à l'onde plane qui se propage dans la direction de cosinus directeurs  $q\lambda/p$  et 0, ou encore, de fréquence angulaire ( $q\lambda/p, 0$ ). L'amplitude de cette onde est proportionnelle à  $\widehat{m}(q\lambda/p)$ .

En jouant sur le profil du réseau<sup>6</sup>, on favorise certains ordres comme le montre la relation (13.56). Par exemple, un réseau « échellette » diffracte dans une seule direction, de telle sorte que toute l'énergie lumineuse est diffractée dans un même ordre (voir l'exercice 13.3, p. 405).

**Exemple 13.5.1 (Réseau en réflexion à profil sinusoïdal).** Le profil du réseau est décrit sur l'intervalle  $] -p/2, p/2[$  par la fonction

<sup>5</sup> Cette écriture suppose le réseau assez mince pour que tout effet d'épaisseur soit négligeable. Le réseau est vu comme une « boîte noire », et nous écrivons l'amplitude du champ en sortie de cette boîte, en fonction de celle d'entrée. Nous ignorons la forme que prend l'amplitude du champ dans les creux des sillons; son étude relève de théories plus élaborées, fondées directement sur les équations de Maxwell, et s'appuie sur des méthodes de résolution numériques.

<sup>6</sup> C'est-à-dire en choisissant bien la fonction  $m$  ou plus précisément sa transformée de Fourier  $\widehat{m}$ .

$$f(x) = e_0 \cos 2\pi \frac{x}{p}, \quad (13.57)$$

où  $e_0$  est une constante homogène à une longueur. Si le réseau est dans le vide, l'écart de chemin optique que subit, à l'abscisse  $x$ , l'onde incidente dans une réflexion est  $\delta(x) = 2f(x)$ , si bien que le motif du réseau s'écrit, pour la longueur d'onde  $\lambda$ ,

$$m(x) = \text{rect}_p(x) \exp \left[ -\frac{4i\pi e_0}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{p} \right]. \quad (13.58)$$

**Exemple 13.5.2 (Réseau échelle).** Le profil du réseau est donné sur l'intervalle  $] -p/2, p/2[$  par la fonction

$$f(x) = e_0 \frac{x}{p}, \quad (13.59)$$

et le motif s'écrit

$$m(x) = \text{rect}_p(x) \exp \left[ -\frac{4i\pi e_0 x}{\lambda p} \right]. \quad (13.60)$$

### 13.5.2 Formule des réseaux

Si l'incidence n'est pas normale, l'amplitude de l'onde incidente s'écrit sous la forme

$$U_i(x, y) = U_0 \exp \left[ -\frac{2i\pi \alpha_0 x}{\lambda} \right], \quad (13.61)$$

à condition de supposer que la normale à l'onde incidente est dans le plan perpendiculaire à la direction  $y$ . L'introduction d'un terme de phase linéaire se traduit par une rotation globale du spectre calculé au paragraphe précédent (cela est vrai pour de petits angles, comme dans l'exemple 2.3.1 p. 37). L'onde plane associée à l'ordre  $q$  se propage suivant la direction  $\alpha_0 + q\lambda/p$ . Si  $V_\perp$  est le spectre angulaire obtenu pour l'incidence normale, le spectre angulaire de l'onde émergente correspondant à l'onde donnée par la relation (13.61) est

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta) &= V_\perp * \delta_{\alpha_0, 0}(\alpha, \beta) \\ &= \frac{U_0}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \hat{m} \left( \alpha_0 + \frac{q\lambda}{p} \right) \delta \left( \alpha - \alpha_0 - \frac{q\lambda}{p} \right) \delta(\beta). \end{aligned} \quad (13.62)$$

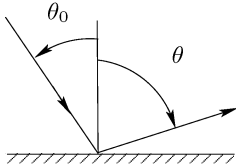
Il y a des interférences constructives dans la direction associée à  $\alpha$  si

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{q\lambda}{p}. \quad (13.63)$$

Pour obtenir la formule des réseaux sous sa forme habituelle, nous désignons par  $\theta_0$  l'angle d'incidence et  $\theta$  l'angle de réflexion, l'origine étant la normale (figure 13.16). Alors  $\alpha_0 = -\sin \theta_0$  et  $\alpha = \sin \theta$ , et la relation (13.63) s'écrit

$$\sin \theta + \sin \theta_0 = \frac{q\lambda}{p}, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (13.64)$$

La relation (13.64) est la « formule des réseaux ». Le signe négatif qui apparaît dans la relation  $\alpha_0 = -\sin \theta_0$  résulte de la convention adoptée pour l'orientation des angles (voir la figure 13.16). L'ordre 0 correspond à un angle de réflexion  $\theta = -\theta_0$ , cas de la réflexion spéculaire.



**FIG. 13.16.** Définition de l'angle d'incidence  $\theta_0$  et de l'angle de diffraction  $\theta$  pour un réseau en réflexion.

**Remarque 13.5.1.** La relation (13.64) a été établie sans aucune hypothèse quant au profil du réseau, c'est-à-dire indépendamment de la fonction  $m$ . La seule approximation fut de supposer un réseau mince, assimilable à une transparence mince, propriété utilisée implicitement dans la relation (13.53).

### 13.5.3 Résolution intrinsèque

La résolution d'un réseau de diffraction – on dit aussi résolution – se rapporte au plus petit intervalle  $\Delta\lambda_m$  qu'il est possible de détecter. Au voisinage de la longueur d'onde  $\lambda$ , la résolution est  $\mathcal{R}$ , définie par

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_m}. \quad (13.65)$$

La résolution intrinsèque se définit de la façon suivante. Pour une direction d'incidence fixée, la relation (13.64) donne

$$\cos \theta \, d\theta = \frac{q \, d\lambda}{p}, \quad (13.66)$$

puis

$$\cos \theta \, \Delta\theta = \frac{|q| \, \Delta\lambda}{p}, \quad (13.67)$$

de telle façon que l'intervalle spectral minimum détectable  $\Delta\lambda_m$  est directement lié à l'intervalle angulaire minimum perceptible  $\Delta\theta_m$ .

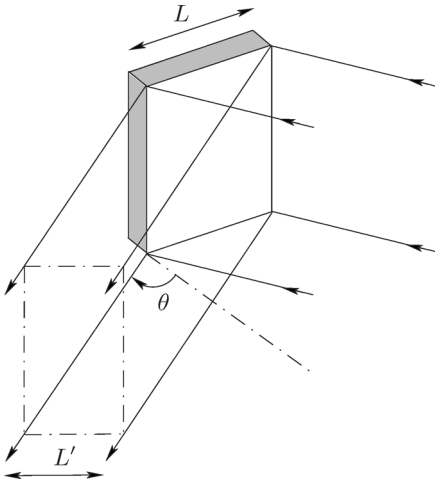
Si nous ne prenons pas en compte les phénomènes de diffraction relatifs aux dimensions finies du réseau, l'emploi d'un objectif de grande distance focale permettrait, selon les lois de l'optique géométrique, de distinguer un  $\Delta\theta_m$  arbitrairement petit : deux directions séparées angulairement de  $\Delta\theta_m$  sont focalisées dans le plan focal en deux points séparés de la distance  $f' \Delta\theta_m$ . Cette

distance pourrait être rendue supérieure à la limite de résolution du détecteur par le choix d'une distance focale  $f'$  assez grande. En réalité, cela n'est pas possible à cause de la diffraction : chaque faisceau se propageant dans une direction donnée possède une certaine étendue angulaire ; les deux foyers précédents sont à remplacer par deux taches lumineuses dont les dimensions (linéaires) augmentent proportionnellement à la distance focale<sup>7</sup>.

Soit  $L$  la largeur du réseau (supposé de forme rectangulaire) suivant la dimension perpendiculaire aux sillons. Pour l'incidence  $\theta_0$ , l'angle de diffraction est  $\theta$ , et pour les phénomènes relatifs à l'ouverture du réseau, tout se passe comme si ce dernier avait une largeur apparente  $L' = L \cos \theta$  (voir la figure 13.17). La figure de diffraction due à la largeur limitée du réseau se représente par la fonction

$$h(\theta) = L'^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi L' \theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi L' \theta}{\lambda}\right)^2}, \quad (13.68)$$

qui correspond à une ouverture rectangulaire de largeur  $L'$  (nous ne raisonnons que sur une seule dimension, celle selon laquelle le réseau disperse la lumière).



**FIG. 13.17.** Pour l'étude de l'influence de la diffraction, tout se passe comme si le réseau, de largeur  $L$ , avait une largeur apparente  $L' = L \cos \theta$ .

Si, pour fixer les idées, nous choisissons comme critère de résolution le critère de Rayleigh, tel que le maximum en  $\theta$  corresponde au minimum de la valeur voisine juste discernable, alors

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{L'}. \quad (13.69)$$

<sup>7</sup> Cela en supposant stigmatique l'objectif de focalisation. La situation réelle est encore pire que celle décrite : on doit tenir compte, en plus, de l'ouverture limitée de l'objectif et de l'élargissement des taches focales qui en résulte.

La relation (13.67) donne

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_m} = \frac{|q|L'}{p \cos \theta} = |q|N, \quad (13.70)$$

où  $N$  est le nombre de lignes du réseau.

Il se trouve cependant que la relation (13.70) n'est pas tout à fait satisfaisante dans la mesure où  $q$  et  $N$  ne sont pas indépendants ; de fait les relations (13.64) et (13.70) conduisent à

$$\mathcal{R} = |\sin \theta + \sin \theta_0| \frac{L}{\lambda}. \quad (13.71)$$

La résolution  $\mathcal{R}$  apparaît majorée par la résolution intrinsèque (ou théorique) du réseau qui est

$$\mathcal{R}_{\max} = \frac{2L}{\lambda}. \quad (13.72)$$

Sous la forme de la relation (13.72), la résolution théorique dépend essentiellement de la largeur du réseau, et cela est dû à la diffraction. De là l'importance pratique qu'il y a à recouvrir entièrement le réseau par le faisceau d'éclairage. Si on ne procède pas ainsi, le réseau fonctionne en deçà de ses capacités, une fois de plus à cause de la diffraction : en n'éclairant qu'une portion du réseau, on travaille avec une pupille réduite, ce qui augmente la largeur de la figure de diffraction, donnée par la relation (13.68).

Une autre conséquence de ce qui précède est que le nombre de sillons (de lignes) d'un réseau n'est pas le paramètre le plus important pour ce qui est de la résolution. L'exercice 13.4 p. 406 présente un réseau particulier, connu comme le réseau échelon de Michelson : il offre une haute résolution tout en ayant un nombre réduit d'échelons [29, 40]. L'avantage d'un grand nombre de lignes réside plutôt dans l'augmentation de l'intervalle spectral libre comme il est expliqué au prochain paragraphe.

#### 13.5.4 L'intervalle spectral libre

Considérons de nouveau la relation (13.64) et fixons la valeur de  $\theta_0$ . À chaque valeur de  $q$  correspond un spectre dont l'ordre est précisément  $q$ . Il arrive que la condition (13.64) soit satisfaite pour une même valeur de  $\theta$  et deux longueurs d'ondes différentes  $\lambda$  et  $\lambda'$ . Les ordres correspondants sont  $q$  et  $q'$  tels que

$$q\lambda = p(\sin \theta + \sin \theta_0) = q'\lambda'. \quad (13.73)$$

Une ambiguïté apparaît : un détecteur placé là où on observe le spectre produit une réponse telle qu'il est impossible de distinguer un rayonnement à la longueur d'onde  $\lambda$  d'un rayonnement à  $\lambda'$ . Cela vient de ce que le détecteur est sensible au seul éclairage (de façon imagée, on peut dire que le détecteur

ne voit pas les couleurs). L'ambiguïté disparaît si l'on sait *a priori* dans quelle partie du spectre on observe (autour de  $\lambda$  ou de  $\lambda'$ ). La longueur du plus petit intervalle pour lequel il n'y a pas d'ambiguïté est l'intervalle spectral libre.

Il est habituel en spectroscopie d'utiliser comme variable le nombre d'ondes  $\sigma$  au lieu de la longueur d'onde. Le nombre d'ondes  $\sigma$  est

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}, \quad (13.74)$$

et est proportionnel à la fréquence (temporelle) de l'onde<sup>8</sup>. Si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont comme dans la relation (13.73) nous caractérisons l'intervalle entre  $\lambda$  et  $\lambda'$  par

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{q - q'}{p(\sin\theta + \sin\theta_0)}. \quad (13.75)$$

L'intervalle spectral libre, noté  $\Delta\sigma_{\min}$ , correspond au minimum de  $|\Delta\sigma|$  et se trouve en faisant  $|q' - q| = 1$  ( $q$  et  $q'$  sont des entiers), de telle sorte que

$$\Delta\sigma_{\min} = \frac{1}{p|\sin\theta_0 + \sin\theta|}. \quad (13.76)$$

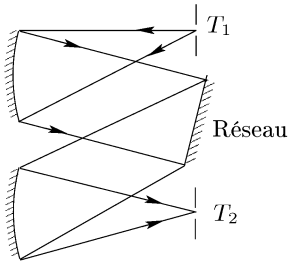
On obtient un grand intervalle spectral libre en choisissant  $p|\sin\theta_0 + \sin\theta|$  petit. Pour avoir, en plus, une grande résolution dans cette circonstance, il faut disposer d'un grand nombre de sillons. En effet si  $p|\sin\theta_0 + \sin\theta|$  est petit, selon la relation (13.73) l'ordre  $q$  est petit, et la relation (13.70) montre que la résolution ne peut être élevée que si le nombre de sillons  $N$  est grand. Si un grand intervalle libre n'est pas indispensable, c'est-à-dire si on travaille au voisinage d'une longueur d'onde connue, il est possible d'obtenir une grande résolution avec peu de sillons (réseau de Michelson).

### 13.5.5 Influence de la largeur des fentes

Il existe un autre phénomène qui influe sur la résolution d'un spectromètre. Considérons le montage de la figure 13.18 où un réseau de diffraction est éclairé par une onde plane formée par un objectif catadioptrique à partir d'une fente  $T_1$  (de largeur  $L_1$ ) placée dans le plan focal de l'objectif. (L'intérêt des objectifs

<sup>8</sup> Il s'agit du nombre d'ondes comme le définissent les spectroscopistes. Il est proportionnel à  $k = 2\pi/\lambda$ . Les raisons de ce choix sont historiques : pour passer des longueurs d'ondes, accessibles aux mesures optiques, aux fréquences, qui intéressent les spectroscopistes, il faut connaître la vitesse de la lumière. Au début du xx<sup>e</sup> siècle la précision sur celle-ci était inférieure à celle des longueurs d'ondes et tout l'avantage de mesures optiques précises était perdu quand on passait à la fréquence. Le nombre d'ondes est proportionnel à la fréquence avec cet avantage que sa précision relative est la même que celle obtenue sur la longueur d'onde. Aujourd'hui ces raisons ne tiennent plus puisque la vitesse de la lumière est exacte par définition ; mais l'habitude demeure de se référer au nombre d'ondes. Mentionnons enfin qu'en spectroscopie, le nombre d'ondes  $\sigma$  est souvent mesuré en  $\text{cm}^{-1}$  ou kayser [40].

catadioptriques est de ne pas présenter de chromatisme.) Les traits du réseau sont perpendiculaires au plan de la figure. Le système forme l'image de la fente  $T_1$  sur la fente  $T_2$  (de largeur  $L_2$ ) dans le plan focal image du second objectif. Le système formé par des deux objectifs est afocal, si bien que l'image de la fente plane  $T_1$  est plane. Pour simplifier nous supposons un grandissement transversal  $g = -1$  entre  $T_1$  et  $T_2$ .



**FIG. 13.18.** Schéma de principe d'un spectromètre à fentes à réseau de diffraction plan. Les traits du réseau sont perpendiculaires au plan de la figure. Les deux miroirs concaves se comportent comme deux objectifs convergents.

Le flux lumineux qui passe à travers le système est proportionnel à l'aire commune à  $T_2$  et à l'image de  $T_1$  et, si on suppose que les fentes ont la même hauteur (dimension perpendiculaire au plan de la figure), il est proportionnel à

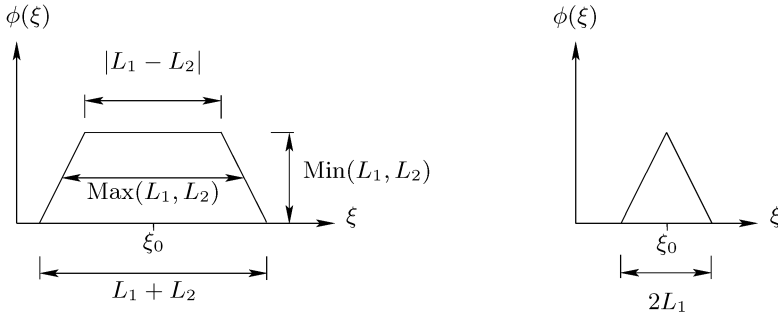
$$\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \text{rect}_{L_1}(\xi') \text{rect}_{L_2}(\xi' - \xi) d\xi', \quad (13.77)$$

où  $\xi$  est la coordonnée du plan  $T_2$  suivant la direction de dispersion<sup>9</sup>. Le flux est nul quand l'image de  $T_1$  n'a aucune partie commune avec  $T_2$  et il est maximum quand le centre de  $T_1$  coïncide avec le centre de  $T_2$  (cette coïncidence dépend de la longueur d'onde, à cause de la dispersion). Plus généralement, le flux lumineux est proportionnel à la fonction d'intercorrélation des fentes.

La fonction  $\phi$  est la réponse de l'instrument à une onde monochromatique et pour cela elle joue le rôle de réponse percussionnelle. Pour les deux fentes  $T_1$  et  $T_2$  de même hauteur et de largeurs respectives  $L_1$  et  $L_2$  le graphe de la fonction  $\phi(\xi)$  a la forme d'un trapèze (fig. 13.19). Le trapèze est centré à l'abscisse  $\xi_0$ , laquelle peut s'étalonner en longueur d'onde (l'origine de l'axe  $\xi$  est sur l'ordre 0 de diffraction). Pour un flux lumineux donné, la résolution optimale s'obtient quand le trapèze se réduit à un triangle comme nous allons l'expliquer.

Ce qui précède est valable pour une longueur d'onde  $\lambda$ . L'abscisse  $\xi_0$  correspond au point où le second objectif focalise une onde plane dont l'amplitude est de la forme  $\exp[-2i\pi q\alpha x/\lambda]$ , où  $q$  est l'ordre de diffraction et  $\alpha$  une constante (angulaire) qui dépend de la dispersion du réseau. Si on éclaire l'instrument à l'aide d'une onde de longueur d'onde  $\lambda'$ , l'amplitude immédiatement après le réseau correspondant à l'ordre  $q$  est

<sup>9</sup> L'origine des coordonnées est prise au foyer de l'ordre 0 de diffraction.



**FIG. 13.19.** Réponse percussive d'un spectromètre à fentes rectangulaires de largeur  $L_1$  et  $L_2$ . Si  $L_1 \neq L_2$ , la figure est un trapèze (partie gauche) et le flux lumineux détecté est proportionnel au minimum de  $L_1$  et  $L_2$ . La largeur à mi-hauteur est proportionnelle à  $\text{Max}(L_1, L_2)$ . La résolution optimale, pour un même flux, s'obtient quand  $L_1 = L_2$ , c'est-à-dire quand le trapèze devient un triangle (partie droite).

$$U(x, y) = U_0 \exp \left[ -\frac{2i\pi q \alpha x}{\lambda'} \right], \quad (13.78)$$

et l'onde se focalise dans le plan de  $T_2$  à l'abscisse

$$\xi'_0 = \frac{\lambda'}{\lambda} \xi_0. \quad (13.79)$$

Nous écrivons  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$  et nous obtenons

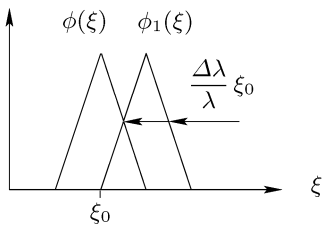
$$\xi'_0 = \xi_0 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \xi_0. \quad (13.80)$$

Le flux correspondant se représente par une fonction  $\phi_1(\xi)$  qui n'est autre que  $\phi(\xi)$  mais translatée. Nous avons

$$\phi_1(\xi) = \phi \left( \xi - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \xi \right). \quad (13.81)$$

La figure (13.20) représente la limite de résolution quand  $\phi$  est une fonction « triangle ».

La résolution optimale s'obtient pour une fonction  $\phi$  triangulaire parce que le triangle est le trapèze de largeur minimale (prise à mi-hauteur, et pour une



**FIG. 13.20.** Résolution d'un spectromètre. Suivant le critère choisi, la limite de résolution correspond à la largeur à mi-hauteur de la réponse percussive.

hauteur donnée). On déduit de la comparaison des figures 13.19 et 13.20 que la limite de résolution  $\Delta\lambda$  est telle que

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{L_1}{\xi_0}. \quad (13.82)$$

L'abscisse  $\xi_0$  dépend de l'ordre de diffraction et de la capacité dispersive du réseau. Pour une valeur de  $\xi_0$  donnée, la résolution du spectromètre dépend de la largeur des fentes. Des fentes étroites donnent une meilleure résolution mais ne laissent passer qu'un faible flux lumineux si bien qu'en pratique il faut chercher un compromis entre résolution et flux transmis.

**Remarque 13.5.2.** Baptiser la fonction  $\phi$  (ou plus généralement la fonction en trapèze déjà rencontrée) réponse percussionnelle situe l'approche suivie dans le cadre de la théorie des signaux et systèmes et suppose qu'un spectromètre soit un filtre linéaire. Cela exige de satisfaire un critère de stationarité. Il s'agit ici de stationarité en nombre d'ondes, c'est-à-dire que la fonction d'appareil doit être la même sur tout le spectre pour être effectivement une réponse percussionnelle. Cela serait rigoureusement vrai si la dispersion du réseau (ou du prisme) était la même sur tout le domaine spectral étudié. En toute rigueur, il s'agit d'une approximation, légitime en première approche. Décrire un spectromètre comme un filtre linéaire est fructueux : ce rapprochement autorise de transposer à la spectrométrie instrumentale les méthodes de la théorie des signaux et systèmes. C'est déjà ce que nous avons fait implicitement.

Cette approche conduit à caractériser un spectromètre par une convolution : la réponse donnée par l'appareil est le produit de convolution de l'entrée (en général la luminance d'une source) et de la réponse percussionnelle.

### 13.5.6 Raies spectrales fantômes

Une des difficultés de fabrication des réseaux de diffraction vient de la nécessité de produire un grand nombre de lignes parallèles régulièrement espacées. On utilise pour cela une vis mère qui permet de déplacer l'outil qui grave le réseau. Un défaut de cette vis se traduit par un défaut de périodicité du réseau, l'écart à la période étant d'ailleurs lui-même périodique. Cela ne se rencontre pratiquement plus sur les réseaux modernes<sup>10</sup>, grâce à un contrôle interférométrique très précis du déplacement de l'outil de gravure, mais l'étude du phénomène présente un intérêt dans la mesure où elle illustre encore l'emploi de la transformation de Fourier en optique.

Imaginons que le pas  $p$  d'un réseau de motif  $m$  varie périodiquement, à la période  $p'$  ; celle-ci est un multiple entier de  $p$ . On suppose  $p' \gg p$ , c'est-à-dire que les défauts de périodicité sont à « variations (spatiales) lentes » à l'échelle de  $p$ .

On traduit le défaut par une surmodulation de la fonction de réflexion du réseau, de la forme

<sup>10</sup> D'autant qu'on fabrique des réseaux en enregistrant des franges d'Young dans un matériau photosensible. On parle de réseaux holographiques.

$$1 + \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} m'(x - jp) = 1 + \frac{1}{p'} m' * \sqcup\sqcup_{p'}(x), \quad (13.83)$$

où la fonction  $m'$  traduit l'écart à la périodicité du réseau. Le défaut étant faible, on a

$$\max_x |m'(x)| \ll 1. \quad (13.84)$$

La fonction de réflexion du réseau devient<sup>11</sup>

$$r'(x, y) = r(x, y) \left[ 1 + \frac{1}{p'} m' * \sqcup\sqcup_{p'}(x) \right] = r(x, y) + \varepsilon(x, y), \quad (13.85)$$

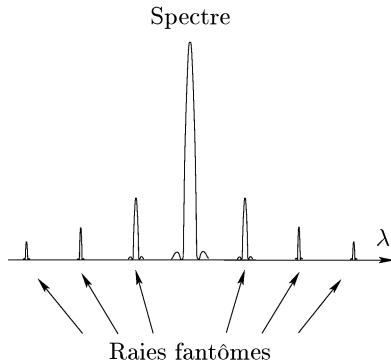
où

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{pp'} [m * \sqcup\sqcup_p(x)] [m' * \sqcup\sqcup_{p'}(x)]. \quad (13.86)$$

Le spectre du réseau est celui du réseau sans défaut auquel s'ajoute un spectre décrit par  $\hat{\varepsilon}$  : c'est le spectre fantôme<sup>12</sup>. On a

$$\hat{\varepsilon}(F_x, F_y) = [(\hat{m} \sqcup\sqcup_{1/p}) * (\hat{m}' \sqcup\sqcup_{1/p'})](F_x) \delta(F_y). \quad (13.87)$$

Le spectre fantôme (en amplitude) s'obtient par produit de convolution du spectre sans défaut avec les distributions de Dirac de la fonction  $\hat{m}' \sqcup\sqcup_{1/p'}$ . Comme  $p' \gg p$ , les supports de ces dernières distributions sont plus serrés que ceux des distributions de Dirac du spectre du réseau sans défaut. Ainsi dans le spectre fantôme, chaque raie du spectre sans défaut, décrite par un terme de



**FIG. 13.21.** Les raies fantômes se présentent par paires. Elles sont symétriques par rapport à la raie spectrale produite par le réseau sans défaut (raie centrale).

<sup>11</sup> La méthode suivie ici convient seulement si  $m(x)$  ne s'annule pas. Cette hypothèse est satisfaite pour les réseaux par réflexion pour lesquels la fonction de réflexion est une exponentielle ; voir les exemples 13.5.1 et 13.5.2 p. 394.

<sup>12</sup> Dans l'analyse spectrale d'une source, les raies du spectre fantôme sont dues aux défauts du réseau et ne correspondent pas à des raies d'émission de la source différentes de celle donnée par le réseau sans défaut ; d'où leur nom.

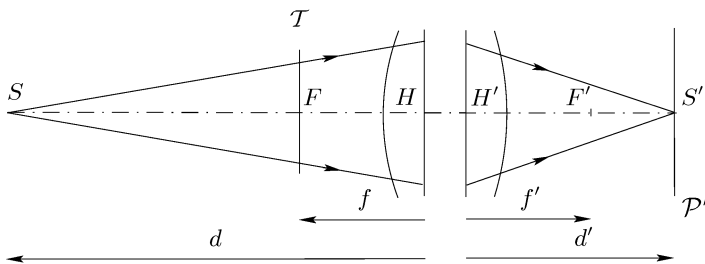
la somme  $\widehat{m} \sqcup \sqcup_{1/p}$ , est remplacée par une série de raies décrites par  $\widehat{m}' \sqcup \sqcup_{1/p'}$ . La fonction  $m' * \sqcup \sqcup_{p'}$  est d'autre part périodique et à valeurs réelles : son spectre d'amplitude, composé de raies discrètes, a la symétrie hermitienne et son spectre en énergie est symétrique. On explique ainsi que les raies fantômes se présentent toujours par paires (fig. 13.21) : elles sont deux à deux symétriques par rapport à la raie spectrale produite par le réseau sans défaut.

**Exemple 13.5.3.** Supposons  $m'(x) = m_0 \sin 2\pi x/p'$ , avec  $m_0 \ll 1$ . À chaque raie spectrale du spectre sans défaut s'ajoutent deux raies latérales. De  $m_0 \ll 1$ , on déduit que l'intensité vibratoire des raies fantômes est faible (par rapport à celle des raies du spectre sans défaut).

## 13.6 Exercices

**Exercice 13.1.** On considère le montage de la figure 13.22 où un objectif forme l'image d'une source monochromatique  $S$  en  $S'$ . L'onde issue de la source éclaire une transparence plane  $\mathcal{T}$  placée dans le plan focal objet de l'objectif.

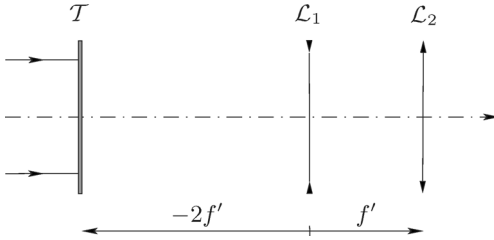
1. Calculer l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{P}'$  passant par  $S'$ . (Le problème abordé ici est un cas particulier de celui exposé au paragraphe 13.2. Il s'agit de le résoudre directement, sans appliquer les résultats plus généraux obtenus au paragraphe 13.2 ; l'idée est d'utiliser le fait que l'objet passe par le foyer objet de l'objectif.)
2. De nombreux ouvrages attribuent aux objectifs (aux lentilles !) la capacité d'exécuter une transformation de Fourier qui opère (en général) sur l'amplitude du champ dans le plan focal objet ; l'amplitude transformée s'observe dans le plan focal image. Cela est-il compatible avec le résultat obtenu à la question 1 ? Que faut-il préciser pour pouvoir attribuer cette propriété (magique !) aux objectifs ?



**FIG. 13.22.** Une transparence plane  $\mathcal{T}$  est placée dans le plan focal objet d'un objectif et éclairée par une onde divergente issue de la source  $S$ . On cherche l'amplitude du champ dans le plan de l'image de la source.

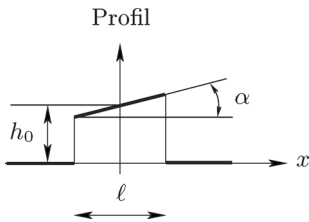
**Exercice 13.2.** Soit le système optique centré  $\mathcal{L}$  de la figure 13.23, composé d'une lentille divergente  $\mathcal{L}_1$ , de focale  $f'_1$ , et d'une lentille convergente  $\mathcal{L}_2$ , de focale  $f'_2$ . On suppose  $f'_1 = -f'_2 = -f' < 0$ . Un objet  $\mathcal{T}$  placé à la distance  $-2f'$  de  $\mathcal{L}_1$  est éclairé par une onde plane<sup>13</sup>.

1. Où se forme l'image de l'objet  $\mathcal{T}$  ?
2. Où se trouve le « plan » de Fourier de  $\mathcal{T}$  ? (Après passage à travers le système.)



**FIG. 13.23.** Il s'agit de trouver le plan de Fourier de la transparence plane  $\mathcal{T}$  éclairée par une onde plane.

**Exercice 13.3 (Réseau « échelle »).** Examen de DEA, université de Bretagne occidentale, Brest, 1998. Soit une transparence en verre dont le profil est donné par la figure 13.24. L'indice de réfraction du verre est  $n$  à la longueur d'onde  $\lambda$  et celui de l'air vaut 1 (à supposer qu'on se place dans l'air).



**FIG. 13.24.** Profil d'une lame de verre.

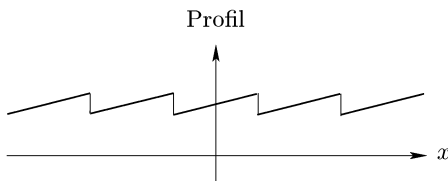
1. Montrer que pour un éclairage à la longueur d'onde  $\lambda$ , la fonction de transmission de la transparence s'écrit sous la forme

$$t(x, y) = a \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\ell}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi bx}{\lambda}\right),$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes à calculer.

<sup>13</sup> Nous nous permettons de reproduire un exercice proposé dans la deuxième édition du livre de Goodman [97] (c'est l'exercice 5-10, p. 123. Nous avons légèrement adapté l'énoncé).

2. Donner le schéma d'un montage optique qui permet d'observer la transformée de Fourier optique de  $t$ . Faire le calcul explicite (coordonnées  $x', y'$  dans le « plan » de Fourier).
3. On obtient un réseau échellette en périodisant la transparence précédente comme le montre la figure 13.25 (ici le réseau est en transmission alors qu'il est plus fréquent d'utiliser un réseau en réflexion. Les propriétés sont les mêmes). On observe le spectre du réseau à l'aide du montage de la question précédente. Comment choisir  $b$  pour n'obtenir qu'un seul ordre de diffraction ? (On suppose pour le moment que le réseau est infini.)
4. Que se passe-t-il si la largeur du réseau (suivant  $x$ ) est  $L$  ? (On suppose que  $L$  est un multiple de  $\ell$ .) Tracer l'allure du spectre.
5. On utilise le montage de transformation de Fourier des questions antérieures, mais à une longueur d'onde  $\lambda'$  différente de  $\lambda$ . On suppose cependant que  $\lambda'$  est assez proche de  $\lambda$  pour que la condition sur  $b$  reste pratiquement satisfaite pour  $\lambda'$ . Indiquer, à l'aide d'un schéma, ce qui se passe.
6. On utilise le réseau précédent à des fins spectrométriques : le réseau est un instrument dispersif. Que peut-on dire de la résolution (en longueur d'onde) du réseau ? Expliquer en quoi la résolution dépend de  $L$ .
7. On suppose encore que  $b$  est adapté à  $\lambda$ . Mais on suppose aussi que  $\lambda'$  est une longueur d'onde quelconque (pas nécessairement voisine de  $\lambda$ ). Montrer qu'il existe des valeurs de  $\lambda'$ , différentes de  $\lambda$ , pour lesquelles la condition sur  $b$  est rigoureusement valide. Que peut-on en déduire quant à l'usage du réseau en spectrométrie ?
8. Quel est l'avantage d'un réseau échellette sur un réseau composé de  $N$  ouvertures comme dans l'exercice 5.10 ? (On suppose les deux réseaux de même largeur  $L$ .)



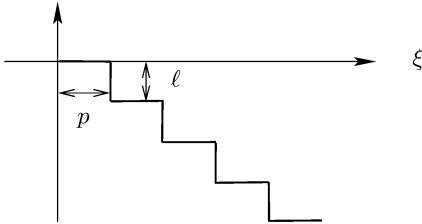
**FIG. 13.25.** Profil d'un réseau « échellette ».

**Exercice 13.4 (Échelon de Michelson).** *Examen de maîtrise de physique, université de Bretagne-Sud, Lorient, 2001.* On propose ici une approche élémentaire de l'échelon de Michelson, fondée sur l'optique de Fourier.

La figure 13.26 représente le profil d'un tel réseau, utilisé en réflexion (le réseau est supposé infini dans la direction non représentée) : la lumière arrive par le haut et se réfléchit sur les échelons. L'ensemble contient  $N = 30$  échelons de largeur  $p$  (c'est aussi le pas du réseau) et hauteur  $\ell$  (seuls les premiers échelons sont représentés).

On supposera ce réseau comme « plan », de façon à le considérer comme une transparence de fonction de réflexion  $r(\xi, \eta)$ . On place le réseau dans le plan focal objet d'un objectif convergent de focale  $f'$  (foyer objet  $F$ ), et l'éclaire sous incidence normale (fig. 13.27). On observe son spectre dans le plan focal de l'objectif (foyer image  $F'$ ). Le milieu ambiant est supposé être le vide (indice de réfraction égal à 1).

Le réseau est supposé éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  (dans les cinq premières questions) ou  $\lambda'$ .



**FIG. 13.26.** Profil d'un réseau échelon de Michelson.

1. On prend comme origine des phases le premier échelon, compris entre les abscisses 0 et  $p$ . Quel est le retard de phase correspondant à l'échelon défini sur l'intervalle  $[(m-1)p, mp]$ , où  $m = 1, \dots, N$  ?
2. Donner l'expression de la fonction de réflexion  $r(\xi, \eta)$  du réseau.
3. Quelle est l'amplitude du champ  $U$  dans le plan focal image de l'objectif ? (Coordonnées  $x$  et  $y$  dans ce plan, avec  $x$  parallèle à  $\xi$ .) Pour alléger l'écriture, on pourra éventuellement utiliser la notation

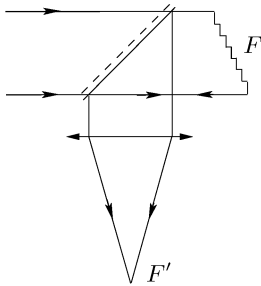
$$\Phi(x) = \frac{px}{\lambda f'} - \frac{2\ell}{\lambda}.$$

4. Quel est l'éclairement dans le plan focal image de l'objectif ? Quelle est la partie due à la diffraction, quelle est celle due aux interférences ? Tracer schématiquement le profil de cet éclairement pour  $y = 0$ .
5. À quelle condition portant sur  $\ell$  et  $\lambda$  a-t-on un maximum d'éclairement en  $x = 0$  ? Si  $q$  est l'ordre d'interférences, que vaut  $q$  dans ce cas ?
6. On suppose remplie la condition précédente pour la longueur d'onde  $\lambda$ . Quelle est la résolution du réseau à cette longueur d'onde ? [Indication : examiner ce qui se passe en  $x = 0$  pour une longueur d'onde voisine de  $\lambda$  :  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ . Fixer un critère de résolution et conclure.]

Application numérique. Donner la valeur de la résolution pour  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ,  $\ell = 5 \text{ mm}$ ,  $p = 6 \text{ mm}$ ,  $f' = 500 \text{ mm}$ .

7. On envoie sur le réseau (toujours sous incidence normale) une onde de longueur d'onde  $\lambda'$  voisine mais différente de  $\lambda$  :  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ . Calculer  $\Delta\lambda$  pour que l'ordre d'interférences soit égal à  $q-1$  pour la longueur d'onde  $\lambda'$ . En déduire l'intervalle spectral libre du réseau. Donner sa valeur numérique.

8. En fonction des valeurs trouvées pour la résolution et l'intervalle spectral libre, que peut-on en conclure sur l'usage pratique de ce type de réseau ? (C'est-à-dire : que permet-il d'étudier ?)



**FIG. 13.27.** Montage d'observation du spectre diffracté par un réseau échelon de Michelson.

**Exercice 13.5.** *Examen de maîtrise de physique, université de Bretagne-Sud, Lorient, 2000.* On considère un réseau de diffraction fonctionnant en réflexion, de largeur  $L = 8$  cm, comportant 560 traits par mm et monté comme l'indique la figure 13.28. La fente d'entrée est supposée infiniment fine.

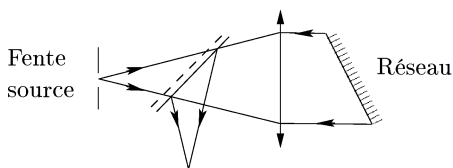
On souhaite analyser la lumière émise par des vapeurs de sodium dont le spectre visible comporte deux raies à  $\lambda_1 = 589,0$  nm et  $\lambda_2 = 589,6$  nm.

1. Si  $\theta_1$  est l'angle d'incidence et  $\theta_2$  l'angle de réflexion (pris par rapport à la normale au réseau), rappeler la formule des réseaux.
2. Quelle doit être l'inclinaison du réseau pour que la raie  $\lambda_1$  se forme au centre du champ pour le spectre d'ordre 3 ?
3. La distance focale de l'objectif étant  $f' = 2$  m, de quelle distance sont séparées les raies  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans le plan focal de l'objectif ?
4. En tenant compte de la largeur apparente du réseau, à l'incidence antérieure, et de la diffraction, exprimer la résolution angulaire du réseau. En déduire que la résolution du réseau se met sous la forme

$$\mathcal{R} = qN,$$

où  $q$  est l'ordre de diffraction et  $N$  le nombre de traits du réseau.

5. Déduire de la question précédente la largeur minimale que doit avoir le réseau pour résoudre les raies du sodium dans l'ordre 1.



**FIG. 13.28.** Montage d'observation du spectre diffracté par un réseau réfléchissant.

## Chapitre 14

# Propriétés des résonateurs optiques et des faisceaux gaussiens

Au chapitre 7, la théorie des résonateurs optiques et celle des faisceaux gaussiens sont abordées comme illustrations de la méthode de la transformation de Fourier fractionnaire : l'accent y est mis sur le rôle de cette transformation, et certains éléments des deux théories ne sont pas décrits. Le présent chapitre complète ainsi le chapitre 7 dont il conserve les notations.

### 14.1 Résonateurs optiques

#### 14.1.1 Analyse de la stabilité d'un résonateur optique

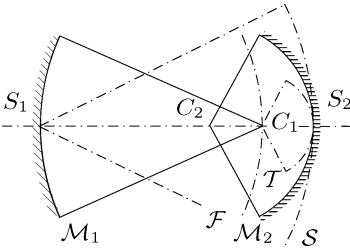
Selon la proposition 7.2.4 un résonateur optique est stable si, et seulement si, les amplitudes réduites sur les miroirs se correspondent dans une transformation de Fourier fractionnaire d'ordre réel. Or le paragraphe 6.2.2 contient une condition pour qu'un transfert par diffraction soit de cette nature : c'est la relation (6.52) ; appliquée à l'étude de la stabilité d'un résonateur, elle conduit à la proposition suivante.

**Proposition 14.1.1 (Caractérisation géométrique de la stabilité).** *Soit un résonateur optique constitué de deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Soit  $\mathcal{F}$  la sphère de Fourier de  $\mathcal{M}_1$ . Soient  $\mathcal{S}$  (courbure  $\mathfrak{C}_S$ ) et  $\mathcal{T}$  (courbure  $\mathfrak{C}_T$ ) les sphères tangentes à  $\mathcal{M}_2$  et centrées l'une sur  $\mathcal{M}_1$ , l'autre sur  $\mathcal{F}$ . Le résonateur est stable si, et seulement si, la courbure  $\mathfrak{C}_2$  de  $\mathcal{M}_2$  satisfait*

$$\text{Min}(\mathfrak{C}_S, \mathfrak{C}_T) \leq \mathfrak{C}_2 \leq \text{Max}(\mathfrak{C}_S, \mathfrak{C}_T). \quad (14.1)$$

La figure 14.1 (voir la figure 6.2 p. 169) illustre la proposition 14.1.1 : le résonateur est stable si, et seulement si,  $\mathcal{M}_2$  se trouve entre les sphères  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ . (La stabilité du résonateur s'analyse aussi à l'aide de la sphère de Fourier de  $\mathcal{M}_2$ , en échangeant les rôles de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .)

Si  $S_1$  et  $S_2$  désignent les sommets de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , et  $C_1$  et  $C_2$  leurs centres de courbure, une autre façon d'analyser la stabilité d'un résonateur, déduite de la relation (14.1) – voir l'exercice 6.2 – consiste à examiner comment sont ordonnés les éléments de l'ensemble  $\{S_1, S_2, C_1, C_2\}$  sur l'axe optique. Parmi les  $4! = 24$  possibilités, seules 12 sont différentes, parce que les miroirs jouent le même rôle. Il résulte de la proposition 14.1.1 qu'un résonateur est stable si, et



**FIG. 14.1.** Le résonateur est stable si, et seulement si, le miroir  $\mathcal{M}_2$  est compris entre les sphères  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ . C'est le cas sur la figure.

seulement si, les centres et les sommets des miroirs, indicés 1 et 2, sont alignés de telle sorte que les indices soient dans l'ordre 1212 (ou 2121 par symétrie).

Le tableau 14.1 indique les quatre quadruplets ordonnés pour un résonateur stable. Par symétrie, on obtient encore un résonateur stable si on échange les indices 1 et 2. Par exemple le quadruplet  $(S_1, S_2, C_1, C_2)$  donne le quadruplet  $(S_2, S_1, C_2, C_1)$ , qui est bien celui d'un résonateur stable ; cela correspond à l'échange des miroirs. Cela revient à lire de droite à gauche le quadruplet  $(C_1, C_2, S_1, S_2)$ , qui figure à la troisième ligne. Les quadruplets ordonnés du tableau 14.1 fournissent les résonateurs stables, qu'on les lise de gauche à droite ou de droite à gauche.

**TAB. 14.1.** Quadruplets ordonnés pour un résonateur stable.

$(S_1, S_2, C_1, C_2)$
$(C_2, S_1, S_2, C_1)$
$(C_1, C_2, S_1, S_2)$
$(S_2, C_1, C_2, S_1)$

**TAB. 14.2.** Quadruplets ordonnés pour un résonateur instable.

$(S_1, S_2, C_2, C_1)$	$(S_1, C_2, S_2, C_1)$
$(C_1, S_1, S_2, C_2)$	$(C_1, S_1, C_2, S_2)$
$(C_2, C_1, S_1, S_2)$	$(S_2, C_1, S_1, C_2)$
$(S_2, C_2, C_1, S_1)$	$(C_2, S_2, C_1, S_1)$

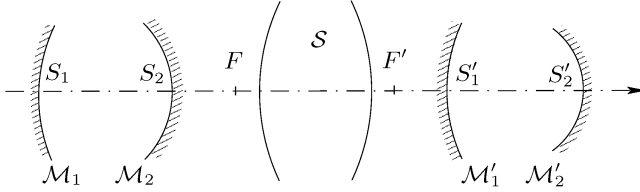
Le tableau 14.2 donne les quadruplets des résonateurs instables. Ici encore chaque quadruplet se lit de gauche à droite ou de droite à gauche, sans que l'instabilité ne soit modifiée. La colonne de gauche correspond à des résonateurs pour lesquels l'ordre de la transformation de Fourier fractionnaire associée au transfert du champ d'un miroir à l'autre est de la forme  $\alpha = i\beta$ , alors que la colonne de droite correspond à  $\alpha = \pi/2 + i\beta$ .

### 14.1.2 Imagerie et stabilité d'un résonateur

Soient  $\mathcal{M}'_1$  et  $\mathcal{M}'_2$  les images (cohérentes) des deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  d'un résonateur  $\mathcal{R}$  à travers un système optique  $\mathcal{S}$ . Les miroirs  $\mathcal{M}'_1$  et  $\mathcal{M}'_2$  forment un résonateur  $\mathcal{R}'$ , le résonateur image de  $\mathcal{R}$  (fig. 14.2).

**Proposition 14.1.2.** *Le résonateur image d'un résonateur  $\mathcal{R}$  est stable si, et seulement si,  $\mathcal{R}$  est stable.*

*Preuve.* Si le système optique  $\mathcal{S}$  qui forme l'image du résonateur est afocal, son grandissement est le même pour toutes les paires de points conjugués, si bien



**FIG. 14.2.** L'imagerie conserve la stabilité d'un résonateur. La figure représente un système optique à foyers ( $F$  et  $F'$ ), mais la propriété est également vraie pour les systèmes afocaux.

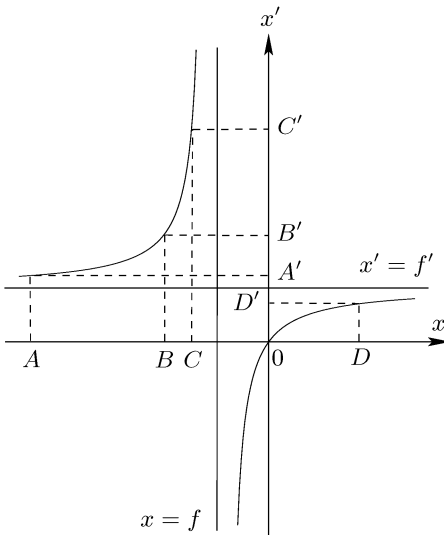
que le grandissement des rayons est positif. L'orientation d'un segment de l'axe optique est préservée par imagerie, et l'ordre des points  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  est aussi celui de leurs images  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $C'_1$  et  $C'_2$  : la stabilité de  $\mathcal{R}$  est conservée dans l'imagerie.

Si  $\mathcal{S}$  est un système à foyers (fig. 14.2), de distances focales  $f$  et  $f'$ , et si le point  $A'$  est l'image de  $A$ , la formule de conjugaison de Descartes s'écrit

$$\frac{n'}{x'} = \frac{n}{x} + \frac{n'}{f'}, \quad (14.2)$$

où  $n$  et  $n'$  sont les indices de réfraction de l'espace objet et de l'espace image et où  $x = \overline{HA}$  et  $x' = \overline{H'A'}$  ( $H$  et  $H'$  sont les points principaux de  $\mathcal{S}$ ). La relation (14.2) se met sous la forme

$$x' = \frac{n'x}{\frac{n'}{f'}x + n}, \quad (14.3)$$



**FIG. 14.3.** Homographie qui traduit la relation de conjugaison d'un système centré à foyers. Ici  $-f = f' > 0$ . Si  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont les images de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  dans l'homographie, leur ordre sur l'axe  $x'$  se déduit de  $(A', B', C', D')$  par une permutation circulaire. Par exemple sur le graphe, l'ordre est  $(D', A', B', C')$ .

qui révèle que  $x'$  est une fonction homographique de  $x$ . La figure 14.3 montre le graphe d'une telle fonction pour un système convergent ( $f' > 0$ ). Il y a deux asymptotes, d'équations  $x = f$  et  $x' = f'$ . L'image de  $] - \infty, f[$  est  $]f', +\infty[$  et l'image de  $]f, +\infty[$  est  $] - \infty, f'[$ ; l'homographie est croissante sur chacun de ces intervalles. Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points, pris dans cet ordre, sur l'axe  $x$  et soient  $A', B', C'$  et  $D'$  leurs images sur l'axe  $x'$ , obtenues par application de l'homographie, c'est-à-dire par conjugaison optique : l'ordre de ces points se déduit du quadruplet ordonné  $(A', B', C', D')$  par une permutation circulaire.

Il reste à appliquer cette propriété à l'ensemble  $\{S_1, S_2, C_1, C_2\}$  : l'ordre des images  $\{S'_1, S'_2, C'_1, C'_2\}$  sur l'axe optique se déduit de celui des points  $\{S_1, S_2, C_1, C_2\}$  par une permutation circulaire. L'examen des tableaux 14.1 et 14.2 montre que la stabilité du résonateur image est celle de  $\mathcal{R}$ .

Le raisonnement s'applique à un système optique divergent.  $\square$

### 14.1.3 Distance de Rayleigh. Détermination du col du résonateur

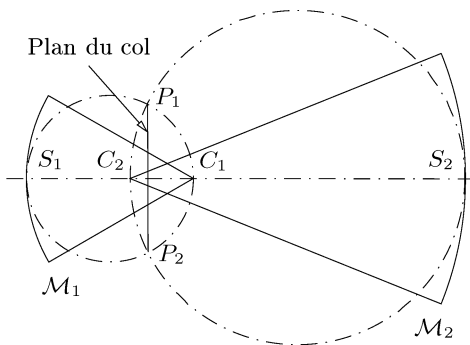
**Définition 14.1.1 (Distance de Rayleigh).** Si  $w_0$  est le rayon transversal du col d'un résonateur optique à la longueur d'onde  $\lambda$ , la distance de Rayleigh du résonateur est  $\zeta_0$ , telle que

$$\zeta_0 = \frac{\pi}{\lambda} w_0^2. \quad (14.4)$$

**Remarque 14.1.1.** Au chapitre 7, la notion de col s'applique à la fois aux résonateurs optiques (stables) et aux faisceaux gaussiens. Il en est de même de la distance de Rayleigh : le paragraphe 14.2 examine son rôle dans la théorie des faisceaux gaussiens.

#### Proposition 14.1.3 (Détermination graphique de la position du col).

Soit un résonateur stable constitué des miroirs  $\mathcal{M}_1$  (sommet  $S_1$ , centre  $C_1$ ) et  $\mathcal{M}_2$  (sommet  $S_2$ , centre  $C_2$ ). Le col du résonateur est situé dans le plan du cercle d'intersection des sphères  $S_1$  et  $S_2$  de diamètres  $S_1C_1$  et  $S_2C_2$  (fig. 14.4).



**FIG. 14.4.** Le plan du col du résonateur composé des miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  est le plan d'intersection des deux sphères de diamètres  $S_1C_1$  et  $S_2C_2$ . La longueur du segment  $P_1P_2$  vaut  $2\zeta_0$ , où  $\zeta_0$  est la distance de Rayleigh (voir la proposition 14.1.4).

**Proposition 14.1.4 (Détermination graphique du rayon transversal du col).** *Dans les conditions de la proposition 14.1.3, le rayon du cercle d'intersection des sphères  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  est égal à la distance de Rayleigh du résonateur, c'est-à-dire égal à  $\zeta_0 = \pi w_0^2/\lambda$ , où  $w_0$  est le rayon transversal du col (fig. 14.4).*

La preuve des propositions 14.1.3 et 14.1.4 est proposée en exercice (exercice 14.2).

## 14.2 Faisceaux gaussiens

La distance de Rayleigh caractérise un faisceau gaussien : ainsi les résultats exprimés au moyen du rayon transversal du col au paragraphe 7.3 se formulent à l'aide de ce paramètre. D'où les énoncés suivants.

**Définition 14.2.1 (Rayon transversal réduit).** *Si  $w_d$  est le rayon transversal d'un faisceau gaussien à la distance  $d$  du col, le rayon transversal réduit est  $\zeta_d$ , défini par*

$$\zeta_d = \frac{\pi}{\lambda} w_d^2. \quad (14.5)$$

La distance de Rayleigh apparaît comme le rayon transversal réduit du col. La relation (7.98) s'écrit

$$R_d = -d - \frac{\zeta_0^2}{d}, \quad (14.6)$$

et la relation (7.99)

$$\zeta_d = \zeta_0 + \frac{d^2}{\zeta_0}. \quad (14.7)$$

La relation (14.6) montre que le rayon de courbure de la surface d'onde d'un faisceau gaussien, dont le sommet est à la distance  $d$  du col, est déterminé par la distance de Rayleigh. Ainsi la géométrie du faisceau gaussien est entièrement déterminée par  $\zeta_0$ . Il existe toutefois une infinité de faisceaux gaussiens s'adaptant à cette géométrie : il en existe un pour chaque longueur d'onde.

Une conséquence immédiate des relations (14.6) et (14.7) et de la proposition 7.3.1 est :

**Proposition 14.2.1.** *La longueur d'onde étant donnée, un faisceau gaussien est entièrement défini par sa distance de Rayleigh.*

L'usage de la distance de Rayleigh  $\zeta_0$  et du rayon réduit  $\zeta = \pi w^2/\lambda$ , conduit à écrire respectivement les relations (7.101) et (7.102) sous la forme

$$\zeta_0 = \zeta \frac{1}{1 + \frac{\zeta^2}{R^2}}, \quad \text{et} \quad d = -\frac{R}{1 + \frac{R^2}{\zeta^2}}. \quad (14.8)$$

La proposition 7.3.2 devient :

**Proposition 14.2.2.** *La longueur d'onde étant donnée, il existe un seul faisceau gaussien ayant un rayon transversal réduit donné sur une calotte sphérique donnée.*

**Remarque 14.2.1 (Formule de « conjugaison » des cols).** Écrite avec la distance de Rayleigh comme paramètre, la relation (7.126) devient

$$qq' = \frac{ff'}{1 + \frac{\zeta_0^2}{q^2}}. \quad (14.9)$$

**Remarque 14.2.2.** Dans l'imagerie d'un faisceau gaussien par un système centré à foyers (§7.3.3), désignons par  $\zeta'_1$  la distance de Rayleigh du faisceau image :  $\zeta'_1 = (\pi/\lambda') w_1'^2$  ( $w_1'$  est le rayon du col). La relation (7.131) donne

$$\zeta'_1 = \frac{f^2\lambda}{\lambda'\zeta_0} \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\zeta_0^2}} = \frac{-ff'}{\zeta_0 \left(1 + \frac{q^2}{\zeta_0^2}\right)} = \frac{-ff'\zeta_0}{\zeta_0^2 + q^2}. \quad (14.10)$$

En particulier, si  $q = 0$ , on obtient, à la place des relations (7.137) et (7.139),

$$\zeta_0\zeta'_1 = -ff'. \quad (14.11)$$

## 14.3 Résonateurs instables

### 14.3.1 Trace d'une onde sphérique sur un miroir

Soit un miroir sphérique  $\mathcal{M}$  de rayon de courbure objet  $R$  et image  $R'$ . Examinons à quelles ondes correspond une amplitude de la forme

$$U_M(\mathbf{r}) = U_0 \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda\Delta} r^2 \right], \quad (14.12)$$

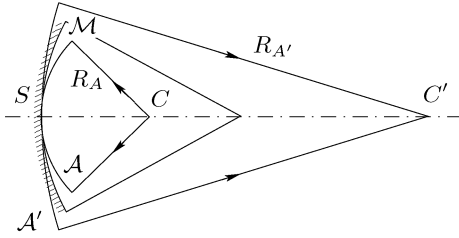
sur le miroir, où  $U_0$  est une constante dimensionnelle et  $\Delta$  une grandeur (algébrique) homogène à une longueur.

L'amplitude du champ sur une calotte sphérique  $\mathcal{A}$ , de rayon  $R_A$ , tangente à  $\mathcal{M}$ , située dans l'espace objet (fig. 14.5) est

$$\begin{aligned} U_A(\mathbf{r}) &= U_M(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R} \right) r^2 \right] \\ &= U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R} - \frac{1}{\Delta} \right) r^2 \right]. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Choisissons  $R_A$  tel que

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\Delta}, \quad (14.14)$$



**FIG. 14.5.** Une amplitude du champ proportionnelle à un facteur de phase quadratique sur le miroir correspond dans l'espace objet à une onde sphérique issue d'un point  $C$ , et dans l'espace image à une onde qui converge vers le point  $C'$ , image de  $C$  par le miroir.

si bien que  $U_A(\mathbf{r}) = U_0$ . Il en résulte que l'amplitude  $U_M$  de la relation (14.12) est la trace d'une onde sphérique qui se propage dans l'espace objet (c'est-à-dire vers le miroir), issue du point  $C$ , situé à la distance  $R_A$  de  $\mathcal{M}$  ( $\overline{SC} = R_A$ , le sens positif étant celui de la lumière avant réflexion).

Soit  $\mathcal{A}'$  une calotte sphérique, de rayon  $R_{A'}$ , tangente à  $\mathcal{M}$ , située dans l'espace image. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est

$$\begin{aligned} U_{A'}(\mathbf{r}) &= U_M(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R'} \right) r^2 \right] \\ &= U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R'} - \frac{1}{\Delta} \right) r^2 \right], \end{aligned} \quad (14.15)$$

et en choisissant  $R_{A'}$  tel que

$$\frac{1}{R_{A'}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{\Delta}, \quad (14.16)$$

on obtient  $U_{A'} = U_0$ , ce qui signifie que l'amplitude  $U_M$  donnée par la relation (14.12) est aussi la trace, sur le miroir, de l'onde sphérique de l'espace image qui converge en  $C'$ , à la distance  $R_{A'}$  de  $S$  ( $\overline{SC'} = R_{A'}$ ).

Par exemple, si  $\Delta = -R$ , le rayon  $R_A$  est infini et  $\mathcal{A}$  est un plan : l'onde incidente est plane. Comme  $R' = -R$ , il vient  $R_{A'} = R'/2$ , et l'onde réfléchie converge bien au foyer du miroir.

Si on élimine  $\Delta$  entre les relations (14.14) et (14.16), on trouve, compte tenu de  $R' = -R$ ,

$$\frac{1}{R_{A'}} - \frac{1}{R_A} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{2}{R'}, \quad (14.17)$$

et cette dernière relation n'est autre que la relation de conjugaison du miroir pour les points  $C$  et  $C'$ . Les deux ondes précédentes, dont  $U_M$  est la trace, sont images l'une de l'autre dans le miroir.

### 14.3.2 Ondes sphériques résonantes dans un résonateur instable

La théorie des résonateurs optiques développée au chapitre 7 montre que dans l'espace fractionnaire des variables réduites, les amplitudes réduites sur les miroirs sont des fonctions propres de toute transformation de Fourier fractionnaire, c'est-à-dire des fonctions d'Hermite-Gauss, cela indépendamment de

la stabilité du résonateur considéré. Une fois les amplitudes réduites déterminées – ce sont des fonctions d’Hermite–Gauss –, il est naturel de revenir aux amplitudes des champs dans l’espace physique, c’est-à-dire de passer des variables réduites aux variables d’espace. La distinction entre résonateurs stables et instables apparaît alors. En effet, pour un résonateur stable, les variables réduites sont réelles et les amplitudes dans l’espace physique restent des fonctions d’Hermite–Gauss : cela conduit à la notion de mode d’Hermite–Gauss. Mais si le résonateur est instable, les variables réduites sont complexes et le passage des variables réduites complexes aux variables physiques transforme une fonction d’Hermite–Gauss en un terme de phase quadratique : on n’a plus des modes gaussiens, mais des ondes sphériques !

Les faisceaux gaussiens des résonateurs stables ayant déjà été étudiés, soit au chapitre 7, soit au paragraphe 14.2, l’exposé qui suit est consacré aux résonateurs instables et se limite à la fonction propre fondamentale. Celle-ci s’écrit, en fonction de la variable réduite  $\rho$ ,

$$V_1(\rho) = U_0 e^{-i\rho \cdot \rho}. \quad (14.18)$$

Si on remplace  $\rho$  par sa valeur en fonction de  $\mathbf{r}$  définie au chapitre 6 (en particulier au paragraphe 6.4, dont on reprend les notations), on obtient l’amplitude du champ sur le miroir  $\mathcal{M}_1$  sous la forme

$$U_1(\mathbf{r}) = U_0 \exp \left[ -i\mathfrak{s}\pi \frac{r^2}{\lambda \chi R'_1} \right], \quad (14.19)$$

où le rayon image  $R'_1$  tient lieu de rayon de courbure de l’émetteur, et où  $\mathfrak{s}$  est le signe de  $LR'_1(R'_1 - L)$  (voir le paragraphe 6.4.1).

L’amplitude de la relation (14.19) correspond à deux ondes sphériques, une dans l’espace objet, l’autre (son image) dans l’espace image, conformément à l’analyse du paragraphe 14.3.1.

**Exemple 14.3.1.** Soit un résonateur tel que  $2L = R'_1 + R'_2$  avec  $R'_1 > R'_2 > 0$  (fig. 14.6). Il s’agit d’un résonateur confocal dissymétrique. On a

$$J = \frac{(L - R'_2)(R'_1 - L)}{L(L - R'_1 - R'_2)} = -\frac{(R'_1 - R'_2)^2}{(R'_1 + R'_2)^2} < 0, \quad (14.20)$$

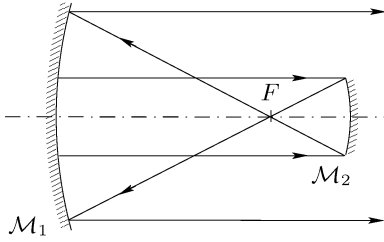
et le résonateur est instable. On a aussi  $\mathfrak{s} = 1$ , et

$$\varepsilon^2 = \frac{L(L - R'_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_1 - R'_2)} = -1, \quad (14.21)$$

si bien que  $\chi = 1$  (car  $\chi R'_1 > 0$ ). L’amplitude du mode fondamental est

$$U_1(x, y) = U_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda R'_1} (x^2 + y^2) \right]. \quad (14.22)$$

Dans l’espace objet de  $\mathcal{M}_1$ , cette amplitude est celle d’une onde sphérique dont le centre de courbure est à la distance (mesure algébrique)  $d$  de  $S_1$  telle que



**FIG. 14.6.** Résonateur confocal dissymétrique instable.

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} = \frac{2}{R_1}. \quad (14.23)$$

Le centre de courbure de cette onde est le foyer (objet) du miroir. Dans l'espace image de  $\mathcal{M}_1$ , l'amplitude précédente est celle d'une onde sphérique qui converge à la distance  $d'$  de  $S_2$  telle que

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_1} = 0, \quad (14.24)$$

et il s'agit d'une onde plane. Ce résultat est conforme à celui d'Ananiev [6].

**Exemple 14.3.2.** Soit un résonateur symétrique pour lequel  $R'_1 = R'_2 < 0$  (fig. 14.7). On a

$$J = \frac{(L - R'_2)(R'_1 - L)}{L(L - R'_1 - R'_2)} = -\frac{(L - R'_1)^2}{L(L - 2R'_1)} < 0, \quad (14.25)$$

et le résonateur est instable, ce que confirme l'ordre des sommets et centres de courbures donné par le quadruplet  $(C_1, S_1, S_2, C_2)$ . On a  $\mathfrak{s} = 1$ , et  $\varepsilon$  est tel que

$$\varepsilon^2 = \frac{L(L - R'_2)}{(R'_1 - L)(L - R'_1 - R'_2)} = -\frac{L}{L - 2R'_1}. \quad (14.26)$$

De  $\chi R'_1 > 0$  résulte  $\chi < 0$ , et

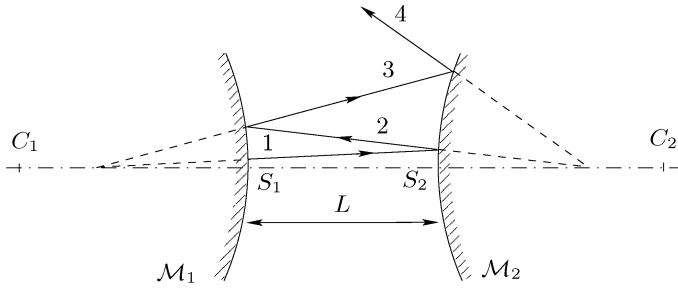
$$\chi = -\sqrt{\frac{L}{(L - 2R'_1)}}. \quad (14.27)$$

L'amplitude du champ sur le miroir  $\mathcal{M}_1$  s'écrit

$$U(\mathbf{r}) = U_0 \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda R'_1} \sqrt{\frac{L - 2R'_1}{L}} r^2 \right]. \quad (14.28)$$

Dans l'espace objet de  $\mathcal{M}_1$ , cette amplitude correspond à une onde sphérique qui diverge du point  $C$  tel que  $\overline{S_1 C} = d$ , avec

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \sqrt{\frac{L - 2R'_1}{L}}, \quad (14.29)$$



**FIG. 14.7.** Résonateur symétrique instable.

soit encore

$$d = \frac{R_1 \sqrt{L}}{\sqrt{L} - \sqrt{L + 2R_1}} = -\frac{1}{2} \left( L + \sqrt{L^2 + 2LR_1} \right). \quad (14.30)$$

Dans l'espace image, l'onde sphérique image diverge à partir du point  $C'$  avec  $\overline{S_1 C'} = d'$  et

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_1} \sqrt{\frac{L - 2R'_1}{L}}, \quad (14.31)$$

c'est-à-dire

$$d' = \frac{R'_1 \sqrt{L}}{\sqrt{L} - \sqrt{L - 2R'_1}} = \frac{1}{2} \left( L - \sqrt{L^2 - 2LR'_1} \right). \quad (14.32)$$

Si on fait les calculs pour  $M_2$  on trouve les mêmes ondes, mais leur centre de courbure est rapporté au sommet  $S_2$ .

**Remarque 14.3.1.** Dans le résonateur de l'exemple 14.3.1 il y a inversion du champ dans un aller et retour, c'est-à-dire qu'un rayon (méridien) traverse l'axe du résonateur. Cela a lieu quand l'ordre de la transformée de Fourier fractionnaire associée au transfert du champ d'un miroir à l'autre est de la forme  $\alpha = \pi/2 + i\beta$  (le terme  $\pi/2$  explique cet effet). Ce n'est pas le cas pour le résonateur de l'exemple 14.3.2, pour lequel  $\alpha = i\beta$ .

## 14.4 Conclusion

Dans l'espace fractionnaire des variables réduites, l'analyse des résonateurs optiques est conduite, formellement, dans les mêmes termes, pour des transferts d'ordre réel ou pour des transferts d'ordre complexe. Les fonctions propres de la propagation dans des aller et retour d'un miroir à l'autre sont des fonctions d'Hermite–Gauss. La différence entre les ondes résonantes dans les résonateurs stables ou les résonateurs instables n'apparaît que lorsqu'on transpose à l'espace physique les résultats établis dans le domaine fractionnaire. L'optique de Fourier fractionnaire fournit, en ce sens, un cadre unifié pour l'étude des résonateurs optiques, indépendamment de leur stabilité.

## 14.5 Exercices

### Exercice 14.1 (Résonateur dual).

1. Montrer que la stabilité d'un résonateur est conservée si on remplace un des miroirs par sa sphère de Fourier (c'est-à-dire par un miroir dont la surface réfléchissante est cette sphère).
2. En supposant stables les deux résonateurs ainsi obtenus, que peut-on dire de leurs cols ?
3. On appelle résonateur dual le résonateur obtenu en remplaçant chaque miroir d'un résonateur par sa sphère de Fourier. Montrer que la stabilité du résonateur dual est celle du résonateur initial. Que dire de leurs cols ?
4. Soient  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  les deux miroirs d'un résonateur et soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  leurs sphères de Fourier respectives, dont on imagine qu'elles puissent être matérialisées et rendues réfléchissantes. Outre le résonateur initial, il existe trois résonateurs dont un miroir s'appuie sur  $\mathcal{M}_1$  ou  $\mathcal{F}_1$ , et l'autre miroir sur  $\mathcal{M}_2$  ou  $\mathcal{F}_2$ . Montrer que les quatre résonateurs précédents engendrent le même faisceau gaussien.

**Exercice 14.2.** Démontrer les propositions 14.1.3 p. 412 et 14.1.4 p. 413. (Utiliser les relations (7.84) p. 202 et (7.89) p. 202.)

### Exercice 14.3 (Distance de Rayleigh d'un faisceau gaussien. Sphères de Rayleigh<sup>1</sup>).

1. Montrer que le module du rayon de courbure des sphères équiphases qui forment un faisceau gaussien de col de rayon transversal  $w_0$ , à la longueur d'onde  $\lambda$ , admet un minimum. Montrer que ce minimum se trouve sur deux sphères symétriques l'une de l'autre par rapport au plan du col, et calculer leur distance au col (distance de Rayleigh).  
Quelle est la valeur du rayon transversal du faisceau gaussien sur ces deux sphères ? celle du rayon transversal réduit ?
2. On appelle sphères de Rayleigh les deux calottes sphériques précédentes. Montrer qu'elles sont confocales.
3. Les sphères de Rayleigh constituent un cas particulier de la situation étudiée dans l'exercice 7.4. Montrer qu'une propriété caractéristique des sphères de Rayleigh est la suivante : le rayon transversal sur une sphère est égal au rayon transversal sur sa sphère de Fourier.
4. Soit un système centré à foyers formant l'image d'un faisceau gaussien. Les images des sphères de Rayleigh du faisceau objet sont-elles, en général, les sphères de Rayleigh du faisceau image ? Montrer qu'il existe une exception et qu'elle correspond à la situation décrite dans la remarque 7.3.9.
5. Reprendre la question précédente avec un système afocal.

<sup>1</sup> La notion de distance de Rayleigh est universellement utilisée pour les résonateurs optiques. La notion de sphère de Rayleigh est un néologisme, propre à ce livre.

**Exercice 14.4 (Construction géométrique des surfaces d'ondes d'un faisceau gaussien).** Soit un faisceau gaussien dont on connaît la position du col  $\mathcal{W}_0$  et la distance de Rayleigh  $\zeta_0$ .

1. Utiliser les propositions 14.1.3 et 14.1.4 pour définir graphiquement la sphère équiphasée à la distance  $d$  du col. (Cela revient à déterminer le centre de courbure de cette sphère.)
2. Inversement, déterminer la sphère équiphasée dont le centre est un point donné sur la droite perpendiculaire à  $\mathcal{W}_0$  en son centre.

**Exercice 14.5 (Construction du col du faisceau image d'un faisceau gaussien donné).** Soit un objectif convergent de foyers  $F$  et  $F'$ . Soit un faisceau gaussien dont le col, de rayon transversal réduit  $\zeta_0$  (distance de Rayleigh), passe par le point  $W_0$  de l'axe de l'objectif.

1. Utiliser les résultats de l'exercice 14.4 pour déterminer géométriquement le rayon transversal réduit du col du faisceau gaussien image.
2. Si  $W_0 = F$ , le col du faisceau image est en  $F'$ . Déterminer graphiquement le rayon transversal réduit du col image dans ce cas.

**Exercice 14.6.** Le col d'un faisceau gaussien est placé dans le plan focal objet d'un objectif convergent de distance focale image  $f'$  et objet  $f$ . Retrouver la relation (7.137) en utilisant les résultats de l'exercice 14.5.

**Exercice 14.7.** On assimile le mode fondamental d'une fibre optique mono-mode à un mode gaussien : son amplitude est une fonction de Gauss de « largeur »  $2w_0$  ( $w_0$  est l'équivalent du rayon transversal). L'indice du cœur de la fibre est  $n_1$  et celui de la gaine  $n_2$ .

1. Que peut-on dire du faisceau qui se propage en espace libre à la sortie de la fibre ? Quelle est sa divergence ?
2. On colle sur la face de sortie de la fibre une lentille plan convexe de rayon  $R$ , faite d'un matériau d'indice  $n$  ( $n > n_1$ ). Quelle est la focale de cette lentille ?
3. Où est situé le col du faisceau émergent ? Quelle est la valeur de son rayon transversal ?

**Exercice 14.8.** Soit un résonateur confocal dissymétrique de longueur  $L$  telle que  $2L = R'_1 + R'_2$ , avec  $R'_1 > R'_2 > 0$ . Montrer que le résonateur est instable. et trouver les centres de courbure des ondes sphériques résonantes.

**Exercice 14.9.** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour un résonateur plan convexe pour lequel le miroir  $\mathcal{M}_2$  est plan ( $R'_2$  infini) et  $R'_1 < 0$ .

# Chapitre 15

## Holographie

L'holographie<sup>1</sup>, un fleuron de l'optique cohérente, est un vaste sujet, donnant lieu à d'innombrables applications [83, 97, 219, 233, 239] ; nous nous limitons à une brève présentation de ses principes. La technique holographique comporte un aspect non linéaire puisqu'on enregistre l'éclairement d'une figure de diffraction modulée par des franges d'interférences (donc une quantité proportionnelle au carré du module de l'amplitude du champ). L'étape de restitution est cependant directement fondée sur le principe de Huygens–Fresnel et reste pour cela dans le cadre linéaire de l'optique de Fourier.

### 15.1 Principes de l'holographie

#### 15.1.1 Restitution d'une source lumineuse ponctuelle

Considérons l'expérience des trous d'Young. Une source lumineuse quasi ponctuelle, monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ), éclaire un écran dans lequel sont percés deux trous distants de  $\ell$  (fig. 15.1). Ces deux trous se comportent comme deux sources secondaires cohérentes  $S_1$  et  $S_2$ . À la distance  $D$  de l'écran précédent, sur un deuxième écran, on observe des franges d'Young.

Le point lumineux  $S_1$  engendre sur l'écran d'observation un champ dont l'amplitude est

$$U_1(x, y) = iA_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[ -\frac{i\pi \ell x}{\lambda D} \right], \quad (15.1)$$

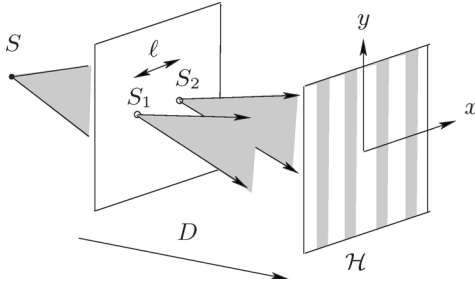
et le point  $S_2$  un champ d'amplitude

$$U_2(x, y) = iA_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[ \frac{i\pi \ell x}{\lambda D} \right], \quad (15.2)$$

où  $A_0$  est une constante dimensionnelle qui inclut l'atténuation de l'onde en  $1/\lambda D$ . L'amplitude du champ résultant de la superposition des deux ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  est

---

<sup>1</sup> C'est Gabor qui inventa ce procédé en 1948 [91]. Il fallut attendre les années 60, en pratique l'apparition du laser, pour voir un développement important de cette technique. Gabor reçut le prix Nobel de physique en 1971 pour son invention.



**FIG. 15.1.** Expérience des trous d'Young. On enregistre les franges dans l'émulsion d'une plaque photographique  $\mathcal{H}$ .

$$U(x, y) = 2iA_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \cos \frac{\pi \ell x}{\lambda D}. \quad (15.3)$$

L'éclairement (ou plutôt l'intensité vibratoire) sur l'écran d'observation est

$$I(x, y) = 4|A_0|^2 \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D}. \quad (15.4)$$

On place dans le plan de l'écran d'observation une plaque photographique. L'émulsion est un détecteur quadratique dont la réponse est proportionnelle à l'éclairement reçu<sup>2</sup>, cela autour du point de fonctionnement de l'émulsion. Une fois développée, la plaque photographique se caractérise par sa fonction de transmission  $t$ . Si on l'éclaire alors par une onde d'amplitude  $U_i$ , l'amplitude émergente est  $U_e$ , telle qu'en chaque point  $\mathbf{r} = (x, y)$  de la plaque on a

$$U_e(x, y) = t(x, y) U_i(x, y). \quad (15.5)$$

Si la plaque a été exposée et développée de façon adéquate, la valeur  $t(x, y)$  est proportionnelle à l'éclairement enregistré  $I(x, y)$ , c'est-à-dire

$$t(x, y) = KI(x, y), \quad (15.6)$$

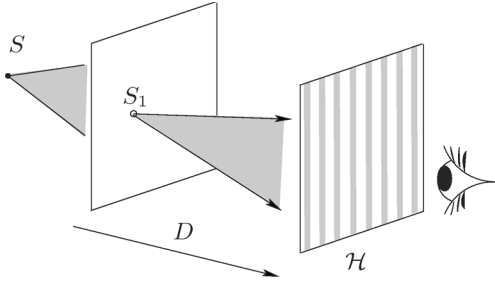
où  $K$  est une constante qui dépend du temps de pose et du contraste de l'émulsion. Pour comprendre les principes de l'holographie, et pour simplifier, nous nous bornons à supposer  $K = 1$  (voir le paragraphe 15.4.1 pour un complément sur ce point).

On replace ensuite la plaque développée dans la position exacte qu'elle occupait au moment de l'enregistrement des franges d'Young (fig. 15.2), et on l'éclaire à l'aide du seul point lumineux  $S_1$ . Immédiatement après la plaque, l'amplitude du champ devient

$$\begin{aligned} U_e(x, y) &= t(x, y) U_i(x, y) \\ &= 4i|A_0|^2 A_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[ -\frac{i\pi \ell x}{\lambda D} \right] \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Il est utile de linéariser cette expression en l'écrivant sous la forme

<sup>2</sup> Pour un temps de pose donné. Cela est précisé au paragraphe 15.4.1.



**FIG. 15.2.** Restitution de l'hologramme enregistré selon le schéma de la figure 15.1. On observe à travers la plaque photographique  $\mathcal{H}$  préalablement développée et éclairée à l'aide d'un seul des deux points lumineux utilisés à l'enregistrement.

$$U_e(x, y) = 2i|A_0|^2 A_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[ -\frac{i\pi \ell x}{\lambda D} \right] \left( 1 + \cos \frac{2\pi \ell x}{\lambda D} \right), \quad (15.8)$$

de telle sorte qu'apparaissent les trois composantes spectrales (spatiales) de l'amplitude du champ, lesquelles correspondent à trois ordres de diffraction. Cela est peut-être plus clair si on écrit le spectre angulaire de  $U_e(x, y)$ , ou seulement sa transformée de Fourier. Pour alléger les notations, nous utilisons la fonction  $f_\alpha$  telle que  $f_\alpha(x, y) = \exp[-i\pi\alpha(x^2 + y^2)]$ , et qui vérifie

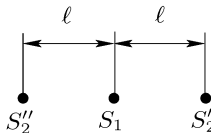
$$f_{-(1/\alpha)}(x, y) = i\alpha f_\alpha(F_x, F_y). \quad (15.9)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \widehat{U}_e(F_x, F_y) = 2\lambda D |A_0|^2 A_0 & \left( \delta_{(0,0)} + \frac{1}{2} \delta_{(-\ell/\lambda D, 0)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \delta_{(\ell/\lambda D, 0)} \right) * \delta_{(\ell/2\lambda D, 0)} * f_{-\lambda D}(F_x, F_y). \end{aligned} \quad (15.10)$$

L'ordre 0, représenté par  $\delta_{(0,0)} * \delta_{(\ell/2\lambda D, 0)}$ , correspond à l'onde du faisceau d'éclairage (issu de  $S_1$ ). Les distributions de Dirac  $\delta_{(-\ell/\lambda D, 0)}$  et  $\delta_{(\ell/\lambda D, 0)}$  correspondent à deux ondes qui diffractent dans des directions symétriques l'une de l'autre par rapport au faisceau incident (à cause de la convolution avec  $\delta_{(\ell/2\lambda D, 0)}$ ).

Le terme modulé de l'équation (15.8), proportionnel à  $\cos(2\pi \ell x / \lambda D)$ , représente le champ créé dans le plan d'observation par deux trous distants de  $2\ell$ , et symétriques l'un de l'autre par rapport au faisceau incident. Selon le principe de Huygens-Fresnel, tel que formulé, intuitivement, au chapitre 1, un observateur placé au-delà de la plaque photographique, voit trois points lumineux, comme le montre la figure 15.3. Il voit en particulier la source de restitution  $S_1$  (ordre 0). Il voit également un point lumineux  $S'_2$  à l'endroit-même qu'occupait  $S_2$ . On dit que  $S'_2$  est l'image restituée ou la restitution (holographique) de  $S_2$  ;



**FIG. 15.3.** En regardant à travers la plaque comme sur la figure 15.2, on voit trois points lumineux. Le point  $S_1$  est la source d'éclairage. Le point  $S'_2$  est la restitution de  $S_2$ , et  $S''_2$  est un point supplémentaire, symétrique de  $S'_2$  par rapport à  $S_1$  : c'est l'image conjuguée de  $S'_2$ .

tout se passe comme si  $S_2$  était présent. L'observateur voit enfin une copie  $S_2''$  de  $S_2$  au point symétrique de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  (fig. 15.3) : il s'agit de l'image conjuguée de  $S_2'$ .

Dans ce qui précède,  $S_1$  sert de source d'enregistrement et de source de restitution ;  $S_2$  est l'objet à enregistrer et à restituer. On dit aussi que l'onde issue de  $S_1$  est l'onde de référence, et l'onde issue de  $S_2$  l'onde « signal ». Ces éléments permettent d'analyser quelques propriétés de base d'un hologramme.

### 15.1.2 Résolution de l'émulsion et champ de vision

Dans l'expérience d'Young, l'interfrange est  $\lambda D/\ell$ . On enregistre effectivement les franges si la limite de résolution de l'émulsion, disons  $\rho$  ( $\rho$  se mesure par exemple en mm), est inférieure à la valeur de l'interfrange

$$\rho \leq \frac{\lambda D}{\ell}. \quad (15.11)$$

Cette condition traduit une limitation du champ de vision, car  $\ell$  doit satisfaire

$$\ell \leq \frac{\lambda D}{\rho}, \quad (15.12)$$

ce qui fixe une borne à l'écartement des deux trous d'Young.

Plus la résolution de l'émulsion est grande (c'est-à-dire plus petite est sa limite de résolution  $\rho$ ), plus le champ de vision enregistrable est étendu. Cette propriété est générale en holographie.

### 15.1.3 Dimensions de l'hologramme et résolution de l'objet

Tenons compte de la largeur  $L$  de la plaque holographique (suivant  $x$ ). L'extension finie de la plaque fait que le nombre de franges d'interférences enregistrées dans l'émulsion est lui-même fini. La fonction de transmission de la plaque développée est  $t$  telle que

$$t(x, y) = 4|A_0|^2 \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} \text{rect}_L(x), \quad (15.13)$$

si bien qu'à la restitution on obtient

$$U_e(x, y) = 4i|A_0|^2 A_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda D} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[ -\frac{i\pi \ell x}{\lambda D} \right] \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} \text{rect}_L(x). \quad (15.14)$$

Il en résulte une modification du spectre angulaire de l'onde restituée : le calcul de la transformée de Fourier du membre de droite de la relation (15.14) fait apparaître le produit de convolution du spectre angulaire précédent – celui donné par la relation (15.10) – et d'une fonction sinus cardinal. On obtient

$$\widehat{U}_e(F_x, F_y) = \lambda D g * \delta_{(\ell/2\lambda D, 0)} * f_{-\lambda D}(F_x, F_y), \quad (15.15)$$

où la distribution  $g$  est définie par

$$g(F_x, F_y) = 4|A_0|^2 A_0 L \left\{ \text{sinc}(LF_x) + \frac{1}{2} \text{sinc} \left[ L \left( F_x - \frac{\ell}{\lambda D} \right) \right] + \frac{1}{2} \text{sinc} \left[ L \left( F_x + \frac{\ell}{\lambda D} \right) \right] \right\} \delta(F_y). \quad (15.16)$$

Il y a trois ordres de diffraction, mais on ne peut pas les distinguer pour les petites valeurs de  $L$  (à cause de la largeur des fonctions sinus cardinaux). Une valeur typique de la limite de résolution s'obtient pour  $\ell = \lambda D/L$  (cela revient à adopter le critère de Rayleigh, voir le paragraphe 8.4.1). Si  $\ell$  est inférieur à cette valeur on ne peut pas dire qu'il y a trois points bien séparés dans l'onde restituée. La dimension de l'hologramme limite ainsi les détails de l'objet qu'il est possible de restituer. Il s'agit encore d'une propriété générale de l'holographie. (Dans ce qui précède, les deux trous d'Young sont alignés sur l'axe  $x$ , ce qui explique qu'on a étudié l'influence de la largeur de la plaque holographique suivant cette direction.)

Si on tient compte du résultat du paragraphe précédent, l'hologramme enregistre correctement deux points séparés de la distance  $\ell$  si,

$$\frac{\lambda D}{L} \leq \ell \leq \frac{\lambda D}{\rho}, \quad (15.17)$$

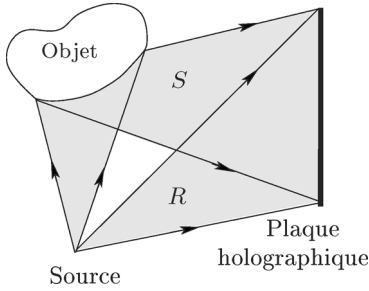
où  $L$  est la dimension de la plaque holographique,  $\rho$  la limite de résolution de l'émulsion,  $D$  la distance de l'objet enregistré à la plaque holographique et  $\lambda$  la longueur d'onde du rayonnement (supposée être la même à l'enregistrement et à la restitution).

#### 15.1.4 Restitution d'un objet étendu

L'analyse précédente, bien qu'élémentaire, met en évidence les propriétés fondamentales d'un hologramme. Il est cependant nécessaire de considérer l'enregistrement et la restitution d'un objet composé d'une multitude de points lumineux ; pour cela nous abandonnons le point de vue intuitif qui nous a guidés jusqu'ici et formalisons davantage le procédé holographique.

Considérons la figure 15.4 où un objet est éclairé par une onde monochromatique dont une partie illumine directement la plaque holographique ; cette partie constitue l'onde de référence. L'émulsion reçoit également la lumière diffusée par l'objet, qui constitue l'onde objet, ou onde « signal ». L'amplitude de l'onde de référence au point  $(x, y)$  de la plaque est  $R(x, y)$  et l'amplitude de l'onde signal est  $S(x, y)$ , de telle sorte que l'amplitude du champ au point  $(x, y)$  de la plaque est

$$U(x, y) = R(x, y) + S(x, y). \quad (15.18)$$



**FIG. 15.4.** Principe de l'enregistrement de l'hologramme d'un objet étendu. On suppose que la longueur de cohérence de la source est suffisamment grande pour que l'objet ainsi éclairé soit cohérent avec la source.

L'éclairement sur la plaque est proportionnel à  $|U(x, y)|^2$  et, dans les mêmes conditions qu'au paragraphe 15.1.1 ( $K = 1$  dans la relation (15.6) p. 422), la fonction de transmission de la plaque holographique développée est

$$\begin{aligned} t(x, y) &= |R(x, y) + S(x, y)|^2 \\ &= |R(x, y)|^2 + |S(x, y)|^2 + \overline{R(x, y)} S(x, y) + R(x, y) \overline{S(x, y)}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

À la restitution, on éclaire la plaque développée par l'onde de référence et on obtient, immédiatement après l'hologramme, l'amplitude émergente

$$\begin{aligned} U_e(x, y) &= R(x, y)t(x, y) \\ &= R(x, y)(|R(x, y)|^2 + |S(x, y)|^2) \\ &\quad + |R(x, y)|^2 S(x, y) + (R(x, y))^2 \overline{S(x, y)}. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Il y a un intérêt particulier à choisir une onde de référence de module constant (onde homogène). De fait, si  $|R(x, y)|^2$  est une constante, le terme  $|R(x, y)|^2 S(x, y)$  est proportionnel à l'onde signal qui est alors restituée telle quelle. L'onde de référence peut être plane ou sphérique.

En général, il est utile de séparer l'onde signal restituée des autres ondes qui l'accompagnent à la restitution. Si l'onde de référence est une onde sphérique, la plaque holographique étant plane, la fonction  $R$  s'écrit sous la forme

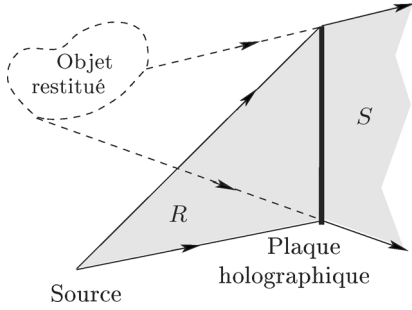
$$R(x, y) = R_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda\Delta} (x^2 + y^2) \right], \quad (15.21)$$

où  $R_0$  est une constante et où  $\Delta$  est la distance du foyer de l'onde à l'hologramme. On obtient alors, dans l'équation (15.20), un terme correspondant à l'onde directe, égal à

$$\begin{aligned} R(x, y) (|R(x, y)|^2 + |S(x, y)|^2) \\ = R_0 \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda\Delta} (x^2 + y^2) \right] (|R_0|^2 + |S(x, y)|^2). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Ce terme correspond à l'amplitude du champ sur un émetteur sphérique centré au foyer de l'onde de référence.

Il existe également une onde conjuguée (par rapport à  $S$ ) dont l'amplitude est



**FIG. 15.5.** Restitution de l'onde signal émise par l'objet de la figure 15.4. Pour simplifier, l'onde conjuguée n'est pas représentée.

$$(R(x, y))^2 \overline{S(x, y)} = R_0^2 \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda\Delta} (x^2 + y^2) \right] \overline{S(x, y)}. \quad (15.23)$$

Cette onde a pour amplitude la complexe conjuguée de l'amplitude de l'onde signal, mais cela sur un émetteur sphérique dont le centre de courbure est à la distance  $\Delta/2$  de la plaque.

Quand  $R$  prend la forme donnée par la relation (15.21), le troisième terme de l'équation (15.20) est exactement  $S$  (à une constante multiplicative près), de telle sorte qu'il y a séparation spatiale des trois ondes restituées, cette séparation étant en focalisation (les trois ondes se propagent dans la même direction mais convergent en trois points différents).

Si l'onde de référence est plane, il est utile de l'incliner par rapport à la plaque de manière à obtenir  $R$  sous la forme

$$R(x, y) = R_0 \exp[-2i\pi\theta x\lambda], \quad (15.24)$$

où  $\theta$  est l'angle de la direction de propagation de l'onde avec la normale à la plaque holographique<sup>3</sup>. L'onde directe est

$$R_0 \exp[-2i\pi\theta x\lambda] (|R_0|^2 + |S(x, y)|^2), \quad (15.25)$$

et elle diffracte dans la direction de l'onde de référence, c'est-à-dire qu'elle fait l'angle  $\theta$  avec la normale à l'hologramme. L'onde conjuguée est

$$R_0^2 \exp[-4i\pi\theta x\lambda] \overline{S(x, y)}, \quad (15.26)$$

et elle diffracte dans la direction faisant l'angle  $2\theta$  avec la normale à l'hologramme. L'onde signal diffracte dans la direction définie par  $\theta = 0$ . Il y a séparation angulaire des trois ondes.

Il est possible de conjuguer les deux effets précédents : c'est ce qui est fait sur le montage de la fig. 15.4. La figure 15.5 montre le montage de restitution.

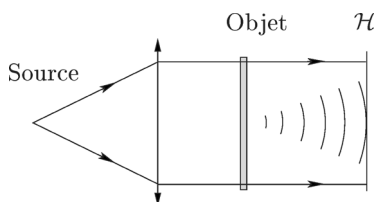
**Remarque 15.1.1.** Tout ce qui précède suppose des franges d'interférences ayant un bon contraste, c'est-à-dire une source lumineuse suffisamment cohérente (voir le chapitre 10). En pratique la longueur de cohérence de la source doit être supérieure à la différence de marche qui existe, en chaque point de l'hologramme, entre l'onde de référence et l'onde signal.

<sup>3</sup> Il s'agit d'une approximation, valable pour  $\theta$  petit. On peut remplacer  $\theta$  par  $\sin \theta$  pour obtenir une expression plus précise.

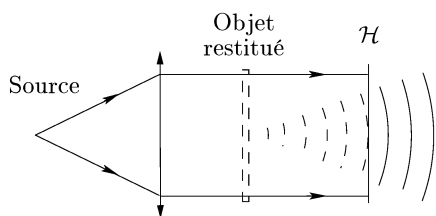
## 15.2 Différents types d'hologrammes

### 15.2.1 Hologramme de Gabor

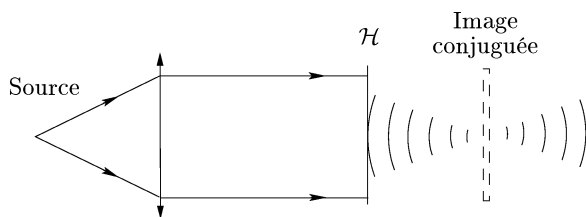
Considérons le montage de la figure 15.6. L'onde de référence est l'onde directe qui interfère avec l'onde diffractée par l'objet transparent. À la restitution, l'onde directe (fig. 15.7) et son onde conjuguée (fig. 15.8) se propagent dans la même direction et cela rend l'observation difficile. L'image « directe » est virtuelle alors que l'image conjuguée est réelle. On a séparé les images sur les figures 15.7 et 15.8 pour plus de clarté, mais de fait les deux phénomènes se superposent.



**FIG. 15.6.** Enregistrement d'un hologramme en ligne de Gabor. L'objet est partiellement transparent de telle sorte que la plaque holographique  $\mathcal{H}$  reçoit la lumière directe et la lumière diffractée par l'objet (représentée ici sous la forme d'une onde sphérique).



**FIG. 15.7.** Restitution d'un hologramme en ligne de Gabor. Seule la restitution de l'objet est représentée ici.

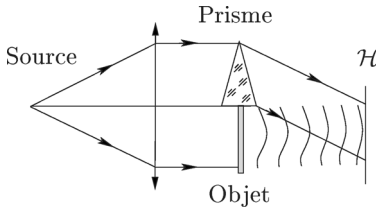


**FIG. 15.8.** Restitution d'un hologramme en ligne de Gabor. Restitution de l'image conjuguée.

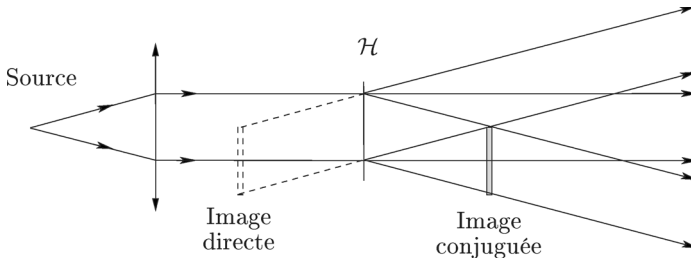
Dans la pratique, l'holographie en ligne offre l'avantage de ne pas nécessiter une grande cohérence temporelle, ni à l'enregistrement, ni à la restitution. Et même s'il est difficile de séparer les ondes restituées, l'holographie en ligne de Gabor, au-delà de son intérêt historique, connaît quelques applications, par exemple l'étude de flots de particules [42, 49, 240].

### 15.2.2 Hologramme de Leith et Upatnieks

Le montage de la figure 15.9 permet la séparation angulaire de l'onde directe et de l'onde conjuguée comme le montre la figure 15.10. L'enregistrement nécessite une longueur de cohérence suffisante pour qu'il y ait des interférences sur toute la surface de la plaque holographique  $\mathcal{H}$ .



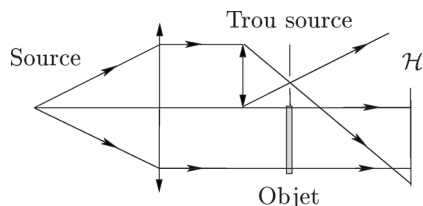
**FIG. 15.9.** Enregistrement d'un hologramme hors axe de Leith et Upatnieks.



**FIG. 15.10.** Restitution d'un hologramme hors axe de Leith et Upatnieks. Il y a séparation angulaire du faisceau direct et du faisceau conjugué.

### 15.2.3 Hologramme de Fourier

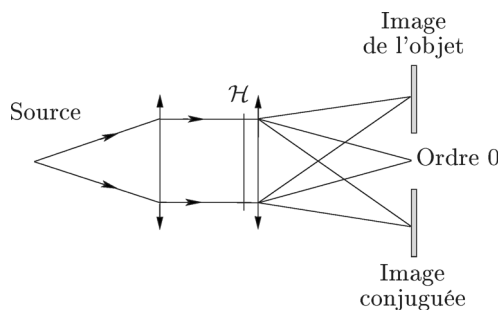
C'est une généralisation de ce qui a été vu au début de ce chapitre (enregistrement de franges d'Young). La figure 15.11 montre comment enregistrer l'hologramme de Fourier d'un objet transparent. L'amplitude du champ sur la plaque holographique est la somme de l'amplitude de l'onde de référence (qui provient du trou source) et de celle du champ diffracté par l'objet. De fait, le terme d'hologramme de Fourier est impropre en ce sens que ce qui est enregistré n'est pas la transformée de Fourier de l'amplitude du champ de l'objet mais plutôt l'amplitude diffractée selon un phénomène de Fresnel (on pourrait parler d'hologramme de Fresnel). La raison de l'emploi du terme d'hologramme de Fourier vient sans doute de ce que la restitution s'opère à l'aide d'un montage de transformation de Fourier optique (fig. 15.12) qui permet d'observer la transformée de Fourier de l'amplitude du champ sur  $\mathcal{H}$ . Une autre raison de ce terme se trouve dans la correspondance qui existe entre un point de l'objet et une fréquence spatiale sur l'hologramme et qui est caractéristique d'une transformation de Fourier (spatiale). Si l'objet est un point lumineux, on obtient



**FIG. 15.11.** Enregistrement d'un hologramme de Fourier. Le faisceau de référence est issu d'un point lumineux placé dans le plan de l'objet.

sur l'hologramme des franges d'Young : un objet ponctuel s'enregistre sous la forme d'un réseau de franges parallèles, de profil sinusoïdal. Il y a correspondance entre les points de l'objet et les fréquences spatiales dans le plan de l'hologramme. Cependant, si l'objet est composé de plusieurs points, chacun d'eux donne lieu à une amplitude sinusoïdale avec un terme de phase qui lui est propre : cette phase est liée à la position du milieu du segment reliant le point considéré sur l'objet et le trou source ; cette position n'est pas la même pour tous les points de l'objet (en éclairage, cela donne une translation variable des franges). C'est pour cette raison qu'on n'obtient pas la transformée de Fourier de l'amplitude de l'objet (pour l'obtenir, il faudrait additionner en phase toutes les amplitudes associées aux fréquences spatiales correspondant aux points de l'objet selon ce qui vient d'être décrit).

Le fait d'utiliser comme onde de référence une onde sphérique issue d'un point situé dans le plan de l'objet, conduit à une compensation automatique du terme de phase quadratique qui existe entre la sphère de Fourier de l'objet et la plaque holographique (voir l'exercice 15.1).



**FIG. 15.12.** Restitution d'un hologramme de Fourier.

### 15.3 Applications de l'holographie

L'holographie offre le moyen de reproduire des objets avec leur relief et cela constitue sans doute l'application la plus spectaculaire de cette technique, d'autant que certains hologrammes sont restitués en « lumière blanche », ce qui confère une apparence proche de la réalité aux objets reproduits.

Les applications les plus courantes relèvent sans doute de l'interférométrie holographique, largement utilisée en optique bien sûr mais aussi pour effec-

tuer des contrôles non destructifs sur des pièces mécaniques, pour l'étude des vibrations de diverses structures, ou encore en balistique. Ces méthodes font désormais partie de la panoplie des outils de contrôle à la disposition des laboratoires et des industriels.

Il n'est pas possible de décrire davantage les applications de l'holographie dans cet ouvrage ; bornons-nous à citer, parmi d'autres, le livre de P. Smigielski, très bien illustré [219].

## 15.4 Modulation de la lumière et supports holographiques

À défaut d'un chapitre, nous consacrons un paragraphe aux composants qui permettent la modulation de la lumière, selon les grandes classes définies au paragraphe 5.1.1 (chapitre 5) ; et nous le plaçons ici parce que notre approche de l'holographie (paragraphe 15.1) repose plus ou moins implicitement sur les propriétés des émulsions photographiques que nous allons décrire.

L'holographie requiert en général des matériaux photosensibles à haute résolution, capables d'enregistrer des franges d'interférences dont le pas est de l'ordre du micron (la résolution doit être d'autant plus grande que l'angle entre le rayon moyen de l'onde de référence et celui de l'onde signal est lui-même grand). Toutefois les supports décrits par la suite ont des emplois plus vastes – qui ne requièrent pas toujours une très haute résolution – comme par exemple en traitement du signal optique (chapitre 16).

Les matériaux ou milieux cités ici servent aussi à la réalisation de composants diffringents. Il existe des réseaux de diffraction « holographiques », c'est-à-dire dont la fabrication relève du processus holographique (enregistrement de franges d'interférences rectilignes) [30].

Les matériaux photoréfringents comme le BSO, ou encore les cristaux liquides, mettent en jeu les propriétés de la lumière polarisée. Ainsi les réseaux et les hologrammes réalisés dans de tels matériaux ont les propriétés étudiées au paragraphe 5.4.3.

D'autres types de matériaux que ceux décrits ici servent aussi à enregistrer des hologrammes : photopolymères, photothermoplastiques, par exemple [109].

### 15.4.1 Émulsion photographique

**Émulsion argentique négative [130].** Une plaque ou une pellicule photographique est essentiellement constituée d'un support mécanique – plaque de verre, film plastique – sur lequel est déposée une émulsion photosensible contenant des microcristaux d'halogénure d'argent, généralement du bromure d'argent (AgBr). La taille moyenne de ces cristaux détermine le « grain » de l'émulsion. Sous l'action conjuguée de la lumière et des photosensibilisateurs<sup>4</sup>,

<sup>4</sup> Les photosensibilisateurs sont des constituants chimiques qui assurent la sensibilité de l'émulsion dans la bande spectrale désirée (par exemple le domaine visible). Une émulsion primitive, c'est-à-dire ne contenant pas de tels composants, n'est sensible que dans l'ultra-violet.

se forment dans les microcristaux d'halogénure des germes d'image latente constitués d'agrégats de quelques atomes d'argent. L'effet du révélateur photographique (bain de développement) est de réduire les microcristaux d'halogénure en argent métallique (qui apparaît noir). Cette réaction de réduction est beaucoup plus rapide pour les microcristaux porteurs de germes d'image latente, et il convient de l'arrêter lorsque ces grains porteurs ont été réduits : c'est le rôle du bain d'arrêt. Enfin, l'étape de fixation élimine de l'émulsion les cristaux d'halogénure d'argent qui n'ont pas été réduits, car non porteurs de germes ; ce sont aussi ceux qui n'ont pas reçu de lumière. L'émulsion reproduit ainsi l'éclairement qu'elle a reçu sous une forme « négative » : les parties suffisamment illuminées deviennent noires, les parties non illuminées restent transparentes (ou blanches). L'image obtenue présente des « niveaux de gris » dans les régions où l'éclairement était intermédiaire : cela s'obtient de fait par une densité plus faible de grains d'argent noircis (par rapport à la densité des régions noires).

Le noircissement de l'émulsion en un point dépend de l'énergie reçue en ce point pendant l'exposition à la lumière. La grandeur photométrique à prendre en compte est la lumination (ou exposition), produit de l'éclairement par le temps de pose, qui se mesure en joules par mètre carré ( $\text{J}/\text{m}^2$ ).

En photographie standard, on observe les images enregistrées dans l'émulsion en éclairage incohérent<sup>5</sup> (photographie sur papier ou diapositive projetée) et on s'intéresse à des grandeurs liées à la puissance lumineuse diffusée ou transmise, c'est-à-dire, précisément, à des éclaircissements ou des luminances.

Il est habituel de caractériser une émulsion par la densité optique qu'elle acquiert pour une lumination reçue. On définit en un point  $\mathbf{r}$  de l'émulsion le facteur de transmission  $T$  par

$$T(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_e(\mathbf{r})}{\Phi_i(\mathbf{r})}, \quad (15.27)$$

où  $\Phi_i(\mathbf{r})$  est le flux incident en  $\mathbf{r}$  (il s'agit, de fait, d'une moyenne prise sur une surface élémentaire<sup>6</sup> entourant le point  $\mathbf{r}$ ) et  $\Phi_e(\mathbf{r})$  le flux émergent. La densité optique de l'émulsion en  $\mathbf{r}$  est ( $T(\mathbf{r})$  est plus petit que 1)

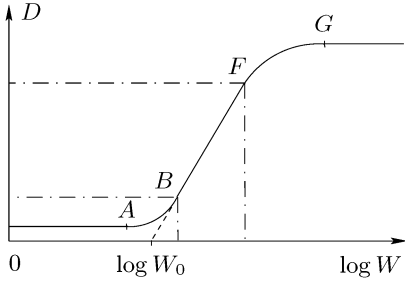
$$D(\mathbf{r}) = -\log T(\mathbf{r}), \quad (15.28)$$

où  $\log$  est la fonction logarithme en base 10.

La sensitométrie a pour objet l'étude et la caractérisation des émulsions photographiques sensibles. On trace des courbes sensitométriques qui donnent la densité optique en fonction de la lumination reçue. De telles courbes dépendent non seulement de l'émulsion elle-même (sensibilité) mais aussi du processus de développement (temps de révélation, température des bains chimiques, agitation des bains permanente ou non, type de révélateur).

<sup>5</sup> Cela n'est pas toujours vrai lors de l'agrandissement, puisque certains agrandisseurs peuvent fournir un éclairage partiellement cohérent. Mais comme on cherche *in fine* à reproduire la luminance de l'objet photographié, ce qui suit reste valable.

<sup>6</sup> Dont l'aire doit être supérieure à celle du « grain » de l'émulsion.



**FIG. 15.13.** Courbe sensitométrique (schématique) d'une émulsion négative. Elle donne la densité optique  $D$  en fonction du logarithme de la luminance  $W$ .

Ces courbes sont non linéaires (la figure 15.13 en donne un exemple). En effet, d'une part le noircissement (maximal) est atteint pour une certaine luminance, et toute luminance supérieure n'apporte aucun noircissement supplémentaire. Et d'autre part, il faut une luminance minimale pour impressionner l'émulsion. Cependant, entre les deux, se situe une région où la courbe est à peu près rectiligne.

Le contraste de l'émulsion est la pente de la partie linéaire de la courbe sensitométrique. Puisque la densité augmente avec la luminance, le contraste ainsi défini est positif pour une émulsion négative.

Plus précisément, la sensibilité d'une émulsion est caractérisée par une luminance  $W_0$ , et la densité optique, dans la partie linéaire de la courbe, s'écrit

$$D = \gamma \log \frac{W}{W_0}, \quad (15.29)$$

où  $\gamma$  est le contraste et  $W$  est la luminance reçue par l'émulsion.

Une propriété curieuse de la fonction logarithme permet d'écrire  $D$  sous une forme différente. Dans la relation (15.29), les luminances  $W_0$  et  $W$  se mesurent en  $\text{J/m}^2$ . Le rapport  $W/W_0$  est sans dimension, ce qui est indispensable, *a priori*, pour en prendre le logarithme. On écrit  $W = w \text{ J/m}^2$  et  $W_0 = w_0 \text{ J/m}^2$ , où  $w$  et  $w_0$  sont des nombres sans dimension, si bien que

$$\log \frac{W}{W_0} = \log \frac{w}{w_0} = \log w - \log w_0. \quad (15.30)$$

Ce qui est remarquable avec la fonction logarithme, c'est que la relation (15.30) est vraie, quel que soit le système d'unités choisi (à condition bien sûr que  $w$  et  $w_0$  soient relatifs au même système). Il est licite d'écrire

$$\log \frac{W}{W_0} = \log W - \log W_0, \quad (15.31)$$

même si l'écriture  $\log W$  semble absurde (puisque  $W$  n'est pas un simple nombre réel et qu'il possède une dimension physique).

Finalement la relation (15.29) se met sous la forme

$$D = \gamma(\log W - \log W_0). \quad (15.32)$$

La variable portée en abscisse sur la figure 15.13 tient compte de cette propriété.

Si on relie le facteur de transmission de l'émulsion à la lumination reçue, on obtient

$$T = \left( \frac{W}{W_0} \right)^{-\gamma}. \quad (15.33)$$

Comme  $\gamma$  est un nombre positif, le facteur de transmission  $T$  est une fonction non linéaire de la lumination.

On remplace souvent la lumination par l'éclairement dans les relations (15.32) et (15.33), ce qui revient à imposer un temps de pose égal à l'unité (une seconde).

**Émulsion argentique « positive ».** On parle parfois d'émulsion positive, ce qui peut se comprendre de deux façons. Après obtention d'un négatif (sur une émulsion négative), on impressionne une deuxième émulsion à travers le négatif (par contact ou à l'aide d'un agrandisseur). On obtient alors une image positive de l'éclairement enregistré dans le premier négatif.

On obtient le même résultat par un procédé d'inversion qu'on applique pendant le développement de l'émulsion : la technique d'inversion consiste à exposer l'émulsion à un flux lumineux intense (on parle de « solarisation ») après révélation et avant fixage.

**Émulsion holographique.** Ce qui précède s'adapte à l'holographie de la façon suivante. Notons d'abord qu'en holographie, on cherche à restituer l'amplitude du champ. Ce qui intéresse dans ce cas, c'est la façon dont la fonction de transmission<sup>7</sup> de l'émulsion dépend de l'éclairement enregistré. Le facteur de transmission  $T$  étant relié au coefficient de transmission par<sup>8</sup>  $T = t^2$ , la relation (15.33) conduit à

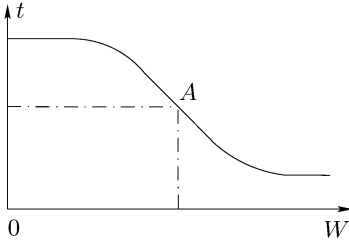
$$t = \left( \frac{W}{W_0} \right)^{-\gamma/2}. \quad (15.34)$$

Les courbes sensitométriques ont l'allure de celle donnée par la figure 15.14. La région linéaire de cette courbe correspond, de fait, à la région de sous-exposition d'une courbe sensitométrique standard, telle qu'elle est donnée par la figure 15.13 (la partie linéaire de la courbe de la figure 15.14 correspond à la partie  $AB$  de la courbe de la figure 15.13).

Dans les calculs, on remplace souvent la lumination par l'éclairement reçu par la plaque, le temps de pose étant, par convention, choisi égal à l'unité. Dans ces conditions, il est théoriquement possible de satisfaire la relation (15.6) avec  $K = 1$ , valeur sur laquelle est fondée l'analyse de l'holographie des paragraphes

<sup>7</sup> La fonction de transmission est le rapport de l'amplitude émergente à l'amplitude incidente sur l'émulsion, voir la relation (5.1).

<sup>8</sup> La relation  $T = t^2$  n'est vraie qu'à l'incidence normale et seulement si les indices de réfraction des milieux situés du côté du rayon incident pour l'un, et du côté du rayon transmis pour l'autre, sont égaux. Cela conformément aux valeurs des coefficients de Fresnel de la réfraction [29, 84].



**FIG. 15.14.** Courbe sensitométrique (schématique) d'une émulsion holographique.

15.1.1 et 15.1.4, à condition de choisir une émulsion de contraste  $\gamma = -2$ , c'est-à-dire une émulsion positive (la figure 15.14 est typique d'une émulsion négative).

Cependant, il est inutile en holographie d'inverser le contraste si l'on pense au principe de Babinet (voir l'exercice 3.1 p. 66) selon lequel deux écrans complémentaires ont la même figure de diffraction (la seule différence réside dans l'ordre 0 de diffraction, ce qui n'a pas d'importance en holographie). Examinons cela de plus près et montrons que l'analyse faite au paragraphe 15.1 est fondée.

Il existe un point de fonctionnement (point  $A$  de la figure 15.14) autour duquel la courbe sensitométrique est une droite<sup>9</sup>. Au voisinage de ce point, la fonction de transmission de l'hologramme s'écrit, au point  $(x, y)$ ,

$$t'(x, y) = a - \frac{\gamma}{2} I(x, y), \quad (15.35)$$

où  $a$  est une constante,  $\gamma$  est le contraste de l'émulsion ( $\gamma > 0$ ) et où l'éclairement  $I$  remplace la lumination (ce qui suppose un temps de pose donné une fois pour toutes). Selon le principe de Babinet, quand on éclaire l'hologramme, la figure de diffraction est la même que celle qui serait obtenue avec une fonction de transmission  $t$  telle que

$$t(x, y) = 1 - t'(x, y) = 1 - a + \frac{\gamma}{2} I(x, y). \quad (15.36)$$

La fonction  $t$ , donnée par la relation (15.36), est équivalente à celle d'une émulsion positive de contraste  $-\gamma/2$ . De plus, la partie  $1 - a$  est la même pour tous les points de l'hologramme : à la restitution, elle n'affecte que l'ordre 0 et ne modifie pas l'image restituée, ni l'image conjuguée.

C'est pourquoi, dans tout le paragraphe 15.1, nous avons développé la théorie de l'holographie en écrivant

$$t(x, y) = KI(x, y), \quad (15.37)$$

puis avons choisi  $K = 1$  pour une simplification supplémentaire : cela revenait à travailler dans la partie linéaire (pour l'amplitude) d'une émulsion positive fictive de contraste  $-2$ .

<sup>9</sup> Cela n'est vrai qu'idéalement. De fait, la courbe présente plutôt en  $A$  une inflexion. Les conséquences de cette non-linéarité sont exposées au paragraphe 15.4.3.

Mentionnons enfin que les émulsions holographiques sont à grains très fins, ce qui autorise une très haute résolution (de l'ordre de  $1\,000\text{ mm}^{-1}$  et parfois au-delà) mais s'obtient au détriment de la sensibilité (qui est faible). Ces émulsions nécessitent des révélateurs à grains fins.

### 15.4.2 Émulsion blanchie. Hologramme de phase

Une émulsion développée normalement absorbe à peu près la moitié du flux lumineux incident. La technique du blanchiment permet de rendre l'émulsion parfaitement transparente et conduit à un meilleur rendement énergétique. Elle consiste à enlever les grains d'argent qui ont reçu de la lumière plutôt que de les laisser noircir. Ainsi une région éclairée à l'enregistrement restera, après blanchiment, sans grains d'argent, alors qu'une région non éclairée conservera ses grains d'argent, rendus insensibles à la lumière par fixage. L'éclairement est enregistré sous la forme de variations de densité<sup>10</sup> de l'émulsion, c'est-à-dire finalement sous la forme de variations d'indice de réfraction, voire encore d'épaisseur. L'éclairement est enregistré sous la forme d'une variation de chemin optique qu'on écrit

$$\delta(x, y) = a + bI(x, y), \quad (15.38)$$

où  $I(x, y)$  est l'éclairement reçu au point  $(x, y)$  et  $a$  et  $b$  des constantes. (Ici encore le temps de pose est supposé égal à 1 s, ce qui permet de remplacer la lustration par l'éclairement.) À ce chemin optique correspond, à la longueur d'onde  $\lambda$ , une variation de phase

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} [a + bI(x, y)]. \quad (15.39)$$

La fonction de transmission de l'hologramme est

$$t(x, y) = e^{-i\varphi(x, y)}. \quad (15.40)$$

On obtient ainsi un hologramme de phase.

Pour la diffraction, seule compte la partie modulée<sup>11</sup> de la fonction  $t$ , et on écrit simplement

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi b}{\lambda} I(x, y). \quad (15.41)$$

Le calcul complet de la restitution de l'onde enregistrée est plus difficile, en général, que celui du paragraphe 15.1.4. Cependant, si les variations de la phase sont petites, nous écrivons, de façon approchée,

$$U_e(x, y) = t(x, y) U_i(x, y) \approx U_i(x, y) - i\varphi(x, y) U_i(x, y), \quad (15.42)$$

<sup>10</sup> Il s'agit ici de densité massique : on enlève de la matière.

<sup>11</sup> L'énergie transmise dans l'ordre 0 affecte toutefois le rendement en diffraction de l'hologramme.

où  $U_i(x, y)$  représente l'onde incidente sur l'hologramme révélé (c'est l'onde de restitution). En choisissant une onde de restitution homogène, le terme  $U_i(x, y)$  correspond à l'ordre 0 de diffraction et, pour la restitution de l'onde signal, tout se passe comme si on avait

$$U_e(x, y) = -i\varphi(x, y) U_i(x, y), \quad (15.43)$$

c'est-à-dire un hologramme avec une fonction de transmission de la forme

$$t(x, y) = -i\varphi(x, y) = -\frac{2i\pi b}{\lambda} I(x, y), \quad (15.44)$$

soit encore

$$t(x, y) = KI(x, y), \quad (15.45)$$

où  $K$  est une constante : c'est la relation (15.6). Un choix convenable de  $b$ , l'abandon du terme de phase  $-i$  (qui n'affecte pas l'intensité vibratoire de l'onde restituée) permet d'obtenir  $K = 1$  (au moins théoriquement). La théorie des paragraphes 15.1.1 et 15.1.4 s'applique à un hologramme enregistré dans une émulsion blanchie.

Le calcul explicite de  $t(x, y)$  reste praticable dans des cas simples. Par exemple, si l'éclairement enregistré est en « crêneaux », de pas  $p$ , de la forme

$$I(x, y) = \frac{I_0}{p} \sqcup\sqcup_p * \text{rect}_L(x), \quad (15.46)$$

où  $I_0$  est une constante dimensionnelle, alors

$$t(x, y) = \exp[-i\varphi(x, y)] = \exp\left[-\frac{2i\pi b}{\lambda} I(x, y)\right] = \frac{I(x, y)}{I_0} \exp\left[-\frac{2i\pi b I_0}{\lambda}\right]. \quad (15.47)$$

L'émulsion blanchie a bien une fonction de transmission de la forme

$$t(x, y) = KI(x, y), \quad (15.48)$$

et nous retrouvons la relation (15.6).

Un autre cas praticable est celui d'une modulation de phase sinusoïdale. Le calcul est comparable à celui d'un réseau de phase tel qu'il a été abordé au paragraphe 5.4.2.

Outre les émulsions argentiques classiques, qui peuvent être blanchies, citons les gélatines bichromatées, qui permettent d'obtenir des hologrammes de phase avec un fort rendement de diffraction [46].

**Remarque 15.4.1.** La modulation d'indice de réfraction dans l'émulsion blanchie est caractéristique d'un milieu inhomogène. En électromagnétisme, la modulation de l'indice est une modulation spatiale de la permittivité du milieu,  $\varepsilon$ ,

et on montre [29] que dans un tel milieu, l'équation des ondes s'écrit<sup>12</sup>, pour le champ électrique,

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mathbf{grad}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{grad} \ln \varepsilon), \quad (15.49)$$

où  $\Delta$  est le laplacien,  $\ln$  désigne le logarithme népérien et  $\mu$  la perméabilité du milieu (en pratique  $\mu_0$  pour un milieu non magnétique).

Or toute notre théorie est fondée sur la propagation du spectre angulaire, que nous avons déduite de l'équation de Helmholtz. Il est clair que cette dernière doit être modifiée dans un milieu inhomogène.

Nous pouvons cependant développer notre théorie en remarquant ce qui suit.

- 1° Si les variations de l'indice de réfraction ont un pas bien supérieur à la longueur d'onde, l'équation d'onde homogène reste valide. C'est au fond une des hypothèses de la théorie scalaire (paragraphe 1.3 du chapitre 1) ;
- 2° L'émulsion photographique est mince et nous l'assimilons à une transparence. Il nous suffit de connaître l'amplitude du champ en sortie de la plaque photographique (qui est vue comme une « boîte noire »), la propagation ayant lieu ensuite dans un milieu homogène.

### 15.4.3 Effet de la non-linéarité de l'émulsion

Selon la relation (15.6), sur laquelle se fonde notre approche de l'holographie, la fonction de transmission d'un hologramme enregistré dans une émulsion argentique est proportionnelle à l'éclairement reçu : cela est vrai dans un domaine qui entoure le point de fonctionnement  $A$  indiqué par la figure 15.14.

Dans la réalité, le point  $A$  est plutôt un point d'inflexion, au voisinage duquel nous écrivons

$$t(x, y) = KI(x, y) + K'(I(x, y))^3 + K''(I(x, y))^4 + \dots, \quad (15.50)$$

où  $K$ ,  $K'$  et  $K''$  sont des constantes.

Imaginons enregistrer des franges d'Young, comme au paragraphe 15.1.1. L'éclairement est de la forme

$$I(x, y) = 4|A_0|^2 \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D}. \quad (15.51)$$

Restituons avec une onde plane  $U_i(x, y) = U_0$  (on pourrait utiliser l'onde issue du trou source  $S_1$  ; cela introduirait un terme de phase quadratique qui ne modifierait pas le résultat que nous voulons mettre en évidence ici). L'amplitude de l'onde qui émerge de l'hologramme s'écrit

$$\begin{aligned} U_e(x, y) &= t(x, y)U_i(x, y) \\ &= 4|A_0|^2 U_0 \left( K \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} + K' \cos^6 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} + K'' \cos^8 \frac{\pi \ell x}{\lambda D} + \dots \right). \end{aligned} \quad (15.52)$$

<sup>12</sup> Nous supposons le milieu homogène pour la perméabilité  $\mu$ .

La linéarisation des puissances de la fonction cosinus conduit à écrire

$$U_e(x, y) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi\ell x}{\lambda D} + a_2 \cos \frac{4\pi\ell x}{\lambda D} + a_2 \cos \frac{6\pi\ell x}{\lambda D} + \dots, \quad (15.53)$$

où les coefficients  $a_j$  sont des constantes.

Le terme  $a_0$  de la relation (15.53) correspond à l'ordre 0 de diffraction. Le terme en  $a_1 \cos(2\pi\ell x/\lambda D)$  restitue deux points séparés de  $\ell$  : il s'agit du point  $S_2$  et de son image conjuguée (voir le paragraphe 15.1.1).

La non-linéarité de l'émulsion holographique introduit des termes supplémentaires. Le terme  $a_2 \cos(4\pi\ell x/\lambda D)$  représente deux points lumineux distants entre eux de  $4\ell$  (et symétriques l'un de l'autre par rapport à  $S_1$ ). Quant au terme  $a_3 \cos(6\pi\ell x/\lambda D)$  il représente deux points distants entre eux de  $6\ell$ . On a en quelque sorte des ordres de diffraction supérieurs qu'on peut qualifier d'harmoniques puisqu'ils sont dans une progression bien définie.

Ce phénomène existe encore pour l'hologramme d'un objet diffusant, ou même pour un hologramme de phase.

#### 15.4.4 Supports pour l'holographie en temps réel

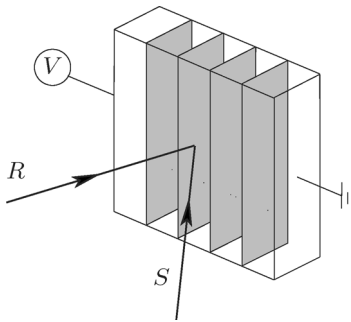
**Supports dynamiques.** Les émulsions sensibles photographiques ont besoin d'un traitement chimique pour être « révélées », et cela a deux conséquences : il faut du temps pour développer l'hologramme et une fois développé, celui-ci est figé. Ces deux aspects de l'holographie sur support argentique sont souvent vus comme des inconvénients, mais avant de considérer ce point de vue, mentionnons quelques cas pour lesquels ces inconvénients n'en sont pas vraiment. Dans certaines applications on enregistre un hologramme qu'on a ensuite tout le temps d'examiner pour en extraire l'information qu'il contient. On peut par exemple observer l'onde restituée pour différentes mises au point [240] et un hologramme figé permet cela. Pour d'autres applications l'enregistrement de l'hologramme se fait durant plusieurs périodes d'un phénomène vibratoire (vibrations de la membrane d'un haut-parleur par exemple [83]), et l'hologramme photographique permet de voir les nœuds et les ventres des vibrations<sup>13</sup>. Enfin on parvient à faire interférer l'onde diffusée par un objet avec l'onde restituée par un hologramme ; rien n'empêche dans ce cas l'onde objet de varier temporellement.

On constate donc qu'un hologramme photographique, bien que figé, permet dans une certaine mesure, des études dynamiques. Néanmoins il est utile de pouvoir enregistrer un hologramme en temps réel d'une part, et de disposer d'une véritable holographie dynamique d'autre part. Pour cela il faut des supports sensibles adaptés. Ceux-ci sont essentiellement de deux sortes : les matériaux thermoplastiques, les matériaux photoréfringents auxquels nous limitons l'exposé.

<sup>13</sup> Cette expérience est réalisable aussi en holographie en temps réel [116].

**Les cristaux photoréfringents.** L'effet photoréfringent traduit la variation de la biréfringence d'un matériau électro-optique et photoconducteur sous l'effet de l'éclairage du matériau [86, 105, 179]. Il se rencontre dans les cristaux électro-optiques comme le niobate de lithium ( $\text{LiNbO}_3$ ), le phosphore d'indium (InP) ou l'oxyde de bismuth silicium ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ , en abrégé BSO) ou germanium (BGO). On peut schématiquement comprendre cet effet comme suit.

Considérons pour fixer les idées un cristal de BSO auquel on applique un champ électrique transversal, d'amplitude  $E_0$ . Projétons sur le cristal les interférences produites par deux faisceaux  $R$  (onde de référence) et  $S$  (onde signal). Se crée dans le cristal un réseau d'éclairement (franges d'interférences) et si les directions des faisceaux  $R$  et  $S$  sont bien choisies, les franges d'interférences sont perpendiculaires au champ électrique (fig. 15.15).



**FIG. 15.15.** Enregistrement d'un hologramme dans un cristal photoréfringent (BSO) auquel on applique une tension  $V$ . Les faisceaux  $R$  (onde de référence) et  $S$  (onde signal) interfèrent et engendrent un réseau épais dont on a schématiquement représenté les plans équiphases.

Le matériau étant photoconducteur, dans les zones éclairées se crée un courant électrique dû essentiellement aux électrons. Mais ces électrons sont piégés dans les zones sombres. Le réseau d'éclairement engendre un réseau de charges électriques : des charges négatives s'accumulent dans les zones sombres et font défaut dans les zones éclairées. Ce phénomène est d'ailleurs favorisé par le champ électrique appliqué au cristal. Il en résulte une modulation spatiale du champ électrique, sous la forme

$$\Delta E(x, y) = A + BI(x, y), \quad (15.54)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes et  $I(x, y)$  l'éclairement au point  $(x, y)$ .

Par effet photo-électrique linéaire (effet Pockels) [167, 248], le réseau du champ électrique engendre à son tour un réseau de biréfringence. Pour un effet transversal, la biréfringence du cristal de BSO est de la forme

$$\Delta n(x, y) = r_{41} n_0^3 [E_0 + \Delta E(x, y)], \quad (15.55)$$

où  $n_0$  est l'indice de réfraction du BSO et  $r_{41}$  un de ses coefficients électro-optique ( $r_{41} \approx 3,6 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$  [167, 180]). Cette modulation est « lisible » en lumière polarisée et vue, pour une polarisation parallèle à un des axes de la biréfringence, comme une modulation de phase de la forme

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi e \Delta n(x, y)}{\lambda}, \quad (15.56)$$

où  $e$  est la longueur optique du cristal (c'est-à-dire selon la direction de propagation de la lumière). Les relations (15.54) et (15.55) permettent d'écrire la phase  $\varphi$  sous la forme

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi e}{\lambda} r_{41} n_0^3 [E_0 + \Delta E(x, y)] = \frac{2\pi}{\lambda} [a + bI(x, y)], \quad (15.57)$$

c'est-à-dire sous la forme de la relation (15.39).

Il est possible d'enregistrer un hologramme de phase dans un matériau photoréfringent comme le BSO. Pour la restitution, on éclaire le cristal avec une onde à une longueur d'onde peu absorbée par le cristal. Cette onde est diffractée comme elle le serait par un hologramme de phase.

L'intérêt de ce type d'holographie réside dans la modulation temporelle de l'onde signal  $S$ . Le BSO est capable de suivre cette modulation dans les gammes de fréquences des signaux vidéo (fréquences de l'ordre de 50 Hz), ou plus rapidement, si la puissance de l'onde de référence est assez grande. Le réseau inscrit dans le cristal est modulé temporellement, et il y a modulation temporelle de l'onde restituée. On conçoit ainsi des dispositifs d'holographie dynamique, dont il existe d'ailleurs de remarquables applications [105, 115].

#### 15.4.5 Modulateurs de lumière spatiaux

**Les modulateurs à cristaux liquides.** Entre l'ordre des cristaux et le désordre des liquides, la matière prend parfois les formes d'un ordre intermédiaire : c'est le cas des cristaux liquides [45, 63] pour lesquels l'ordre se réduit à une orientation principale, commune aux molécules du milieu. Par exemple les centres de gravité des molécules d'un cristal liquide (smectique A, cholestérique) s'organisent de façon désordonnée – c'est le côté liquide – dans des plans parallèles équidistants – comme les plans réticulaires d'un cristal.

Nous ne discuterons pas des diverses classes de cristaux liquides [45, 54, 63]. Pour la propagation de la lumière dans ces milieux, le premier fait important concerne l'anisotropie des molécules : elles sont biréfringentes. En général les molécules d'un même plan sont parallèles entre elles (en moyenne) selon un axe appelé directeur. Ce directeur n'a pas forcément une direction fixe quand on passe d'un plan au voisin.

Nous employons le terme de « cellule » à cristaux liquides pour désigner un composant opto-électronique constitué de deux lames de verre parallèles (séparées de quelques microns) entre lesquelles il y a un cristal liquide. Sur les plaques de verre sont collées des électrodes transparentes. On envoie la lumière perpendiculairement aux lames. La cellule se comporte, optiquement, comme un biréfringent elliptique (cela signifie que les vibrations propres du milieu, orthogonales, sont polarisées elliptiquement). Le lien entre la biréfringence d'une molécule (qui est plutôt linéaire) et celle de la cellule n'est pas toujours facile à établir théoriquement. Notamment, la rotation du directeur d'un plan à l'autre

engendre du pouvoir rotatoire qui, par superposition à la biréfringence des molécules, produit justement de la biréfringence elliptique. Inversement, cette biréfringence globale se décompose en un pouvoir rotatoire et une biréfringence linéaire, mais ce ne sont pas ceux de départ.

L'application d'un champ électrique statique (ou quasi statique) se traduit par une rotation des molécules du cristal liquide. Le résultat est une modification de la biréfringence globale de la cellule et c'est cela qui est mis à profit pour moduler la lumière, spatialement ou temporellement : on applique un champ variable.

Les cristaux photoréfringents, décrits auparavant, sont utilisés dans la fabrication de modulateurs tout optiques en ce sens que la création du réseau de diffraction dans le matériau résulte d'interférences lumineuses produites optiquement (analogiquement). Dans les cellules à cristaux liquides, c'est l'application directe d'un champ électrique qui produit la modulation désirée. Un modulateur spatial est une matrice de cellules élémentaires pilotées électriquement, idéalement indépendamment les unes des autres. On parle d'adressage électrique<sup>14</sup>.

Il existe une assez grande variété de modulateurs à cristaux liquides. On produit des modulateurs de biréfringence binaire à modulation d'axe, ou des modulateurs à modulation de phase, continue ou binaire. Nous avons étudié au chapitre 5 les propriétés optiques générales des réseaux de diffraction enregistrés dans de tels matériaux. On fabrique de la sorte des réseaux dynamiques, à pas variable.

La résolution qu'offrent les modulateurs à cristaux liquides n'est pas suffisante, en général et à ce jour, pour qu'on puisse les utiliser de façon universelle pour l'holographie. Elle est toutefois suffisante pour la réalisation de composants diffractants, comme pour celle d'écrans plats. Une nouvelle catégorie de composants est apparue qui ont une haute résolution : ce sont les dispositifs à cristal liquide dispersé dans un polymère (on parle de *PDLC*, de l'anglais *Polymer Dispersed Liquid Crystal*) [54]. Il semble envisageable de les utiliser en holographie et pour la conception de composants diffractants reconfigurables.

**Composants fondés sur d'autres effets.** Nous mentionnons pour mémoire les modulateurs magnéto-optiques, ceux à miroirs déformables<sup>15</sup>, ou encore ceux à multi-puits quantiques. Au chapitre 16 nous parlerons brièvement des modulateurs acousto-optiques. Remarquons pour conclure que la situation a évolué favorablement depuis une vingtaine d'années, et qu'on dispose enfin de modulateurs performants pour un grand nombre d'applications. Les recherches sont particulièrement actives pour obtenir des modulateurs rapides, à haute résolution ou en grandes dimensions.

<sup>14</sup> Il existe des modulateurs à cristaux liquides à adressage optique : ils utilisent une couche photoconductrice pour transformer une modulation d'éclairement en modulation du champ électrique aux bornes de la cellule à cristaux liquides [12]. La couche photoconductrice remplace une des deux électrodes transparentes de la cellule.

<sup>15</sup> Il s'agit de micro-miroirs formant des cellules de quelques microns de côtés.

## 15.5 Exercices

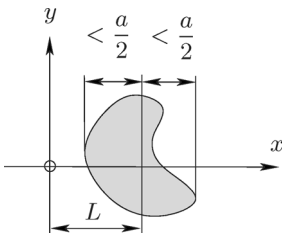
**Exercice 15.1 (Hologramme de Fourier).** On considère l'enregistrement d'un hologramme de Fourier comme l'indique le schéma de la figure 15.11 : le trou source de référence est dans le plan de l'objet. Soit  $t$  la fonction de transmission de l'objet.

1. Soit  $\mathcal{A}$  la sphère tangente au plan de l'objet et centrée sur la plaque holographique. Montrer que l'amplitude  $U_A$  du champ sur  $\mathcal{A}$  est égale à  $t$  multiplié par un terme de phase quadratique  $T$ .
2. Montrer que l'amplitude du champ diffracté par l'objet sur la plaque holographique est le produit de  $\hat{U}_A$  et d'un terme de phase quadratique  $T'$ .
3. Donner l'expression de l'amplitude du champ créé par le trou source sur la plaque holographique.
4. Montrer que choisir le trou source dans le plan de l'objet permet de compenser le terme de phase  $T'$  lors de la restitution de l'hologramme.
5. Montrer que l'objet restitué et son image conjuguée sont des émetteurs plans.

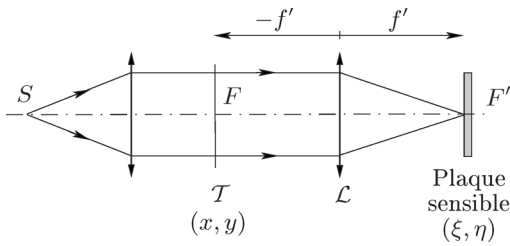
**Exercice 15.2.** Soit  $m$  une fonction de deux variables réelles, positive :  $m(x, y) \geq 0$ . On suppose  $m(x, y) = 0$ , si  $|x| \geq a/2$ .

Soit  $\mathcal{T}$  la transparence de la figure 15.16, composée d'un trou infiniment petit qui se représente par une distribution de Dirac, et un motif de fonction de transmission  $m$  centré en  $(L, 0)$ . On écrit la fonction de transmission de  $\mathcal{T}$  sous la forme  $t(x, y) = \delta(0, 0) + m(x - L, y)$ . On place  $\mathcal{T}$  dans le montage de la figure 15.17. La source lumineuse est monochromatique ( $\lambda$ ) et produit dans le plan de  $\mathcal{T}$  une amplitude uniforme, supposée égale à 1 (pour simplifier).

1. Quelle est l'amplitude du champ  $U(\xi, \eta)$  dans le plan focal image de l'objectif  $\mathcal{L}$  (distance focale  $f'$ ) ?
2. Quel est l'éclairement  $I(\xi, \eta)$  dans le plan focal image de  $\mathcal{L}$  ?
3. On place dans le plan focal image de  $\mathcal{L}$  une plaque photographique qu'on expose sous l'éclairement de la question précédente. On développe l'émulsion de telle sorte que la plaque développée a une fonction de transmission en amplitude  $t$ , proportionnelle à l'éclairement qui a servi à l'enregistrement. Pour simplifier on écrit :  $t(\xi, \eta) = I(\xi, \eta)$ .



**FIG. 15.16.** Transparence composée d'un trou et d'un motif (partie ombrée) distants de  $L$ .

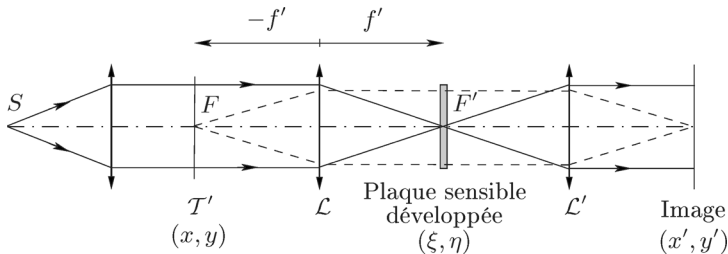


**FIG. 15.17.** Montage d'enregistrement de la figure de diffraction de la transparence  $\mathcal{T}$ .

On place la plaque développée dans le montage de la figure 15.18 où la transparence  $\mathcal{T}'$  contient seulement un trou à l'origine : sa fonction de transmission est  $t'(x, y) = \delta(0, 0)$ . Les deux objectifs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  ont la même distance focale image  $f'$ .

Quelle est l'amplitude du champ dans le plan focal image  $\mathcal{L}'$  ? (Il s'agit du plan « image », coordonnées  $x', y'$ ).

4. Décrire ce qu'on observe dans le plan image (plan focal image de  $\mathcal{L}'$ ). Quelle condition doivent satisfaire  $L$  et  $a$  pour qu'il n'y ait pas de superpositions néfastes ?
5. On suppose que les ouvertures (pupilles) des objectifs sont suffisamment grandes pour que ce soit la plaque photographique qui limite le champ enregistré dans le plan  $(\xi, \eta)$ . Montrer que les dimensions (en  $\xi$  et  $\eta$ ) de la plaque photographique limitent la résolution de l'image. Si  $H_\xi$  et  $H_\eta$  sont la largeur et la longueur de la plaque, donner les expressions des fréquences de coupure.
6. Quelle est l'influence de la résolution limitée de la plaque photographique ? (On suppose que les ouvertures des objectifs sont assez grandes et que leur extension limitée n'a pas d'effet appréciable.)
7. Que voit-on si on met son œil à la place de  $\mathcal{L}'$  ?



**FIG. 15.18.** Montage de restitution de la transparence  $\mathcal{T}$ .

## Chapitre 16

# Traitement du signal optique

Le traitement du signal optique s'applique à des signaux d'origines variées – signaux optiques bien sûr, mais aussi acoustiques (sonar), électriques, signaux radar – pour peu qu'on sache transcrire ces derniers sur un support « lisible » par la lumière, que ce soit sous forme monodimensionnelle (traitements acousto-optiques par exemple) ou bi-dimensionnelle (emploi de modulateurs de lumière spatiaux), en éclairage cohérent ou en éclairage incohérent. Il s'agit d'un domaine particulièrement vaste dont le développement est lié, historiquement et techniquement, à l'optique de Fourier. Il n'était pas concevable d'ignorer dans cet ouvrage un tel domaine d'applications, même si l'optique métaxiale, et encore moins l'optique de Fourier fractionnaire, n'ont pénétré le domaine. Nous nous bornerons à citer quelques exemples qui nous paraissent bien illustrer à la fois les capacités de l'optique et le rôle de la transformation de Fourier. D'autres applications sont décrites dans de nombreux ouvrages [38, 59, 85, 97, 233, 235, 250].

### 16.1 Généralités sur le traitement du signal optique

Au cœur du traitement des signaux par voie optique figure la capacité qu'offre la lumière de réaliser une transformation de Fourier (analogique, à deux dimensions en général) par propagation. Cette capacité a suscité de grands espoirs dans les années 60, à une époque où les traitements numériques n'étaient pas ce qu'ils sont aujourd'hui, et a conduit à la conception et la réalisation de nombreux processeurs optiques.

L'emploi de l'optique se fonde sur les considérations suivantes.

1. Les capacités du traitement optique sont énormes. Un montage classique de transformation de Fourier optique (voir le chapitre 5) d'une longueur de 10 cm permet d'obtenir la transformée de Fourier d'une image bidimensionnelle en 0,3 ns environ. Si l'image est au format  $24 \times 36 \text{ mm}^2$ , avec une résolution de 20  $\mu\text{m}$ , et si elle comporte 8 niveaux de gris, cela représente une vitesse de traitement de  $20 \cdot 10^6$  Gbits/s.
2. Le traitement du signal en temps réel exige des convertisseurs analogique-numérique très rapides qui imposent de grandes bandes passantes. Les systèmes acousto-optiques, c'est leur intérêt, permettent d'atteindre des bandes passantes supérieures à quelques dizaines de GHz.

3. Les signaux sont parfois véhiculés par la lumière. C'est le cas dans les télécommunications optiques actuelles, et il est naturel de chercher à traiter ces signaux optiquement. Citons aussi le cas des signaux sonar parfois collectés et transmis par fibres optiques.
4. En traitement d'images, les images sont formées, à l'origine, par un objectif (cela exclut les images de synthèse) et l'optique analogique offre des méthodes de pré-traitements rapides.
5. L'optique semble bien adaptée à des traitements effectués en parallèle et offre des possibilités de connexions performantes.

Pour exploiter tout à fait les capacités de l'optique mentionnées au premier point ci-dessus, il est indispensable de pouvoir entrer les signaux et récupérer les données en sortie à grande vitesse. Les supports à enregistrement et lecture « en temps réel » mentionnés au paragraphe 15.4.4, utilisés pour l'adressage des données ou pour le traitement lui-même, permettent des traitements eux-mêmes « en temps réel ». Néanmoins ils ont toujours constitué le point faible du traitement du signal optique, leur vitesse étant en général insuffisante pour l'exploitation des fortes capacités de l'optique (c'est-à-dire de ce qu'offre la propagation). Cela reste encore vrai à l'heure actuelle, même si des progrès ont été réalisés.

L'exploitation des données en sortie d'un processeur présente moins de problèmes : on dispose de photodiodes rapides, parfois sous forme de matrices de détecteurs.

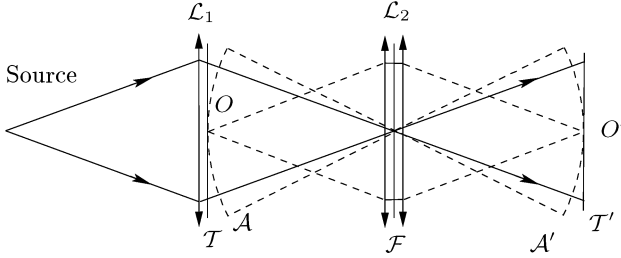
## 16.2 Filtrage optique et corrélation

Ce paragraphe traite surtout des principes du filtrage et de la corrélation optiques. Les ouvrages de Goodman [97], de Tribillon [233] ou de VanderLugt [235], pour n'en citer que quelques-uns, décrivent des applications pratiques.

### 16.2.1 Principe du filtrage optique

Considérons le montage de la figure 16.1. La source monochromatique est ponctuelle (ou quasi ponctuelle) et, pour simplifier, les objectifs sont représentés comme des lentilles minces et sont supposés avoir la même distance focale  $f'$ . Le premier objectif ( $\mathcal{L}_1$ ) projette la source sur le second objectif ( $\mathcal{L}_2$ ) où est placé un filtre  $\mathcal{F}$  (le grandissement transversal de cette conjugaison est choisi égal à  $-1$  pour simplifier). L'objet est une transparence  $\mathcal{T}$  de fonction de transmission  $t$ . Cette transparence, éclairée par une onde convergente centrée sur le filtre, constitue un émetteur sphérique équivalent  $\mathcal{A}$  sur lequel le champ est  $U_A = A_0 t$  ( $A_0$  est un facteur dimensionnel) et dont l'image cohérente est la

<sup>1</sup> Le second objectif est représenté comme étant l'assemblage de deux doublets entre lesquels on place le filtre ; le premier des deux doublets permet d'obtenir la transformée de Fourier du champ sur  $\mathcal{A}$  sur le plan du filtre (voir le paragraphe 5.1.2).



**FIG. 16.1.** Montage de filtrage de l'image de  $T$  par le filtre  $\mathcal{F}$ .

sphère  $\mathcal{A}'$ , centrée sur le filtre et qui passe par le point  $O'$ , image de  $O$  (la sphère  $\mathcal{A}$  a son sommet en  $O$  et son centre sur le filtre). Le grandissement transversal de l'imagerie entre  $O$  et  $O'$  est également supposé être égal à  $-1$ . L'éclairement sur  $\mathcal{A}'$  est le même que celui du plan  $T'$ , tangent à  $\mathcal{A}'$  en son sommet, où on détecte en général l'éclairement de l'image. La distance entre l'objet  $T$  et le filtre est  $2f'$ ; elle est égale à la distance du filtre à l'image  $T'$ .

Le montage précédent (fig. 16.1) permet de « matérialiser » le spectre de la transparence objet dans le plan de  $\mathcal{F}$  et de le modifier; l'amplitude du champ dans le plan du filtre  $\mathcal{F}$  (coordonnées  $\xi$  et  $\eta$ ) – sur la face antérieure – est en effet

$$U_{F-}(\xi, \eta) = \frac{iA_0}{2\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\xi}{2\lambda f'}, \frac{\eta}{2\lambda f'}\right), \quad (16.1)$$

où  $A_0$  est une constante dimensionnelle (c'est l'amplitude du champ sur  $T$ ). Filtrer les fréquences spatiales dans le plan de Fourier modifie l'aspect de l'image obtenue sur  $T'$ . Les exercices 16.1, 16.2 et 16.4 proposent des exemples.

Soit  $\Theta$  la fonction de transmission du filtre  $\mathcal{F}$  – les variables sont les coordonnées prises dans le plan du filtre – et soit  $H$  la fonction telle que

$$H(F_x, F_y) = \Theta(2\lambda f' F_x, 2\lambda f' F_y). \quad (16.2)$$

Si  $U_{F+}$  est l'amplitude du champ immédiatement après  $\mathcal{F}$ , le filtrage dans le plan  $\mathcal{F}$  se traduit par

$$\begin{aligned} U_{F+}(\xi, \eta) &= \frac{iA_0}{2\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\xi}{2\lambda f'}, \frac{\eta}{2\lambda f'}\right) \Theta(\xi, \eta) \\ &= \frac{iA_0}{2\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\xi}{2\lambda f'}, \frac{\eta}{2\lambda f'}\right) H\left(\frac{\xi}{2\lambda f'}, \frac{\eta}{2\lambda f'}\right). \end{aligned} \quad (16.3)$$

L'amplitude de l'onde émergeant de  $\mathcal{F}$  est le spectre de l'objet multiplié par  $H$  (à condition de prendre des variables adaptées).

Pour alléger les notations, si  $f$  est une fonction de deux variables, nous définissons la fonction  $\tilde{f}$  par  $\tilde{f}(x, y) = f(-x, -y)$ .

L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  est la transformée de Fourier optique de  $U_{F+}$ , soit explicitement,

$$U_{A'}(x', y') = \frac{i}{2\lambda f'} \widehat{U}_{F+} \left( \frac{x'}{2\lambda f'}, \frac{y'}{2\lambda f'} \right), \quad (16.4)$$

et si  $h$  est la transformée de Fourier inverse (spatiale) de  $H$ , la relation (16.3) conduit à écrire  $U_{A'}$  sous la forme du produit de convolution de  $\tilde{t}$  avec  $\tilde{h}$ , c'est-à-dire,

$$U_{A'}(x', y') = -A_0 \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{t}(x, y) \tilde{h}(x' - x, y' - y) dx dy. \quad (16.5)$$

Comme  $\mathcal{A}'$  est l'image de  $\mathcal{A}$  avec le grandissement  $-1$ , la fonction  $-A_0 \tilde{t}$  représente l'amplitude de l'image géométrique de  $\mathcal{A}$  (l'image non filtrée) au sens du chapitre 8, notée  $U_{AG}$ . La relation (16.5) s'écrit

$$U_{A'}(x', y') = \int_{\mathbb{R}^2} U_{AG}(x, y) \tilde{h}(x' - x, y' - y) dx dy. \quad (16.6)$$

c'est-à-dire  $U_{A'} = U_{AG} * \tilde{h}$ ; elle est caractéristique d'un filtre linéaire dont la réponse percussionnelle spatiale (ou gain complexe) est la fonction  $\tilde{h}$ .

La difficulté technique du filtrage réside dans la réalisation pratique d'un filtre arbitraire, et en particulier de sa fonction de transmission  $H$ , parce qu'*a priori*  $H$  peut prendre des valeurs complexes. La méthode de VanderLugt permet la synthèse d'une telle fonction.

### 16.2.2 Filtre de VanderLugt

L'idée consiste à utiliser un procédé holographique pour engendrer la fonction de transmission  $H$  du filtre<sup>2</sup>. L'enregistrement s'effectue comme le montre la figure 16.2.

Soit  $h$  la fonction de transmission d'une transparence placée dans le plan focal objet d'un objectif. On éclaire la transparence par une onde plane de façon à obtenir la transformée de Fourier optique de  $h$  dans le plan focal image de l'objectif. Si  $H$  est la transformée de Fourier de  $h$ , l'amplitude de l'onde signal dans le plan focal image est

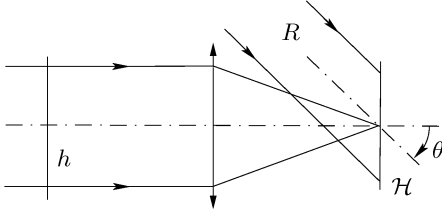
$$S(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda f'} H \left( \frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'} \right). \quad (16.7)$$

L'onde de référence est une onde plane, d'amplitude  $R_0$ , qui arrive sous un angle  $\theta$ , et qui crée dans le plan focal image un champ d'amplitude

$$R(\xi, \eta) = R_0 \exp \left[ -\frac{2i\pi\theta\xi}{\lambda} \right]. \quad (16.8)$$

L'amplitude du champ dans le plan focal image est

<sup>2</sup> Tel que nous le décrivons, le procédé de synthèse du filtre est analogique. Il est concevable de calculer le filtre et de le réaliser selon les techniques de l'holographie synthétique, ou numérique.



**FIG. 16.2.** Enregistrement d'un filtre ayant comme fonction de transmission la transformée de Fourier d'une fonction  $h$  donnée *a priori*.

$$\begin{aligned} U_H(\xi, \eta) &= R(\xi, \eta) + S(\xi, \eta) \\ &= R_0 \exp \left[ -\frac{2i\pi\theta\xi}{\lambda} \right] + \frac{i}{\lambda f'} H \left( \frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'} \right). \end{aligned} \quad (16.9)$$

On enregistre l'hologramme  $\mathcal{H}$ , et la fonction de transmission de la plaque développée s'écrit<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} t(\xi, \eta) &= R_0^2 + \frac{1}{\lambda^2 f'^2} \left| H \left( \frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'} \right) \right|^2 \\ &\quad + \frac{iR_0}{\lambda f'} H \left( \frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'} \right) \exp \left[ \frac{2i\pi\theta\xi}{\lambda} \right] \\ &\quad - \frac{iR_0}{\lambda f'} \overline{H \left( \frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'} \right)} \exp \left[ -\frac{2i\pi\theta\xi}{\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Considérons maintenant le montage de la figure 16.3. La fonction de transmission de l'objet  $\mathcal{A}$  est  $g(x, y)$ . Dans le plan du filtre on place l'hologramme (après développement). L'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{A}$  est

$$U_A(x, y) = A_0 g(x, y), \quad (16.11)$$

où  $A_0$  est une constante dimensionnelle. Pour simplifier, le grandissement transversal entre  $\mathcal{A}$  et son image  $\mathcal{A}'$  est choisi égal à  $-1$ . Selon la relation (16.10), l'amplitude du champ dans le plan  $\mathcal{A}'$  est la somme de trois termes

$$U_{A'}(x', y') = U_{-1}(x', y') + U_0(x', y') + U_1(x', y'). \quad (16.12)$$

Le terme

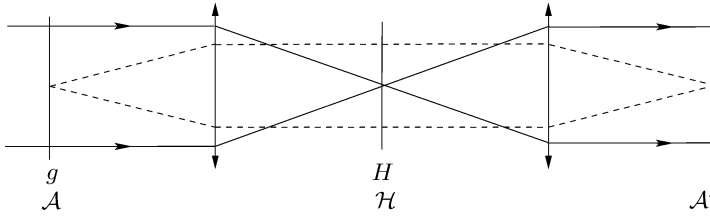
$$U_0(x', y') = -A_0 R_0^2 \tilde{g}(x', y') - A_0 h * \bar{\tilde{h}} * \tilde{g}(x', y'), \quad (16.13)$$

correspond à l'ordre 0 de diffraction (le signe  $-$  vient du grandissement  $-1$ ). Le terme

$$U_{-1}(x', y') = -A_0 R_0 \delta_{-\theta f', 0} * \tilde{h} * \tilde{g}(x', y'), \quad (16.14)$$

est le produit de convolution de  $\tilde{h}$  avec  $\tilde{g}$ , translaté de  $-\theta f'$  dans la direction de  $x'$ . Ce terme s'écrit également

<sup>3</sup> Comme au chapitre 15 (§15.1.1), le coefficient de proportionnalité entre la fonction  $t$  et l'éclairement d'enregistrement de l'hologramme est choisi égal à 1.



**FIG. 16.3.** Montage pour le filtrage de VanderLugt. La source (monochromatique) n'est pas représentée. Ce montage est une alternative au montage de la figure 16.1 : les sphères  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  de la figure 16.1 deviennent des plans et se confondent avec l'objet  $\mathcal{T}$  et son image  $\mathcal{T}'$  ; le plan de l'hologramme  $\mathcal{H}$  est celui du filtre  $\mathcal{F}$  ; les deux objectifs qui constituent  $\mathcal{L}_2$  sur le montage 16.1 forment ici un système afocal.

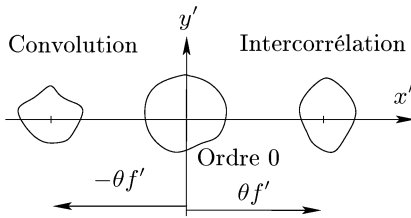
$$U_{-1}(x', y') = -A_0 R_0 \int_{\mathbb{R}^2} h(x - x' - \theta f', y - y') g(-x, -y) dx dy. \quad (16.15)$$

Le troisième terme est

$$\begin{aligned} U_1(x', y') &= -A_0 R_0 \delta_{\theta f', 0'} * \bar{h} * \tilde{g}(x', y') \\ &= -A_0 R_0 \int_{\mathbb{R}^2} \overline{h(x' - x - \theta f', y' - y)} g(-x, -y) dx dy, \end{aligned} \quad (16.16)$$

et il représente la corrélation (ou intercorrélation) des fonctions  $h$  et  $g$ , mais translatée de  $\theta f'$ .

La figure 16.4 montre la localisation des trois termes précédents dans le plan de l'image.



**FIG. 16.4.** Représentation schématique des supports des trois ordres de diffraction dans le plan de corrélation.

**Remarque 16.2.1.** Sur la figure 16.2 l'angle  $\theta$  est exagéré. Il faut en effet que les deux faisceaux diffractés par le filtre holographique  $\mathcal{H}$  passent par le deuxième objectif de la figure 16.3 ; or ces deux faisceaux se propagent dans des directions qui font avec l'axe optique un angle égal à  $\theta$ .

### 16.2.3 Application au filtrage adapté et à la corrélation

Soit un signal représenté par la fonction  $s(x, y)$  dont la transformée de Fourier est  $S(F_x, F_y)$ . Le filtre adapté à ce signal admet comme fonction de transfert [97, 203, 207, 235], à une constante multiplicative près,

$$H(F_x, F_y) = \overline{S(F_x, F_y)}. \quad (16.17)$$

La réponse percussionnelle spatiale du filtre est, à une constante multiplicative près,

$$h(x, y) = \overline{s(-x, -y)}, \quad (16.18)$$

et la réponse du filtre à un signal représenté par la fonction  $t$  est

$$\begin{aligned} r(x, y) = h * t(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} t(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy' \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} t(x', y') \overline{s(x' - x, y' - y)} dx' dy', \end{aligned} \quad (16.19)$$

de telle sorte que  $r$  n'est autre que la fonction de corrélation des fonctions  $s$  et  $t$ . Si l'entrée du filtre est la fonction  $s$ , la fonction  $r$  devient la fonction d'autocorrélation de  $s$ .

Le filtre adapté à  $s$  rend maximum le rapport signal à bruit pour un bruit blanc, quand l'entrée est précisément  $s(x, y)$ .

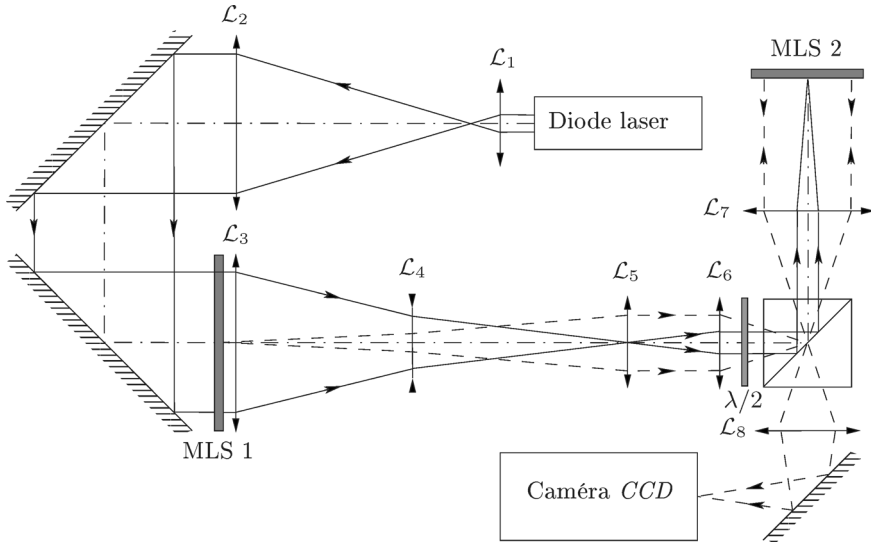
La comparaison des résultats de ce paragraphe avec ceux du paragraphe précédent montre qu'il est concevable d'engendrer le filtre adapté à un signal en suivant la méthode de VanderLugt, à condition de disposer d'une transparence dont la fonction de transmission est égale à la représentation spatiale du signal. Une application classique de cela est la reconnaissance des formes par corrélation [38, 83, 97, 147, 233, 235, 239].

#### 16.2.4 Corrélateur en temps réel

La figure 16.5 présente le schéma d'un corrélateur en temps réel fondé sur le principe du filtrage de VanderLugt. Ce corrélateur comporte deux modulateurs de lumière spatiaux, à cristaux liquides, désignés par MLS 1 et MLS 2. Le modulateur MLS 1 possède une surface utile de  $2,5 \times 2,5 \text{ cm}^2$ ; il est utilisé comme modulateur d'amplitude (avec niveaux de gris). Le modulateur MLS 2 comporte  $256 \times 256$  pixels sur une surface d'environ  $8 \times 8 \text{ mm}^2$ ; il est utilisé comme modulateur de phase (binaire). Les deux modulateurs sont à adressage électrique. Les données à traiter sont affichées sur le modulateur MSL 1; elles proviennent par exemple d'une caméra de prise de vue. Les filtres sont calculés, stockés dans une banque de données, puis affichés successivement sur le modulateur MLS 2, pendant toute la durée d'affichage d'une image sur MLS 1. Le procédé est repris à l'image suivante présente sur MLS 1. Ainsi le modulateur MSL 1 peut être plus lent que le modulateur MLS 2.

Voici quelques données techniques sur la conception du corrélateur.

1. La source est une diode laser (à 650 nm). Dans une variante il peut s'agir d'une source laser fibrée, éloignée du corrélateur.
2. Les doublets  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  forment un système afocal qui élargit le faisceau laser.



**FIG. 16.5.** Schéma d'un corrélateur optique en temps réel. Les explications sur la conception et le fonctionnement du corrélateur sont données dans le texte. (Le schéma n'est pas à l'échelle : les dimensions transversales des objectifs sont exagérées par rapport aux dimensions longitudinales.)

3. Le doublet  $\mathcal{L}_4$  est divergent et constitue avec  $\mathcal{L}_3$  un télescope qui produit, dans le plan de  $\mathcal{L}_5$ , la transformée de Fourier de l'amplitude du champ qui existe sur MSL 1. (Voir le paragraphe 13.1 pour un exemple de calcul de la transformée de Fourier de la fonction de transmission d'un objet.)
4. Les doublets  $\mathcal{L}_6$  et  $\mathcal{L}_7$  forment un système afocal qui agrandit le spectre précédent et le projette sur le modulateur MLS 2.
5. Le doublet  $\mathcal{L}_5$  joue le rôle d'une lentille de champ. On souhaite obtenir le spectre de l'objet affiché sur MLS 1 dans le plan du modulateur MLS 2. Comme  $\mathcal{L}_6$  et  $\mathcal{L}_7$  constituent un système afocal, il faudrait que le spectre formé par  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$  soit sur un plan. Ce n'est jamais le cas puisque le modulateur MLS 1 n'est pas placé dans le plan focal du télescope. Le rôle de  $\mathcal{L}_5$  est clair : il modifie la courbure de la sphère de Fourier (qui porte le spectre). Cela garantit que le modulateur MLS 2 est éclairé par une onde plane.
6. Le modulateur MLS 2, éclairé par une onde plane, est placé dans le plan focal objet de  $\mathcal{L}_7$ , si bien que la transformée de Fourier de l'amplitude du champ qui émerge de ce modulateur se forme dans le plan focal image de  $\mathcal{L}_7$ . L'objectif  $\mathcal{L}_8$  conjugue ce dernier plan avec le plan du détecteur. Ici la courbure finale n'a pas d'importance puisque la détection est quadratique. (L'objectif  $\mathcal{L}_8$  peut être composé de deux doublets, cela afin d'obtenir un degré de liberté supplémentaire et de jouer plus facilement sur le grandissement.)

7. Les cristaux liquides mettent en jeu des modulations de biréfringence et la polarisation des ondes doit être prise en compte. C'est pourquoi est placée, juste avant le cube séparateur, une lame de phase demi-onde qui adapte la polarisation de l'onde qui arrive sur le modulateur MLS 2.

Un corrélateur a été construit (par l'auteur de ce livre) conformément au schéma de la figure 16.5. Ses dimensions sont de  $30 \times 15 \text{ cm}^2$  (plan de la figure 16.5) pour une hauteur d'environ 6 cm (perpendiculaire au plan de la figure). Il effectue 2 000 corrélations par seconde.

### 16.2.5 Corrélateur conjugué

Considérons le montage de la figure 16.6 où une transparence  $\mathcal{T}$  contient côte à côte deux images  $A$  et  $B$  qu'on souhaite corrélérer. L'image  $A$  est centrée au point  $(x_0, 0)$  et  $B$  en  $(-x_0, 0)$ , si bien que la fonction de transmission de  $\mathcal{T}$  s'écrit

$$t(x, y) = A(x - x_0, y) + B(x + x_0, y), \quad (16.20)$$

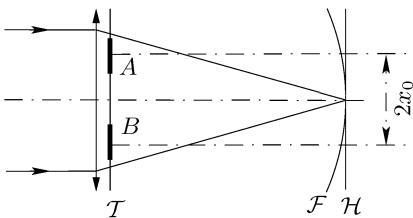
où  $A$  et  $B$  sont deux fonctions à valeurs réelles (on confond l'image avec la fonction qui la représente). Comme  $\mathcal{T}$  est éclairée par une onde convergente, l'amplitude du champ sur la sphère de Fourier  $\mathcal{F}$  est

$$U_F(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda f'} \hat{A}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right) \exp\left(\frac{2i\pi x_0 \xi}{\lambda f'}\right) + \frac{iU_0}{\lambda f'} \hat{B}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi x_0 \xi}{\lambda f'}\right), \quad (16.21)$$

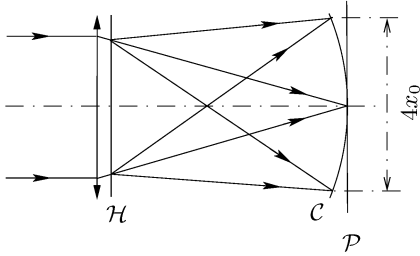
où  $U_0$  est une constante dimensionnelle. L'éclairement sur  $\mathcal{F}$  est proportionnel à

$$I_F(\xi, \eta) = \frac{|U_0|^2}{\lambda^2 f'^2} \left\{ \left| \hat{A}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right) \right|^2 + \left| \hat{B}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right) \right|^2 + \overline{\hat{A}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right)} \hat{B}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right) \exp\left(\frac{-4i\pi x_0 \xi}{\lambda f'}\right) + \overline{\hat{B}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right)} \hat{A}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right) \exp\left(\frac{4i\pi x_0 \xi}{\lambda f'}\right) \right\}. \quad (16.22)$$

C'est l'éclairement qu'on enregistre sur  $\mathcal{H}$ . Une fois développée, la plaque se place dans un montage de restitution (fig. 16.7) ; sa fonction de transmission



**FIG. 16.6.** Enregistrement du spectre conjugué de  $A$  et  $B$ .



**FIG. 16.7.** Formation de la corrélation de  $A$  et  $B$  (fig. 16.6) sur la sphère  $C$  (la corrélation correspond à l'un des trois ordres de diffraction représentés). L'éclairement est le même sur la sphère  $C$  et dans le plan de corrélation  $P$ .

est <sup>4</sup>  $t = I_F$ . L'amplitude du champ sur la sphère  $C$  (c'est la sphère de Fourier de  $\mathcal{H}$ , puisque  $\mathcal{H}$  est éclairé en lumière convergente) est la transformée de Fourier de  $t$ , c'est-à-dire

$$U_C = A * \tilde{A} + B * \tilde{B} + A * \tilde{B} * \delta_{2x_0,0} + \tilde{A} * B * \delta_{-2x_0,0}, \quad (16.23)$$

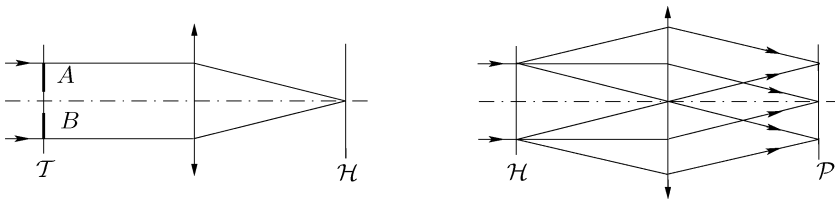
où on a utilisé le fait que  $A$  et  $B$  sont à valeurs réelles et où, pour alléger, on a noté  $\tilde{A}(x, y) = A(-x, -y)$ . On a trois ordres de diffraction (comme sur la figure 16.4). La corrélation de  $A$  et  $B$  apparaît, mais translatée de  $2x_0$  par rapport à l'origine. De façon explicite

$$\delta_{2x_0,0} * A * \tilde{B}(x', y') = \int_{\mathbb{R}^2} A(x, y) B(x - x' + 2x_0, y - y') dx dy. \quad (16.24)$$

L'éclairement dans le plan  $\mathcal{P}$  est le même que sur  $C$  et il est légitime d'appeler  $\mathcal{P}$  plan de corrélation.

Le terme de corrélateur « conjugué » vient de ce que dans ce dispositif, à la différence du montage de VanderLugt, on traite conjointement les spectres de  $A$  et  $B$  (*Joint transform correlator* [97, 235]).

**Remarque 16.2.2.** Le montage précédent est la version compacte d'un montage classique représenté par le schéma de gauche de la figure 16.8, lequel permet d'obtenir sur un plan la transformée de Fourier de l'amplitude du champ dans



**FIG. 16.8.** Schéma de gauche : montage alternatif au montage de la figure 16.6 pour enregistrer le spectre conjugué de  $A$  et  $B$ . Schéma de droite : formation de la corrélation de  $A$  et  $B$ ; on a représenté les faisceaux correspondant aux trois ordres qui apparaissent dans la relation (16.23).

<sup>4</sup> Voir la note en bas de page 3 de ce chapitre.

le plan  $\mathcal{T}$ , qui contient les deux images à corrélérer. La phase de restitution, qui produit notamment la corrélation, s'obtient selon le montage de la partie droite de la figure 16.8. Dans les limites de l'approximation métaxiale, il n'existe pas de différence entre les résultats donnés par les deux montages.

**Remarque 16.2.3.** Nous terminons par une explication intuitive du fonctionnement du corrélateur conjugué. Considérons deux objets transparents  $A$  et  $B$  placés comme sur la figure 16.6. Puisque les deux images sont éclairées par une même source, elles se comportent comme deux sources cohérentes et donnent lieu à interférences. Distinguons le cas où  $A$  et  $B$  sont quelconques de celui où  $B$ , par exemple, est identique à une partie (un détail)  $B'$  de  $A$ . Dans ce dernier cas  $B$  et  $B'$  se comportent comme deux trous d'Young et engendrent, sur l'écran, des « franges » d'amplitude sinusoïdale, dont l'orientation et le pas dépendent de la place de  $B'$  dans  $A$ . Par conséquent, il existe dans la figure de diffraction, et donc dans la plaque photographique développée, un réseau de franges (franges d'Young) parallèles entre elles et caractéristiques de la position relative de  $B$  et  $B'$ ; ces franges, encore sinusoïdales, ont toutefois un pas égal à la moitié du pas des franges (d'amplitude) précédentes, parce qu'on a enregistré un éclairage, proportionnel au carré du module de l'amplitude du champ. Quand on éclaire la plaque photographique développée, la majeure partie de la figure de diffraction obtenue correspond à un ordre 0, mais il y a en plus deux ordres latéraux, symétriques, qui sont justement diffractés par le réseau que constituent les franges d'Young. Cela permet de détecter la présence de  $B'$  dans  $A$  et explique que, lors de la restitution, la distance des pics de corrélation est le double de la distance de  $B$  à  $B'$  lors de l'enregistrement.

### 16.2.6 Cohérence du signal filtré

Nous nous plaçons dans le cas d'une source à spectre étroit et considérons la figure 16.1. L'amplitude du champ sur  $\mathcal{A}'$  s'écrit  $U_{A'} = U_{AG} * \tilde{h}$  ( $\tilde{h}$  est définie au paragraphe 16.2.1).

Les méthodes d'étude du transfert de la cohérence, développées au chapitre 10 (théorème 6), s'appliquent à la sphère  $\mathcal{A}$  et à son image filtrée  $\mathcal{A}'$ , conformément à l'analyse du paragraphe 9.3.1. Le gain complexe de cohérence est

$$k_{A'A}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \tilde{h}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1, \nu) \overline{\tilde{h}(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2, \nu)}, \quad (16.25)$$

et la réponse percussionnelle de cohérence

$$K_{A'A}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \left[ H(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1, t) * \overline{H(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2, t)} \right] (\tau). \quad (16.26)$$

Il est envisageable de filtrer la cohérence comme on le fait pour le champ. La technique de VanderLugt permet la synthèse d'un filtre de gain complexe de champ prédéfini, auquel correspond un gain complexe de cohérence. Il est concevable de modifier, par ce moyen, la cohérence de l'image d'un émetteur. L'effet de la pupille sur la cohérence d'une image, décrite au chapitre 10 (§10.5.4), s'interprète de cette façon.

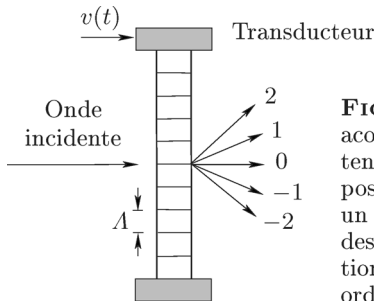
## 16.3 Analyse spectrale acousto-optique

### 16.3.1 Modulation acousto-optique

La lumière est susceptible d'être diffractée par un milieu dense<sup>5</sup> parcouru par une onde acoustique, c'est-à-dire une onde de pression, à condition que la longueur d'onde de l'onde acoustique ait des valeurs appropriées pour cela [29, 59, 248]. Considérons une cellule acousto-optique, constituée d'un milieu dense (liquide ou solide – par exemple un cristal de niobate de lithium), transparent, et sur un côté de laquelle est placé un transducteur acoustique (fig. 16.9). Imaginons que ce transducteur produise une onde de pression sinusoïdale. Cela signifie qu'en un point  $x, y, z$  du milieu et à l'instant  $t$ , la pression est de la forme

$$p(x, y, z, t) = p_0 + p_1 \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right], \quad (16.27)$$

où  $p_0$  et  $p_1$  sont des constantes homogènes à une pression,  $f$  est la fréquence de l'onde acoustique et  $\Lambda$  sa longueur d'onde (la célérité du son dans le milieu est  $V = \Lambda f$ ).



**FIG. 16.9.** Schéma de principe d'un modulateur acousto-optique. Le transducteur est excité par une tension électrique avec porteuse, notée  $v(t)$ . À l'opposé du transducteur est placé soit un absorbant soit un réflecteur ; dans un cas la cuve est parcourue par des ondes progressives, dans l'autre on a une onde stationnaire. On a représenté schématiquement quelques ordres de diffraction (régime de Raman-Nath).

Les variations de pression se traduisent par des variations de la densité du milieu qui elles-mêmes induisent des variations de l'indice de réfraction de ce milieu. Pour des variations de la pression assez faibles, le phénomène est linéaire, si bien que l'indice de réfraction du milieu parcouru par l'onde précédente s'écrit sous la forme

$$n(x, y, z, t) = n_0 + n_1 \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right], \quad (16.28)$$

où  $n_0$  est l'indice du milieu soumis à la pression  $p_0$  et  $n_1$  une constante.

**Remarque 16.3.1.** Le milieu d'interaction acousto-optique est inhomogène (pour l'indice de réfraction) et la remarque 15.4.1 s'applique.

<sup>5</sup> Citons l'eau, la silice, les verres optiques, le niobate de lithium [248].

**Régime de Raman–Nath.** Il est habituel de distinguer deux régimes pour la modulation acousto-optique [97, 159, 205]. Il s’agit d’abord du régime de Raman–Nath selon lequel la cellule s’assimile à une transparence mince. Cela signifie que la fonction de transmission de la cellule, d’épaisseur  $e$ , s’écrit à l’instant  $t$ , sous la forme ( $a$  est une constante)

$$\tau(x, y, t) = a \exp \left\{ \frac{2i\pi e}{\lambda} n_1 \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right] \right\}. \quad (16.29)$$

La cellule se comporte comme un réseau de phase qui s’analyse comme au paragraphe 5.4.2, c’est-à-dire en utilisant la propriété suivante des fonctions de Bessel de première espèce [212] ( $q$  est un entier)

$$e^{i\xi \sin \theta} = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q(\xi) e^{iq\theta}. \quad (16.30)$$

Cela conduit à mettre  $\tau(x, y, t)$  sous la forme

$$\tau(x, y, t) = a \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{2\pi e n_1}{\lambda} \right) \exp \left[ 2i\pi q \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right]. \quad (16.31)$$

Examinons ce qui se passe si on envoie sur la cellule une onde plane d’amplitude  $U_0$  et de longueur d’onde  $\lambda$ . Comme la fonction de transmission  $\tau$  dépend du temps, il faut tenir compte de la partie temporelle de l’onde incidente, si bien que l’amplitude de l’onde qui émerge de la cellule acousto-optique s’écrit

$$U(x, y, t) = U_0 \tau(x, y, t) e^{2i\pi\nu t}. \quad (16.32)$$

La relation (16.31) donne

$$U(x, y, t) = aU_0 \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} J_q \left( \frac{2\pi e n_1}{\lambda} \right) \exp \left[ -\frac{2i\pi qx}{\Lambda} \right] \exp[2i\pi(\nu + qf)t]. \quad (16.33)$$

En conclusion :

- en régime de Raman–Nath, l’onde diffractée se compose d’ondes planes, chacune d’elles étant liée à un ordre de diffraction représenté par un entier ( $q$ ) ;
- la fréquence (optique) de l’onde qui diffracte dans l’ordre  $q$  est  $\nu + qf$ , où  $f$  est la fréquence de l’onde acoustique et  $\nu$  la fréquence de l’onde lumineuse incidente ;
- l’onde d’ordre  $q$  diffracte dans la direction donnée par l’angle  $\theta_q$  tel que

$$\sin \theta_q = q \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad (16.34)$$

où  $\Lambda$  est la longueur d’onde de l’onde acoustique et  $\lambda$  celle de l’onde lumineuse incidente ;

- l’amplitude de l’onde diffractée dans l’ordre  $q$  est  $J_q(2\pi e n_1 / \lambda)$ , où  $e$  est l’épaisseur optique de la cellule acousto-optique et  $n_1$  la modulation de l’indice de réfraction due à l’onde acoustique.

**Régime de Bragg.** Le deuxième régime est celui de Bragg. Il correspond à un réseau de phase épais, de telle sorte qu'apparaît l'effet Bragg, dont une particularité est l'existence de seulement deux ordres de diffraction, les ordres 0 et 1 de l'analyse précédente. De plus, la diffraction a lieu à condition que la direction de propagation de l'onde incidente sur la cellule fasse, avec la direction  $z$ , un angle  $\theta_0$  tel que (condition de Bragg)

$$\sin \theta_0 = \pm \frac{\lambda}{2A}. \quad (16.35)$$

La fréquence de l'onde diffractée (ordre 1) est  $\nu + f$ .

### 16.3.2 Onde acoustique modulée avec porteuse

Dans le paragraphe précédent le transducteur délivre une excitation de la forme  $\sin 2\pi ft$  (éventuellement à un terme de phase près). Remplaçons cette fonction par une fonction de la forme  $A(t) \sin 2\pi ft$ , où  $A(t)$  est à variations lentes à l'échelle de  $1/f$  (nous avons ici une modulation d'amplitude avec porteuse à la fréquence  $f$ ). La variation de l'indice de réfraction dans la cellule s'écrit

$$n(x, y, z, t) = n_0 + n_1 A \left( t - \frac{x}{V} \right) \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right], \quad (16.36)$$

où  $V = A f$  est la célérité de l'onde acoustique dans le milieu de propagation.

La fonction de transmission de la cellule acousto-optique s'écrit désormais

$$\tau(x, y, t) = a \exp \left\{ \frac{2i\pi e}{\lambda} n_1 A \left( t - \frac{x}{V} \right) \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right] \right\}. \quad (16.37)$$

Il est tout à fait envisageable de décomposer la fonction  $\tau$  à l'aide des fonctions de Bessel. Cependant nous supposons que le paramètre  $n_1$  est assez petit pour autoriser un développement limité de la fonction exponentielle, si bien que

$$\tau(x, y, t) \approx a + \frac{2i\pi a e}{\lambda} n_1 A \left( t - \frac{x}{V} \right) \sin \left[ 2\pi \left( ft - \frac{x}{\Lambda} \right) \right]. \quad (16.38)$$

Si la cellule est éclairée par une onde plane monochromatique, l'onde diffractée est composée d'abord d'un terme de la forme  $a U_0 \exp[2i\pi \nu t]$ , qui est l'ordre de diffraction 0, puis d'un terme correspondant à l'ordre  $-1$ , qui s'écrit

$$U_{-1}(x, y, t) = -\frac{\pi a U_0 e}{\lambda} n_1 A \left( t - \frac{x}{V} \right) \exp \left[ 2i\pi \frac{x}{\Lambda} \right] \exp[2i\pi(\nu - f)t], \quad (16.39)$$

et enfin d'un terme d'ordre 1

$$U_1(x, y, t) = \frac{\pi a U_0 e}{\lambda} n_1 A \left( t - \frac{x}{V} \right) \exp \left[ -2i\pi \frac{x}{\Lambda} \right] \exp[2i\pi(\nu + f)t]. \quad (16.40)$$

**Remarque 16.3.2.** Si on développe l'expression de  $\tau$  donnée par la relation (16.37) à l'aide des fonctions de Bessel, on retrouve le résultat de l'approximation précédente en utilisant :  $J_{\pm 1}(\xi) \approx \pm \xi/2$ , pour  $\xi$  petit.

### 16.3.3 Analyse spectrale temporelle

Le montage utilisé pour l'analyse spectrale est un montage de transformation de Fourier optique comme celui de la figure 5.1 ou de la figure 5.2. C'est le modulateur acousto-optique qui constitue la transparence  $\mathcal{T}$  dont on observe le spectre (spatial).

Les dispositifs acousto-optiques d'analyse spectrale fonctionnent plutôt en régime de Bragg. Cela revient à ne considérer que l'ordre 1 de diffraction et donc l'amplitude  $U_1$  donnée par la relation (16.40).

L'amplitude  $U_1$  comporte une porteuse monochromatique, représentée par le facteur  $\exp[2i\pi(\nu + f)t]$ , de fréquence  $\nu + f$ . Elle comporte également une porteuse spatiale, représentée par le facteur  $\exp[-2i\pi x/\Lambda]$ . La présence de cette dernière se traduit, dans le plan de Fourier, par une translation du spectre sans porteuse, c'est-à-dire de la transformée de Fourier spatiale de  $A(t - x/V)$ . On obtient spatialement la transformée de Fourier d'une fonction (ici la fonction  $A$ ) dont on disposait à l'origine sous forme temporelle. Le dispositif permet l'analyse spectrale de fonctions du temps.

Dans le calcul de la transformée de Fourier (spatiale) de  $U_1$ , nous ne tenons pas compte du terme  $\exp[2i\pi(\nu + f)t]$  qui n'intervient pas dans le phénomène de diffraction. La transformée de Fourier spatiale de  $U_1$  est

$$\widehat{U}_1(F_x, F_y, t) = C \widehat{A} \left( \frac{V}{\Lambda} - VF_x \right) \exp[2i\pi VF_x t] \delta(F_y), \quad (16.41)$$

où  $C$  est une constante.

Le terme  $\exp[2i\pi VF_x t]$  montre que l'amplitude du champ dans le plan de Fourier oscille (temporellement) à une fréquence égale à  $VF_x$ . Il s'élimine par une intégration temporelle; son effet est négligeable si le détecteur optique a une réponse temporelle dont la durée est beaucoup plus grande que l'inverse de la fréquence mentionnée (ce qui revient à intégrer dans le temps). Dans ces conditions, l'éclairement dans le plan de Fourier est de la forme

$$I(F_x, F_y) = |C|^2 \left| \widehat{A} \left( \frac{V}{\Lambda} - VF_x \right) \right|^2 \delta(F_y), \quad (16.42)$$

à une constante multiplicative près (pour être exact, il faudrait remplacer les fréquences spatiales par les coordonnées réduites du type  $(x'/\lambda D, y'/\lambda D)$ , où  $D$  est la distance de diffraction, voir le chapitre 5).

L'éclairement dans le plan de Fourier est proportionnel au spectre de la fonction  $A$ .

**Remarque 16.3.3.** Les cellules acousto-optiques permettent d'autres opérations que l'analyse spectrale. Citons l'exemple des corrélateurs temporels, soit à intégration spatiale, soit à intégration temporelle, utilisant deux cellules acousto-optiques. Il est même possible d'étendre les applications à des traitements bidimensionnels. Nous renvoyons à des ouvrages classiques sur le sujet pour davantage de détails [97, 159, 205, 235].

L'angle de diffraction de l'ordre 1 dépend du pas du réseau inscrit dans le matériau acousto-optique, c'est-à-dire de la fréquence de l'onde acoustique engendrée par le transducteur. En changeant cette fréquence on modifie la direction du faisceau diffracté. La cellule agit comme un défecteur de faisceau, et cela, à des fréquences particulièrement élevées (de l'ordre de plusieurs GHz).

## 16.4 Exercices

**Exercice 16.1 (Strioscopie [85]).** On considère le schéma de la figure 16.10. La source  $S$  est ponctuelle et monochromatique ( $\lambda$ ). Pour simplifier, les objectifs  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  et  $\mathcal{L}_3$  sont assimilés à des lentilles minces de centres  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ . Les focales images de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont égales : elles valent  $f'$ . La source est à la distance  $\overline{O_1 S} = -2f'$  de  $\mathcal{L}_1$ , et la distance de  $\mathcal{L}_1$  à  $\mathcal{L}_2$  est  $\overline{O_1 O_2} = 2f'$  ( $\mathcal{L}_1$  travaille au grandissement  $-1$ ).

On ne tiendra pas compte ici des ouvertures limitées des objectifs. On prendra des coordonnées  $x, y$  (ou  $\mathbf{r}$ ) sur  $\mathcal{L}_1$ ,  $\xi, \eta$  (ou  $\mathbf{s}$ ) sur  $\mathcal{L}_2$  et  $x', y'$  (ou  $\mathbf{r}'$ ) sur  $\mathcal{L}_3$ .

1. On place sur  $\mathcal{L}_1$  une transparence  $\mathcal{A}$  de fonction de transmission  $t(x, y)$ . Quelle est l'amplitude du champ dans le plan de l'objectif  $\mathcal{L}_2$  (on appelle  $\mathcal{P}$  ce plan, qu'on peut situer immédiatement avant la lentille – voir la figure 16.10) ?
2. L'objectif  $\mathcal{L}_2$  forme l'image de  $O_1$  en  $O_3$  (il travaille donc au grandissement  $-1$ ). Soit  $\mathcal{Q}$  le plan de sortie de l'objectif  $\mathcal{L}_3$ . Quelle doit être la focale de  $\mathcal{L}_3$  pour que le champ sur  $\mathcal{Q}$  soit proportionnel à  $t$  (c'est-à-dire de la forme  $t(-x', -y')$  éventuellement à un facteur multiplicatif près) ?
3. On suppose que  $t$  est de la forme  $t(x, y) = \exp[-i\varphi(x, y)]$ , où  $\varphi$  est une fonction à valeurs réelles (cela correspond à un objet de phase comme on en rencontre en microscopie biologique). Quel est l'éclairement dans le plan  $\mathcal{Q}$  ? Conclusion ?
4. On suppose que  $\varphi(x, y)$  est assez petit pour écrire  $t(x, y) = 1 - i\varphi(x, y)$ . On suppose aussi que la partie intéressante de l'objet  $\varphi$  correspond à des fréquences spatiales dont le module est supérieur à une valeur  $F_1$  donnée. On écrira donc  $\varphi$  sous la forme  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , le spectre de  $\varphi_1$  étant inclus dans un disque de rayon  $F_1$  et celui de  $\varphi_2$  étant extérieur à ce disque.

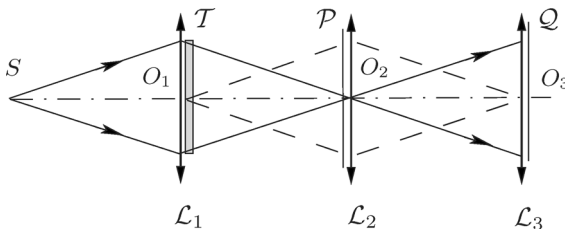


FIG. 16.10. Montage pour la strioscopie ou le contraste de phase.

Qu'introduire dans le montage de la figure 16.10 pour rendre visible  $\varphi_2$ , c'est-à-dire les hautes fréquences spatiales de  $\varphi$  (éventuellement au détriment de  $\varphi_1$ ) ?

**Exercice 16.2 (Contraste de phase<sup>6</sup> [82, 85]).** On considère à nouveau le montage de la figure 16.10. La transparence  $\mathcal{T}$  est un objet de phase dont la fonction de transmission est de la forme  $t(x, y) = \exp[-i\varphi(x, y)]$ . On écrit  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$  ; on suppose que le spectre de  $\varphi_1$  est inclus dans un petit disque de diamètre  $F_1$ , et que le spectre de  $\varphi_2$  se situe en dehors de ce disque. Ainsi l'information des détails fins de l'objet est portée par  $\varphi_2$ . On ne prendra pas en compte les ouvertures limitées des objectifs.

1. Quel est l'éclairement dans le plan de l'image  $\mathcal{Q}$  ? Conclusion ?
2. On suppose  $\varphi(x, y)$  suffisamment petit pour autoriser un développement limité. Montrer que le résultat de la question précédente reste valide au second ordre en  $\varphi$ .
3. On place dans le plan  $\mathcal{P}$  (fig. 16.10) une lame qui introduit un déphasage de  $\pi/2$ . L'extension de cette lame est limitée de telle sorte que seule la zone correspondant au spectre de  $\varphi_1$  est déphasée. Montrer que dans ces conditions l'éclairement de l'image dépend de  $\varphi_2$  au premier ordre. Que peut-on en conclure pour l'observation des détails de l'objet ?

**Exercice 16.3 (Montage de filtrage «  $4f'$  »).** Soit le montage de la figure 16.11 où une transparence plane  $\mathcal{T}$  (fonction de transmission  $t$ ) est éclairée par une onde plane monochromatique. Les objectifs  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont convergents et assimilés pour simplifier à des lentilles minces identiques, de distance focale image  $f'$ .

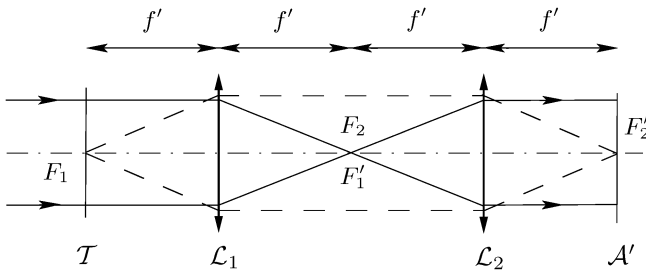


FIG. 16.11. Montage de filtrage «  $4f'$  ».

1. Montrer que l'amplitude du champ dans le plan focal image de  $\mathcal{L}_2$  est l'image cohérente de l'amplitude du champ sur la transparence  $\mathcal{T}$  (on ne prendra pas en compte les ouvertures limitées des objectifs).

<sup>6</sup> Le contraste de phase fut inventé en 1935 par Zernike, qui reçut pour cela le prix Nobel de physique en 1953.

2. Expliquer comment obtenir un filtrage avec ce montage. Quelle est la distance que parcourt la lumière pour effectuer le traitement, depuis l'objet jusqu'à l'image filtrée ?
3. Imaginer un montage équivalent pour lequel la distance de la transparence à son image filtrée est seulement  $2f'$ .

**Exercice 16.4 (Expérience d'Abbe et Porter).** Soit une grille en deux dimensions qui peut se décrire comme le produit de convolution d'un peigne de Dirac avec une ouverture rectangulaire. Pour simplifier on suppose une même période spatiale dans les deux directions orthogonales qui servent d'axes de coordonnées.

1. Donner une expression explicite de la fonction de transmission de la grille.
2. On utilise la grille comme objet dans le montage de l'exercice précédent (montage  $4f'$ , fig. 16.11). Écrire l'expression de l'amplitude du champ dans le plan focal de l'image de  $\mathcal{L}_1$  (plan de Fourier).
3. On place dans le plan de Fourier une fente horizontale. Comment est modifiée l'image de la transparence ?
4. Même question pour une fente orientée à  $45^\circ$  des axes.
5. Une façon de fabriquer une grille en deux dimensions consiste à superposer deux grilles monodimensionnelles identiques mais croisées (une horizontale et l'autre verticale). Commenter les résultats de la question précédente en prenant en compte le fait qu'une grille monodimensionnelle a des fréquences spatiales nécessairement colinéaires entre elles.

# Chapitre 17

## Perspectives

### 17.1 Développements en optique métaxiale et optique de Fourier fractionnaire

#### 17.1.1 Aberrations géométriques

La méthode de l'écart normal aberrant [156, 157] représente les aberrations géométriques sous la forme d'une fonction de transmission de la pupille qui s'écrit  $t(x, y) = \exp[-2i\pi\Delta(x, y)/\lambda]$ , où  $\Delta$  est l'écart aberrant. Selon la théorie métaxiale, cela revient à placer sur la pupille une transparence. L'écart aberrant est défini par rapport à une sphère de référence et c'est à cette dernière que s'appliqueraient les résultats décrits dans ce livre. Toutefois, comme les aberrations représentent des développements limités à des ordres supérieurs à 2, il faudrait sans doute, pour maintenir la consistance des calculs, compléter l'approximation métaxiale par des développements d'ordres supérieurs.

#### 17.1.2 Images quantiques

Dans certaines expériences d'optique quantique, la propagation de la lumière est modélisée dans le cadre d'une théorie scalaire de la diffraction. Il est clair dès lors que l'optique métaxiale, voire même l'optique de Fourier fractionnaire, ont un rôle à jouer dans ce domaine. Des travaux lient l'optique de Fourier et les photons intriqués [2, 211]. Il existe aussi une holographie quantique [1]. Enfin la statistique d'ordre 4 du champ, liée à sa cohérence, intervient dans la modélisation des phénomènes [2, 93, 211].

#### 17.1.3 Spectre angulaire sphérique

C'est une notion récente qui généralise le spectre angulaire à un émetteur (ou récepteur) sphérique [189, 190]. Son introduction lève une contradiction de la théorie classique de la formation des images [189]. D'autre part, sa propagation s'exprime par une transformation de Fourier fractionnaire dont l'ordre est identique à celui de la transformation associée au transfert de l'amplitude du champ [189, 190]. Il en résulte une symétrie entre la propagation de l'amplitude du champ et celle du spectre angulaire. Ce n'est pas le cas pour le spectre angulaire « plan », comme le montre le graphe (2.39) p. 36 : la propagation de

l'amplitude du champ se traduit par une convolution ; celle du spectre angulaire (plan) par un produit simple. Cette propriété du spectre angulaire sphérique facilite la représentation de la diffraction à l'aide de la fonction de Wigner, dans un espace à variables spatiales et fréquentielles réduites (sans dimensions).

Une approche de toute l'optique de Fourier par le spectre angulaire sphérique est envisageable...

## **17.2 Traitement du signal fractionnaire pour l'optique**

### **17.2.1 Holographie numérique, composants diffractants calculés**

La fonction de transmission de composants calculés est nécessairement échantillonnée. Les calculs qui conduisent à la conception d'un hologramme diffractant en régime de Fraunhofer reposent sur les propriétés de la transformation de Fourier standard et sur le théorème d'échantillonnage de Shannon. Il en va autrement pour des composants qui diffractent en régime de Fresnel, éventuellement modélisés à l'aide de transformations de Fourier fractionnaires. Or le théorème de Shannon s'étend au domaine fractionnaire [100, 231, 246] ; cela autorise la généralisation des méthodes de calculs développées dans le cadre standard à des hologrammes en régime de Fresnel [232].

### **17.2.2 Corrélation fractionnaire**

Une translation dans un espace se traduit par un déphasage dans l'espace de Fourier. Cette propriété est fondamentale pour la mise en œuvre de traitements de signaux, comme en radar, notamment par corrélation. Or l'invariance de la corrélation par translation est perdue quand on passe au domaine fractionnaire. Des travaux récents [232] montrent toutefois que l'invariance par translation « fractionnaire » est obtenue, dans un certain sens, pour les notions de produit de convolution et de corrélation fractionnaires. Il est dès lors envisageable d'étendre au domaine fractionnaire des opérations de filtrage, comme le filtrage de VanderLugt.

Quatrième partie

## **Appendices**

# Appendice A

## Les distributions

Nous nous bornons à préciser les notations que nous employons et à présenter des points qui nous paraissent utiles pour cet ouvrage. Pour un exposé complet de la théorie, nous renvoyons à des livres dont certains, écrits à leur usage, sont largement accessibles à des physiciens [9, 14, 28, 47, 195, 206, 207, 212] ; tandis que d'autres fournissent des précisions plus mathématiques [27, 61, 89, 102–104, 202, 213, 252].

### A.1 Définition, exemples et propriétés

#### A.1.1 Définition

L'espace des fonctions tests, noté  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe  $C^\infty$  à support compact (fermé borné, inclus dans  $\mathbb{R}$ ). Une distribution<sup>1</sup> est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  : elle fait correspondre à une fonction test un nombre complexe. Si  $T$  est une distribution et  $\varphi$  une fonction test, on écrit

$$T : \varphi \longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle. \quad (\text{A.1})$$

#### A.1.2 Exemples de distributions

**Distribution régulière.** À toute fonction  $f$  localement sommable (c'est-à-dire intégrable sur tout intervalle borné) est associée une distribution  $T_f$ , dite régulière, définie, pour toute fonction test  $\varphi$ , par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (\text{A.2})$$

C'est en ce sens que la notion de distribution « généralise » celle de fonction. On écrit souvent  $f$  au lieu de  $T_f$ .

**Distribution de Dirac.** Notée  $\delta$ , elle est définie par  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ . La distribution de Dirac est singulière : on montre qu'elle n'est associée – au sens du paragraphe précédent – à aucune fonction localement sommable.

Plus généralement, on définit la distribution  $\delta_a$ , de support  $\{a\}$ , par  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ .

Par abus, on écrit parfois  $\delta(x)$  et  $\delta(x - a)$ .

---

<sup>1</sup> Plus généralement, on définit de même les distributions sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ .

**Distribution valeur principale de  $1/x$ .** On dit que la fonction  $f$  est intégrable en valeur principale au sens de Cauchy si ( $\varepsilon$  est positif)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right\}, \quad (\text{A.3})$$

existe. Cette limite se note sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \quad (\text{A.4})$$

Si  $\varphi$  est une fonction test, l'intégrale en valeur principale de la fonction  $\varphi(x)/x$  existe et elle définit une distribution appelée valeur principale de  $1/x$  et notée V.P.( $1/x$ ). On a

$$\langle \text{V.P.} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (\text{A.5})$$

On définit de même la distribution valeur principale de  $1/(x-x_0)$  en prenant la limite des intégrales avec les bornes  $x_0 - \varepsilon$  et  $x_0 + \varepsilon$  (au lieu de  $-\varepsilon$  et  $\varepsilon$ ).

### A.1.3 La distribution de Dirac comme limite de suites de fonctions

Voici des exemples de suites de fonctions sommables ou localement sommables dont la limite est la distribution de Dirac.

1. Quand  $n$  tend vers l'infini, les suites de fonctions définies par

$$x \mapsto n e^{-\pi n^2 x^2}, \quad \text{et} \quad x \mapsto n \frac{\sin \pi n x}{\pi n x}, \quad (\text{A.6})$$

tendent vers la distribution de Dirac  $\delta$ .

2. Si  $\alpha$  est un nombre complexe tel que  $\Re\{\alpha\} \geq 0$  et  $\theta = \arg \alpha$ , la suite de fonctions définies par

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} e^{-i\theta/2} \exp \left[ -\frac{\pi x^2}{\alpha} \right], \quad (\text{A.7})$$

tend vers  $\delta$  quand  $|\alpha|$  tend vers 0.

3. Quand  $\ell$  tend vers 0, les deux suites de fonctions suivantes tendent vers  $\delta$  :
  - fonctions  $x \mapsto (1/\ell) \text{rect}_\ell(x)$ , où  $\text{rect}_\ell(x) = 1$ , si  $|x| \leq \ell/2$ , et  $\text{rect}_\ell(x) = 0$ , si  $|x| > \ell/2$  ;
  - fonctions  $\rho_\ell$  définies par  $\rho_\ell(x) = 0$ , si  $|x| \geq \ell > 0$ , et

$$\rho_\ell(x) = C_\ell \exp \left[ \frac{\ell^2}{x^2 - \ell^2} \right], \quad \text{si } |x| < \ell, \quad (\text{A.8})$$

où  $C_\ell$  est une constante de normalisation telle que  $\int_{\mathbb{R}} \rho_\ell(x) dx = 1$ .

### A.1.4 Propriétés des distributions

**Translation d'une distribution.** On appelle translatée de  $a$  de la fonction  $f$  la fonction  $\mathcal{T}_a f$  définie par  $\mathcal{T}_a f(x) = f(x - a)$ . Pour toute distribution  $T$ , la distribution translatée de  $a$  de  $T$  est définie, pour toute fonction test  $\varphi$ , par

$$\langle \mathcal{T}_a T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{T}_{-a} \varphi \rangle. \quad (\text{A.9})$$

En particulier :  $\mathcal{T}_a \delta = \delta_a$ .

**Dilatation d'une distribution.** La fonction dilatée du facteur  $a$  réel ( $a \neq 0$ ) de la fonction  $f$  est définie par  $\theta_a f(x) = f(x/a)$ . (Si  $a > 1$ , le graphe de la fonction  $\theta_a f$  est plus « large » que celui de la fonction  $f$ .) La dilatée du facteur  $a$  de la distribution  $T$  est définie par

$$\langle \theta_a T, \varphi \rangle = |a| \langle T, \theta_{1/a} \varphi \rangle. \quad (\text{A.10})$$

En particulier :  $\theta_a \delta = |a| \delta$ , ce qui s'écrit, par abus,

$$\delta\left(\frac{x}{a}\right) = |a| \delta(x). \quad (\text{A.11})$$

**Multiplication d'une distribution par une fonction.** Si  $\psi$  est une fonction de classe  $C^\infty$ , la distribution  $\psi T$  est définie par  $\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle$ . En particulier :  $\psi \delta_a = \psi(a) \delta_a$ .

### A.1.5 Produit tensoriel de distributions. Distributions à plusieurs variables

Le produit tensoriel des fonctions tests  $\varphi$  et  $\psi$ , noté  $\varphi \otimes \psi$ , se définit par  $\varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$ . Le produit tensoriel des distributions  $S$  et  $T$  est défini sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R})$  par

$$\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Il est pratique d'écrire  $S_x \otimes T_y$  pour indiquer la variable sur laquelle porte chacune des deux distributions du produit tensoriel.

Si  $\varphi$  est une fonction test de deux variables, la distribution de Dirac sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  est définie par  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0, 0)$ , et  $\delta_{a,b}$  par  $\langle \delta_{a,b}, \varphi \rangle = \varphi(a, b)$ . On montre alors  $\delta_{a,b} = \delta_a \otimes \delta_b$ . Par abus, on écrit  $\delta(x-a, y-b) = \delta(x-a) \delta(y-b)$  (le symbole  $\otimes$  est souvent omis). La généralisation à trois dimensions est immédiate.

### A.1.6 Produit de convolution

Le produit de convolution de deux distributions  $S$  et  $T$ , noté  $S * T$ , est défini par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad (\text{A.13})$$

à condition qu'une des deux distributions au moins soit à support compact ; ou bien que les deux distributions soient à support borné à gauche (ou bien toutes les deux à support borné à droite).

La distribution de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution : quelle que soit la distribution  $T$ , on a  $T * \delta = \delta * T = T$ . On a aussi  $\delta_a * T = \mathcal{T}_a T$  (distribution  $T$  translatée).

**Régularisation.** Si  $T$  est une distribution et  $\varphi$  une fonction test, alors  $T * \varphi$  est une fonction de classe  $C^\infty$ , régularisée de  $T$ , et on écrit

$$T * \varphi(y) = \langle T_x, \varphi(y - x) \rangle. \quad (\text{A.14})$$

**Peigne de Dirac.** Le peigne de Dirac de pas  $p$ , noté  $\sqcup\sqcup_p$ , est défini par

$$\sqcup\sqcup_p = p \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \delta_{qp}, \quad (\text{A.15})$$

où  $q$  désigne un nombre entier.

Une fonction  $f$  périodique, de période  $p$ , s'écrit

$$f = \sqcup\sqcup_p * m, \quad (\text{A.16})$$

où  $m$  est le « motif » de la fonction, qui s'identifie à  $f$  sur l'intervalle  $] -p/2, p/2[$  et qui est nul en dehors de cet intervalle.

### A.1.7 Sous-espaces de distributions

Les propriétés précédentes sont générales et s'appliquent à toute distribution. Cependant, on rencontre parfois en physique (et en mathématiques) des situations pour lesquelles il serait intéressant d'abandonner certaines contraintes sur le support des fonctions ou sur leur dérivabilité.

On introduit ainsi les distributions à support borné (espace  $\mathcal{E}'$ ), définies sur l'espace  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$  des fonctions  $C^\infty$  (sans hypothèse sur leur support). Voici des exemples.

1. La distribution de Dirac est à support compact, donc borné. Elle s'applique à toute fonction de classe  $C^\infty$ , quel que soit son support ; par exemple à un polynôme :  $\langle \delta, x^k \rangle$  a un sens ( $k \geq 0$ ), et vaut 0. Ou encore  $\langle \delta_a, x^k \rangle = a^k$ . Autre exemple :  $\langle \delta_a, \cos \rangle = \cos a$ .
2. La distribution associée à la fonction  $\text{rect}_L$  est à support borné (son support est  $[-L/2, L/2]$ ). Si  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ , l'expression  $\langle \text{rect}_L, \psi \rangle$  a un sens et

$$\langle \text{rect}_L, \psi \rangle = \int_{-L/2}^{+L/2} \psi(x) dx. \quad (\text{A.17})$$

Par exemple, pour  $k \geq 0$ , on a :  $\langle \text{rect}_L, x^k \rangle = L^{k+1}/2^k(k+1)$ .

On introduit aussi les distributions d'ordre fini. Ainsi la distribution de Dirac est d'ordre 0 et s'applique à toute fonction continue à l'origine, sans autre condition. Un autre exemple de sous-espace de distributions est présenté à l'appendice B : il s'agit de l'espace des distributions tempérées, cadre de l'analyse harmonique.

## A.2 Interprétation des distributions en mesures physiques

### A.2.1 Champ représenté par une distribution singulière

Pour les besoins de l'analyse harmonique, nous admettons devoir représenter, en toute généralité, les grandeurs physiques par des distributions (tempérées). Par exemple, il est commode de représenter l'amplitude du champ sur des trous d'Young par deux distributions de Dirac (tout au moins pour une première approche). Au chapitre 5, la fonction de transmission d'un réseau à fentes infiniment minces, comme l'onde qu'il diffracte, sont représentées par des peignes de Dirac.

D'autre part, comme expliqué au chapitre 1, ce n'est pas l'amplitude du champ qui est accessible aux mesures optiques, mais l'éclairement, proportionnel à la valeur moyenne temporelle du carré du module de cette amplitude.

Se pose alors le problème suivant : comment définir l'éclairement quand l'amplitude du champ est une distribution, en particulier singulière, dont le carré n'est pas défini ?

On peut certes répondre qu'une distribution de Dirac, c'est un point lumineux, et qu'à l'amplitude  $U_0 \delta(\mathbf{r}/\ell_0)$  correspond l'éclairement  $|U_0|^2 \delta(\mathbf{r}/\ell_0)$  (voir la remarque 5.2.2 p. 107 pour un exemple). Même chose pour un peigne de Dirac, interprété comme une série de points lumineux.

Il existe cependant des cas plus « pathologiques » pour lesquels une analyse soignée est nécessaire. Citons la diffraction de Fraunhofer par un bord d'écran, étudiée au paragraphe 5.3.1 p. 112 : si  $\mathcal{Y}$  désigne la fonction de Heaviside, l'amplitude du champ sur l'écran s'écrit  $U(x, y) = \mathcal{Y}(x)$ , et l'amplitude du champ diffracté est donnée par la transformée de Fourier de  $U$ . Celle-ci s'écrit

$$\widehat{U}(F_x, F_y) = \frac{1}{2} \delta(F_x, F_y) - \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi F_x} \delta(F_y). \quad (\text{A.18})$$

La distribution  $\delta(F_x, F_y)/2$  s'interprète comme un point lumineux au centre du champ, d'éclairement relatif  $1/4$  (il faudrait passer en coordonnées réduites, mais il est suffisant ici de raisonner avec les fréquences spatiales). La présence de  $\delta(F_y)$  indique qu'il y a concentration de l'onde diffractée sur l'axe  $F_x$ . Mais comment interpréter la distribution  $\text{V.P.}(1/2i\pi F_x)$  ? Quel est l'éclairement qui lui correspond ? Dire que la distribution  $\text{V.P.}(1/F_x)$  c'est, grosso modo, la fonction  $1/F_x$  sauf au voisinage de l'origine, est insuffisant : il faut définir une méthodologie de mesure précise et générale.

### A.2.2 Une solution

Une solution apparaît qui repose sur la nature même d'une distribution. À une grandeur physique, une mesure (physique) fait correspondre un nombre, comme une distribution le fait à une fonction. Si l'amplitude du champ, grandeur physique, est représentée par une distribution, on obtient un nombre en appliquant cette distribution à une fonction test. Le problème devient celui de

savoir quelle fonction choisir pour que le résultat ait une signification physique, pour que le nombre précédent soit le résultat d'une mesure<sup>2</sup>.

D'autre part, l'éclairement n'est perçu qu'à travers l'appareil de mesure. Or ce dernier se caractérise par sa réponse percussionnelle, sa réponse à une percussion de Dirac (idéalement représentée par une distribution de Dirac) ; il offre une résolution limitée, ne faisant pas de différence entre une telle excitation et une excitation dont le support est suffisamment étroit<sup>3</sup>. Nous ferons donc l'hypothèse qu'un détecteur physique admet une réponse percussionnelle  $\psi$  qui est une fonction test dont le support est adapté à la résolution de l'appareil.

Si  $U$  est la distribution qui représente l'amplitude du champ sur le détecteur, tout se passe comme si celui-ci était excité par un champ d'amplitude  $h = U * \psi$ , et  $h$  est une *fonction* de classe  $C^\infty$ , conformément à la relation (A.14). En chaque point  $\mathbf{r}$  du détecteur,  $h(\mathbf{r})$  est un nombre dont il nous est loisible de prendre le carré du module : l'éclairement (intensité vibratoire) en  $\mathbf{r}$  est

$$I(\mathbf{r}) = |h(\mathbf{r})|^2 = |\langle U_{\mathbf{r}'}, \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle|^2. \quad (\text{A.19})$$

Le champ électrique est « abstrait » en optique (ou immatériel) puisqu'il échappe à une mesure directe. Il ne se matérialise que si le rayonnement est intercepté par un détecteur et ne se manifeste qu'à travers la notion d'éclairement. De fait, s'il est représenté par une distribution, le champ devient lui aussi une grandeur « latente » : il faut le faire opérer sur une fonction, la réponse percussionnelle du détecteur, pour obtenir un résultat réel (concret).

**Remarque A.2.1.** En pratique, pour simplifier les calculs, et suivant la nature de  $U$ , il est licite d'effectuer un choix moins strict pour la réponse percussionnelle  $\psi$  et de ne pas imposer à celle-ci d'être de classe  $C^\infty$  à support compact. C'est là un intérêt des distributions à support borné ou d'ordre fini (voir le paragraphe A.1.7). Par exemple, si  $U = \delta$ , il suffit que  $\psi$  soit continue au voisinage de l'origine pour que la relation (A.19) ait un sens : la réponse percussionnelle du détecteur peut être une fonction  $\text{rect}_\ell$  (en raisonnant en dimension 1).

**Remarque A.2.2.** La méthode proposée ici est appliquée au paragraphe 5.3.1 au calcul de l'éclairement de la figure de diffraction de Fraunhofer d'un bord d'écran rectiligne.

## A.3 Distributions et systèmes linéaires

### A.3.1 Le problème à résoudre

La réponse d'un filtre linéaire, de réponse percussionnelle  $h$ , à une excitation  $e$  est  $h * e$ . C'est la règle de Vaschy, qui s'applique à la formation des images

<sup>2</sup> On trouve dans le livre de Roddier [206] l'analyse de la représentation des distributions de charges électriques par des distributions mathématiques.

<sup>3</sup> L'analyse, menée ici pour des variables d'espace, reste valable pour le temps.

(voir le chapitre 8), mais aussi à la diffraction, sous certaines conditions (voir le chapitre 2 et le paragraphe 3.6). Toutefois, la diffraction–propagation d’un émetteur  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$  s’exprime par la relation générale

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (\text{A.20})$$

qui ne se réduit pas toujours à un produit de convolution.

Si  $h$  et  $e$  sont des distributions (avec des supports appropriés), le produit de convolution  $h * e$  a un sens. Mais qu’en est-il de relation (A.20) quand  $h_{BA}$  et  $U_A$  sont des distributions (ou si  $h_{BA} U_A$  n’est pas sommable)? C’est ce qui est examiné dans ce paragraphe.

### A.3.2 Produit de convolution de Volterra

On appelle noyau sur  $\mathbb{R}^d$  toute distribution sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ . Si  $\varphi$  est une fonction test de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et  $K$  un noyau, on écrit  $\langle K, \varphi \rangle = \langle K(x, y), \varphi(x, y) \rangle$ .

La contractée (à gauche) du noyau  $K$  et de la fonction  $\psi$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$  est la distribution  $\Psi$  définie, pour toute fonction test  $\varphi$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ , par

$$\langle \Psi(y), \varphi(y) \rangle = \langle \Psi, \varphi \rangle = \langle K, \psi \otimes \varphi \rangle = \langle K(x, y), \psi(x) \varphi(y) \rangle. \quad (\text{A.21})$$

Cela conduit à écrire

$$\Psi(y) = \langle K(x, y), \psi(x) \rangle. \quad (\text{A.22})$$

Le noyau  $K$  est régulier si, pour toute fonction test  $\psi$ , la contractée  $\Psi$  est une fonction de classe  $C^\infty$ .

Le produit de convolution de Volterra [47] du noyau régulier  $K$  avec une distribution  $S$  est la distribution  $R$ , définie, pour tout  $\psi$  – et quand l’écriture a un sens –, par

$$\langle R(x), \psi(x) \rangle = \langle S(y), \Psi(y) \rangle, \quad (\text{A.23})$$

où  $\Psi$  est la contractée de  $K$  et  $\psi$ . On adopte parfois les écritures symboliques

$$R(x) = \langle K(x, y), S(y) \rangle = \int K(x, y) S(y) dy. \quad (\text{A.24})$$

Le produit de convolution de Volterra est une généralisation du produit de convolution (« simple »). Si  $A$  et  $S$  sont des distributions, on montre en effet [47] que  $R = A * S$  s’identifie au produit de convolution de Volterra de  $A$  et  $S$ , après interprétation de  $A$  comme un noyau régulier  $K$  tel que  $K(x, y) = A(x - y)$ .

### A.3.3 Réponse d’un système linéaire à une excitation quelconque

La comparaison des relations (A.20) et (A.24) conduit à représenter l’effet d’un système linéaire par un produit de convolution de Volterra entre l’excitation et la réponse percutielle considérée comme un noyau. La règle de Vaschy (produit de convolution) est incluse comme cas particulier.

Soit un système linéaire dont la réponse percuSSIONNELLE est une distribution  $h$ , supposée être un noyau régulier. La réponse  $R$  du système à une excitation représentée par la distribution  $e$  est la convolution de Volterra de  $h$  et  $e$ ; elle s'obtient selon le procédé suivant.

Soit  $\psi$  une fonction test. La contractée à gauche de  $h$  et  $\psi$  est la fonction  $\Psi$  définie par

$$\Psi(y) = \langle h(x, y), \psi(x) \rangle. \quad (\text{A.25})$$

La réponse  $R$  est la distribution définie par

$$\langle R(x), \psi(x) \rangle = \langle e(y), \Psi(y) \rangle. \quad (\text{A.26})$$

**Exemple A.3.1.** La réponse percuSSIONNELLE spatiale (gain complexe) du transfert de l'amplitude du champ d'un émetteur  $\mathcal{A}$  vers un récepteur  $\mathcal{B}$  est la fonction  $h_{BA}$  donnée par la relation (3.35), c'est-à-dire

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right]. \quad (\text{A.27})$$

Elle est seulement localement sommable. Elle définit une distribution qui est un noyau régulier; en effet, si  $\psi$  est une fonction test, la fonction définie par

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \psi(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (\text{A.28})$$

est de classe  $C^\infty$ .

Supposons  $U_A = \delta$  (c'est l'excitation, à un facteur dimensionnel près) et cherchons l'amplitude du champ diffracté  $U_B$  (c'est la réponse). Cette amplitude est le produit de convolution de Volterra de  $h_{BA}$  avec  $\delta$ . Pour toute fonction test  $\psi$ , les relations (A.26) et (A.28) conduisent à

$$\begin{aligned} \langle U_B(\mathbf{s}), \psi(\mathbf{s}) \rangle &= \langle \delta(\mathbf{r}), \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \Psi(0) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, 0) \psi(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ &= \langle h_{BA}(\mathbf{s}, 0), \psi(\mathbf{s}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

La relation (A.29) est vraie quelle que soit la fonction test  $\psi$ : nécessairement  $U_B(\mathbf{r}) = h_{BA}(\mathbf{s}, 0)$ , soit explicitement, compte tenu de la relation (A.27),

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right]. \quad (\text{A.30})$$

Ce résultat est bien conforme à la théorie de la diffraction développée dans ce livre. En effet  $U_A = \delta$  représente un point lumineux sur l'émetteur  $\mathcal{A}$ . La relation (A.30) est bien l'amplitude du champ diffracté obtenue sur la sphère  $\mathcal{B}$ , de rayon  $R_B$ , placée à la distance  $D$  du point lumineux (à un facteur dimensionnel près).

Ce qui précède est un moyen rigoureux d'éviter d'écrire la relation (A.20) sous la forme impropre [70]

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = h_{BA}(\mathbf{s}, 0). \quad (\text{A.31})$$

## Appendice B

# La transformation de Fourier

### B.1 Définition

#### B.1.1 Transformée de Fourier d'une fonction sommable

Nous nous limitons au cas qui nous intéresse et travaillons pour cela avec une variable temporelle et une variable spatiale à deux dimensions (ou deux variables spatiales à une dimension). Les fonctions considérées sont définies sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Nous notons  $t$  le temps et  $\mathbf{r}$  la variable spatiale ; leurs variables conjuguées sont  $\nu$  et  $\mathbf{F}$ . En coordonnées cartésiennes (orthogonales) nous écrivons  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ . Nous utilisons également la notation globale

$$X = (\mathbf{r}, t), \quad Y = (\mathbf{F}, \nu). \quad (\text{B.1})$$

Nous commençons par des fonctions intégrables (ou sommables<sup>1</sup>), éléments de l'espace  $L_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ , et nous définissons la transformée de Fourier de la fonction  $f$  par la relation

$$\widehat{f}(Y) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} f(X) e^{-2i\pi \langle Y, X \rangle} dX, \quad (\text{B.2})$$

où  $\langle Y, X \rangle$  représente un produit scalaire.

Du fait qu'en dimension 3 les ondes harmoniques ont une dépendance spatio-temporelle de la forme<sup>2</sup>  $\omega t - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}$ , soit encore  $2\pi\nu t - 2\pi\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\rho}/\lambda$ , avec  $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{s}/\lambda$  ( $\mathbf{s}$  est un vecteur unitaire), il est naturel de choisir le produit scalaire<sup>3</sup> (pseudo-euclidien) défini par

$$\langle Y, X \rangle = \nu t - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}, \quad (\text{B.3})$$

puisque  $\mathbf{F}$  est une fréquence spatiale dont le module est homogène à l'inverse d'une longueur (comme l'est  $1/\lambda$ ). Dans ces conditions, la relation (B.2) devient

$$\widehat{f}(\mathbf{F}, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} f(\mathbf{r}, t) e^{-2i\pi(\nu t - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} dt, \quad (\text{B.4})$$

---

<sup>1</sup> Il s'agit de la sommabilité au sens de Lebesgue.

<sup>2</sup> Ici  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}$  désigne le produit scalaire euclidien de  $\mathbf{k}$  et  $\boldsymbol{\rho}$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>3</sup> Parler de produit scalaire est ici abusif : il s'agit plutôt d'une forme bilinéaire symétrique.

où  $d\mathbf{r} = dx dy$ , si  $\mathbf{r} = (x, y)$ .

Si  $\hat{f}$  est intégrable, alors

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \hat{f}(\mathbf{F}, \nu) e^{2i\pi(\nu t - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{F} d\nu, \quad (\text{B.5})$$

et cette relation définit la transformation de Fourier inverse (elle est vraie « presque partout »). Avec des coordonnées cartésiennes orthogonales, la relation (B.4) s'écrit

$$\hat{f}(F_x, F_y, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} f(x, y, t) e^{-2i\pi(\nu t - xF_x - yF_y)} dx dy dt, \quad (\text{B.6})$$

et la relation (B.5)

$$f(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \hat{f}(F_x, F_y, \nu) e^{2i\pi(\nu t - xF_x - yF_y)} dF_x dF_y d\nu. \quad (\text{B.7})$$

Nous utilisons également des transformations de Fourier partielles, essentiellement temporelles et spatiales. La transformée de Fourier partielle temporelle de la fonction  $f(\mathbf{r}, t)$  est la fonction  $\hat{f}^{[t]}(\mathbf{r}, \nu)$  définie par

$$\hat{f}^{[t]}(\mathbf{r}, \nu) = \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{r}, t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (\text{B.8})$$

De même, la transformée de Fourier partielle spatiale de la fonction  $f(\mathbf{r}, t)$  est la fonction  $\hat{f}^{[s]}(\mathbf{F}, t)$  telle que

$$\hat{f}^{[s]}(\mathbf{F}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}, t) e^{2i\pi\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (\text{B.9})$$

En pratique, nous n'écrirons plus les indices et parlerons de transformation de Fourier temporelle (une dimension) ou spatiale (deux dimensions en général). L'écriture explicite des variables permet d'éviter les confusions. En général une transformation monodimensionnelle est temporelle, mais on rencontre parfois de telles transformations portant sur une variable d'espace. Le signe de l'argument de la fonction exponentielle qui intervient dans l'intégrale de définition de la transformation n'est pas le même dans les deux cas.

**Remarque B.1.1.** L'emploi de deux conventions différentes dans la définition de la transformation de Fourier, selon qu'elle porte sur le temps ou sur des variables d'espace, présente encore l'avantage de respecter les deux règles suivantes, qui semblent naturelles.

**Règle 3.** *La transformation de Fourier directe associe à la représentation complexe d'une onde monochromatique une fréquence positive.*

**Règle 4.** *La diffraction de Fraunhofer se représente par une transformation de Fourier directe.*

Il y a deux façons de représenter la dépendance spatio-temporelle d'une onde harmonique se propageant dans la direction du vecteur  $\mathbf{s}$  (unitaire) : on choisit  $A = 1$  ou  $A = -1$  dans  $\exp[2Ai\pi\nu(t - \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\rho}/v)]$  ( $v$  est la vitesse de phase).

Pour la transformation de Fourier temporelle, on choisit  $B = 1$  ou  $B = -1$  dans

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2Bi\pi\nu t} dt, \quad (\text{B.10})$$

et pour la transformation de Fourier spatiale, on choisit  $C = 1$  ou  $C = -1$  dans

$$\widehat{f}(\mathbf{F}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) e^{2Ci\pi\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (\text{B.11})$$

Le tableau B.1 montre qu'il n'y a que deux façons de respecter les règles 3 et 4 :  $B$  et  $C$  ne peuvent pas avoir le même signe. Le choix de  $A = 1$ , qui est fait dans ce livre (voir le chapitre 1), nous impose de choisir  $B = -1$  et  $C = 1$ .

**TAB. B.1.** Respect des règles 3 et 4.

$A$	$B$	$C$	Règle 3	Règle 4
1	1	1	Non	Oui
1	1	-1	Non	Non
1	-1	1	Oui	Oui
1	-1	-1	Oui	Non
-1	1	1	Oui	Non
-1	1	-1	Oui	Oui
-1	-1	1	Non	Non
-1	-1	-1	Non	Oui

Il existe d'autres définitions de la transformation de Fourier<sup>4</sup> : on utilise par exemple la pulsation  $\omega$  plutôt que la fréquence  $\nu$  comme variable ; il est souvent habituel alors d'introduire un coefficient  $1/\sqrt{2\pi}$  en facteur devant l'intégrale de définition de la transformation (en dimension 1). Cela ne modifie toutefois pas les conventions que nous avons choisies pour respecter les règles 3 et 4.

### B.1.2 Transformée de Fourier d'une fonction de carré sommable

Il existe une extension de la transformation de Fourier aux fonctions de carré sommable, éléments de  $L_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ , avec l'avantage que la transformée de Fourier inverse d'une fonction existe toujours. Dans cet espace existe la relation de Parseval

<sup>4</sup> Les ouvrages sur la transformation de Fourier sont légions. Nous en indiquons quelques uns dans les références [32, 73, 175, 206].

$$\int |f|^2 = \int |\widehat{f}|^2, \quad (\text{B.12})$$

ou plus généralement celle de Parseval–Plancherel (la barre représente la conjugaison complexe)

$$\int f \bar{g} = \int \widehat{f} \overline{\widehat{g}}, \quad (\text{B.13})$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de carré sommable. La relation de Parseval<sup>5</sup> (ou celle de Parseval–Plancherel) est valable pour la transformation de Fourier complète comme pour les transformations partielles, et c’est pour cette raison que les relations (B.12) et (B.13) sont écrites sans l’indication explicite de la variable ni du domaine d’intégration ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou encore  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ).

### B.1.3 Transformée de Fourier d’une distribution tempérée

On définit plus généralement la transformation de Fourier pour les distributions tempérées [28, 47, 61, 66, 202, 206, 212, 213]. Pour cela on se place dans l’espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  des fonctions de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide<sup>6</sup> (espace de Schwartz). Une distribution tempérée (on dit aussi à croissance lente) est un élément du dual (topologique)  $\mathcal{S}'$  de  $\mathcal{S}$  (c’est une forme linéaire continue sur l’espace  $\mathcal{S}$ ).

Si  $T$  est une distribution tempérée, sa transformée de Fourier est  $\widehat{T}$  définie, pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}$ , par

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle. \quad (\text{B.14})$$

La transformée de Fourier d’une distribution tempérée est une distribution tempérée (l’espace  $\mathcal{S}'$  est clos pour la transformation de Fourier). La transformation de Fourier est continue sur  $\mathcal{S}'$  en ce sens que si  $(T_j)$  est une suite de distributions qui converge vers  $T$  dans  $\mathcal{S}'$ , alors la suite des  $\widehat{T}_j$  converge vers  $\widehat{T}$ . Cela signifie que si, pour toute fonction  $\varphi$  à décroissance rapide,

$$\langle T_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad (\text{B.15})$$

dans  $\mathbb{C}$  quand  $j$  tend vers l’infini, alors

$$\langle \widehat{T}_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle \widehat{T}, \varphi \rangle. \quad (\text{B.16})$$

<sup>5</sup> On parle aussi de théorème de Parseval.

<sup>6</sup> En dimension 1, une fonction est à décroissance rapide si elle décroît vers 0 à l’infini ( $\pm\infty$ ) plus rapidement que l’inverse de tout polynôme (ou que toute puissance de  $1/|x|$ ) et s’il en est de même de toutes ses dérivées. Pour une fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  cela signifie que pour tous entiers  $j$  et  $\ell$  positifs ou nuls, et tout  $x$  réel,  $|x^\ell \varphi^{(j)}(x)|$  est borné. La fonction  $x \mapsto \exp[-x^2]$  est un exemple de fonction à décroissance rapide. Ce qui précède se généralise à une dimension quelconque.

**Remarque B.1.2.** La relation (B.14) permet de comprendre pourquoi il n'est pas possible de définir la transformée de Fourier d'une distribution arbitraire de  $\mathcal{D}'$ . Le membre de droite de la relation (B.14) n'a de sens que si  $\widehat{\varphi}$  est à support compact (et de classe  $C^\infty$ ), ce qui n'a jamais lieu si  $\varphi$  est elle-même à support compact (et non nulle). Autrement dit, l'espace  $\mathcal{D}$  n'est pas clos pour la transformation de Fourier. Il est nécessaire de se placer dans un espace plus vaste que  $\mathcal{D}$ . L'espace  $\mathcal{S}$  est clos pour la transformation de Fourier : si  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide, sa transformée de Fourier  $\widehat{\varphi}$  l'est aussi.

**Remarque B.1.3.** L'espace des distributions tempérées est un sous-espace de distributions au sens du paragraphe A.1.7. On a les inclusions

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}, \quad (\text{B.17})$$

pour les espaces de fonctions (le symbole  $\hookrightarrow$  indique l'inclusion avec une topologie plus fine), et

$$\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}', \quad (\text{B.18})$$

pour les espaces de distributions (avec les topologies appropriées).

L'espace des distributions tempérées  $\mathcal{S}'$  est généralement assez vaste pour les besoins de la physique et la représentation des signaux [18]. Toutefois certaines fonctions élémentaires n'ont pas de transformée de Fourier : c'est le cas de la fonction exponentielle ( $x \mapsto e^x$ ) qui est une distribution (c'est une fonction localement sommable), mais qui n'est pas à croissance lente.

**Remarque B.1.4.** Si  $T$  est une distribution à support compact, on montre [206] que sa transformée de Fourier est la fonction (de classe  $C^\infty$ ) définie par

$$\widehat{T}(\nu) = \langle T_t, e^{-2i\pi\nu t} \rangle, \quad (\text{B.19})$$

où l'écriture  $T_t$  indique que  $T$  opère sur la variable  $t$  (on a choisi ici une transformation de Fourier temporelle).

**Remarque B.1.5.** La relation (B.14) conduit à une généralisation de la relation de Parseval–Plancherel.

En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de carré sommable, leur produit scalaire hermitien est

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} f \overline{g}, \quad (\text{B.20})$$

et la relation de Parseval–Plancherel signifie  $(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g})$ .

D'autre part, une fonction à décroissance rapide  $\varphi$  est la transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide  $\psi$ . Les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont de carré sommable, et si  $T_f$  est la distribution régulière associée à la fonction  $f$  de carré sommable, alors

$$(f, \varphi) = \langle T_f, \overline{\varphi} \rangle. \quad (\text{B.21})$$

Soit  $\tilde{\varphi}$  la fonction  $\varphi$  symétrisée, définie par<sup>7</sup>  $\tilde{\varphi}(X) = \varphi(-X)$ . De  $\varphi = \hat{\psi}$  on déduit

$$\psi = \tilde{\tilde{\varphi}}. \quad (\text{B.22})$$

La relation (B.14) donne

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{T}, \psi \rangle = \langle \hat{T}, \tilde{\tilde{\varphi}} \rangle = \langle \hat{T}, \hat{\tilde{\varphi}} \rangle, \quad (\text{B.23})$$

et appliquée sous cette forme à  $f$  et  $\varphi$ , elle conduit à

$$(f, \varphi) = \langle T_f, \overline{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}_f, \hat{\tilde{\varphi}} \rangle = \langle \hat{T}_f, \hat{\overline{\varphi}} \rangle = (\hat{f}, \hat{\varphi}), \quad (\text{B.24})$$

c'est-à-dire à la relation (B.13). La relation (B.23), qui est équivalente à la relation (B.14), généralise aux distributions la relation de Parseval–Plancherel.

La relation (B.23) s'écrit également

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle, \quad (\text{B.25})$$

où  $\check{\varphi}$  est la transformée de Fourier inverse de  $\varphi$ . Il est clair que la relation (B.25) est une autre forme de la relation (B.14).

## B.2 Propriétés de la transformation de Fourier

Nous mentionnons quelques résultats concernant la transformation de Fourier spatiale en deux dimensions. Nous adoptons les notations utilisées dans ce livre pour désigner l'amplitude du champ (électrique) puisque c'est souvent sa transformée de Fourier qu'on se propose de calculer. Si  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ , alors

$$\hat{U}(F_x, F_y) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) e^{2i\pi(xF_x + yF_y)} dx dy, \quad (\text{B.26})$$

et en particulier

$$\hat{U}(0, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) dx dy. \quad (\text{B.27})$$

Par transformation de Fourier inverse on obtient

$$U(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{U}(F_x, F_y) e^{-2i\pi(xF_x + yF_y)} dF_x dF_y. \quad (\text{B.28})$$

Il est parfois commode de noter

$$\hat{U}(F_x, F_y) = \mathcal{F}[U_{x,y}](F_x, F_y), \quad (\text{B.29})$$

---

<sup>7</sup> On a  $X = (\mathbf{r}, t)$ , mais on pourrait appliquer ce qui suit à la seule variable  $t$  ou encore à  $\mathbf{r}$ .

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformation de Fourier. On a

$$\mathcal{F}[U_{x-a,y-b}](F_x, F_y) = e^{2i\pi(aF_x+bF_y)} \mathcal{F}[U_{x,y}](F_x, F_y). \quad (\text{B.30})$$

Une autre propriété est ( $a$  et  $b$  sont des nombre réels non nuls)

$$\mathcal{F}[U_{ax,by}](F_x, F_y) = \frac{1}{|ab|} \mathcal{F}[U_{x,y}]\left(\frac{F_x}{a}, \frac{F_y}{b}\right), \quad (\text{B.31})$$

qui inclut le cas particulier suivant, fréquemment utilisé dans ce livre,

$$\mathcal{F}[U_{ax,ay}](F_x, F_y) = \frac{1}{a^2} \mathcal{F}[U_{x,y}]\left(\frac{F_x}{a}, \frac{F_y}{a}\right). \quad (\text{B.32})$$

Mentionnons encore

$$\widehat{\widehat{U}}(x, y) = \widetilde{U}(x, y) = U(-x, -y). \quad (\text{B.33})$$

Bien sûr ces résultats ont leur équivalent en dimension quelconque. Ils sont applicables à la transformation de Fourier inverse (avec parfois des changements de signe) et sont valables pour les distributions tempérées.

**Transformation de Fourier et produit de convolution.** En deux dimensions, le produit de convolution des fonctions  $U$  et  $V$  est la fonction  $S = U * V$  telle que

$$S(\mathbf{r}) = U * V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} U(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (\text{B.34})$$

Le lien entre produit de convolution et transformation de Fourier s'exprime par

$$\widehat{U * V} = \widehat{U} \widehat{V}, \quad (\text{B.35})$$

$$\widehat{UV} = \widehat{U} * \widehat{V}, \quad (\text{B.36})$$

et ces relations restent vraies pour des distributions, quand le produit de convolution existe.

**Fonction à variables séparables.** La fonction  $U(x, y)$  est à variables séparables en  $x$  et  $y$  si elle est le produit d'une fonction de  $x$  par une fonction de  $y$ , c'est-à-dire

$$U(x, y) = f(x) g(y). \quad (\text{B.37})$$

Si le tilde désigne la transformation de Fourier spatiale monodimensionnelle (et non la fonction symétrisée), alors

$$\widetilde{f}(F_x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi x F_x} dx, \quad (\text{B.38})$$

si bien que

$$\widehat{U}(F_x, F_y) = \widetilde{f}(F_x) \widetilde{g}(F_y). \quad (\text{B.39})$$

### B.3 Transformation de Hankel

Très souvent, les systèmes optiques ont la symétrie de révolution et il est utile de s'intéresser à des fonctions ayant cette même symétrie : elles servent à représenter les amplitudes des champs ou encore les ouvertures des systèmes dans de tels cas.

Avec des coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , une fonction à symétrie de révolution (ou fonction radiale) dépend seulement de  $r$

$$U(r, \theta) = g(r). \quad (\text{B.40})$$

Avec des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  nous écrivons

$$U(r, \theta) = u(x, y), \quad (\text{B.41})$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \hat{u}(F_x, F_y) &= \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) e^{2i\pi(xF_x + yF_y)} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} g(r) r dr \int_0^{2\pi} e^{2i\pi(F_x r \cos \theta + F_y r \sin \theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Il est naturel d'utiliser des coordonnées polaires  $(F, \psi)$  dans l'espace (plan) de Fourier, telles que  $F_x = F \cos \psi$  et  $F_y = F \sin \psi$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \hat{u}(F_x, F_y) &= \hat{u}(F \cos \psi, F \sin \psi) \\ &= \int_0^{+\infty} g(r) r dr \int_0^{2\pi} e^{2i\pi F r \cos(\theta - \psi)} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

D'autre part, si  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0 [3, 10, 134, 212, 242], on montre<sup>8</sup>

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ia \cos(\theta - \psi)} d\theta, \quad (\text{B.44})$$

et il vient

$$\hat{u}(F \cos \psi, F \sin \psi) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi F r) r dr. \quad (\text{B.45})$$

L'intégrale de la relation (B.45) ne dépend pas de  $\psi$ , ce qui signifie que la transformée de Fourier d'une fonction à symétrie de révolution possède elle aussi cette symétrie. La relation (B.45) se met sous la forme

$$G(F) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi F r) r dr. \quad (\text{B.46})$$

La fonction  $G$  est la transformée de Fourier-Bessel (ou transformée de Hankel d'ordre 0) de la fonction  $g$ .

<sup>8</sup> La relation (B.44) peut être prise comme définition de la fonction  $J_0$ .

On définit une transformation de Fourier–Bessel inverse et on montre

$$g(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} G(F) J_0(2\pi Fr) F \, dF. \quad (\text{B.47})$$

La transformation de Fourier–Bessel est sa propre inverse.

**Remarque B.3.1.** Si  $J_m$  est la fonction de Bessel de première espèce et ordre  $m$ , la transformation de Hankel d'ordre  $m$ , notée  $\mathcal{H}_m$  est définie par [10]

$$\mathcal{H}_m[g](F) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_m(2\pi Fr) r \, dr. \quad (\text{B.48})$$

On montre que  $\mathcal{H}_m$  est sa propre inverse.

## B.4 Transformées de Fourier de quelques fonctions et distributions

### B.4.1 Transformées de Fourier en dimension 1

Dans le tableau B.2, la transformation de Fourier est définie par

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} \, dt, \quad (\text{B.49})$$

c'est-à-dire qu'il s'agit de la transformation partielle temporelle.

La distribution de Dirac de support  $\{0\}$  est écrite  $\delta(t)$ , sa dérivée première  $\delta'(t)$  et sa dérivée d'ordre  $j$  ( $j$  est un entier positif)  $\delta^{(j)}(t)$ . (Ces écritures sont abusives, mais ont l'avantage de faire apparaître la variable. Il faudrait écrire seulement  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\delta^{(j)}$ .)

La fonction  $\text{rect}_L(t)$  vaut 1 si  $|t| \leq L/2$ , et 0 sinon. La fonction  $\Lambda_L$  (fonction « triangle ») est nulle en dehors de l'intervalle  $[-L, L]$ ; de plus  $\Lambda_L(t) = t + L$  sur  $[-L, 0[$ , et  $\Lambda_L(t) = L - t$  sur  $[0, L]$ .

La fonction  $\mathcal{T}$  est la fonction de Heaviside (échelon unité), telle que  $\mathcal{T}(t) = 1$  si  $t \geq 0$ , et  $\mathcal{T}(t) = 0$  si  $t < 0$ .

La notation V.P. signifie « valeur principale » et correspond à la notion de valeur principale d'une intégrale au sens de Cauchy (c'est une distribution, voir l'appendice A) [206, 212].

Si  $\alpha$  est un nombre complexe, sa partie réelle se note  $\Re\{\alpha\}$ .

Nous avons défini la transformation de Fourier partielle à une dimension spatiale avec un signe plus dans l'exponentielle. Pour utiliser le tableau B.2 dans ce cas, il suffit de le lire « à l'envers » : la colonne de droite donne la fonction originelle (on remplace  $\nu$  par  $x$ ) et la colonne de gauche sa transformée de Fourier directe (on remplace  $t$  par  $F_x$ ).

**TAB. B.2.** Transformées de Fourier en dimension 1.

Fonction ou distribution	Transformée de Fourier
1	$\delta(\nu)$
$\delta(t)$	1
$\delta_{t_0} = \delta(t - t_0)$	$\exp[-2i\pi t_0 \nu]$
$\exp[2i\pi \nu_0 t]$	$\delta(\nu - \nu_0) = \delta_{\nu_0}$
$\delta'(t)$	$2i\pi \nu$
$-2i\pi t$	$\delta'(\nu)$
$\delta^{(j)}(t); j \in \mathbb{N}$	$(2i\pi \nu)^j$
$(-2i\pi t)^j; j \in \mathbb{N}$	$\delta^{(j)}(\nu)$
$\text{rect}_L(t)$	$L \frac{\sin \pi L \nu}{\pi L \nu}$
$\Lambda_L(t)$	$L^2 \left( \frac{\sin \pi L \nu}{\pi L \nu} \right)^2$
$\frac{1}{\ell} \sqcup_{\ell}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\ell)$	$\frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{\ell}\right) = \sqcup_{1/\ell}(\nu)$
$\Upsilon(t)$	$\frac{1}{2} \delta(\nu) + \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi \nu}$
$\frac{1}{2} \delta(t) - \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi t}$	$\Upsilon(\nu)$
$ t $	$-\frac{1}{2\pi^2 \nu^2}$
$\Upsilon(t) \exp[-\alpha t]; \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + 2i\pi \nu}$
$\exp[-\alpha  t ]; \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \nu^2}$
$\exp[-\pi t^2]$	$\exp[-\pi \nu^2]$
$\exp\left[\frac{i\pi}{\alpha} t^2\right]; \alpha > 0$	$\sqrt{\alpha} \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right] \exp[-i\alpha \pi \nu^2]$
$\exp\left[\frac{i\pi}{\alpha} t^2\right]; \alpha < 0$	$\sqrt{ \alpha } \exp\left[-\frac{i\pi}{4}\right] \exp[-i\alpha \pi \nu^2]$
$\exp\left[-\frac{\pi}{\alpha} t^2\right]; \alpha = \rho e^{i\theta}, \Re\{\alpha\} \geq 0$	$\sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \exp[-\alpha \pi \nu^2]$

### B.4.2 Transformées de Fourier en dimension 2

En notation vectorielle, la transformation de Fourier spatiale se définit par

$$\widehat{f}(\mathbf{F}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) \exp[2i\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r}. \quad (\text{B.50})$$

Pour les fonctions à symétrie de révolution, la transformée de Fourier est égale à la transformée de Hankel d'ordre 0. Nous écrivons  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  et

$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$ . La fonction  $\text{circ}_D(x, y)$  vaut 1 si  $r \leq D/2$ , et 0 si  $r > D/2$ . Le symbole  $\Delta$  représente le laplacien.

**TAB. B.3.** Transformées de Fourier en dimension 2.

Fonction ou distribution	Transformée de Fourier
1	$\delta(\mathbf{F}) = \delta(F_x, F_y)$
$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x, y)$	1
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0, y - y_0)$	$\exp[2i\pi \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F}]$
$\exp[-2i\pi \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_0]$	$\delta(\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)$
$2i\pi x$	$\frac{\partial}{\partial F_x} \delta(\mathbf{F})$
$2i\pi y$	$\frac{\partial}{\partial F_y} \delta(\mathbf{F})$
$\frac{\partial}{\partial x} \delta(\mathbf{r})$	$-2i\pi F_x$
$\frac{\partial}{\partial y} \delta(\mathbf{r})$	$-2i\pi F_y$
$\Delta \delta(\mathbf{r})$	$-4\pi^2 F^2$
$\text{circ}_D(\mathbf{r}) = \text{circ}_D(x, y)$	$\frac{\pi D^2}{2} \frac{J_1(\pi D F)}{\pi D F}$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{F}$
$\exp[-\pi r^2]$	$\exp[-\pi F^2]$
$\frac{1}{i\alpha} \exp\left[\frac{i\pi}{\alpha} r^2\right]$	$\exp[-i\alpha\pi F^2]$
$\delta(r - r_0)$	$2\pi r_0 J_0(2\pi r_0 F)$
$\frac{\exp[-ikr]}{r}; \quad k > 0$	$\frac{-2i\pi}{\sqrt{k^2 - 4\pi^2 F^2}}; \text{ pour } 2\pi F < k$
	$\frac{2i\pi}{\sqrt{4\pi^2 F^2 - k^2}}; \text{ pour } 2\pi F > k$

## Appendice C

# La transformation de Fourier fractionnaire

### C.1 Première définition

#### C.1.1 Fonctions propres de la transformation de Fourier

Si  $n$  est un nombre entier positif, le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  est

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (\text{C.1})$$

Les six premiers polynômes d'Hermite sont

$$H_0(x) = 1, \quad (\text{C.2})$$

$$H_1(x) = 2x, \quad (\text{C.3})$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad (\text{C.4})$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad (\text{C.5})$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad (\text{C.6})$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x. \quad (\text{C.7})$$

Les polynômes d'Hermite satisfont les relations de récurrence [134]

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad (\text{C.8})$$

et

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (\text{C.9})$$

ainsi que l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2} H_n(x) - 2x \frac{d}{dx} H_n(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (\text{C.10})$$

Ils sont tels que [134]

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-x^2/2} H_n(x) dx = \sqrt{2\pi} i^n e^{-y^2/2} H_n(y). \quad (\text{C.11})$$

Il résulte de la relation (C.11) que si  $\mathcal{F}$  représente la transformation de Fourier<sup>1</sup>, les fonctions d'Hermite–Gauss<sup>2</sup>  $\varphi_n$ , définies par

---

<sup>1</sup> On suppose ici qu'il s'agit de la transformation de Fourier spatiale monodimensionnelle, avec un signe  $+$  dans l'exponentielle sous l'intégrale.

<sup>2</sup> On dit aussi fonctions d'Hermite.

$$\varphi_n(x) = H_n(\sqrt{2\pi} x) \exp[-\pi x^2] , \quad (\text{C.12})$$

sont telles que

$$\mathcal{F}[\varphi_n] = \exp\left[i\frac{n\pi}{2}\right] \varphi_n . \quad (\text{C.13})$$

La fonction  $\varphi_n$  est une fonction propre de  $\mathcal{F}$  pour la valeur propre  $\exp[in\pi/2]$ .

### C.1.2 Définition de la transformation de Fourier fractionnaire

Si  $\alpha$  est un nombre complexe, la transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , notée  $\mathcal{F}_\alpha$ , se définit par

$$\mathcal{F}_\alpha[\varphi_n] = e^{in\alpha} \varphi_n . \quad (\text{C.14})$$

On adjoint la propriété de linéarité ( $a_m$  et  $a_n$  sont des nombres complexes)

$$\mathcal{F}_\alpha[a_m \varphi_m + a_n \varphi_n] = a_m \mathcal{F}_\alpha[\varphi_m] + a_n \mathcal{F}_\alpha[\varphi_n] . \quad (\text{C.15})$$

Pour comprendre que cette définition s'applique à toute fonction, remarquons que l'espace  $L_2(\mathbb{R})$  est un espace de Hilbert dont les fonctions d'Hermite–Gauss forment une base de Hilbert. Chaque fonction  $f$  de  $L_2(\mathbb{R})$  s'écrit comme la somme d'une série sous la forme

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \varphi_n . \quad (\text{C.16})$$

Connaître  $\mathcal{F}_\alpha$  pour toutes les fonctions d'une base de Hilbert permet de la connaître pour toute fonction  $f$  : on écrit

$$\mathcal{F}_\alpha[f] = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{in\alpha} \varphi_n . \quad (\text{C.17})$$

Nous admettons qu'il est possible d'étendre la définition aux distributions, comme pour la transformation de Fourier.

Ce qui précède est valable en dimension 1. En dimension 2, nous utilisons les fonctions d'Hermite–Gauss ( $m$  et  $n$  sont deux nombres entiers positifs)

$$\varphi_{m,n}(x, y) = H_m(\sqrt{2\pi} x) H_n(\sqrt{2\pi} y) \exp[-\pi(x^2 + y^2)] , \quad (\text{C.18})$$

et définissons la transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$  par

$$\mathcal{F}_\alpha[\varphi_{m,n}] = e^{i(m+n)\alpha} \varphi_{m,n} . \quad (\text{C.19})$$

## C.2 Deuxième définition : forme intégrale

Il existe une autre définition de la transformation de Fourier fractionnaire, sous la forme d'une intégrale [165]. En dimension 2, la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  est définie par

$$\mathcal{F}_\alpha[f](\boldsymbol{\rho}') = \frac{ie^{-i\alpha}}{\sin \alpha} \exp[-i\pi \rho'^2 \cot \alpha] \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-i\pi \rho^2 \cot \alpha] \times \exp\left[\frac{2i\pi \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}'}{\sin \alpha}\right] f(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad (\text{C.20})$$

où  $\boldsymbol{\rho}$  et  $\boldsymbol{\rho}'$  sont des vecteurs de dimension 2 et  $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|$  (ils n'ont pas de dimension physique, c'est-à-dire pas d'unité de mesure). Le nombre  $\alpha$  est en général un nombre complexe, même s'il peut y avoir des problèmes de convergence de l'intégrale pour certaines classes de fonctions.

De fait, la relation (C.20) se déduit de (C.19). Le calcul explicite est donné par Namias [165]. Ainsi les formes (C.19) et (C.20) sont équivalentes. La relation (C.19) permet d'établir rapidement certaines propriétés de la transformation de Fourier fractionnaire, mais la forme intégrale (C.20) est particulièrement utile pour interpréter les problèmes de diffraction.

## C.3 Principales propriétés

On démontre les résultats suivants [165] (certains sont à peu près évidents à partir de la définition (C.14) ou (C.19) suivant la dimension).

1. L'opérateur  $\mathcal{F}_0$  est l'opérateur identité ( $\mathcal{F}_0[f] = f$ ).
2. L'opérateur  $\mathcal{F}_{\pi/2}$  est la transformation de Fourier (standard).
3. Pour tout  $\alpha$  et tout  $\beta$  on a  $\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$ .
4.  $\mathcal{F}_\alpha[f] \longrightarrow \mathcal{F}_\beta[f]$  quand  $\alpha \longrightarrow \beta$ .
5. La transformation inverse de  $\mathcal{F}_\alpha$  est  $\mathcal{F}_{-\alpha}$ .
6. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $\mathcal{F}_{\alpha+2n\pi} = \mathcal{F}_\alpha$ .
7.  $\mathcal{F}_{\alpha+\pi}[f](\boldsymbol{\rho}') = \mathcal{F}_\alpha[f](-\boldsymbol{\rho}')$ .
8.  $\mathcal{F}_{-\alpha}[\overline{f}](\boldsymbol{\rho}') = \overline{\mathcal{F}_\alpha[f](\boldsymbol{\rho}')}$  pour  $\alpha$  réel.

Pour la propriété 8, la barre représente la conjugaison complexe. La propriété 7 se démontre à partir de la forme intégrale (C.20). Si on utilise la relation (C.19) il faut se souvenir que les polynômes d'Hermite (et par suite les fonctions d'Hermite–Gauss) d'ordre impair sont impairs.

**Remarque C.3.1.** C'est la propriété 3 qui justifie le terme de « transformation fractionnaire ». En effet, si  $\mathcal{F}$  désigne la transformation de Fourier (standard), pour un nombre rationnel positif de la forme  $p/q$ , définissons  $\mathcal{F}^{p/q}$  par

$$\mathcal{F}^{p/q} = \mathcal{F}_{p\pi/2q}. \quad (\text{C.21})$$

La propriété 3 permet d'écrire

$$\underbrace{\mathcal{F}^{p/q} \circ \dots \circ \mathcal{F}^{p/q}}_{q \text{ fois}} = \mathcal{F}^p. \quad (\text{C.22})$$

Par abus de langage, on conserve l'adjectif fractionnaire dans le cas plus général d'un exposant réel ou même complexe.

**Remarque C.3.2.** L'intégrale de la relation (C.20) est la transformée de Fourier, considérée au point  $\rho' \sin \alpha$ , de la fonction  $g$  définie par

$$g(\rho) = \exp[-i\pi\rho^2 \cot \alpha] f(\rho), \quad (\text{C.23})$$

laquelle est une fonction sommable si  $f$  l'est (nous supposons  $\alpha$  réel). Il en résulte que de nombreuses propriétés de la transformation de Fourier restent valables pour la transformation de Fourier fractionnaire, notamment celles qui sont liées à son existence (son extension aux distributions par exemple).

## C.4 Transformées de Fourier fractionnaires de quelques fonctions et distributions

Nous nous limitons à la transformation de Fourier fractionnaire en dimension 1. Nous adoptons une définition qui inclut la transformation de Fourier comme cas particulier ( $\alpha = \pi/2$ ). Or nous avons vu deux définitions de celle-ci en dimension 1, chacune étant de fait celle d'une transformation partielle. Nous privilégions ici l'aspect spatial et définissons la transformation de Fourier fractionnaire à partir de l'équation (C.20) sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](x') &= \frac{e^{i\mathfrak{s}(\alpha)\pi/4} e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \exp[-i\pi x'^2 \cot \alpha] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp[-i\pi x^2 \cot \alpha] \exp\left[\frac{2i\pi x x'}{\sin \alpha}\right] f(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

où  $\mathfrak{s}(\alpha)$  est le signe de  $\alpha$  (cela suppose  $\alpha$  réel). Si  $\alpha = \pi/2$ , on retrouve la transformation de Fourier (standard) spatiale à une dimension.

Le tableau C.1 donne des résultats adaptés de ceux donnés par Namias [165]. Les variables  $x$  et  $x'$  et la constante  $x_0$  sont sans dimension physique.

Dans le domaine temporel, la définition de la transformation de Fourier fractionnaire d'ordre  $\alpha$  à une dimension est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](t') &= \frac{e^{-i\mathfrak{s}(\alpha)\pi/4} e^{i\alpha/2}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \exp[i\pi t'^2 \cot \alpha] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} \exp[i\pi t^2 \cot \alpha] \exp\left[-\frac{2i\pi t t'}{\sin \alpha}\right] f(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

**TAB. C.1.** Transformées de Fourier fractionnaires en dimension 1.

Fonction ou distribution	Transformée de Fourier fractionnaire d'ordre $\alpha$
1	$\frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \exp[i\pi x'^2 \tan \alpha]$
$\exp\left[\frac{2i\pi x}{x_0}\right]$	$\frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \exp\left[i\pi \left(\frac{1}{x_0^2} + x'^2\right) \tan \alpha + \frac{2i\pi x'}{x_0 \cos \alpha}\right]$
$\delta(x)$	$\frac{e^{is(\alpha)\pi/4} e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{ \sin \alpha }} \exp[-i\pi x'^2 \cot \alpha]$
$\delta(x - x_0)$	$\frac{e^{is(\alpha)\pi/4} e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{ \sin \alpha }} \exp\left[-i\pi(x'^2 + x_0^2) \cot \alpha + \frac{2i\pi x_0 x'}{\sin \alpha}\right]$
$\exp[-\pi x^2]$	$\exp[-\pi x'^2]$
$H_n(\sqrt{2\pi}x) \exp[-\pi x^2]$	$e^{in\alpha} H_n(\sqrt{2\pi}x') \exp[-\pi x'^2]$

Pour  $\alpha = \pi/2$ , cette définition donne bien la transformation de Fourier temporelle de l'appendice B. Toutefois les variables  $t$  et  $t'$  sont sans dimension physique. Nous avons choisi d'écrire  $t$  la variable pour souligner qu'il s'agit de la forme adoptée pour représenter des phénomènes temporels. Les résultats du tableau C.1 sont à adapter dans ce cas. Si on souhaite appliquer ces relations à une fonction du temps (qui se mesure en secondes) il faut introduire d'une façon ou d'une autre des variables réduites, sans dimension. C'est ce qui est fait au chapitre 11 de ce livre.

**Remarque C.4.1.** En dimension 1, les définitions (C.14) et (C.24) ne sont pas complètement équivalentes comme l'ont montré McBride et Kerr [160]. La transformation de Fourier fractionnaire est de période  $2\pi$ , d'après la définition (C.14), et  $4\pi$  d'après (C.24). Les propriétés 6 et 7 du paragraphe C.3 ne sont plus vraies si on adopte la définition (C.24); il est toutefois possible de les vérifier, à condition de prendre certaines précautions avec le domaine de définition de  $\alpha$ . On trouvera des précisions à ce sujet dans l'article de McBride et Kerr [160]. Pour notre part, nous privilégions la forme (C.14). Ces problèmes viennent du terme  $\exp[-i\alpha/2]$  dans la définition (C.24) et ils disparaissent en dimension 2.

## C.5 Transformation de Fourier fractionnaire et oscillateur harmonique

Pour tout  $n$ , entier positif ou nul, introduisons la fonction  $\psi_n$  telle que

$$\psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad (\text{C.26})$$

où  $H_n$  est le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$ . Il résulte de l'équation (C.10) que la fonction  $\psi_n$  satisfait l'équation différentielle

$$\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x). \quad (\text{C.27})$$

Les fonctions  $\psi_n$  sont fonctions propres de l'opérateur oscillateur harmonique  $\mathcal{H}$  défini par<sup>3</sup> (dimension 1)

$$\mathcal{H} = x^2 - \frac{d^2}{dx^2}. \quad (\text{C.28})$$

Si  $G_n(x) = H_n(\sqrt{2\pi}x)$ , les fonctions d'Hermite–Gauss s'écrivent

$$\varphi_n(x) = \psi_n(\sqrt{2\pi}x) = G_n(x) e^{-\pi x^2}. \quad (\text{C.29})$$

Le polynôme  $G_n$  satisfait une équation comparable à (C.10), qui s'écrit

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dx^2} G_n(x) - 2x \frac{d}{dx} G_n(x) + 2n G_n(x) = 0, \quad (\text{C.30})$$

si bien que la fonction d'Hermite–Gauss  $\varphi_n$  satisfait l'équation différentielle

$$\left(x^2 - \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi_n(x) = \left(2n + \frac{1}{2\pi}\right) \varphi_n(x), \quad (\text{C.31})$$

qui est l'analogie pour  $\varphi_n$  de l'équation (C.27) pour la fonction  $\psi_n$ .

Nous appelons encore opérateur oscillateur harmonique l'opérateur  $\mathcal{H}_1$  défini par

$$\mathcal{H}_1 = x^2 - \frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{dx^2}, \quad (\text{C.32})$$

si bien que les fonctions d'Hermite–Gauss sont des fonctions propres de cet opérateur, comme le montre l'équation (C.31).

Soit  $\alpha$  un nombre complexe et soit l'opérateur  $\exp[i\alpha\mathcal{H}_1/2]$  défini par [65]

$$\exp\left[\frac{i\alpha\mathcal{H}_1}{2}\right] = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(i\alpha\mathcal{H}_1)^q}{2^q q!}. \quad (\text{C.33})$$

(Une telle série est toujours convergente [65].) Les fonctions d'Hermite–Gauss sont fonctions propres de  $\exp[2i\pi\alpha\mathcal{H}_1]$ , puisque cet opérateur commute avec  $\mathcal{H}_1$ . Plus précisément, les relations (C.31) et (C.32) conduisent à

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i\alpha\mathcal{H}_1}{2}\right] \varphi_n &= \sum_{q=0}^{q=+\infty} \frac{(i\alpha\mathcal{H}_1)^q}{2^q q!} \varphi_n = \sum_{q=0}^{q=+\infty} \frac{1}{q!} \left[i\left(n + \frac{1}{4\pi}\right)\alpha\right]^q \varphi_n \\ &= e^{i\alpha/4\pi} e^{in\alpha} \varphi_n. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

<sup>3</sup> Il s'agit d'une forme réduite de l'oscillateur harmonique.

La comparaison des relations (C.34) et (C.14) donne

$$\mathcal{F}_\alpha = e^{-i\alpha/4\pi} \exp \left[ \frac{i\alpha \mathcal{H}_1}{2} \right], \quad (\text{C.35})$$

et relie la transformation de Fourier fractionnaire à l'exponentielle (à argument imaginaire) de l'opérateur oscillateur harmonique.

Ce qui précède s'adapte à la dimension 2, à condition de définir l'opérateur oscillateur harmonique  $\mathcal{H}_2$  par

$$\mathcal{H}_2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right). \quad (\text{C.36})$$

Les fonctions d'Hermite–Gauss satisfont

$$\left[ x^2 + y^2 - \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \right] \varphi_{m,n}(x, y) = \left( 2(m+n) + \frac{1}{\pi} \right) \varphi_{m,n}(x, y). \quad (\text{C.37})$$

La relation (C.34) est à remplacer par

$$\exp \left[ \frac{i\alpha \mathcal{H}_2}{2} \right] \varphi_{m,n} = e^{i\alpha/2\pi} e^{i(m+n)\alpha} \varphi_{m,n}, \quad (\text{C.38})$$

et la relation (C.35) par

$$\mathcal{F}_\alpha = e^{-i\alpha/2\pi} \exp \left[ \frac{i\alpha \mathcal{H}_2}{2} \right], \quad (\text{C.39})$$

après comparaison avec la relation (C.19).

Tout ce paragraphe montre que la transformation de Fourier fractionnaire n'est pas un outil nouveau et qu'elle se rattache à des opérateurs et procédés bien connus en mathématiques. Toutefois, remarquer que la transformation de Fourier fractionnaire est une forme exponentielle de l'oscillateur harmonique cache sans doute son lien avec la diffraction. En revanche, son expression sous la forme d'une intégrale laisse deviner son utilité dans la représentation des phénomènes de diffraction. C'est ce qui est exploité au chapitre 6 de ce livre.

## C.6 Commentaires sur l'emploi de la transformation de Fourier fractionnaire en optique

La notion de transformation de Fourier fractionnaire apparaît dans un article de Wiener de 1929 [244]. Mentionnons également les travaux de Condon [56], de Kober [124] et de Patterson [177]. L'article de Namias de 1980 [165] fait un usage systématique de cette notion pour résoudre des équations aux dérivées partielles qu'on rencontre en mécanique quantique.

Il semble que la première application à l'optique se trouve dans l'article de Khare [122]. Néanmoins, l'essor que cette transformation a connu en optique depuis 1993 est sans doute à porter au crédit de Mendlovic, Ozaktas et Lohmann. Une partie des travaux de ces auteurs est consacrée à la propagation de la lumière à travers plusieurs dispositifs optiques [144, 161, 169–172]. D'autres travaux de Lohmann sur le sujet sont liés à la relation de la transformation de Fourier fractionnaire avec la représentation de Wigner [144, 146].

À la suite des articles de Mendlovic, Ozaktas et Lohmann, de nombreuses études ont porté sur l'emploi de la transformation de Fourier en optique et même en traitement du signal, certaines sur la description de la propagation de la lumière en termes de transformation de Fourier fractionnaire [5]. Curieusement, le lien avec la diffraction de Fresnel n'a pas été remarqué d'emblée, malgré la similitude frappante qui existe entre la forme intégrale de la transformation de Fourier fractionnaire et la formulation de la diffraction sous la forme de transformations de Fresnel. Curieusement encore, certains textes s'acharnent à proposer divers montages optiques comportant un nombre variable d'objectifs (de lentilles !), ou l'emploi de lentilles GRIN, pour associer la transformation de Fourier fractionnaire à un phénomène de propagation. C'est bien sûr légitime, mais il nous semble que cela devrait être remarqué dans un deuxième temps seulement, puisque la seule propagation d'une onde électromagnétique en espace libre est la réalisation physique d'une transformation de Fourier fractionnaire.

Il est une façon naturelle, *a priori*, d'associer une transformation de Fourier fractionnaire à la propagation en espace libre : elle consiste à choisir l'ordre  $\alpha$  de façon à avoir

$$\tan a\alpha = bz, \quad (\text{C.40})$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes et  $z$  la distance de propagation (d'autres formes sont équivalentes à cela) [5, 51, 172].

Pour naturelle et légitime qu'elle soit, cette façon de procéder n'est pas compatible avec le principe de Huygens–Fresnel. Respecter ce principe exige que, si l'ordre  $\alpha$  est associé à la propagation sur une distance  $z$  et l'ordre  $\alpha'$  à la propagation sur une distance  $z'$ , l'ordre associé à la distance  $z + z'$  soit égal à  $\alpha + \alpha'$ . Il est clair que cela est impossible (sauf cas particulier) avec le choix de la relation (C.40), car en général

$$\tan(a\alpha + a\alpha') \neq \tan a\alpha + \tan a\alpha', \quad (\text{C.41})$$

alors que  $b(z + z') = bz + bz'$ .

Il faut procéder autrement. Nous proposons une solution dans le chapitre 6. C'est le respect du principe de Huygens–Fresnel qui nous impose de travailler ainsi. Il nous paraît important de tenir compte de cette contrainte pour obtenir une représentation mathématique du phénomène de propagation des ondes électromagnétiques qui ait un sens physique.

## Appendice D

# Champs analytiques et équation de Helmholtz

### D.1 L'équation de Helmholtz

En coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2, x_3$ , si  $t$  désigne le temps et  $\Delta$  le laplacien, l'équation des ondes s'écrit, pour une fonction  $f$  de classe  $C^2$  (ou une distribution)

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad (\text{D.1})$$

où  $v$  est la vitesse de phase dans le milieu de propagation.

Une onde harmonique se représente par une fonction  $f$  de la forme

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = F(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}, \quad (\text{D.2})$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde, liée à la fréquence par  $\omega = 2\pi\nu$ , et où  $F$  est de classe  $C^2$ . Pour une telle onde, l'équation des ondes devient

$$\Delta F(x_1, x_2, x_3) + k^2 F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (\text{D.3})$$

où  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'ondes ( $\lambda$  est la longueur d'onde).

L'équation (D.3) est l'équation de Helmholtz : c'est une forme de l'équation des ondes applicable aux ondes harmoniques. Le temps ne figure pas dans l'équation de Helmholtz.

### D.2 La notion de champ analytique

Nous exposons la théorie pour un champ scalaire  $E$ . La généralisation à un champ vectoriel est immédiate : il suffit d'appliquer la définition scalaire à chacune des composantes du champ vectoriel.

Nous écrivons  $E(t)$  la valeur de l'amplitude du champ<sup>1</sup> à l'instant  $t$ . Sa composante spectrale est  $e(\nu)$  : c'est la transformée de Fourier temporelle de  $E(t)$ . Le champ  $E$  est une grandeur physique « réelle » représentée *a priori*

---

<sup>1</sup> Ce serait  $E_A(\mathbf{r}, t)$  si l'amplitude considérée était l'amplitude du champ électrique au point  $\mathbf{r}$  d'un émetteur sphérique  $\mathcal{A}$ . Nous adoptons une écriture fonctionnelle, mais  $E$  et  $e$  sont *a priori* des distributions.

par une fonction à valeurs réelles :  $E(t)$  est un nombre réel. Par conséquent la composante spectrale  $e(\nu)$  présente la symétrie hermitienne : elle satisfait

$$e(-\nu) = \overline{e(\nu)}. \quad (\text{D.4})$$

La connaissance de  $e(\nu)$  pour les valeurs positives de  $\nu$  est suffisante pour déterminer  $e(\nu)$  pour toute valeur de  $\nu$ , et pour déduire l'amplitude  $E(t)$ .

Le champ analytique associé à  $E$  se définit par sa composante spectrale  $\tilde{e}(\nu)$ , de la façon suivante

$$\tilde{e}(\nu) = 2e(\nu), \quad \text{si } \nu \geq 0, \quad (\text{D.5})$$

$$\tilde{e}(\nu) = 0, \quad \text{si } \nu < 0. \quad (\text{D.6})$$

Si  $\mathcal{T}$  désigne la fonction de Heaviside ( $\mathcal{T}(\nu) = 1$  si  $\nu \geq 0$ , et  $\mathcal{T}(\nu) = 0$  sinon), les relations (D.5) et (D.6) se synthétisent en

$$\tilde{e}(\nu) = 2\mathcal{T}(\nu)e(\nu). \quad (\text{D.7})$$

L'amplitude du champ analytique  $\tilde{E}$  se déduit de  $\tilde{e}$  par transformation de Fourier inverse. Si V.P. désigne la distribution valeur principale [206, 212], nous utilisons (voir l'appendice B)

$$\frac{1}{2}\delta - \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi t} \rightleftharpoons \mathcal{T}(\nu), \quad (\text{D.8})$$

pour déduire de (D.7)

$$\tilde{E}(t) = E(t) - \left[ E(t') * \text{V.P.} \frac{1}{2i\pi t'} \right] (t) = E(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E(t')}{2i\pi(t-t')} dt', \quad (\text{D.9})$$

où l'intégrale est à prendre en valeur principale au sens de Cauchy. On en déduit que l'amplitude du champ  $E(t)$  est la partie réelle de l'amplitude du champ analytique

$$E(t) = \Re\{\tilde{E}(t)\}. \quad (\text{D.10})$$

**Exemple D.2.1.** L'amplitude du champ réel associé à une onde monochromatique (de fréquence  $\nu_0$ ) s'écrit  $E(t) = E_0 \cos 2\pi\nu_0 t$  (le facteur dimensionnel  $E_0$  étant un nombre réel), et sa composante spectrale est

$$e(\nu) = \frac{E_0}{2} (\delta_{-\nu_0} + \delta_{\nu_0}). \quad (\text{D.11})$$

La composante spectrale du champ analytique s'obtient en ne conservant que la partie du spectre qui correspond aux valeurs positives de  $\nu$  et en la doublant :  $\tilde{e}(\nu) = E_0 \delta_{\nu_0}$ . La transformation de Fourier inverse conduit finalement à

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{2i\pi\nu_0 t}. \quad (\text{D.12})$$

◇

L'exemple D.2.1 montre que la notation complexe, couramment utilisée pour représenter un champ monochromatique, n'est rien d'autre que l'écriture de l'amplitude du champ analytique associé à cette onde. Cependant la notion de champ analytique reste pertinente pour des ondes polychromatiques et elle est particulièrement utile pour les ondes de spectre étroit.

## D.3 L'équation des ondes harmonique

### D.3.1 L'équation des ondes pour les champs analytiques

Soit  $\mathbf{E}(M, t)$  la représentation spatio-temporelle d'un champ réel au point  $M = (x_1, x_2, x_3)$ , à l'instant  $t$ , et soit  $\widetilde{\mathbf{E}}(M, t)$  le champ analytique associé. Le champ réel est supposé être solution de l'équation des ondes et il s'agit de montrer qu'il en est de même pour le champ analytique. La composante spectrale du champ  $\mathbf{E}$  est  $\mathbf{e}(M, \nu)$ , telle que

$$\mathbf{E}(M, t) \rightleftharpoons \mathbf{e}(M, \nu), \quad (\text{D.13})$$

où la transformation de Fourier est temporelle. La relation (D.13) regroupe trois relations scalaires portant sur les composantes  $E_j$  et  $e_j$  des champs vectoriels. Il est clair que pour  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(M, t) \rightleftharpoons \frac{\partial e_j}{\partial x_i}(M, \nu), \quad (\text{D.14})$$

et il en résulte

$$\frac{\partial \widetilde{E_j}}{\partial x_i} = \frac{\partial \widetilde{e_j}}{\partial x_i}, \quad (\text{D.15})$$

ce qui signifie que les dérivations partielles spatiales commutent avec l'opération « passer au champ analytique ».

Montrons que cette propriété reste vraie pour la dérivation partielle temporelle. Soit  $\mathbf{e}'$  la composante spectrale de  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ , c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(M, t) \rightleftharpoons \mathbf{e}'(M, \nu). \quad (\text{D.16})$$

Les propriétés de la transformation de Fourier conduisent à

$$\mathbf{e}'(M, \nu) = 2i\pi\nu \mathbf{e}(M, \nu). \quad (\text{D.17})$$

La composante spectrale du champ analytique associé à  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  est

$$\widetilde{\mathbf{e}'}(M, \nu) = 2\mathcal{T}(\nu) \cdot 2i\pi\nu \mathbf{e}(M, \nu) = 2i\pi\nu \widetilde{\mathbf{e}}(M, \nu). \quad (\text{D.18})$$

Mais  $2i\pi\nu \widetilde{\mathbf{e}}(M, \nu)$  n'est autre que la composante spectrale de  $\partial \widetilde{\mathbf{E}} / \partial t$ . Par conséquent

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial t}. \quad (\text{D.19})$$

Si  $\mathbf{E}$  satisfait l'équation des ondes (dans le vide ici), les relations (D.15) et (D.19) montrent qu'il en est de même du champ analytique associé, c'est-à-dire

$$\Delta \widetilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{D.20})$$

### D.3.2 L'équation des ondes pour les composantes spectrales

Par transformation de Fourier (temporelle), on déduit de (D.20)

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}(M, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \tilde{\mathbf{e}}(M, \nu) + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} \tilde{\mathbf{e}}(M, \nu) = 0, \quad (\text{D.21})$$

ou encore, avec  $k = 2\pi\nu/c$ , pour le membre de droite

$$\Delta \tilde{\mathbf{e}}(M, \nu) + k^2 \tilde{\mathbf{e}}(M, \nu) = 0. \quad (\text{D.22})$$

L'équation (D.22) est l'équation des ondes harmonique : elle généralise l'équation de Helmholtz aux champs analytiques et s'applique aux composantes spectrales des champs.

### D.3.3 Conséquences pratiques

Plutôt qu'avec les champs réels, on travaille avec les champs complexes, c'est-à-dire avec les champs analytiques. Dans la pratique, on admet cela implicitement et n'introduit pas de notations spéciales (on n'écrit plus les tildes) ; c'est ce qui est fait dans la deuxième partie de ce livre. Les champs réels sont alors les parties réelles des champs analytiques effectivement utilisés.

Dans ces conditions, une démarche d'étude de la propagation d'une onde électromagnétique (*a priori* polychromatique) consiste à étudier d'abord le cas monochromatique. Les solutions trouvées fournissent l'expression des solutions dans le cas polychromatique, à condition d'être considérées comme les composantes spectrales des champs. Les représentations spatio-temporelles des champs polychromatiques se déduisent de ces dernières par une transformation de Fourier inverse temporelle<sup>2</sup>. Tout cela est vrai pour des milieux linéaires.

**Remarque D.3.1.** La résolution de l'équation de Helmholtz fournit une solution monochromatique de la forme

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}_0(M) e^{2i\pi\nu_0 t}, \quad (\text{D.23})$$

où  $\mathbf{E}_0(M)$  est l'amplitude complexe. La fréquence est implicite.

La méthode mentionnée ici conduit à écrire la composante spectrale d'une solution monochromatique de l'équation (D.22) sous la forme

$$\mathbf{e}(M, \nu) = \mathbf{e}_0(M, \nu_0) \delta(\nu - \nu_0), \quad (\text{D.24})$$

puis, par transformation de Fourier inverse, on obtient

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{e}_0(M, \nu_0) e^{2i\pi\nu_0 t}. \quad (\text{D.25})$$

La comparaison des relations (D.23) et (D.25) montre que, pour une onde monochromatique, l'amplitude complexe se confond, en pratique, avec la composante spectrale du champ.

<sup>2</sup> C'est la méthode employée dans ce livre : la partie 1, consacrée aux ondes monochromatiques, sert de base à l'étude des chapitres 9 et 10 de la partie 2, consacrés aux ondes polychromatiques. Le lien entre les deux parties s'opère par transformation de Fourier temporelle.

## Appendice E

# Grandeurs et unités radiométriques

On parle plutôt de radiométrie que de photométrie, ce dernier terme étant désormais réservé aux mesures visuelles [40, 67]. L'objet de la radiométrie est la définition et la mesure des « quantités » de lumière (de rayonnement électromagnétique), ainsi que l'étude des lois qui les lient [67, 163]. Dans ce livre, les grandeurs considérées sont essentiellement des grandeurs énergétiques. Mais rien n'empêche d'appliquer l'optique de Fourier à l'étude de phénomènes visuels et de recourir pour cela au système d'unités visuel.

### E.1 Grandeurs et unités radiométriques

**Flux.** Comme tout rayonnement électromagnétique, une onde lumineuse<sup>1</sup> transporte de l'énergie. En général on utilise plutôt comme grandeur caractéristique la puissance et, en optique, on appelle flux la puissance transportée. Un flux (énergétique) se mesure en watts (W). C'est un débit d'énergie.

**Intensité.** L'intensité est une densité de flux par angle solide. Soit un pinceau lumineux conique, issu d'une source ponctuelle  $S$ , d'angle solide  $\delta\Omega$  autour de la direction  $SX$  et transportant le flux  $\delta F$  (fig. E.1). L'intensité de la source  $S$  dans la direction  $SX$  est

$$I(SX) = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta\Omega}. \quad (\text{E.1})$$

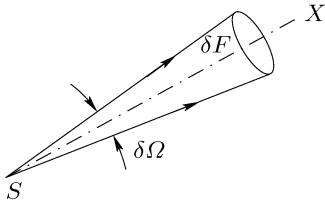
L'intensité (énergétique) se mesure en watts par stéradian (W/sr).

**Éclairement et exittance.** L'éclairement et l'exittance (on rencontre encore parfois l'ancien terme « émittance ») sont des densités de flux surfaciques. Soit  $\delta S$  un élément de surface autour du point  $P$  d'un détecteur, qui reçoit un flux  $\delta F$  (fig. E.2). L'éclairement du récepteur au point  $P$  est

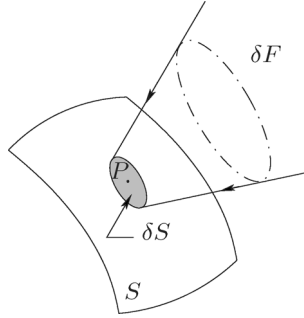
$$E(P) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta S}. \quad (\text{E.2})$$

---

<sup>1</sup> Au sens strict, est lumineux ce qui est visible par l'œil humain. Il est habituel d'étendre le terme à toute l'optique, au-delà donc du seul spectre visible : c'est dans ce sens qu'on parle de lumière ultra-violette par exemple. Pour nous, « lumineux » est synonyme d'« optique ». Nous employons l'adjectif « visuel » pour qualifier les phénomènes perçus par l'œil humain.



**FIG. E.1.** Données pour la définition de l'intensité d'une source ponctuelle  $S$  dans la direction  $SX$ .



**FIG. E.2.** Données pour la définition de l'éclairement en un point  $P$  d'un détecteur.

De façon analogue, soit  $\delta S$  un élément de surface autour du point  $P$  d'une source (la figure E.2 illustre encore cela, à condition d'inverser le sens de propagation de la lumière). L'existance de la source au point  $P$  est  $M(P)$  définie par la relation (E.2) – on remplace  $E(P)$  par  $M(P)$ .

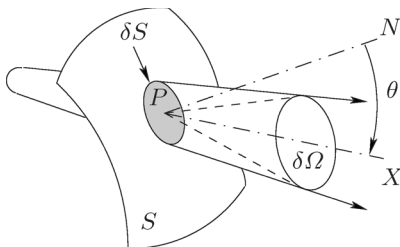
L'éclairement et l'existance se mesurent en watts par mètre carré ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). On montre que d'un point de vue dimensionnel, ces grandeurs sont homogènes au module du vecteur de Poynting.

**Luminance.** Soit  $P$  un point d'une surface aérienne  $S$  traversée par un faisceau lumineux et soit  $PX$  une demi-droite issue de  $P$  (dans le sens de propagation de la lumière, fig. E.3). Soit  $\delta^2 F$  le flux qui traverse l'élément de surface  $\delta S$  autour de  $P$ , dans l'angle solide élémentaire  $\delta \Omega$ , autour la direction  $PX$ . Si  $\theta$  est l'angle de  $PX$  avec la normale à  $S$  en  $P$ , la luminance transportée par le faisceau lumineux au point  $P$  dans la direction  $PX$  est  $L(P, PX)$  telle que

$$L(P, PX) = \frac{1}{\cos \theta} \lim_{\substack{\delta S \rightarrow 0 \\ \delta \Omega \rightarrow 0}} \frac{\delta^2 F}{\delta S \delta \Omega}. \quad (\text{E.3})$$

La luminance se mesure en watts par mètre carré stéradian ( $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$  ou  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$ ).

La surface  $S$  peut être celle d'un émetteur ; ou celle d'un récepteur. On parle ainsi de la luminance d'une source ou encore de celle d'une image.



**FIG. E.3.** Données pour la définition de la luminance d'un pinceau lumineux au point  $P$ , dans la direction  $PX$ . La surface  $S$  est une surface aérienne, traversée par un faisceau lumineux. La normale à  $S$  au point  $P$  est  $PN$ .

**Intégration de la luminance.** L'éclairement au point  $P$  d'un récepteur s'obtient par intégration de la luminance sur toutes les directions que contient le faisceau lumineux incident et qui convergent en  $P$ . Ces directions sont limitées par l'angle solide  $\Omega$  et

$$E(P) = \int_{\Omega} L(P, PX) \cos \theta \delta \Omega, \quad (\text{E.4})$$

l'intégration étant effectuée sur le récepteur.

L'exitance en un point  $P$  d'une source est encore donnée par la relation (E.4) à condition d'y remplacer  $E(P)$  par  $M(P)$  et d'intégrer sur la source.

Le même procédé permet de définir l'intensité d'une source étendue, dans une direction  $X$  fixée : on intègre la luminance sur la surface émettrice

$$I(X) = \int_S L(P, PX) \cos \theta \delta S. \quad (\text{E.5})$$

**Lumination.** La lumination (ou exposition) est le produit de l'éclairement par le temps de pose. C'est la grandeur à prendre en compte en photographie. La lumination se mesure en  $\text{J/m}^2$ .

## E.2 Unités photométriques

Souvent le récepteur d'un système optique est l'œil humain. Ce dernier n'est sensible – pour les effets visuels – qu'aux ondes dont la fréquence est située dans la partie visible du spectre électromagnétique. Il est nécessaire, en photométrie visuelle<sup>2</sup>, de tenir compte de l'efficacité d'un rayonnement pour l'œil, et cela amène à faire des corrections sur les valeurs des grandeurs photométriques. Plus précisément, on pondère ces dernières par une fonction d'efficacité, définie pour un observateur de référence (c'est la C.I.E., Commission internationale de l'éclairage, qui émet les normes en la matière) [138, 139].

L'unité de base du système d'unités photométriques visuelles est la candela (cd) : c'est l'unité de l'intensité lumineuse. La candela est désormais rattachée aux unités énergétiques (depuis 1979) : la candela est l'intensité, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence  $540 \cdot 10^{12}$  Hz et dont l'intensité énergétique, dans la même direction, est  $(1/683) \text{ W/sr}$  [40].

Le tableau E.1 présente les grandeurs et unités radiométriques et photométriques. Précisons la définition du lumen (unité de flux) :  $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$  ; celle du lux (unité d'éclairement) :  $1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$  ; et indiquons l'existence du nit comme unité de luminance :  $1 \text{ nit} = 1 \text{ cd/m}^2$ .

Il existe une photométrie « photonique » : l'unité de base, qui est l'unité de flux, est le nombre de photons par seconde [67]. Cette photométrie sert à caractériser des effets quantiques, comme l'effet photo-électrique, et leurs applications : tubes photo-multiplicateurs, comptage de photons, etc.

<sup>2</sup> Une telle expression est de plus en plus considérée comme pléonastique.

**TAB. E.1.** Grandeurs et unités radiométriques et photométriques

Grandeurs radiométriques	Unités énergétiques	Unités visuelles
Flux	W	lm (lumen)
Intensité	W/sr	cd (candela)
Éclairement	W/m <sup>2</sup>	lx (lux)
Exitance	W/m <sup>2</sup>	lm/m <sup>2</sup>
Luminance	W/(m <sup>2</sup> · sr)	cd/m <sup>2</sup>
Lumination	J/m <sup>2</sup>	lx · s (lux seconde)

E.3 Lexique bilingue

La tradition française consiste à garder les mêmes noms pour les grandeurs, qu’elles soient énergétiques ou visuelles (ou photoniques). Seules les unités changent <sup>3</sup>. La tradition anglo-saxonne, en passant du domaine énergétique au domaine visuel, change à la fois les unités et le nom des grandeurs. Le tableau E.2 donne la traduction des grandeurs radiométriques (et photométriques). Précisons qu’il existe d’autres mots pour indiquer ces grandeurs, mais que leur usage n’est plus recommandé (c’est le cas de « brillance », ancien nom de la luminance, dont l’équivalent anglais est *brightness*).

**TAB. E.2.** Lexique bilingue de la photométrie–radiométrie

Français	Anglais
Éclairement (énergétique)	Irradiance
Éclairement (visuel)	Illuminance, illumination
Flux	Power
Flux (visuel)	Flux
Intensité	Intensity
Intensité (visuelle)	Luminous intensity
Luminance (énergétique)	Radiance
Luminance (visuelle)	Luminance

Nous ferons grâce au lecteur des unités parfois employées dans les pays anglo-saxons : elles sont hors S.I.

<sup>3</sup> Cela ne signifie que le choix d’un système d’unités soit libre ! Il est imposé par l’application envisagée et le type de mesures qu’on est amené à faire.

## Appendice F

# Vecteurs aléatoires gaussiens

Le but de cet appendice est d'énoncer et d'illustrer par des exemples le théorème des moments pour un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire centré, utilisé au chapitre 10 pour décrire la statistique d'ordre 2 de l'intensité vibratoire instantanée d'une source thermique<sup>1</sup>.

Les bases et les résultats essentiels de la théorie des probabilités et des variables et vecteurs aléatoires sont supposés connus [9, 15, 34, 72, 101, 120, 162, 174, 197, 198, 210].

### F.1 Variables et vecteurs aléatoires gaussiens

#### F.1.1 Variable aléatoire

Considérons une expérience dont la réalisation donne un résultat  $\omega$ , aléatoire, appelé résultat élémentaire. L'ensemble des résultats élémentaires de cette expérience est noté  $\Omega$ , et un « événement » est un sous-ensemble<sup>2</sup> de  $\Omega$ . Une mesure de probabilité est une application qui, à tout événement  $A$ , fait correspondre un nombre, sa (mesure de) probabilité, notée  $P[A]$ . Cette mesure vérifie les axiomes suivants :

1. Pour tout événement  $A$ , on a :  $0 \leq P[A] \leq 1$ .
2.  $P[\Omega] = 1$ ,  $P[\emptyset] = 0$  ( $\emptyset$  désigne l'ensemble vide).
3. Pour toute famille d'événements  $A_i$  ( $i \in I \subset \mathbb{N}$ ), deux à deux disjoints ( $A_i \cap A_j = \emptyset$ , dès que  $i \neq j$ ), on a :  $P[\bigcup_i A_i] = \sum_i P[A_i]$ .

On appelle variable aléatoire réelle toute application (mesurable) de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $X$  est une variable aléatoire, on écrit

$$X : \omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R}. \quad (\text{F.1})$$

La variable aléatoire  $X$  associe à tout résultat élémentaire d'une expérience aléatoire une valeur numérique. Par abus de notation, on confond souvent la variable aléatoire  $X$  avec la valeur numérique  $X(\omega)$ , et écrit  $X$  pour  $X(\omega)$ .

---

<sup>1</sup> La rédaction de cet appendice et du suivant a bénéficié du concours précieux de J.-J. Bellanger.

<sup>2</sup> Réciproquement, un sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$  constitue un événement seulement si  $A$  est un élément d'une tribu de  $\Omega$ , définie par l'expérience considérée.

Nous supposons connues les notions de fonction de répartition, de densité de probabilité, de fonction caractéristique et de moments d'une variable aléatoire, ainsi que celle d'espérance mathématique, nous bornant à les appliquer à une variable aléatoire gaussienne.

### F.1.2 Variable aléatoire gaussienne à une dimension

La variable aléatoire  $X$  suit une loi de Gauss (ou de Laplace-Gauss<sup>3</sup>) de moyenne  $m$  et écart-type  $\sigma$  si sa densité de probabilité  $p_X$  s'écrit

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (\text{F.2})$$

On désigne par  $E[X^k]$  le moment d'ordre  $k$  de la variable aléatoire  $X$ , où  $E$  représente l'espérance mathématique. Si  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée ( $m = 0$ ), on montre

$$E[X^{2k+1}] = 0, \quad (\text{F.3})$$

$$E[X^{2k}] = \frac{(2k)!}{k!2^k} \sigma^{2k} = (2k-1)!! \sigma^{2k}, \quad (\text{F.4})$$

où  $(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$  (avec la convention que  $(2k-1)!!$  vaut 1 si  $k = 0$ ). Les moments d'ordre impair sont nuls. Ceux d'ordre pair s'expriment en fonction de l'écart-type seulement. Autrement dit, la loi d'une variable aléatoire gaussienne centrée est entièrement caractérisée par son moment d'ordre 2.

**Fonction caractéristique.** La fonction caractéristique de la variable aléatoire  $X$  est, par définition<sup>4</sup>, la transformée de Fourier de la densité de probabilité :  $\varphi_X = \widehat{p}_X$ . Nous choisissons la définition suivante de la transformation de Fourier

$$\varphi_X(\nu) = \widehat{p}_X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\nu x} p_X(x) dx. \quad (\text{F.5})$$

On a aussi

$$\varphi_X(\nu) = E[e^{2i\pi\nu X}]. \quad (\text{F.6})$$

La fonction caractéristique de la variable aléatoire gaussienne dont la densité de probabilité est celle de la relation (F.2) s'écrit

$$\varphi_X(\nu) = e^{2i\pi m\nu} e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}. \quad (\text{F.7})$$

<sup>3</sup> On parle aussi de loi normale. On désigne par  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  la loi normale de moyenne  $m$  et écart-type  $\sigma$ . La loi normale centrée normalisée est  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

<sup>4</sup> La définition que nous donnons n'est pas celle qui est d'usage courant en théorie des variables aléatoires. Notre choix est guidé par les conventions relatives à la transformation de Fourier adoptées dans ce livre (voir l'appendice B).

### F.1.3 Vecteur aléatoire gaussien. Matrice de covariance

La donnée de  $N$  variables aléatoires  $X_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) constitue un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de dimension  $N$ . Les  $X_j$  sont les composantes de  $\mathbf{X}$ . Le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  est, par définition, un vecteur aléatoire gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne ; il en résulte que les composantes d'un vecteur aléatoire gaussien sont elles-mêmes gaussiennes.

Soit un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , de composantes  $X_j$ . On note  $m_j$  la moyenne de  $X_j$  et  $\sigma_j$  son écart-type. La covariance de  $X_j$  et  $X_k$  est

$$C_{jk} = E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)], \quad (\text{F.8})$$

On a  $C_{jj} = \sigma_j^2$ .

**Définition F.1.1 (Matrice de covariance).** La matrice de covariance de  $\mathbf{X}$  est la matrice  $C_X$  de terme général  $C_{jk}$ . Explicitement

$$C_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.9})$$

La matrice de covariance est symétrique :  $C_{jk} = C_{kj}$  pour tous  $j$  et  $k$ .

**Proposition F.1.1.** Les variables aléatoires gaussiennes  $X_j$  sont indépendantes si, et seulement si, leur matrice de covariance est diagonale.

### F.1.4 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire gaussien

**Proposition F.1.2.** Soit un vecteur aléatoire gaussien  $\mathbf{X}$ , de composantes  $X_j$  et matrice de covariance  $C_X$ . Soient  $m_j$  la moyenne de  $X_j$  et  $\sigma_j$  son écart-type. Soient  $\mathbf{m} = {}^t(m_1, \dots, m_N)$  et  $\boldsymbol{\nu} = {}^t(\nu_1, \dots, \nu_N)$ . La fonction caractéristique de  $\mathbf{X}$  s'écrit

$$\varphi_X(\boldsymbol{\nu}) = e^{2i\pi \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}} e^{-2\pi^2 \boldsymbol{\nu} \cdot C_X \boldsymbol{\nu}}, \quad (\text{F.10})$$

où  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}$  désigne le produit scalaire (euclidien) de  $\mathbf{m}$  et  $\boldsymbol{\nu}$ . (L'expression  $\boldsymbol{\nu} \cdot C_X \boldsymbol{\nu}$  est une forme quadratique en  $\boldsymbol{\nu}$  dont la matrice est la matrice de covariance.)

## F.2 Théorèmes des moments pour un vecteur aléatoire gaussien

### F.2.1 Multi-indice. Indice développé. Multi-paire

**Multi-indice.** Un  $N$ -multi-indice  $\alpha$  est un  $N$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  où les  $\alpha_j$  sont des nombres entiers positifs ou nuls. On note  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ .

Si  $\mathbf{X} = {}^t(X_1, \dots, X_N)$  est un vecteur de dimension  $N$  (écrit sous forme transposée pour des raisons typographiques) et  $\alpha$  un  $N$ -multi-indice, on écrit  $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_N^{\alpha_N}$ . En particulier, le moment d'ordre  $\alpha$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  s'écrit

$$M^\alpha(\mathbf{X}) = E[\mathbf{X}^\alpha] = E[X_1^{\alpha_1} \dots X_N^{\alpha_N}]. \quad (\text{F.11})$$

**Développement de  $\mathbf{X}^\alpha$ .** Si  $\alpha$  est un  $N$ -multi-indice et  $\mathbf{X}$  un vecteur aléatoire de dimension  $N$ , on a

$$\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_N^{\alpha_N} = \underbrace{X_1 \dots X_1}_{\alpha_1 \text{ fois}} \underbrace{X_2 \dots X_2}_{\alpha_2 \text{ fois}} \dots \underbrace{X_N \dots X_N}_{\alpha_N \text{ fois}}. \quad (\text{F.12})$$

Soient  $M = |\alpha|$  et  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ . Soit la suite d'intervalles  $I_k$ , vérifiant  $\bigcup_k I_k = [0, M + \varepsilon]$  ( $\varepsilon$  quelconque avec  $0 < \varepsilon < 1$ ), et définis par

$$I_1 = [0, \alpha_1 + \varepsilon] \quad (\text{F.13})$$

$$I_2 = ]\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon] \quad (\text{F.14})$$

...

$$I_N = ]\alpha_1 + \dots + \alpha_{N-1}, \alpha_1 + \dots + \alpha_N + \varepsilon]. \quad (\text{F.15})$$

Définissons l'application  $\mathbf{a}$  de  $\mathcal{M}$  dans  $\{1, 2, \dots, N\}$  par

$$\mathbf{a}(m) = k, \quad \text{si } m \in I_k \text{ (} m \text{ entier)}. \quad (\text{F.16})$$

La relation (F.12) s'écrit

$$\mathbf{X}^\alpha = X_{\mathbf{a}(1)} X_{\mathbf{a}(2)} \dots X_{\mathbf{a}(N)}, \quad (\text{F.17})$$

et cela justifie :

**Définition F.2.1.** On appelle  $\mathbf{a}$  « l'indice développé » associé au  $N$ -multi-indice  $\alpha$ .

**Multi-paire d'ordre  $M$ .** Soit  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, 2M\}$ , où  $M$  est un entier positif. Deux éléments  $m_1$  et  $m_2$  de  $\mathcal{M}$  forment une paire qui s'écrit  $\{m_1, m_2\}$  (ici une paire n'est pas ordonnée).

On appelle multi-paire d'ordre  $M$  un ensemble de  $M$  paires d'éléments de  $\mathcal{M}$ , distinctes dans leur ensemble : cela signifie que l'élément  $m_k$  apparaît une fois et une seule dans les  $M$  paires. On écrit une multi-paire d'ordre  $M$  sous la forme  $\{\{m_1, m_2\}, \{m_3, m_4\}, \dots, \{m_{2M-1}, m_{2M}\}\}$ .

**Lemme F.2.1.** L'ensemble  $\mathcal{P}$  des multi-paires d'ordre  $M$  a  $(2M - 1)!!$  éléments. (Autrement dit, il y a  $(2M - 1)!!$  façons de former  $M$  paires distinctes dans leur ensemble avec les  $2M$  éléments de l'ensemble  $\mathcal{M}$ .)

**Produit par paires.** Soit une suite d'éléments  $X_j$ , où  $j \in \{1, 2, \dots, 2M\}$ . Si  $\{\{m_1, m_2\}, \{m_3, m_4\}, \dots, \{m_{2M-1}, m_{2M}\}\}$  est une multi-paire de  $\mathcal{M}$ , on appelle produit par paire d'éléments  $X_j$  un produit de la forme

$$X_{m_1} X_{m_2} X_{m_3} X_{m_4} \dots X_{m_{2M-1}} X_{m_{2M}} = \prod_{\{k, \ell\}} X_{m_k} X_{m_\ell}. \quad (\text{F.18})$$

### F.2.2 Composantes gaussiennes indépendantes

**Proposition F.2.1 (Théorème des moments : vecteur aléatoire gaussien centré à composantes indépendantes).** *Soit un vecteur aléatoire gaussien centré  $\mathbf{X}$ , de composantes  $X_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) indépendantes. Soit  $\sigma_j$  l'écart-type de la variable aléatoire  $X_j$ , et soit  $\boldsymbol{\sigma} = {}^t(\sigma_1, \dots, \sigma_j)$ . Soit un  $N$ -multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ .*

- i – S'il existe un indice  $\ell$  pour lequel  $\alpha_\ell$  est impair, alors  $E[\mathbf{X}^\alpha] = 0$ .*
- ii – Dans l'autre cas*

$$E[\mathbf{X}^{2\alpha}] = \prod_{j=1}^{j=N} (2\alpha_j - 1)!! \sigma_j^{2\alpha_j}. \quad (\text{F.19})$$

#### Exemples.

1. Si  $2\alpha = (2, 2, \dots, 2)$ , on obtient  $E[X_1^2 X_2^2 \cdots X_N^2] = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdots \sigma_N^2$ .
2. Si  $2\alpha = (4, 2, 0, \dots, 0)$ , alors  $E[X_1^4 X_2^2] = 3 \sigma_1^4 \sigma_2^2$ .
3. Si  $2\alpha = (4, 0, 0, \dots, 0)$ , alors  $E[X_1^4] = 3 \sigma_1^4$ .

### F.2.3 Cas général

Les composantes d'un vecteur aléatoire gaussien ne sont pas nécessairement indépendantes et il est naturel de chercher à voir comment adapter les résultats précédents dans ce cas.

Soit  $\mathbf{Y}$  un vecteur aléatoire gaussien, de composantes  $Y_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) : ce sont des variables aléatoires gaussiennes (pas nécessairement indépendantes). La matrice de covariance  $C_Y$  de  $\mathbf{Y}$  est symétrique (c'est la matrice d'une forme quadratique), donc diagonalisable [133, 140].

Il existe une base dans laquelle  $C_Y$  devient la matrice diagonale  $C$ . Les composantes de  $\mathbf{Y}$  dans cette base sont les variables aléatoires  $X_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ), dont la matrice de covariance est  $C$ ; les  $X_j$  sont des variables aléatoires gaussiennes, car combinaisons linéaires des  $Y_j$ , qui le sont. La proposition F.1.1 permet de conclure que les  $X_j$  sont des variables aléatoires indépendantes. La proposition F.2.1 s'applique aux  $X_j$ . On en déduit le résultat suivant.

**Proposition F.2.2 (Théorème des moments : vecteur aléatoire gaussien centré quelconque).** *Soit un vecteur aléatoire gaussien centré  $\mathbf{Y}$ , de composantes  $Y_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ), de matrice de covariance  $C_Y$  de terme général  $C_{jk}$ . Soit  $\alpha$  un  $N$ -multi-indice et a son indice développé.*

- Si  $|\alpha|$  est impair, alors  $E[\mathbf{Y}^\alpha] = 0$ .*
- Si  $|\alpha|$  est pair, alors*

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}^\alpha] &= E[Y_{a(1)} \cdots Y_{a(2M)}] = \sum_{\mathcal{P}} \prod_{\{k, \ell\}} E[Y_{a(k)} Y_{a(\ell)}] \\ &= \sum_{\mathcal{P}} \prod_{\{k, \ell\}} C_{a(k)a(\ell)}, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

où  $2M = |\alpha|$  et où la somme sur  $\mathcal{P}$  signifie la somme sur toutes les multi-paires de l'ensemble  $\{1, \dots, 2M\}$ .

**Exemples.**

1. Si  $\alpha = (1, 1, 1, 1)$ , nous avons  $\mathbf{a}(m) = m$  pour  $m = 1, 2, 3, 4$ , et  $\mathbf{a}(m) = 0$  pour  $5 \leq m \leq N$ , si bien que

$$\begin{aligned} E[Y_1 Y_2 Y_3 Y_4] &= E[Y_{\mathbf{a}(1)} Y_{\mathbf{a}(2)} Y_{\mathbf{a}(3)} Y_{\mathbf{a}(4)}] \\ &= E[Y_1 Y_2] E[Y_3 Y_4] + E[Y_1 Y_3] E[Y_2 Y_4] + E[Y_1 Y_4] E[Y_2 Y_3] \\ &= C_{12} C_{34} + C_{13} C_{24} + C_{14} C_{23}. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

2. Si  $\alpha = (2, 2, \dots, 0)$ , alors  $\mathbf{a}(1) = \mathbf{a}(2) = 1$ ,  $\mathbf{a}(3) = \mathbf{a}(4) = 2$ , et  $\mathbf{a}(m) = 0$  pour  $5 \leq m \leq N$ , si bien que

$$\begin{aligned} E[Y_1^2 Y_2^2] &= E[Y_{\mathbf{a}(1)} Y_{\mathbf{a}(2)} Y_{\mathbf{a}(3)} Y_{\mathbf{a}(4)}] \\ &= E[Y_{\mathbf{a}(1)} Y_{\mathbf{a}(2)}] E[Y_{\mathbf{a}(3)} Y_{\mathbf{a}(4)}] + E[Y_{\mathbf{a}(1)} Y_{\mathbf{a}(3)}] E[Y_{\mathbf{a}(2)} Y_{\mathbf{a}(4)}] \\ &\quad + E[Y_{\mathbf{a}(1)} Y_{\mathbf{a}(4)}] E[Y_{\mathbf{a}(2)} Y_{\mathbf{a}(3)}] \\ &= E[Y_1 Y_1] E[Y_2 Y_2] + 2E[Y_1 Y_2] E[Y_1 Y_2] \\ &= C_{11} C_{22} + 2 C_{12}^2. \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

3. Si  $\alpha = (4, 0, 0, 0)$ , alors  $\mathbf{a}(m) = 1$  pour  $m = 1, 2, 3, 4$ , et  $\mathbf{a}(m) = 0$  pour  $5 \leq m \leq N$ ; nous obtenons

$$\begin{aligned} E[Y_1^4] &= E[Y_1 Y_1 Y_1 Y_1] = E[Y_{\mathbf{a}(1)} Y_{\mathbf{a}(2)} Y_{\mathbf{a}(3)} Y_{\mathbf{a}(4)}] \\ &= C_{11} C_{11} + C_{11} C_{11} + C_{11} C_{11} = 3 \sigma_1^2. \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

**Remarque F.2.1.** La proposition F.2.2 est plus générale que la proposition F.2.1 et les exemples qui suivent cette dernière sont des cas particuliers de ceux cités ci-dessus.

## F.3 Variables aléatoires gaussiennes à valeurs complexes

### F.3.1 Variable aléatoire complexe

Une variable aléatoire complexe s'écrit  $X = X_r + iX_i$ , où  $X_r$  et  $X_i$  sont des variables aléatoires réelles. Ces deux dernières variables aléatoires sont *a priori* quelconques : elles peuvent être indépendantes ou non, corrélées ou non. Elles forment un vecteur aléatoire de dimension 2, et il est naturel de définir la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $X$  comme étant celle du vecteur aléatoire  ${}^t(X_r, X_i)$ , c'est-à-dire

$$\varphi_X(\nu_r, \nu_i) = E[e^{2i\pi(\nu_r X_r + \nu_i X_i)}]. \quad (\text{F.24})$$

La variable aléatoire complexe  $X$  est gaussienne (par définition) si  $X_r$  et  $X_i$  sont elles-mêmes gaussiennes.

### F.3.2 Vecteur aléatoire gaussien complexe

Les  $N$  variables aléatoires gaussiennes complexes  $X_j$  constituent un vecteur aléatoire gaussien qui s'écrit

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \mathbf{X}_r + i\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} X_{1r} \\ \vdots \\ X_{Nr} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} X_{1i} \\ \vdots \\ X_{Ni} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.25})$$

où  $X_j = X_{jr} + iX_{ji}$ .

Il est habituel de faire intervenir les vecteurs  $\boldsymbol{\nu}$  et  $\boldsymbol{\Xi}$ , de dimension  $2N$ , définis par

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_{1r} \\ \vdots \\ \nu_{Nr} \\ \nu_{1i} \\ \vdots \\ \nu_{Ni} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} X_{1r} \\ \vdots \\ X_{Nr} \\ X_{1i} \\ \vdots \\ X_{Ni} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.26})$$

La fonction caractéristique du vecteur aléatoire complexe  $\mathbf{X}$  s'écrit

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\nu}) = \varphi_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbb{E}[e^{2i\pi\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\Xi}}]. \quad (\text{F.27})$$

### F.3.3 Vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire

Soit un vecteur aléatoire gaussien complexe  $\mathbf{X}$ . Nous définissons les matrices suivantes (ce sont des matrices carrées de dimension  $N$ )

$$C_{rr} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \mathbb{E}[\mathbf{X}_r])^t (\mathbf{X}_r - \mathbb{E}[\mathbf{X}_r])], \quad (\text{F.28})$$

$$C_{ri} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \mathbb{E}[\mathbf{X}_r])^t (\mathbf{X}_i - \mathbb{E}[\mathbf{X}_i])], \quad (\text{F.29})$$

$$C_{ir} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_i - \mathbb{E}[\mathbf{X}_i])^t (\mathbf{X}_r - \mathbb{E}[\mathbf{X}_r])], \quad (\text{F.30})$$

$$C_{ii} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_i - \mathbb{E}[\mathbf{X}_i])^t (\mathbf{X}_i - \mathbb{E}[\mathbf{X}_i])]. \quad (\text{F.31})$$

Par exemple  $C_{ri}$  est la matrice de terme général  $\mathbb{E}[(X_{jr} - m_{jr})(X_{\ell i} - m_{\ell i})]$ .

La matrice de covariance de  $\mathbf{X}$ , vecteur aléatoire complexe, est la matrice carrée  $C_{\mathbf{X}}$ , de dimension  $N$ , telle que

$$C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^t (\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])] = C_{rr} - C_{ii} + iC_{ri} + iC_{ir}. \quad (\text{F.32})$$

La matrice de covariance du vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\Xi}$  est de dimension  $2N$  et s'écrit, par blocs,

$$C_{\boldsymbol{\Xi}} = \begin{pmatrix} C_{rr} & C_{ri} \\ C_{ir} & C_{ii} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.33})$$

Les matrices  $C_{rr}$  et  $C_{ii}$  sont symétriques et  $C_{ri} = {}^t C_{ir}$ , si bien que  $C_{\boldsymbol{\Xi}}$  est symétrique (comme on pouvait s'y attendre).

**Définition F.3.1.** Le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  est gaussien circulaire si  $C_{\mathbf{X}} = 0$ , c'est-à-dire si  $C_{\text{rr}} = C_{\text{ii}}$  et  $C_{\text{ri}} = -C_{\text{ir}}$ .

**Proposition F.3.1 (Théorème des moments pour un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire).** Soit  $\mathbf{X}$  un vecteur aléatoire gaussien complexe circulaire de dimension  $N$ , de composantes  $X_j$ . Soit  $\bar{X}_j$  la variable aléatoire complexe conjuguée de  $X_j$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux  $N$ -multi-indices et soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  leurs indices développés.

- Si  $|\alpha| \neq |\beta|$ , alors  $E[\bar{\mathbf{X}}^\alpha \mathbf{X}^\beta] = 0$ .
- Si  $|\alpha| = |\beta| = M$ , alors

$$\begin{aligned} E[\bar{\mathbf{X}}^\alpha \mathbf{X}^\beta] &= E[\bar{X}_{\mathbf{a}(1)} \cdots \bar{X}_{\mathbf{a}(M)} X_{\mathbf{b}(1)} \cdots X_{\mathbf{b}(M)}] \\ &= \sum_{\mathfrak{S}} E[\bar{X}_{\mathbf{a}(1)} X_{\mathbf{b}(\ell_1)}] \cdots E[\bar{X}_{\mathbf{a}(M)} X_{\mathbf{b}(\ell_M)}], \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

où la somme est étendue à l'ensemble  $\mathfrak{S}$  des  $M!$  permutations circulaires  $(\ell_1, \dots, \ell_M)$  des indices  $(1, \dots, M)$ .

**Exemples.**

1. Si  $\alpha = (1, 1, 0, \dots, 0) = \beta$ , alors  $\mathbf{a}(1) = \mathbf{a}(2) = 1$  et  $\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}(2) = 2$ , tous les autres  $\mathbf{a}(m)$  et  $\mathbf{b}(m)$  étant nuls. Il en résulte

$$E[\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_1 X_2] = E[\bar{X}_1 X_1] E[\bar{X}_2 X_2] + E[\bar{X}_1 X_2] E[\bar{X}_2 X_1]. \quad (\text{F.35})$$

2. Si  $\alpha = (1, 1, 0, \dots, 0)$  et  $\beta = (0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)$ , on a alors  $\mathbf{a}(m) = 0$ , sauf  $\mathbf{a}(1) = 1$  et  $\mathbf{a}(2) = 2$ ; on a  $\mathbf{b}(m) = 0$ , sauf  $\mathbf{b}(3) = 3$  et  $\mathbf{b}(4) = 4$ . Il en résulte

$$E[\bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 X_4] = E[\bar{X}_1 X_3] E[\bar{X}_2 X_4] + E[\bar{X}_1 X_4] E[\bar{X}_2 X_3]. \quad (\text{F.36})$$

C'est ce résultat qui est utilisé dans la relation (10.202) p. 326.

## F.4 Le théorème *central limit*

**Proposition F.4.1 (Théorème *central limit*).** Si  $(Y_j)$  est une suite de variables aléatoires conjointement indépendantes, de même loi de probabilité, de moyenne  $m$ , finie, et écart-type  $\sigma$ , la suite de variables aléatoires  $X_n$  définies par

$$X_n = \sum_{j=1}^n \frac{Y_j - m}{\sigma \sqrt{n}}, \quad (\text{F.37})$$

converge en loi, quand  $n$  tend vers l'infini, vers une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale centrée normalisée  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

La démonstration du théorème *central limit* et de ses variantes se trouve dans la plupart des ouvrages consacrés à la théorie des probabilités [15, 101, 162, 210].

# Appendice G

## Fonctions aléatoires

L'analyse harmonique des fonctions aléatoires a une importance considérable dans la théorie des signaux aléatoires et le théorème de Wiener–Khinchine<sup>1</sup> en constitue un élément essentiel ; sa présentation fait l'objet de cet appendice.

Dans ce livre, l'amplitude du champ électrique est représentée, en toute généralité, par une distribution tempérée. Cela laisse entendre que les propriétés statistiques du champ (notamment sa cohérence) ne pourront être traduites dans le seul cadre de la théorie des fonctions aléatoires, mais plutôt dans celui de la théorie des distributions aléatoires. Il n'est pas possible d'aborder, dans les limites de cet ouvrage, cette théorie, et nous nous bornons à traiter seulement des fonctions aléatoires. On trouve dans le deuxième tome de l'ouvrage de Roubine [208] quelques indications sur les distributions aléatoires ; une approche abstraite est développée par Guelfand et Vilenkin [104].

### G.1 Fonctions aléatoires

#### G.1.1 Définition

Comme pour la transformation de Fourier (appendice B), nous adaptons le texte aux besoins de ce livre et considérons une variable spatio-temporelle  $(\mathbf{r}, t)$  où  $\mathbf{r}$  est un vecteur bidimensionnel.

Nous désignons par  $\Omega$  l'ensemble des résultats élémentaires  $\omega$  d'une expérience aléatoire dont dépendent les phénomènes étudiés. Une fonction aléatoire<sup>2</sup>  $X$  est une application de  $\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$

$$X : (\omega, \mathbf{r}, t) \longmapsto X(\omega, \mathbf{r}, t). \quad (\text{G.1})$$

La fonction aléatoire  $X$  est vue sous deux aspects complémentaires :

1. Le résultat élémentaire  $\omega$  est fixé : l'application partielle de la fonction aléatoire  $X$  à  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  est une fonction déterministe de la variable  $(\mathbf{r}, t)$ , notée  $X_\omega$  et baptisée réalisation de la fonction aléatoire  $X$ . La valeur de cette fonction au point  $(\mathbf{r}, t)$  est notée  $X_\omega(\mathbf{r}, t)$ , et  $X_\omega(\mathbf{r}, t) = X(\omega, \mathbf{r}, t)$ .

---

<sup>1</sup> Nous francisons le nom russe [17], connu en anglais sous la forme *Khinchin*.

<sup>2</sup> Dans le cas qui nous intéresse, on dit aussi champ aléatoire spatio-temporel.

2. Le point  $(\mathbf{r}, t)$  est fixé : l'application partielle de la fonction aléatoire  $X$  à  $\Omega$  est une variable aléatoire, notée  $X_{\mathbf{r},t}$ , telle que  $X_{\mathbf{r},t}(\omega) = X(\omega, \mathbf{r}, t)$ . L'étude de  $X_{\mathbf{r},t}$  relève de la théorie des variables aléatoires : loi de probabilité, moments, etc.

En optique, on étudie souvent des fonctions aléatoires ne dépendant que du temps (le point  $\mathbf{r}$  est fixé), ou que de la variable  $\mathbf{r}$  (l'instant  $t$  étant fixé). Les premières sont des fonctions aléatoires temporelles, les deuxièmes des champs aléatoires [204].

L'exposé qui suit est limité aux fonctions aléatoires temporelles, seules utilisées au chapitre 10. L'adjectif « temporel » est omis. Les notations précédentes se simplifient puisque  $\mathbf{r}$  n'apparaît plus :  $X_t(\omega) = X(\omega, t) = X_\omega(t)$ .

### G.1.2 Moments d'une fonction aléatoire temporelle

À chaque instant  $t_j$  de la suite  $(t_j)$  ( $j = 1, \dots, J$ ) la fonction aléatoire  $X$  associe une variable aléatoire  $X_{t_j}$ , et il est concevable de définir un moment d'ordre  $J$  par

$$M^J[X](t_1, \dots, t_J) = E[X_{t_1}^\dagger \cdots X_{t_J}^\dagger], \quad (\text{G.2})$$

où  $X_{t_j}^\dagger$  désigne soit  $X_{t_j}$ , soit  $\overline{X_{t_j}}$  (complexe conjugué de  $X_{t_j}$ ), et  $E$  l'espérance mathématique de la quantité entre crochets.

En particulier, le moment d'ordre 1 est la moyenne statistique ou encore l'espérance mathématique de  $X$  : c'est la fonction définie par

$$E[X] : t \longmapsto E[X](t) = E[X_t]. \quad (\text{G.3})$$

### G.1.3 Stationnarité

**Stationnarité stricte.** Une fonction aléatoire est stationnaire au sens strict (stationnarité forte) si toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine du temps (elles sont invariantes dans toute translation temporelle). Cela implique l'invariance par translation de tous les moments, quel que soit leur ordre et quels que soient les instants considérés.

**Fonction de covariance.** Une fonction aléatoire à valeurs complexes est dite de second ordre si  $E[|X_t|^2]$  est finie, quel que soit  $t$ . Dans ces conditions, la fonction de covariance  $C_X$  de la fonction aléatoire  $X$  se définit, aux instants  $t$  et  $t - \tau$  ( $t$  et  $\tau$  sont des variables indépendantes), par

$$C_X(t, t - \tau) = E[X_t \overline{X_{t-\tau}}]. \quad (\text{G.4})$$

Pour  $\tau$  fixé, la moyenne temporelle de  $C_X$  (considérée comme fonction de  $t$ ) est la fonction  $\langle C_X \rangle_t$  définie, quand la limite existe, par

$$\langle C_X \rangle_t : \tau \longmapsto \langle C_X \rangle_t(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_X(t, t - \tau) dt. \quad (\text{G.5})$$

**Stationnarité au sens large.** La fonction aléatoire complexe  $X$  est dite stationnaire au sens large (stationnarité faible) si c'est une fonction aléatoire du second ordre telle que :

1.  $E[X](t)$  est indépendant de  $t$ . On écrit  $E[X]$  cette moyenne (statistique) ;
2.  $C_X(t, t - \tau)$  ne dépend que de  $\tau$ .

**Définition G.1.1.** La fonction d'autocorrélation statistique de la fonction aléatoire stationnaire au sens large  $X$  est  $\widehat{\Gamma}_X$ , définie par

$$\widehat{\Gamma}_X : \tau \longmapsto \widehat{\Gamma}_X(\tau) = C_X(t, t - \tau). \quad (\text{G.6})$$

Elle ne dépend pas de  $t$ .

Pour  $\tau$  fixé, si  $X$  est stationnaire au sens large,  $C_X(t, t - \tau)$  ne dépend pas de  $t$  : c'est une constante, si bien que

$$\widehat{\Gamma}_X(\tau) = C_X(t, t - \tau) = \langle C_X \rangle_t(\tau). \quad (\text{G.7})$$

La fonction d'autocorrélation statistique d'une fonction aléatoire stationnaire au sens large coïncide avec la moyenne temporelle de sa covariance.

#### G.1.4 Moyenne temporelle, ergodicité

Soit  $X_\omega$  la réalisation de la fonction aléatoire temporelle  $X$  obtenue en fixant  $\omega$ . La moyenne temporelle de la fonction aléatoire  $X$ , pour  $\omega$  fixé, est définie par

$$\langle X \rangle_t(\omega) = \langle X(\omega, t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_\omega(t) dt. \quad (\text{G.8})$$

Il existe plusieurs façons de considérer l'intégrale et la limite dans la relation (G.8). En pratique nous les supposons définies en moyenne quadratique, ou presque sûrement<sup>3</sup> [9, 15, 17, 101, 162].

La fonction d'autocorrélation temporelle de  $X$ , pour  $\omega$  fixé, est  $\Gamma_X$ , définie par

$$\Gamma_X(\omega, \tau) = \langle X(\omega, t) \overline{X(\omega, t - \tau)} \rangle_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_\omega(t) \overline{X_\omega(t - \tau)} dt. \quad (\text{G.9})$$

L'application  $\langle X \rangle_t : \omega \in \Omega \longmapsto \langle X \rangle_t(\omega)$  est une variable aléatoire, et l'application  $\Gamma_X : (\omega, \tau) \in \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \Gamma_X(\omega, \tau)$  est une fonction aléatoire.

Il arrive que  $\langle X \rangle_t$  et  $\Gamma_X$  soient indépendantes de  $\omega$  :  $\langle X \rangle_t$  est une application constante et  $\Gamma_X$  est une fonction certaine de  $\tau$ . Cela conduit à la définition suivante.

<sup>3</sup> Elles peuvent être toutes les deux de même nature ; mais l'une peut être définie en moyenne quadratique et l'autre presque sûrement.

**Définition G.1.2 (Ergodicité d'une fonction aléatoire).** *La fonction aléatoire  $X$  est ergodique au sens large si  $\langle X \rangle_t$  et  $\Gamma_X$  ne dépendent pas du résultat élémentaire  $\omega$ .*

Pour une fonction aléatoire ergodique au sens large, il est légitime de parler de « la » moyenne temporelle et de « la » fonction d'autocorrélation, sans référence à aucun résultat élémentaire  $\omega$ , et d'écrire simplement  $\langle X \rangle_t$  et  $\Gamma_X(\tau)$  au lieu de  $\langle X \rangle_t(\omega)$  et  $\Gamma_X(\omega, \tau)$ .

### G.1.5 Fonction aléatoire stationnaire et ergodique

Conformément aux deux points de vue décrits p. 511, il y a deux façons de concevoir la moyenne d'une fonction aléatoire  $X$ , suivant qu'on choisit :

1. La moyenne statistique (ou moyenne d'ensemble) à un instant donné, c'est-à-dire l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X_t$  ;
2. La moyenne temporelle d'une réalisation  $X_\omega$ , au sens du paragraphe G.1.4.

La moyenne statistique est stationnaire si elle ne dépend pas du temps ; la moyenne temporelle est ergodique si elle ne dépend pas de la réalisation. Que peut-on dire des deux moyennes d'une fonction aléatoire stationnaire et ergodique ? On montre que, si elles existent, ces deux moyennes sont égales [203]. D'où la proposition suivante.

**Proposition G.1.1.** *Si  $X$  est une fonction aléatoire stationnaire et ergodique au sens large, alors  $E[X] = \langle X \rangle_t$  et, pour tout  $\tau$  :  $\widehat{\Gamma}_X(\tau) = \Gamma_X(\tau)$ .*

**Conséquences.** Pour une fonction aléatoire stationnaire et ergodique les moyennes d'ensemble sont égales aux moyennes temporelles. Ce résultat est d'une grande portée pratique : des moyennes calculées sur une *unique* réalisation temporelle donnent une estimation des moyennes d'ensemble correspondantes, plus difficilement accessibles à l'expérience. Il est aussi d'une grande portée théorique : les fonctions d'autocorrélation statistique et temporelle d'une fonction aléatoire stationnaire et ergodique se confondent ; il est légitime de parler simplement de fonction d'autocorrélation.

**Remarque G.1.1.** L'approche suivie ici sépare stationnarité et ergodicité : elle est calquée sur celle que propose Réfrégier [204]. Elle est justifiée par l'existence de fonctions aléatoires stationnaires et non ergodiques d'une part, et sur celle de fonctions aléatoires ergodiques et non stationnaires d'autre part, dont Réfrégier donne des exemples [204] (voir aussi le tome 2 de l'ouvrage de Roubine [207]). Elle n'est pas universelle : l'ergodicité n'est parfois définie que pour les fonctions aléatoires stationnaires ; c'est ce que fait Goodman [98].

## G.2 Densités spectrales. Théorème de Wiener–Khintchine

### G.2.1 Considérations sur l’analyse spectrale des fonctions aléatoires

Si  $X$  est une fonction aléatoire stationnaire, ses réalisations  $X_\omega$  n’ont, en général, pas de transformée de Fourier au sens des fonctions [203]. En effet, une fonction qui admet une transformée de Fourier au sens des fonctions tend vers 0 à l’infini (éventuellement presque partout). Or la stationnarité signifie que les moyennes statistiques des réalisations d’une fonction aléatoire sont les mêmes à l’infini qu’en tout point ; ces réalisations ne tendent pas toutes vers 0 à l’infini, à moins que  $X$  ne soit elle-même nulle !

Cette remarque empêche-t-elle toute considération spectrale sur  $X$  ? Heureusement, non. Même si on ne peut parler de transformée de Fourier, on introduit la densité spectrale de puissance d’une fonction aléatoire, dont on étudie les propriétés. Le théorème de Wiener–Kintchine en offre un exemple : il relie la densité spectrale de puissance d’une fonction aléatoire (de second ordre) à sa fonction de covariance.

Le problème évoqué se résoud dans l’espace des distributions tempérées, puisque la convergence vers 0 à l’infini n’est pas nécessaire pour qu’une fonction ait une transformée de Fourier au sens des distributions. Le théorème de Wiener–Kintchine garde toutefois sa pertinence, car la densité spectrale de puissance est une grandeur concrète pour le physicien : elle représente la façon dont la puissance d’un signal se répartit spectralement.

En optique, le théorème de Wiener–Kintchine formalise le lien qui existe entre la cohérence d’une source (ou du signal sur un récepteur) et son spectre, propriété fondamentale des sources de lumière.

### G.2.2 Densité spectrale de puissance d’une fonction aléatoire

Soit  $X$  une fonction aléatoire et soit  $X_{[T]}$  sa restriction à  $\Omega \times [-T/2, T/2]$ , c’est-à-dire la fonction aléatoire définie par

$$X_{[T]}(\omega, t) = X(\omega, t) \operatorname{rect}_T(t). \quad (\text{G.10})$$

Nous notons  $X_\omega$  la réalisation de  $X$ , pour  $\omega$  fixé, et  $X_{[T]\omega}$ , celle de  $X_{[T]}$  ; elles sont telles que  $X_{[T]\omega}(t) = X_\omega(t) \operatorname{rect}_T(t)$  ( $X_{[T]\omega}$  est la restriction de  $X_\omega$  à l’intervalle  $[-T/2, T/2]$ ). Nous supposons que  $X_{[T]\omega}$  admet une transformée de Fourier que nous notons  $\hat{X}_{[T]\omega}$ .

Pour  $\omega$  fixé, la puissance moyenne de  $X$  sur l’intervalle  $[-T/2, T/2]$  est

$$\begin{aligned} \langle |X_{[T]}|^2 \rangle_t(\omega) &= \langle |X_{[T]}(\omega, t)|^2 \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |X_\omega(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{[T]\omega}(t)|^2 dt, \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

et la relation de Parseval conduit à

$$\langle |X_{[T]}|^2 \rangle_t(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{X}_{[T]\omega}(\nu)|^2 d\nu. \quad (\text{G.12})$$

La quantité

$$P_{[T]}(\omega, \nu) = \frac{1}{T} |\widehat{X}_{[T]\omega}(\nu)|^2, \quad (\text{G.13})$$

apparaît comme la puissance, dans la bande  $[\nu, \nu + d\nu[$ , de la réalisation  $X_{[T]\omega}$  de la restriction de  $X$  à l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ . C'est une densité spectrale de puissance. Pour obtenir la densité spectrale de puissance de la fonction aléatoire  $X$ , il convient de s'affranchir du résultat élémentaire  $\omega$ , ce qui est fait au moyen d'une espérance mathématique, et d'examiner la limite de  $P_{[T]}$  quand  $T$  tend vers l'infini.

Pour cela, notons que  $\langle |X_{[T]}|^2 \rangle_t$  est une variable aléatoire et que la relation (G.12) fait apparaître la fonction

$$\nu \longmapsto |\widehat{X}_{[T]\omega}(\nu)|^2, \quad (\text{G.14})$$

comme la réalisation, obtenue pour  $\omega$ , d'une fonction aléatoire notée  $|\widehat{X}_{[T]}|^2$  et définie par

$$|\widehat{X}_{[T]}|^2 : (\omega, \nu) \longmapsto |\widehat{X}_{[T]}(\omega, \nu)|^2 = |\widehat{X}_{[T]\omega}(\nu)|^2. \quad (\text{G.15})$$

L'application  $\omega \longmapsto |\widehat{X}_{[T]}(\omega, \nu)|^2$  est une variable aléatoire notée  $|X_{[T]}(\nu)|^2$ .

Il est commode d'introduire la fonction aléatoire  $P_{[T]} = |\widehat{X}_{[T]}|^2/T$ , baptisée périodogramme de  $X$  sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ . On utilise aussi la variable aléatoire  $P_{[T]}(\nu)$ , définie par

$$P_{[T]}(\nu) = \frac{1}{T} |X_{[T]}(\nu)|^2. \quad (\text{G.16})$$

**Définition G.2.1 (Densité spectrale de puissance).** *La densité spectrale de puissance de la fonction aléatoire  $X$  est  $\gamma_X$  définie, quand la limite existe, par*

$$\gamma_X(\nu) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} [|\widehat{X}_{[T]}(\nu)|^2] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [P_{[T]}(\nu)]. \quad (\text{G.17})$$

Ainsi définie, la densité spectrale de puissance est, en toute généralité, une distribution. Sa définition est indépendante de la stationnarité de  $X$ .

### G.2.3 Le théorème de Wiener–Khinchine pour les fonctions aléatoires

**Théorème G.2.1 (Wiener–Khinchine).** *Soit  $C_X$  la fonction de covariance d'une fonction aléatoire  $X$  (de second ordre) et soit  $P_{[T]}$  son périodogramme sur  $[-T/2, T/2]$ . Alors*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_X(t, t - \tau) dt \Rightarrow \gamma_X(\nu), \quad (\text{G.18})$$

la limite, si elle existe, étant prise au sens des distributions.

*Preuve.* Nous utilisons les notions et notations du paragraphe G.2.2. Calculons d'abord

$$\begin{aligned} |\widehat{X}_{[T]\omega}(\nu)|^2 &= \int_{-T/2}^{T/2} X_\omega(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{-T/2}^{T/2} \overline{X_\omega(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} X_\omega(t) \overline{X_\omega(t')} e^{-2i\pi\nu(t-t')} dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \text{rect}_T(t - \tau) X_\omega(t) \overline{X_\omega(t - \tau)} e^{-2i\pi\nu\tau} dt d\tau. \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Soit la variable aléatoire  $\widehat{X}_{[T]}(\nu)$  définie par  $\widehat{X}_{[T]}(\nu) : \omega \mapsto \widehat{X}_{[T]\omega}(\nu)$ . La relation (G.19) conduit à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\widehat{X}_{[T]}|^2](\nu) &= \mathbb{E}[|\widehat{X}_{[T]\nu}|^2] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \text{rect}_T(t - \tau) \mathbb{E}[X_t \overline{X_{t-\tau}}] e^{-2i\pi\nu\tau} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \text{rect}_T(t - \tau) C_X(t, t - \tau) e^{-2i\pi\nu\tau} dt d\tau. \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

Définissons

$$D_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{rect}_T(t - \tau) C_X(t, t - \tau) dt, \quad (\text{G.21})$$

si bien que la relation (G.20) s'écrit

$$\frac{1}{T} \mathbb{E}[|\widehat{X}_{[T]}|^2](\nu) = \widehat{D}_T(\nu). \quad (\text{G.22})$$

La moyenne temporelle de la covariance, définie par

$$\langle C_X \rangle_t(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_X(t, t - \tau) dt, \quad (\text{G.23})$$

conformément à la relation (G.5), existe par hypothèse (éventuellement au sens des distributions). Il en résulte, quel que soit  $\tau$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} D_T(\tau) = \langle C_X \rangle_t(\tau). \quad (\text{G.24})$$

Nous concluons en utilisant la continuité de la transformation de Fourier dans l'espace des distributions tempérées et obtenons

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}[|\widehat{X}_T(\nu)|^2] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \widehat{D}_T(\nu) = \widehat{\langle C_X \rangle}_t(\nu). \quad (\text{G.25})$$

Le théorème en résulte.  $\square$

Si la fonction aléatoire  $X$  est stationnaire au sens large, le membre de gauche de la relation (G.18) est  $\langle C_X \rangle_t = \widehat{\Gamma}_X$ . Il en résulte le corollaire suivant :

**Corollaire G.2.1 (Théorème de Wiener–Khinchine pour une fonction aléatoire stationnaire).** *La densité spectrale de puissance d’une fonction aléatoire stationnaire au sens large est la transformée de Fourier de sa fonction d’autocorrélation statistique.*

Enfin, dans le cas d’une fonction aléatoire stationnaire et ergodique, on énonce :

**Corollaire G.2.2 (Théorème de Wiener–Khinchine pour une fonction aléatoire stationnaire et ergodique).** *Si la fonction aléatoire  $X$  est stationnaire et ergodique au sens large, sa densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de sa fonction d’autocorrélation, ce qui s’écrit*

$$\Gamma_X \rightleftharpoons \gamma_X. \quad (\text{G.26})$$

**Remarque G.2.1.** L’hypothèse d’une fonction aléatoire stationnaire et ergodique, que nous faisons au chapitre 10 pour l’amplitude du champ électrique, n’est pas satisfaite par toute une classe de signaux aléatoires, pourtant relativement « simples ». Par exemple une fonction aléatoire « constante » (c’est-à-dire dont les réalisations sont des fonctions constantes) est stationnaire mais pas ergodique au sens large [204] ; il en est de même pour une fonction aléatoire sinusoïdale à amplitude aléatoire. Il s’agit là de signaux limites, au sens où une onde monochromatique est un cas limite d’onde physique. Il est toutefois possible d’appliquer l’analyse harmonique à une réalisation d’une telle fonction aléatoire. C’est pourquoi nous avons mentionné des énoncés du théorème de Wiener–Khinchine plus généraux que celui du corollaire G.2.2 (utilisé au chapitre 10).

## G.2.4 Densités spectrales d’interaction

Les résultats précédents se généralisent aux moments conjoints de deux fonctions aléatoires. Nous nous limitons ici à deux fonctions aléatoires temporelles  $X$  et  $Y$  et désignons par  $X_t$  et  $Y_t$  les variables aléatoires qu’elles engendrent respectivement à l’instant  $t$ . La covariance mutuelle (ou croisée) de  $X$  et  $Y$  est

$$C_{XY}(t, t - \tau) = \mathbb{E}[X_t \overline{Y}_{t-\tau}]. \quad (\text{G.27})$$

Les fonctions aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites stationnairement corrélées si  $C_{XY}(t, t - \tau)$  ne dépend pas de  $t$ . On définit dans ce cas la fonction d’intercorrélation statistique par

$$\widehat{\Gamma}_{XY} : \tau \longmapsto \widehat{\Gamma}_{XY}(\tau) = C_{XY}(t, t - \tau). \quad (\text{G.28})$$

Si  $X_\omega$  et  $Y_\omega$  sont les réalisations respectives de  $X$  et  $Y$  associées au résultat élémentaire  $\omega$ , la fonction d'intercorrélation temporelle de  $X$  et  $Y$ , pour  $\omega$  fixé, est

$$\Gamma_{XY}(\omega, \tau) = \langle X(\omega, t) \overline{Y(\omega, t - \tau)} \rangle_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_\omega(t) \overline{Y_\omega(t - \tau)} dt. \quad (\text{G.29})$$

La densité spectrale d'interaction des restrictions de  $X_\omega$  et  $Y_\omega$  à l'intervalle  $[-T/2, T/2]$  est la fonction

$$\nu \longmapsto \frac{1}{T} \widehat{X}_{[T]\omega}(\nu) \overline{\widehat{Y}_{[T]\omega}(\nu)}, \quad (\text{G.30})$$

laquelle est la réalisation d'une fonction aléatoire, notée  $P_{[T]XY}$  et appelée périodogramme d'interaction (ou croisé). Ainsi  $P_{[T]XY}(\nu)$  est une variable aléatoire, telle que

$$P_{[T]XY}(\nu) = \frac{1}{T} \widehat{X}_{[T]}(\nu) \overline{\widehat{Y}_{[T]}(\nu)}. \quad (\text{G.31})$$

**Définition G.2.2 (Densité spectrale d'interaction).** *La densité spectrale d'interaction des fonctions aléatoires de second ordre  $X$  et  $Y$  est, quand la limite existe,*

$$\gamma_{XY}(\nu) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}[P_{[T]XY}(\nu)]. \quad (\text{G.32})$$

**Théorème G.2.2 (Théorème de Wiener–Khinchine croisé).** *Avec les notations précédentes, et dans la mesure où la limite existe, on a*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_{XY}(t, t - \tau) dt = \gamma_{XY}(\nu). \quad (\text{G.33})$$

*Si de plus les fonctions aléatoires  $X$  et  $Y$  sont stationnairement corrélées (sens large) et ergodiques pour la covariance croisée, la densité spectrale d'interaction est la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation de  $X$  et  $Y$ , ce qui s'écrit*

$$\Gamma_{XY} = \gamma_{XY}. \quad (\text{G.34})$$

La démonstration de ce théorème est une simple adaptation de celle du théorème G.2.1.

**Remarque G.2.2 (Cohérence).** En optique de Fourier les fonctions aléatoires considérées sont centrées. On a l'habitude de parler de cohérence plutôt que de corrélation. D'où les notions de cohérence mutuelle (intercorrélation), de cohérence propre (autocorrélation), définies au chapitre 10.

### G.2.5 Densité spectrale d'interaction et composante spectrale

La fonction de covariance mutuelle des fonctions aléatoires  $X$  et  $Y$  s'exprime en fonction des variables aléatoires  $X_t$  et  $Y_t$  qu'elle engendrent, conformément à la relation (G.27). Il serait intéressant de chercher à exprimer la densité spectrale d'interaction en fonction des variables aléatoires engendrées par les transformées de Fourier de  $X$  et  $Y$ . Cela est possible dans le cadre de la théorie des distributions aléatoires ; le problème est, paradoxalement, plus délicat à traiter avec les fonctions aléatoires, auxquelles nous limitons les écritures de cet appendice. La raison est celle donnée au paragraphe G.2.1 : il n'est pas possible de parler de transformée de Fourier pour une fonction aléatoire stationnaire. Voici une façon de lever cette difficulté en restant dans le cadre fonctionnel.

Si  $X$  est une fonction aléatoire, on écrit la contribution de la bande spectrale  $[\nu, \nu + d\nu[$  à l'amplitude  $X(t)$  sous la forme

$$dX(t) = e^{2i\pi\nu t} dx(\nu), \quad (\text{G.35})$$

où  $dx(\nu)$  représente une amplitude complexe aléatoire. La présence de la fonction  $\exp[2i\pi\nu t]$  se comprend en considérant que la contribution d'une bande spectrale infiniment étroite est une sinusoïde.

De façon concrète,  $dX(t)$  est la représentation temporelle du signal aléatoire  $|X\rangle$  filtré par un filtre basse-bande idéal, de largeur  $d\nu$  à la fréquence  $\nu$ . Si ce filtre est infiniment étroit, il ne laisse passer qu'un signal monochromatique.

Pour deux bandes étroites  $[\nu_1, \nu_1 + d\nu_1[$  et  $[\nu_2, \nu_2 + d\nu_2[$  on écrit

$$dX_1(t) = e^{2i\pi\nu_1 t} dx_1(\nu_1), \quad (\text{G.36})$$

$$dX_2(t) = e^{2i\pi\nu_2 t} dx_2(\nu_2). \quad (\text{G.37})$$

si bien que<sup>4</sup>

$$\mathbb{E}[dX_1(t) \overline{dX_2(t - \tau)}] = e^{2i\pi(\nu_1 - \nu_2)t} e^{2i\pi\nu_2\tau} \mathbb{E}[dx_1(\nu_1) \overline{dx_2(\nu_2)}]. \quad (\text{G.38})$$

Si  $X$  est stationnaire, on montre que  $dx_1(\nu_1)$  et  $dx_2(\nu_2)$  le sont aussi et qu'elles sont décorréliées, ce qui s'écrit

$$\mathbb{E}[dx_1(\nu_1) \overline{dx_2(\nu_2)}] = \gamma_X(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2. \quad (\text{G.39})$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[dX_1(t) \overline{dX_2(t - \tau)}] = e^{2i\pi\nu_1\tau} \gamma_X(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2. \quad (\text{G.40})$$

La relation (G.40) indique que les contributions de deux bandes spectrales disjointes sont décorréliées, quel que soit  $\tau$ . En optique, cela signifie que deux vibrations dont les spectres sont disjoints ne donnent pas lieu à interférences.

<sup>4</sup> Dans ce qui précède, les variables  $t$  et  $t - \tau$  étaient mises en indice, comme dans la relation (G.4). Nous modifions la notation pour éviter d'alourdir les indices.

# Appendice H

## Propriétés des cohérences

### H.1 Inégalité de Cauchy–Schwarz

**Proposition H.1.1.** *Soit  $H$  une forme hermitienne positive sur un espace vectoriel complexe et soient deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$ . Alors (inégalité de Cauchy–Schwarz)*

$$|H(x_1, x_2)|^2 \leq H(x_1, x_1) H(x_2, x_2). \quad (\text{H.1})$$

*L'égalité n'a lieu que si  $x_1$  et  $x_2$  sont colinéaires.*

La preuve de la proposition H.1.1 se trouve dans de nombreux ouvrages de mathématiques [65, 106, 133].

L'inégalité de Cauchy–Schwarz s'applique en particulier aux produits scalaires hermitiens, qui sont des formes hermitiennes strictement positives.

Par exemple, si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $L_2(\Omega)$ , c'est-à-dire deux fonctions de carré sommable sur  $\Omega$ , le produit scalaire (hermitien) de  $f$  et  $g$  est défini par

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \bar{g}, \quad (\text{H.2})$$

et l'inégalité de Cauchy–Schwarz s'écrit

$$\left| \int_{\Omega} f \bar{g} \right| \leq \left[ \int_{\Omega} |f|^2 \right]^{1/2} \left[ \int_{\Omega} |g|^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{H.3})$$

On remplace  $\Omega$  par  $\mathbb{R}$  si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $L_2(\mathbb{R})$ .

### H.2 Propriétés de la cohérence mutuelle et de la cohérence propre

Si  $E(\mathbf{r}, t)$  est l'amplitude du champ au point  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$ , la cohérence mutuelle aux points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  d'un émetteur (ou récepteur) sphérique est  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle E(\mathbf{r}_1, t) \overline{E(\mathbf{r}_2, t - \tau)} \rangle_t$ . (Pour alléger les notations, le nom de l'émetteur n'est pas indiqué en indice. Il est entendu que ce qui suit est valable sur un émetteur (ou récepteur) arbitraire.)

Au point  $\mathbf{r}$ , la cohérence propre est  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau)$  et l'intensité (vibratoire) est  $I(\mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0)$ . L'intensité (vibratoire) mutuelle en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  est  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0)$ .

**Proposition H.2.1.** *La cohérence mutuelle et la cohérence propre sur un émetteur (ou un récepteur) satisfont les relations suivantes.*

- i.  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) \geq 0$  ;
- ii.  $\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau) = \overline{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; -\tau)}$  ;
- iii.  $|\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq [I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}$  ;
- iv.  $|\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau)| \leq \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) = I(\mathbf{r})$ .

*Preuve.* i – Par définition :  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) = \langle E(\mathbf{r}, t) \overline{E(\mathbf{r}, t)} \rangle_t = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle_t$ , et  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0)$  est positif comme moyenne d'une fonction positive.

ii – Cela résulte directement de la définition de  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$ .

iii – Pour appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux cohérences, les points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont fixés, si bien que les amplitudes des champs électriques sont des fonctions du temps seulement. Soit la fonction  $f_1$  définie en  $\mathbf{r}_1$  par

$$f_1 : t \longmapsto E(\mathbf{r}_1, t), \quad (\text{H.4})$$

et soit de même en  $\mathbf{r}_2$  la fonction  $f_2$ , telle que

$$f_2 : t \longmapsto E(\mathbf{r}_2, t). \quad (\text{H.5})$$

La cohérence mutuelle en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  s'écrit

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \langle f_1(t) \overline{f_2(t - \tau)} \rangle_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) \overline{f_2(t - \tau)} dt. \quad (\text{H.6})$$

L'intervalle  $\Omega = ] - T/2, T/2[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et l'inégalité de Cauchy–Schwarz conduit à

$$\left| \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) \overline{f_2(t - \tau)} dt \right| \leq \left[ \int_{-T/2}^{T/2} |f_1(t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} |f_2(t - \tau)|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (\text{H.7})$$

En divisant les deux membres de la relation (H.7) par  $T$  et en passant à la limite ( $T$  infini), on obtient

$$|\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq [\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; 0) \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; 0)]^{1/2}, \quad (\text{H.8})$$

c'est-à-dire

$$|\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| \leq [I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}, \quad (\text{H.9})$$

où  $I$  est l'intensité vibratoire sur l'émetteur.

iv – Il suffit de faire  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  dans la relation (H.8) pour obtenir le résultat.  $\square$

# Appendice I

## Formule de Sellmeier

La formule de Sellmeier [29, 40] fournit une approximation de l'indice de réfraction  $n$  d'un milieu matériel dans une région de transparence (on néglige l'absorption). Elle s'écrit, pour la longueur d'onde  $\lambda$  (dans le vide),

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_j \frac{a_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}, \quad (\text{I.1})$$

où les  $\lambda_j$  sont les longueurs d'ondes<sup>1</sup> de résonance du milieu (là où l'absorption est forte). Les coefficients  $a_j$  sont des nombres sans dimension.

Si l'on choisit comme variable la fréquence plutôt que la longueur d'onde, la formule de Sellmeier s'écrit

$$n^2(\nu) = 1 + \sum_j \frac{a_j \nu_j^2}{\nu_j^2 - \nu^2}, \quad (\text{I.2})$$

où  $\nu_j$  sont les fréquences de résonance du milieu ( $\nu_j \lambda_j = c$ , vitesse de la lumière).

Pour la silice ( $\text{SiO}_2$ ), les valeurs numériques des  $a_j$  et  $\lambda_j$  sont données dans le tableau I.1 (de fait, l'unité choisie pour la longueur d'onde dans la formule de Sellmeier n'a pas d'importance, pourvu que ce soit la même pour  $\lambda$  et les  $\lambda_j$ ). La formule de Sellmeier donne des valeurs numériques de l'indice de réfraction de la silice très proches de celles mesurées, dans un domaine qui inclut l'intervalle  $[0, 4 \mu\text{m}; 2, 5 \mu\text{m}]$ , c'est-à-dire dans le domaine visible et le proche infra-rouge pour lesquels sont tracées les courbes de la figure 11.2 p. 340.

**TAB. I.1.** Valeurs numériques des paramètres utilisés pour le calcul de l'indice de réfraction de la silice selon la formule de Sellmeier [4, 41].

$j$	$a_j$	$\lambda_j$ ( $\mu\text{m}$ )
1	0,696 166 3	0,068 404 3
2	0,407 942 6	0,116 241 4
3	0,897 479 4	9,896 161

<sup>1</sup> Dans le vide.

# Références

1. ABOURADDY A. F., SALEH B. E. A., SERGIENKO A. V., TEICH M. C. Quantum holography, *Opt. Express* **9** (2001) 498–505.
2. ABOURADDY A. F., SALEH B. E. A., SERGIENKO A. V., TEICH M. C., Entangled-photon Fourier optics, *J. Opt. Soc. Am. B* **19** (2002) 1174–1184.
3. ABRAMOWITZ M., STEGUN I. A., *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, New York, 1965.
4. AGRAWAL G. P., *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, San Diego, 1989.
5. ALIEVA T., LOPEZ V., AGULLO-LOPEZ V., ALMEIDA L. B., The fractional Fourier transform in optical propagation problems, *Journal of Modern Optics* **41** (1994) 1037–1044.
6. ANANIEV Y., *Résonateurs optiques et problème de divergence du rayonnement laser*, Mir, Moscou, 1982. (Traduit du russe.)
7. ANGOT A., *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*, 6<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1972.
8. APOSTOLIS A. G., MALLICK S., ROUÈDE D., HERRIAU J.-P., HUIGNARD J.-P., Polarization properties of phase gratings recorded in  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  crystals, *Opt. Comm.* **56** (1985) 73–78.
9. APPEL W. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, 2<sup>e</sup> éd., H & K Éditions, Paris, 2002.
10. ARFKEN G., *Mathematical methods for physicists*, 3<sup>e</sup> éd., Academic Press Inc., Boston, 1985.
11. ARNAUD J., Representation of Gaussian beams by complex rays, *Appl. Opt.* **24** (1985) 538–543.
12. AUBOURG P., HUIGNARD J.-P., HARENG M., MULLEN R. A., Liquid crystal light valve using bulk monocrystalline  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  as the photoconductive material, *Appl. Opt.* **21** (1982) 3706–3712.
13. BACHOR H.-A., RALPH T. C., *A guide to experiments in quantum optics*, Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
14. BASS J., *Cours de mathématiques*, Tome III, Masson, Paris, 1971.
15. BASS J., *Éléments de calcul des probabilités*, 3<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1974.
16. BERAN M. J., PARRENT G. B., *Theory of partial coherence*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
17. BLANC-LAPIERRE A., PICINBONO B., *Fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1981.
18. BONNET G., Considérations sur la représentation et l'analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires, *Ann. Télécomm.* **23** (1968) 62–86.
19. BONNET G., Réponse percussive spatiotemporelle en diffraction polychromatique, *Ann. Télécomm.* **30** (1975) 251–269.

20. BONNET G., Cohérence partielle polychromatique : filtrage spatiotemporel et transformation de Fourier, *Nouv. Rev. Opt.* **7** (1976) 235–258.
21. BONNET G., La notion de transparence en lumière polychromatique, *Nouv. Rev. Opt.* **8** (1977) 243–266.
22. BONNET G., Introduction à l'optique métaxiale. Première partie : diffraction métaxiale dans un espace homogène : trilogie structurale, dioptré sphérique, *Ann. Télécomm.* **33** (1978) 143–165.
23. BONNET G., Introduction à l'optique métaxiale. Deuxième partie : systèmes dioptriques centrés (non diaphragmés et non aberrants), *Ann. Télécomm.* **33** (1978) 225–243.
24. BONNET G., La diffraction métaxiale : doctrine unitaire pour l'optique, l'acoustique et la radio-électricité, dans le langage des signaux, Septième colloque sur le traitement du signal et ses applications (GRETSI), Nice (1979) 54/1–54/8.
25. BONNET G., Au-delà d'une vitesse de groupe : vitesse d'onde et vitesse de signal. Première partie : l'opérateur vitesse de groupe en l'absence d'affaiblissement, *Ann. Télécomm.* **38** (1983) 345–366.
26. BONNET G., Au-delà d'une vitesse de groupe : vitesse d'onde et vitesse de signal. Deuxième partie : déformation de l'amplitude et influence de l'affaiblissement, *Ann. Télécomm.* **38** (1983) 473–487.
27. BONY J.-M., *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.
28. BONY J.-M., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2004.
29. BORN M., WOLF E., *Principles of optics*, 6<sup>e</sup> éd., Pergamon Press, Oxford, 1980. (Nouvelle édition, Cambridge University Press, 2000.)
30. BOUSQUET P., *Spectroscopie instrumentale*, Dunod, Paris, 1968.
31. BOYD G. D., KOGELNIK H., Generalized confocal resonator theory, *Bell Syst. Techn. J.* **41** (1962) 1347–1369.
32. BRACEWELL R. N., *The Fourier transform and its applications*, 2<sup>e</sup> éd., McGraw-Hill, New York, 1978.
33. BRANDWOOD D., *Fourier transforms in radar and signal processing*, Artech House, Norwood, 2003.
34. BRÉMAUD P., *Introduction aux probabilités. Modélisation des phénomènes aléatoires*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
35. BRENER D., KÜPPERS F., MATTHEUS A., SHAPIRO E. G., GABITOV I., TURITSYN S. K., Symmetrical dispersion compensation for standard monomode-fiber-based communication systems with large amplifier spacing, *Opt. Lett.* **22** (1997) 982–984.
36. BRILLOUIN L., PARODI M., *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*, Masson, Paris, 1956.
37. BROUSSEAU C., *Fundamentals of polarized light*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
38. BROUSSAUD G., *Optoélectronique*, Masson, Paris, 1974.
39. BROUSSAUD G., *Les vidéodisques*, Masson, Paris, 1986.
40. BRUHAT G., KASTLER A., *Optique*, in *Cours de physique générale*, 6<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1992.
41. BUCK J. A., *Fundamentals of optical fibers*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

42. BURAGA-LEFEBVRE C., COËTMELLEC S., LEBRUN D., ÖZKUL C., Application of wavelet transform to hologram analysis : three-dimensional location of particles, *Optics and Lasers in Engineering* **33** (2000) 409–421.
43. CAGNAC B., PEBAY-PEYROULA J.-C., *Physique atomique*, Tome 1 : *Expériences et principes fondamentaux*, Dunod, Paris, 1975.
44. CASASENT D., NATU S., LUU T., LEBRETON G., DE BAZELAIRE É., New birefringence theory and uses of the photo-DKDP spatial light modulator in optical data processing, *Proc. SPIE*, **202** (1979) 122–130.
45. CHANDRASEKHAR S., *Liquid crystals*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
46. CHANG B. J., Dichromated gelatin holograms and their applications, *Opt. Eng.* **19** (1980) 642–648.
47. CHOQUET-BRUHAT Y., DE WITT-MORETTE C., DILLARD-BLEICK M., *Analysis, manifolds and physics*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
48. CHRISTODOULOU C. G., WAHID P. F., *Fundamentals of antennas : concepts and applications*, SPIE Press, Bellingham, 2001.
49. COËTMELLEC S., BURAGA-LEFEBVRE C., LEBRUN D., ÖZKUL C., Application of in-line digital holography to multiple plane velocimetry, *Meas. Sc. Technol.* **12** (2001) 1392–1397.
50. COËTMELLEC S., BRUNEL M., LEBRUN D., ÖZKUL C., Characterization of chirped pulses with the fractional-order Fourier transform, *J. Opt. Soc. Am. A* **18** (2001) 2754–2758.
51. COËTMELLEC S., LEBRUN D., ÖZKUL C. Characterization of diffraction patterns directly from in-line holograms with the fractional Fourier transform, *Appl. Opt.* **41** (2002) 312–319.
52. COHEN-TANNOUDJI C., DIU B., LALOË F., *Mécanique quantique*, 2<sup>e</sup> éd., Hermann, Paris, 1977.
53. COLLIN R. E., *Field theory of guided waves*, 2<sup>e</sup> éd., IEEE Press et Wiley Interscience, New York, 1991.
54. COLLINGS P. J., HIRD M., *Introduction to liquid crystals. Chemistry and physics*, Taylor & Francis, Londres, 1997.
55. COMBES P. F., *Ondes métriques et centimétriques. Guides circuits passifs, antennes*, 3<sup>e</sup> éd., Dunod, Paris, 1982.
56. CONDON E. U., Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transformations, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* **23** (1937) 158–164.
57. COURJON D., BAINIER C., *Le champ proche optique. Théorie et applications*, Springer-Verlag, Paris, 2001.
58. COWLEY J. M., *Diffraction physics*, 3<sup>e</sup> éd., North-Holland (Elsevier), Amsterdam, 1995.
59. DAS P. K., DE CUSATIS C. M., *Acousto-optic signal processing: fundamentals and applications*, Artech House, Boston, 1991.
60. DAUMAS M., Les sciences physiques aux XVI<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles, in *Histoire de la science*, sous la direction de M. Daumas, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1957.
61. DAUTRAY R., LIONS J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, Vol. 4 Méthodes variationnelles, Vol. 5 Spectre des opérateurs, Masson, Paris, 1988.
62. DE FORNEL F., *Les ondes évanescentes en optique et en opto-électronique*, Eyrolles, Paris, 1998.

63. DE GENNES P. G., PROST J., *The physics of liquid crystals*, 2<sup>e</sup> éd., Oxford University Press, Oxford, 1993.
64. DEGUZMAN P. C., NORDIN G. P., Stacked subwavelength gratings as circular polarization filters, *Appl. Opt.* **40** (2001) 5731–5737.
65. DEHEUVELS R., *Formes quadratiques et groupes classiques*, P.U.F., Paris, 1981.
66. DEMENGEL F., DEMENGEL G., *Mesures et distributions. Théorie et illustration par les exemples*, Ellipses, Paris, 2000.
67. DESVIGNES F., *Rayonnements optiques*, Masson, Paris, 1991.
68. DETTWILLER, L., *Les instruments d'optique. Étude théorique, expérimentale et pratique*, Ellipses, Paris, 1997.
69. DIJAILI S. P., DIENES A., SMITH J. S., *ABCD matrices for dispersive pulse propagation*, *IEEE J. Quant. Electr.* **26** (1990) 1158–1164.
70. DIRAC P. A. M., *The principles of quantum mechanics*, 4<sup>e</sup> éd., Oxford University Press, Oxford, 1958.
71. DUFFIEUX P. M., *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, 2<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1970.
72. DUPRAZ J., *Probabilités, signaux, bruits*, Eyrolles, Paris, 1983.
73. DYM H., MCKEAN H. P., *Fourier series and integrals*, Academic Press, Orlando, 1972.
74. EINARSSON G., *Principles of lightwave communications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
75. ELLIOTT R. S., *Antenna theory and design*, édition corrigée, IEEE Press et Wiley Interscience, New York, 2003.
76. FENIMORE E. E., CANNON T. M., Coded aperture imaging with uniformly redundant arrays, *Appl. Opt.* **17** (1978) 337–347.
77. FLEURY P., MATHIEU J.-P., *Images optiques*, Eyrolles, Paris, 1956.
78. FOGRET É., PELLAT-FINET P. Agreement of fractional Fourier optics with the Huygens-Fresnel principle, *Opt. Comm.* **272** (2007) 281–288.
79. FOWLES G. R., *Introduction to modern optics*, 2<sup>e</sup> éd., Dover Publications, New York, 1989. (Édition originale : Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.)
80. FOX A. G., LI T., Resonant modes in a maser interferometer, *Bell Syst. Techn. J.* **40** (1961) 453–488.
81. FOX A. G., LI T., Effect of gain saturation on the oscillating modes of optical masers, *IEEE J. Quantum Electr.* **2** (1966) 774–783.
82. FRANÇON M., *Le contraste de phase en optique et en microscopie*, Éditions de la revue d'optique théorique et instrumentale, Paris, 1950.
83. FRANÇON M., *Holographie*, Masson, Paris, 1969.
84. FRANÇON M., *Vibrations lumineuses, optique cohérente*, Dunod, Paris, 1970.
85. FRANÇON M., *Optique, formation et traitement des images*, Masson, Paris, 1972.
86. FRANÇON M., *Thèmes actuels en optique*, Masson, Paris, 1986.
87. FRANÇON M., SLANSKY S., *Cohérence en optique*, Éditions du CNRS, Paris, 1965.
88. FRESNEL A., Mémoire sur la diffraction de la lumière, *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, **5** (1818) 339–475.
89. FRIEDLANDER G., JOSHI M., *Introduction to the theory of distributions*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

90. FROELHY C., LACOURT A., VIÉNOT J.-C., Notions de réponse impulsionnelle et de fonction de transfert temporelles des pupilles optiques, justifications expérimentales et applications, *Nouv. Rev. Opt.* **4** (1973) 183–196.
91. GABOR D., A new microscopy principle, *Nature* **161** (1948) 777–778.
92. GASKILL J. D., *Linear systems, Fourier transforms, and optics*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
93. GATTI A., BRAMBILLA E., BACHE M., LUGIATO L. A., Correlated imaging, quantum and classical, *Phys. Rev. A* **70** (2004) 013802(10).
94. GEOFFROY O., GIVORD D., OTANI Y., PANNETIER B., SANTOS A. D., SCHLENKER M., SOUCHE Y., TMOKE hysteresis loops in Bragg diffraction from 2D patterns, *J. Magnetism and Magnetic Mat.* **121** (1993) 516–519.
95. GOLDIN E., *Waves and photons. An introduction to quantum optics*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
96. GOLDSMITH P. F., *Quasioptical systems*, IEEE Press, New York, 1998.
97. GOODMAN J. W., *Introduction to Fourier optics*, 2<sup>e</sup> éd., Mc Graw-Hill, New York, 1996. (Première édition 1968. Troisième édition : Robert & Company, Englewood, 2005.)
98. GOODMAN J. W., *Statistical optics*, John Wiley & Sons, New York, 1985.
99. GOODMAN J. W., *Speckle phenomena in optics, theory and applications*, Robert & Company, Englewood, 2007.
100. GORI F., Fresnel transform and sampling theorem, *Opt. Comm.* **39** (1981) 293–297.
101. GRIMMETT G. R., STIRZAKER D. R., *Probability and random processes*, 2<sup>e</sup> éd., Oxford University Press, Oxford, 1992.
102. GUELFAND I. M., CHILOV G. E., *Les distributions*, Tome 1, Dunod, Paris, 1972. (Traduit du russe. Nouveau tirage de la première édition de 1962.)
103. GUELFAND I. M., CHILOV G. E., *Les distributions*, Tome 2 : *Espaces fondamentaux*, Dunod, Paris, 1964. (Traduit du russe.)
104. GUELFAND I. M., VILENKIN N. Y., *Les distributions*, Tome 4 : *Applications de l'analyse harmonique*, Dunod, Paris, 1967. (Traduit du russe.)
105. GÜNTHER P., HUIGNARD J.-P., Photorefractive effect and materials, pp. 7–73, in *Photorefractive materials and their applications I: Fundamental phenomena*, coordonné par J.-P. Huignard et P. Günter, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
106. HALMOS P. R., *Finite-dimensional vector spaces*, Springer-Verlag, New York, 1974.
107. HANBURY BROWN R., Boffin. *A personal story of the early days of radar, radio astronomy and quantum optics*, Adam Hilger, Bristol, 1991.
108. HANBURY BROWN R., TWISS R. Q., A new type of interferometer for use in radio astronomy, *Phil. Mag. Ser. 7*, **45** (1954) 663–682.
109. HARIHARAN P., Holographic recording materials recent developments, *Opt. Eng.* **19** (1980) 636–641.
110. HAUS H. A., *Waves and fields in optoelectronics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.
111. HERRIAU J.-P., HUIGNARD J.-P., Some polarization properties of volume holograms in  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  crystals and applications, *Appl. Opt.* **17** (1978) 1851–1852.
112. HEURTLEY J. C., Hyperspheroidal functions – Optical resonators with circular mirrors, in *Proceedings of the Symposium on Quasi-Optics*, Polytechnic Press, Brooklyn, 1964.

113. HONERKAMP J., RÖMER H., *Theoretical physics. A classical approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
114. HOPKINS H. H., The concept of partial coherence in optics, *Proc. Royal. Soc. London* **208** (1951) 263–277.
115. HUIGNARD J.-P., GÜNTER P., Optical processing using wave mixing in photorefractive crystals, pp. 205–273, in *Photorefractive materials and their applications II: Survey of applications*, coordonné par J.-P. Huignard et P. Günter, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
116. HUIGNARD J.-P., HERRIAU J.-P., VALENTIN T., Time average holographic interferometry with photoconductive electrooptic  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  crystals, *Appl. Opt.* **16** (1977) 2796–2798.
117. HUYGENS C., *Traité de la lumière*, Introduction de Michel Blay, Dunod, Paris, 1992. (Édition originale : Pierre Vander Aa, Leyde, 1690.)
118. ILLINGWORTH V. (Coordonnatrice), *The Penguin dictionary of physics*, Penguin Books, Londres, 1991.
119. JACKSON J. D., *Classical electrodynamics*, 3<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, New York, 1999.
120. JACOD J., PROTTER P., *L'essentiel en théorie des probabilités*, Cassini, Paris, 2003.
121. KALITÉEVSKI N., *Optique ondulatoire*, Éditions Mir, Moscou, 1980. (Traduit du russe.)
122. KHARE R. S., Fractional Fourier analysis of defocused images, *Opt. Comm.* **12** (1974) 386–388.
123. KIKUTA H., OHIRA Y., IWATA K., Achromatic quater-wave plates using the dispersion of form birefringence, *Appl. Opt.* **36** (1997) 1566–1572.
124. KOBER H., Wurzeln aus der Hankel-, Fourier- und aus anderen stetigen Transformationen, *Quart. J. Math. (Oxford)* **10** (1939) 45–59.
125. KOGELNIK H., Imaging of optical modes — Resonators with internal lenses, *Bell Sys. Techn. J.* **44** (1965) 455–494.
126. KOGELNIK H., LI T., Laser beams and resonators, *Appl. Opt.* **10** (1966) 1550–1567.
127. KOLNER B. H. Space-time duality and the theory of temporal imaging, *IEEE J. Quantum Electr.* **30** (1994) 1951–1963.
128. KOLNER B. H. The pinhole time camera, *J. Opt. Soc. Am. A* **14** (1997) 3349–3357.
129. KOLNER B. H., NAZARATHY M., Temporal imaging with a time lens, *Opt. Lett.* **14** (1989) 630–632.
130. KOWALISKI P., *Théorie photographique appliquée*, Masson, Paris, 1972.
131. LABEYRIE A., LIPSON S. G., NISENSEN P., *An introduction to optical stellar interferometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
132. LALANNE P., ASTILEAN S., CHAVEL P., CAMBRIL E., LAUNOIS H., Blazed binary subwavelength gratings with efficiencies larger than those of conventional échelette gratings, *Opt. Lett.* **23** (1998) 1081–1083.
133. LANG S., *Algebra*, 3<sup>e</sup> éd., Springer-Verlag, New York, 2002.
134. LEBEDEV N. N., *Special functions and their applications*, Dover Publications, New York, 1972. (Édition originale : Prentice-Hall, 1965.)
135. LECARDONNEL J.-P., TILLOY P., *Optique, exercices et problèmes résolus*, Bréal, Paris, 1980.

136. LECERF A., *Physique des ondes et des vibrations*, 2<sup>e</sup> éd., Lavoisier, Paris, 1996.
137. LE DOUCEN M., PELLAT-FINET P., Polarization properties and diffraction efficiencies of binary anisotropic gratings: general study and experiments on ferroelectric liquid crystals, *Opt. Comm.* **151** (1998) 321–330.
138. LE GRAND Y., *Les yeux et la vision*, Dunod, Paris, 1960.
139. LE GRAND Y., *Light, colour and vision*, 2<sup>e</sup> éd., Chapman & Hall, Londres, 1968.
140. LENTIN A., RIVAUD J., *Leçons d'algèbre moderne*, 3<sup>e</sup> éd., Vuibert, Paris, 1969.
141. LI M. J., Recent progress in fiber dispersion compensators, *Proc. ECOC'01* **4** (2001) 486–489.
142. LIN C., KOGELNIK H., COHEN L. G., Optical-pulse equalization of low-dispersion transmission in single-mode fibers in the 1.3–1.7- $\mu\text{m}$  spectral region, *Opt. Lett.* **5** (1980) 476–478.
143. LIPSON S. G., LIPSON H., *Optical physics*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
144. LOHMANN A. W., Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform, *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 2181–2186.
145. LOHMANN A. W., MENDLOVIC D., Temporal perfect-shuffle optical processor, *Opt. Lett.* **17** (1992) 822–824.
146. LOHMANN A. W., MENDLOVIC D., ZALEVSKY Z., Fractional transforms in optics, pp. 263–341, in *Progress in optics* XXXVIII, coordonné par E. Wolf, Elsevier, Amsterdam, 1998.
147. LOWENTHAL S., BELVAUX Y., Progrès récents en optique cohérente : filtrage des fréquences spatiales, holographie, *Rev. Opt.* **46** (1967) 1–64.
148. LU H. H., Performance comparison between DCF and RDF dispersion compensation in fiber optical CATV systems, *IEEE Trans. Broadcasting* **48** (2002) 370–373.
149. LYNN P. A., *Radar systems*, Macmillan Education, Houndmills, 1987.
150. MALACARA D., *Óptica básica*, 2<sup>e</sup> éd., Fondo de Cultura Económica, Mexico, 2004.
151. MALLICK S., Common-path interferometers, Chap. 3, in *Optical shop testing* coordonné par D. Malacara, John Wiley & Sons, New York, 1977.
152. MALLICK S., Effets d'épaisseur dans les réseaux, in *Optoélectronique*, Tome 1, Les Éditions de Physique, Les Ulis, 1990.
153. MANDEL L., WOLF E., *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
154. MARCUSE D., Pulse distortion in single-mode fibers, *Appl. Opt.* **19** (1980) 1653–1660.
155. MARCUSE D., Equalization of distortion in single-mode fibers, *Appl. Opt.* **20** (1981) 696–700.
156. MARÉCHAL A., *Imagerie géométrique, aberrations*, Masson, Paris, 1967.
157. MARÉCHAL A., FRANÇON M., *Diffraction, structure des images*, Masson, Paris, 1960.
158. MATHIEU J.-P., *Optique*, Tome 1 : *Optique électromagnétique*, S.E.D.E.S., Paris, 1965.
159. MAX J., *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, Tome 2, 4<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1987.
160. MCBRIDE A. C., KERR F. H., On Namias's fractional Fourier transforms, *IMA J. Appl. Math.* **39** (1987) 159–175.

161. MENDLOVIC D., OZAKTAS H. M., Fractional Fourier transforms and their optical implementation I, *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 1875–1881.
162. MÉTIVIER M., *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, 2<sup>e</sup> éd., Dunod, Paris, 1972
163. MEYZONNETTE, J.-L., LÉPINE, T., *Bases de radiométrie optique*, Cépadriès éditions, s.l., 1999.
164. MOUSAVI MADANI F., KIKUCHI K., Performance limit of long-distance WDM dispersion-managed transmission system using higher order dispersion compensation fibers, *IEEE Photonics Techn. Lett.* **11** (1999) 608–610.
165. NAMIAS V., The Fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *J. Inst. Maths Applys*, **25** (1980) 241–265.
166. NIETO-VESPERINAS M., *Scattering and diffraction in physical optics*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
167. NYE J. F., *Physical properties of crystals*, Oxford University Press, Oxford, 1985.
168. O'NEILL E. L., *Introduction to statistical optics*, Dover Publications, New York, 1992. (Édition originale : Addison-Wesley, Reading, 1963.)
169. OZAKTAS H. M., MENDLOVIC D., Fractional Fourier transforms and their optical implementation II, *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 2522–2531.
170. OZAKTAS H. M., MENDLOVIC D., Fractional Fourier transform as a tool for analyzing beam propagation and spherical mirror resonators, *Opt. Lett.* **19** (1994) 1678–1680.
171. OZAKTAS H. M., MENDLOVIC D., Fractional Fourier Optics, *J. Opt. Soc. Am. A* **12** (1995) 743–751.
172. OZAKTAS H. M., ZALEVSKY Z., KUTAY M. A., *The fractional Fourier transform, with applications in optics and signal processing*, John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
173. PAPAS, C. H., *Theory of electromagnetic wave propagation*, Dover Publications, New York, 1988. (Édition originale : McGraw-Hill, New York, 1965.)
174. PAPOULIS A., *Probability, random variables, and stochastic processes*, McGraw-Hill, New York, 1965.
175. PAPOULIS A., *Systems and transforms with applications in optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
176. PAPOULIS A., Pulse compression, fiber communications and diffraction: a unified approach, *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994) 3–13.
177. PATTERSON A. L., Function spaces between crystal space and Fourier-transform space, *Zeits. Kristal.* **112** (1959) 22–32.
178. PAUL H., *Introduction to quantum optics. From light quanta to quantum teleportation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
179. PAULIAT G., ROOSEN G., L'effet photoréfractif, in *L'optique non linéaire et ses matériaux*, coordonné par R. Lévy et J.-M. Jonathan, Les Éditions de Physique, Les Ulis, 2000.
180. PELLAT-FINET P., Measurement of the electro-optic coefficient of BSO crystals, *Opt. Comm.* **50** (1984) 275–280.
181. PELLAT-FINET P., *Transformación de Fourier fraccional y propagación del campo electromagnético*, Memos de investigación n° 121, Universidad de los Andes, Bogotá, 1993.
182. PELLAT-FINET P., Fresnel diffraction and the fractional order Fourier transform, *Opt. Lett.* **19** (1994) 1388–1390.

183. PELLAT-FINET P., Transfert du champ électromagnétique par diffraction et transformation de Fourier fractionnaire, C. R. Ac. Sc. Paris **320 IIb** (1995) 91–97.
184. PELLAT-FINET P., Diffraction entre un émetteur et un récepteur localement toriques. Application à l'étude des systèmes astigmatiques, C. R. Ac. Sc. Paris **327 II b** (1999) 1269–1274 .
185. PELLAT-FINET P., Topics in fractional Fourier optics and applications, in *Optoelectronic information processing : optics for information systems*, SPIE Critical Reviews **81** (2001) 31–58.
186. PELLAT-FINET P., Stability of optical resonators and the fractional Fourier transform, *Unicauca Ciencias* **6** (2001) 121–128.
187. PELLAT-FINET P., *Lecciones de óptica de Fourier*, Ediciones Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombie), 2004.
188. PELLAT-FINET P., BONNET G., Fractional order Fourier transform and Fourier optics, *Opt. Comm.* **111** (1994) 141–154.
189. PELLAT-FINET P., DURAND P.-E., La notion de spectre angulaire sphérique, C. R. Physique **7** (2006) 457–463.
190. PELLAT-FINET P., DURAND P.-E., FOGRET É., Spherical angular spectrum and the fractional order Fourier transform, *Opt. Lett.* **31** (2006) 3429–3431.
191. PELLAT-FINET P., FOGRET É., Complex order fractional Fourier transforms and their use in diffraction theory. Application to optical resonators, *Opt. Comm.* **258** (2006) 103–113.
192. PELLAT-FINET P., LE DOUCEN M., Polarization properties of birefringence gratings, *Optik* **100** (1995) 159–166.
193. PELLAT-FINET P., LIZARAZO Z., TORRES R., On the analogy between Fresnel diffraction and dispersion in transmission lines and some of its applications, *AIP Conf. Proc.* **992** (2008) 1129–1134.
194. PELLAT-FINET P., TORRES Y., Image formation with coherent light: the fractional Fourier transform approach, *Journal of Modern Optics* **44** (1997) 1581–1594.
195. PETIT R., *L'outil mathématique*, Masson, Paris, 1983.
196. PETIT R., *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*, Masson, Paris, 1989.
197. PICINBONO B., *Introduction à l'étude des signaux et des phénomènes aléatoires*, Dunod, Paris, 1971.
198. PICINBONO B., *Signaux aléatoires*, 3 tomes, Dunod, Paris, 1993, 1994.
199. PRAT R., *L'optique*, Éditions du Seuil, Paris, 1962.
200. PRAT R., *Problèmes d'optique, précédés de notions d'optique moderne*, Armand Colin, Paris, 1967.
201. RAMACHANDRAN G. N., RAMESESHAN S., Crystal Optics, in *Handbuch der Physik XXV/I*, coordonné par S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
202. REED M., SIMON B., *Methods of modern mathematical physics*, Tome I : *Functional analysis*, Tome II : *Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, San Diego, 1972, 1975.
203. RÉFRÉGIER P., *Théorie du signal. Signal, information, fluctuations*, Masson, Paris, 1993.
204. RÉFRÉGIER P., *Théorie du bruit et applications en physique*, Hermès, Paris, 2002.

205. RHODES W. T., Acousto-optic signal processing: convolution and correlation, *Proc. IEEE* **69** (1981) 65–79.
206. RODDIER F., *Distributions et transformation de Fourier*, Ediscience (McGraw-Hill), Paris, 1978.
207. ROUBINE E., *Introduction à la théorie de la communication*, Tome 1 : *Signaux non aléatoires*, Tome 2 : *Signaux aléatoires*, 2<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1979.
208. ROUSSEAU M., MATHIEU J.-P., *Problèmes d'optique*, Dunod, Paris, 1966.
209. ROUYER A., A new simple method for decoding penumbra image: the filtered autocorrelation, *Rev. Scientific Instrum.* **74** (2003) 1234–1239.
210. ROZANOV Y. A., *Probability theory: a concise course*, Dover Publications, New York, 1977. (Traduit du russe. Première édition en anglais : *Introductory probability theory*, Prentice-Hall, 1969.)
211. SALEH B. E. A., ABOURADDY A. F., SERGIENKO A. V., TEICH M. C., Duality between partial coherence and partial entanglement, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 043816(15).
212. SCHWARTZ L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, 2<sup>e</sup> éd., Hermann, Paris, 1965.
213. SCHWARTZ L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
214. SENIOR J. M., *Optical fiber communications. Principles and practice*, 2<sup>e</sup> éd., Prentice Hall, New York, 1992.
215. SHIMODA K., *Introduction to laser physics*, 2<sup>e</sup> Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1986.
216. SIEGMAN A. E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, 1986.
217. SIEGMAN A. E., New developments in laser resonators, in *Optical resonators*, *SPIE* **1224** (1990) 2–14.
218. SIRVEN J., *Les ondes : du linéaire au non-linéaire*, Dunod, Paris, 2000.
219. SMIGIELSKI P., *Holographie industrielle*, Teknea, Toulouse, 1994.
220. SNYDER A. W., LOVE J. D., *Optical waveguide theory*, Chapman & Hall, Londres, 1983.
221. SOMMERFELD A., *Optics*, in *Lectures on theoretical physics*, Vol. IV, Academic Press Inc., San Diego, 1954.
222. SOUCHE Y., Les effets magnéto-optiques, Chap. 13, in *Magnétisme. I – Fondements*, sous la direction d'É. du Trémolet de Lacheisserie, E.D.P. Sciences, Les Ulis, 1999.
223. STEWARD E. G., *Fourier optics. An introduction*, 2<sup>e</sup> éd., Dover Publications, Mineola, 2004. (Édition originale : Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1987.)
224. STRIEGLER A. G., SCHMAUSS B., Compensation of intrachannel effects in symmetric dispersion-managed transmission systems, *J. Lightwave Techn.* **22** (2004) 1877–1882.
225. STRUIK D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2<sup>e</sup> éd., Dover Publications, New York, 1988. (Édition originale : Addison-Wesley, Reading, 1961.)
226. TANAKA K., TSURITANI T., EDAGAWA, N. SUZUKI M., 320 Gbits/s ( $32 \times 10.7$  Gbits/s) error-free transmission over 7 280 km using dispersion flattened fibre link with standard SMF and slope compensating DCF, *Electr. Lett.* **35** (1999) 1860–1862.
227. TATON R., *La science antique et médiévale. Des origines à 1450*, P.U.F., Paris, 1994.
228. TATON R., *La science moderne. De 1450 à 1800*, P.U.F., Paris, 1995.
229. TATON R., *La science contemporaine. 1/ Le XIX<sup>e</sup> siècle*, P.U.F., Paris, 1995.

- 
230. TAYLOR, C., *Diffraction*, Adam Hilger, Bristol, 1987.
231. TORRES R., PELLAT-FINET P., TORRES Y., Sampling theorem for fractional bandlimited signals: a self-contained proof. Application to digital holography, IEEE Signal Process. Lett. **13** (2006) 676–679.
232. TORRES R., PELLAT-FINET P., TORRES Y., Fractional shifting and sampling in the fractional domain. Application to digital holography, AIP Conf. Proc. **992** (2008) 168–173.
233. TRIBILLON J.-L., *Traitement optique de l'information et reconnaissance des formes par voie optique*, Teknea, Toulouse, 1998.
234. VAN CITTERT P. H., Die wahrscheinliche Schwingungsverteilung in einer von einer Lichtquelle direkt oder mittels einer Linse beleuchteten Ebene, Physica **I** (1934) 201–210.
235. VANDERLUGT A., *Optical signal processing*, John Wiley & Sons, New York, 1992.
236. VASSALO C., *Électromagnétisme classique dans la matière*, Dunod, Paris, 1980.
237. VASSALO C., *Théorie des guides d'ondes électromagnétiques*, 2 tomes, Eyrolles, Paris, 1985.
238. VIALARD R., DAUMAS M., L'édification de la science classique, in *Histoire de la science*, sous la direction de M. Daumas, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1957.
239. VIÉNOT J.-C., SMIGIELSKI P., ROYER H., *Holographie optique*, Dunod, Paris, 1971.
240. VIKRAM S. C., *Particle field holography*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
241. VINSON J. F., *Cohérence optique, classique et quantique*, Dunod, Paris, 1969.
242. WATSON G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
243. WEEKS W. L., *Antenna engineering*, McGraw-Hill, New York, 1968.
244. WIENER N., Hermitian polynomials and Fourier analysis, J. Math. Phys. MIT, **8** (1929) 70–73.
245. WOLF E., *Introduction to the theory of coherence and polarization of light*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
246. XIA X.-G., On bandlimited signals with fractional Fourier transform, IEEE Signal Process. Lett. **3** (1996) 72–74.
247. YARIV A., *Quantum electronics*, 2<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, New York, 1975.
248. YARIV A., *Optical electronics*, 4<sup>e</sup> éd., Saunders College, Fort Worth, 1991.
249. YARIV A., YEH P., *Photonics, optical electronics in modern communications*, 6<sup>e</sup> éd., Oxford University Press, New York, 2007. (Nouvelle édition de la référence 248, étendue.)
250. YU F. T. S., *Optical information processing*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
251. ZERNIKE F., The concept of degree of coherence and its application to optical problems, Physica **V** (1938) 785–795.
252. ZUILY C., *Distributions et équations aux dérivées partielles. Exercices corrigés*. Hermann, Paris, 1986.
253. ZVÉREV V. A., *Radioóptica*, Mir, Moscou, 1978. (En espagnol ; traduit du russe.)

## Commentaires

Afin de guider le lecteur, nous nous permettons quelques brefs commentaires sur des livres et articles cités en références et nous limitons aux textes consacrés à la diffraction, l'optique de Fourier et la cohérence, qui sont les thèmes centraux de notre ouvrage, et à des applications.

Le livre de Born et Wolf demeure une référence pour l'optique électromagnétique [29]. La diffraction y est abordée à la fois sous la forme scalaire et sous la forme vectorielle. Rédigé dans les années 50 (pour la première édition), ce livre n'utilise pas les distributions, malgré un appendice sur la fonction « delta » de Dirac (certains trouveront cela très bien); c'est néanmoins un livre très rigoureux sur le plan mathématique, même si bien sûr le recours aux distributions simplifierait certaines démonstrations. Le livre de Kalitévski [121] décrit de manière relativement complète l'essentiel de l'optique ondulatoire; le chapitre 6 constitue une bonne synthèse des phénomènes de diffraction. La diffraction est présentée de façon élémentaire et intuitive, sans mathématiques, dans le livre de Taylor [230].

Pour l'optique de Fourier, la référence reste l'ouvrage de Goodman [97]. Dans les deuxième (1996) et troisième (2005) éditions, les bases de la théorie développée dans la première (1968) sont conservées, mais les applications sont plus nombreuses et plus récentes. La lecture du livre de Goodman est recommandée, ne serait-ce que pour pouvoir comparer avec les méthodes de notre livre. L'approche classique de l'optique de Fourier est encore développée dans le livre de Gaskill [92] et celui de Papoulis [175].

Très synthétique, le livre de Maréchal et Françon [157] est sans doute plus difficile à lire que celui de Goodman; il aborde le problème de l'influence des aberrations sur la qualité des images (en tenant compte de la diffraction). Quant au livre de Duffieux [71], il présente un intérêt historique. Nous citons le livre de Zvérev [253], remarquable dans ses intuitions et typique en cela de l'École russe, parce qu'il est un des rares à se placer à la frontière de l'optique et des hyperfréquences (comme son titre l'indique; nous avons eu accès à la traduction espagnole).

C'est encore un livre de Goodman qui fait référence pour l'étude de la cohérence en optique [98]. Même si nous osons en contester quelques points, nous pensons que la rédaction hautement pédagogique de *Statistical Optics*, ses approfondissements remarquables, en font un ouvrage de tout premier ordre. Dans ce domaine encore, l'ouvrage de Mandel et Wolf [153], dont une partie est consacrée à l'optique quantique, est très complet, peut-être moins synthétique que le livre de Goodman; sa lecture demande sans doute une certaine maturité. Le livre d'O'Neil [168], moins étoffé, est un classique qu'il est intéressant de lire. La diffraction des ondes partiellement cohérentes est aussi abordée dans certains ouvrages consacrés à la diffraction, et déjà cités, comme celui de Maréchal et Françon [157] ou celui de Kalitévski [121].

La théorie de l'optique métaxiale a été publiée par son auteur (G. Bonnet) sous forme d'articles [19–24] dont la lecture, pour enrichissante qu'elle soit, est difficile, tant l'information est concentrée. L'étude de notre livre peut constituer une (bonne?) préparation à cette lecture. À l'origine du travail de Bonnet sur le sujet figure un article de Froehly, Lacourt et Viénot [90], caractéristique de l'École de Besançon.

Comme nous le signalons dans l'appendice C, l'usage de la transformation de Fourier fractionnaire en optique s'est développé à la suite des travaux de Lohmann, Mendlovic et Ozaktas [144, 161, 169], Khare faisant figure de précurseur [122]. Deux livres des mêmes auteurs font la synthèse de leurs travaux [146, 172]. On y trouve cependant peu décrite (voire pas du tout [146]) la relation, que nous jugeons fondamentale, entre cette transformation et la diffraction. Ce lien a pourtant été établi dès 1993 [5, 181–183]. De très nombreuses publications se rapportent bien sûr à la transformation de Fourier fractionnaire telle qu'elle est appliquée à l'optique. Nous en citons très peu, nous limitant à celles qui nous ont parfois inspiré [49–51], parce que l'usage qu'on y fait de la transformation de Fourier fractionnaire est très différent du nôtre. On trouve ces publications citées par exemple dans des ouvrages

déjà évoqués [146, 172]. Le présent livre synthétise nos propres travaux dans le domaine [78, 181–188, 191, 193, 194].

Les applications de l'optique de Fourier sont nombreuses. Celles qui concernent le traitement du signal sont très bien exposées par VanderLugt [235], un des pionniers du domaine. Viénot, Smigielski et Royer ont rédigé un ouvrage sur l'holographie [239] dont le grand intérêt vient notamment de la présentation d'expériences et de résultats obtenus, pour la plupart, par les auteurs mêmes (ou par leurs collaborateurs). Les livres sur l'holographie plus récents que le précédent sont légions ; des applications industrielles sont abordées par exemple par Smigielski [219].

Il n'est pas habituel de faire entrer la théorie des faisceaux gaussiens dans l'optique de Fourier comme nous le faisons au chapitre 7. Pour une approche classique de la théorie des résonateurs optiques, de type matrice  $ABCD$ , nous renvoyons à l'ouvrage de Siegman, consacré aux lasers [216], ou à celui de Haus [110]. Voir aussi les ouvrages de Yariv [248, 249].

L'étude de la dispersion dans les fibres optiques est abordée par Agrawal [4], par Buck [41] ou encore par Yariv et Yeh [249].

Enfin le livre de Labeyrie, Lipson et Nisenson [131] constitue une belle illustration de la façon dont l'optique de Fourier, et plus largement l'optique cohérente, s'appliquent à l'optique astronomique moderne.

# Index

- Abbe, E., 4
- Aberration(s)
  - chromatiques, 217, 271
  - géométriques, 217, 223, 240, 463
  - sphérique, 105, 223, 241
- Acoustique, 137
- Agrandisseur, 241
- Amplitude
  - du champ électrique, 17
  - complexe, 17, 21, 253, 266
  - réduite, 161, 162, 164, 165, 167, 184, 185, 191, 208
- Analyse harmonique, 21, 35
- Anneaux de Newton, 293
- Antenne
  - à balayage, 143
  - cornet, 153
  - à ouverture, 13
- Aplanétisme, 217
- Approximation
  - métaxiale, 41, 42, 86, 110, 257, 261, 455
  - paraxiale, 43
- Arago, F., 14
- Astigmatisme, 223
- Atténuation d'une onde électromagnétique, 49, 105
- Battements, 276
- Bellanger, J.-J., 503
- Bételgeuse, 317
- Bilentilles de Billet, 64
- Biréfringence, 100
- Biréfringent, 32, 132
- Blanc-Lapierre, A., 5
- Blu-ray Disc*, 33
- Bonnet, G., 5, 41, 42, 78, 80, 254, 311, 331
- Cache de Faraday, 34
- Cage de Faraday, 34
- Caustique, 217
- CCD*, voir DTC
- Centre de courbure, 41
  - temporel, 366
- Champ
  - aléatoire, 512
  - analytique, 17, 266, 495
  - électrique, 16
  - magnétique, 16
  - réel, 17, 22
- Chirp*, 349
- Chromatisme, 400
  - d'amplitude, 262
  - de diffraction, 262
  - pur, 262
  - de grandeur, 262
  - de phase, 262, 343
- C.I.E., 501
- Circuit intégré, 33
- Coefficient
  - de réflexion de Fresnel, 76
  - de transmission, 99, 100
  - de Fresnel, 72
- Coëtmellec, S., 329
- Cohérence, 288, 293
  - mutuelle, 286, 289, 293
  - propre, 286, 302
  - spatiale, 289
  - temporelle, 283, 289
- Col, 201, 204, 289
  - dimension (du), 202
  - du faisceau gaussien image, 212
  - position (du), 202
  - temporel, 361
- Collimateur, 101
- Composante spectrale, 253, 304, 495
- Composition des transformations de Fourier fractionnaires, 171–173, 184, 185, 192, 194
- Condition(s)
  - métaxiales, 43
  - de Sommerfeld, 15
  - de stigmatisme approché, 105, 218, 223

- Continuité de la propagation et de la transformation de Fourier fractionnaire, 163
- Contraste
  - d’une émulsion, 422, 433
  - de franges d’interférences, 293, 310
  - de phase, 49, 461
- Convention
  - pour les mesures algébriques, xxix, 42, 189
  - pour les miroirs, 189
  - pour la transformation de Fourier, 476
- Coordonnées
  - cartésiennes dans le plan tangent, 42
  - polaires, 482
- Corrélateur conjugué, 453–455
- Corrélation
  - fractionnaire, 464
  - optique, 450
- Cosinus directeur, 24, 26, 28, 227
- Courbure temporelle, 352
- Covariance, 512
  - mutuelle, 518
- Cristal, 33, 120
  - BGO, 440
  - BSO, 100, 440
  - KDP, 131
  - niobate de Lithium, 100, 440, 456
  - photoréfringent, 100, 101, 131, 440
- Cristaux liquides, 16, 24, 100, 101, 441
- Critère de résolution
  - de Rayleigh, 149, 239, 397, 425
  - de Sparrow, 239
- Crown, 259
- Degré
  - de cohérence, 326
  - temporelle, 291
  - de polarisation, 326
- Densité
  - spectrale
  - d’interaction, 287, 519
  - de puissance, 288
- Déphasage
  - de  $\pi$  par passage au foyer, 40, 64, 208
  - de  $\pi/2$  par passage au foyer d’une onde cylindrique, 68
- Détecteur
  - optique, 18
  - plan, 55
  - quadratique, 18, 422
- Diagramme de rayonnement, 138
- Diapason, 251
- Dichroïsme, 100
- Diffraction
  - et convolution, 36
  - définition (de la), 37
  - à distance finie, 53
  - de Fraunhofer, 49, 53, 54, 101, 160, 163, 173, 296
  - de Fresnel, 54, 163, 272, 296
  - à l’infini, 49, 137
  - propagation, 13, 31
  - des rayons X, 33
- Diffusion de Rayleigh, 32
- Dioptre plan, 96
- Dioptrie, 85
- Dispersion
  - anormale, 267, 338
  - chromatique, 262, 266, 329
  - de groupe, 338
  - anormale, 339, 341, 349
  - normale, 339, 341, 349
  - normale, 262, 338
  - spatiale, 36, 329
- Disque compact, 33
- Distance
  - de diffraction, 48, 105
  - focale
  - d’un dioptre, 70
  - image, 90, 93, 95
  - objet, 94
  - de Rayleigh, 412, 419
- Distorsion, 223
- Distribution, 20, 37
  - de Dirac, 20, 56, 57, 107, 110, 132, 232, 238, 251, 302, 483
  - tempérée, 20, 478
  - valeur principale, 483, 496
- Double conjugaison, 74, 75, 78, 97, 98, 187
- Doublet, 105
- DTC (Dispositif à transfert de charges), 24, 389
- Duffieux, P. M., 5
- Dumontet, P., 5
- DVD (*Digital Versatile Disc*), 33
- Écart à la linéarité, 223
- Éclairage
  - cohérent, 231
  - incohérent, 230, 231
  - Köhler, 224, 387
- Éclairement, 18, 45, 54, 86, 101, 106, 224, 230
  - associé à une distribution singulière, 113, 114, 471, 472
- Écrans
  - complémentaires, 66
  - à cristaux liquides, 24

- plats, 16
- à tube cathodique, 24
- Effet
  - Bragg, 130
  - Doppler, 274, 276, 281
  - de peau, 32
  - photoréfringent, 440
  - Pockels, 440
- Einstein, A., 12
- Émetteur
  - aérien, 41
  - paraboloidal, 43
  - plan, 55, 59, 163
  - réel, 184
  - sphérique, 41, 49, 55, 59, 69, 162, 184, 219, 224, 286
  - virtuel, 184
- Émission stimulée, 282
- Émulsion
  - blanchie, 100
  - contraste (d'une), 422, 433
  - holographique, 434
  - négative, 431
  - photographique, 100, 101
  - positive, 434
  - résolution (d'une), 424
- Enveloppe complexe, 342, 351, 352
  - modulée linéairement, 354
- Équation(s)
  - de Helmholtz, 31, 495
  - de Maxwell, 11, 14, 286
- Ergodicité, 513
- Espace
  - de Fourier, 225
  - image, 183, 184, 227, 237
  - objet, 183, 184
  - de Schwartz, 478
- Espérance mathématique, 512, 514
- Expérience
  - d'Abbe et Porter, 462
  - de Meslin, 64
  - de Michelson et Pease, 315
- Exposition, *voir* Lumination
- Facteur
  - d'atténuation, 49
  - d'obliquité, 19
  - réseau, 148
- Faisceau gaussien, 215, 216
- Fenêtre
  - de Brewster, 197
  - en chapeau de gendarme, 151
  - en losange, 151
- Fibre optique, 212, 266
- Figure d'Airy, 112, 239
- Filtrage
  - adapté, 450
  - linéaire
    - spatial, 65
  - de VanderLugt, 448, 451, 464
- Filtre
  - linéaire, 31, 231
  - spatial, 31, 35, 221, 307
  - passe-bande, 229, 290
  - passe-bas, 229, 236
- Fizeau, H., 314
- Flint, 259
- Fluorine, 259
- Fogret, É., 166, 173
- Fonction
  - aléatoire
    - ergodique, 514
    - du second ordre, 512
    - stationnaire, 512, 514
    - stationnairement corrélée, 518
    - temporelle, 512
  - d'autocorrélation, 234, 281, 451, 514
  - statistique, 513
  - temporelle, 513
  - de Bessel, 39, 111, 129, 482
  - de carré sommable, 477
  - cercle, 111
  - cissoïdale, 20
  - de corrélation, 451
  - de Heaviside, 471, 483, 496
  - d'Hermite, *voir* d'Hermite–Gauss
  - d'Hermite–Gauss, 196, 204, 415, 416, 418, 487–489, 492, 493
  - homographique, 412
  - d'intercorrélation
    - statistique, 518
    - temporelle, 519
  - pupille, 217, 220, 221, 226, 230, 234, 235, 242
    - généralisée, 220
    - réduite, 242
  - rectangle, 37, 106, 483
  - de réflexion, 99, 394, 403
  - sinus cardinal, 107, 121
  - symétrisée, 480
  - test, 467
  - de transfert, 35, 46, 230, 238
    - incohérente, 234, 235
    - incohérente normalisée, 235
    - de modulation, 235
    - spatiale, 225
  - de transmission, 27, 37, 99, 101, 104, 426
    - d'une émulsion, 434, 437

- d'un hologramme, 435–437
- d'un réseau, 123, 125
- triangle, 483
- Formule
  - de conjugaison
  - des cols, 211, 216
  - de Descartes, 70, 93, 94, 97
  - du dioptré sphérique, 70, 76, 186
  - de Newton, 84, 94, 97, 210, 211, 375, 386
  - avec origines en deux points conjugués, 91, 92
  - de Gullstrand, 84, 376
  - des interférences, 276
  - des réseaux, 396
  - de Sellmeier, 333, 339, 523
  - sommatoire de Poisson, 127, 128, 135
- Four à micro-ondes, 34
- Fourier, J., 1
- Foyer
  - image, 93
  - objet, 93, 94
  - d'une onde sphérique, 56, 64, 68, 81
- Françon, M., 2, 5
- Franges d'Young, 309, 314, 402, 421, 422, 429, 430, 455
- Fraunhofer, J. von, 49
- Fréquence
  - angulaire, 25, 26, 28, 137
  - de coupure, 32, 236, 238
  - normalisée, 346
  - spatiale, 160, 226, 231
  - amplitude associée (à une), 22
  - aspect vectoriel (d'une), 23
  - dimension (d'une), 21
  - direction de propagation associée (à une), 25, 104, 227
  - intermédiaire, 238
  - et onde plane, 24
  - vibration associée (à une), *voir* amplitude associée
  - longitudinale, 330
  - temporelle, 31
- Fresnel, A., 1, 12, 14
- Gabor, D., 4, 5, 421
- Gain complexe, 53
  - de cohérence, 295, 296, 301, 302, 304
  - de transfert du champ, 53, 60, 221, 256, 267, 295, 300, 301, 306
  - du transfert par transparence de courbure, 270
- Gélatine bichromatée, 437
- Goodman, J. W., 5
- Grain d'une émulsion, 431
- Grandissement
  - axial, 80
  - latéral, *voir* transversal
  - longitudinal, 80, 90
  - pour des distance finies, 80
  - des rayons de courbure, 77
  - transversal, 31, 69, 80, 97, 217, 226, 230, 378
  - aux centres, 77, 80, 188
  - pupillaire, 220, 242
  - aux sommets, 74, 75, 77, 78, 80, 186, 187, 219, 226
  - d'un système afocal, 90
- Grimaldi, F. M., 12
- Gullstrand, A., 84
- Hologramme
  - de Fourier, 429
  - de Gabor, 428
  - de Leith et Upatnieks, 429
- Holographie, 16
  - numérique, 448, 464
  - quantique, 463
  - en temps réel, 131
- Homographie, 412
- Huygens, C., 12–14
- Hyperfréquences, 12, 19, 33, 34
- Image
  - cohérente, 187, 217, 220
  - d'un objet plan, 79
  - conjuguée, 424
  - géométrique, 89, 218, 230, 234, 244
  - paraxiale, 72, 75, 221
  - physique, 219, 231
  - quantique, 463
  - réelle, 186
  - restituée, 423
  - virtuelle, 186
- Impédance, 106
  - d'un milieu, 16, 18
  - du vide, 18
- Indice
  - développé, 506
  - de groupe, 337
  - de réfraction, 18, 69
  - de l'air, 259
- Infra-rouge, 19
- Intégrale de Fresnel, 1, 119
- Intensité
  - radiométrique, 19, 499
  - vibratoire, 19, 99, 101, 106, 230, 286
  - instantanée, 321
  - mutuelle, 286
  - réduite, 245

- 
- Interféromètre
    - de Fabry–Perot, 189, 277
    - de Michelson, 276, 277, 284, 291, 292
  - Interstice, 85
  - Invariant
    - de Gauss
    - du dioptré, 76, 96
    - du miroir sphérique, 96
    - métaxial
    - du dioptré, 76, 77, 187
    - du miroir sphérique, 96
  - Iris, 219
  - Kirchhoff, G., 12
  - Kogelnik, H., 78
  - La (440 Hz), 251
  - Lampe spectrale, 266
  - Laplacien, 31, 485
  - Largeur de bande, 266
  - Laser, 188, 189, 196, 266, 289, 421
  - Lentille
    - GRIN, 204, 494
    - mince, 105
    - sphéro-cylindrique, 214
    - temporelle, 96
  - Léonard de Vinci, 12
  - Liquide d'indice, 33
  - Loi(s)
    - de composition des opérateurs, 59
    - de Descartes, 38
    - de Foucault, 246
    - du grandissement des rayons de Bonnet, 77, 80, 97, 188, 222
    - de Snell, *voir* de Descartes
  - Longueur d'onde temporelle, 352
  - Lorentzienne, 282
  - Losange de Fourier, 254, 288, 301, 330
  - Lowenthal, S., 2, 5
  - Lumination, 432, 501
  - Lune, source secondaire, 12
  - Maréchal, A., 2, 4, 5
  - Maxwell, J. C., 12
  - Mécanique
    - ondulatoire, 12
    - quantique, 12
  - Mesure algébrique, xxix, 42, 189
  - Méthode
    - fréquentielle, 21, 36
    - de la transformation de Fourier fractionnaire, 213
    - des trois fentes, 156
  - Michelson, A., 4
  - Microscopie
    - en champ proche, 32
    - optique, 33
  - Milieu
    - image, *voir* Espace image
    - objet, *voir* Espace objet
  - Miroir
    - bon, 32, 33
    - métallique, 34
    - parabolique, 218
    - parfait, 33
    - sphérique, 96, 188
  - Mode
    - fondamental, 196, 199
    - d'une fibre optique, 204
    - d'Hermite–Gauss, 197, 416
    - de Laguerre–Gauss, 197
    - longitudinal, 198
    - transversal, 189, 197
  - Modulateur
    - acousto-optique, 442, 456
    - à cristaux liquides, 16, 100, 441
    - magnéto-optique, 442
  - Modulation
    - d'amplitude, 99, 100
    - anisotrope, 99, 100
    - de biréfringence, 100
    - mixte, 100, 131
    - par modulation d'axe, 100, 131
    - par modulation du déphasage, 100, 131
    - de dichroïsme, 100
    - de fréquence, 34, 349, 366
    - mixte, 99
    - de phase, 99, 100
    - spatiale, 101
  - Moniteur, 24
  - Montage de filtrage, 461
  - Moyenne
    - d'ensemble, 514
    - statistique, 512, 514
    - temporelle, 513, 514
  - Multi-indice, 505
  - Multi-paire, 506
  - Newton, I., 12
  - Nombre d'Avogadro, 322
  - Notation complexe, 17, 281, 496
  - Noyau, 473
  - Objet
    - incohérent, 230
    - plan, 79, 229
    - réel, 186
    - virtuel, 186
  - Ombre géométrique, 14

## Onde

- évanescente, 32
- localement plane, 16
- objet, 425
- plane, 24
- porteuse, 266
- de référence, 425, 426
- signal, 425
- sphérique, 55, 57, 58, 70, 89
- stationnaire, 16

## Optique

- cohérente, 86
- de Fourier fractionnaire, 2, 213, 214
- de Gauss, *voir* paraxiale
- incohérente, 86
- métaxiale, 1, 43, 86, 214
- paraxiale, 43, 80, 86
- – incluse dans la théorie de la diffraction, 71

## Ordre de diffraction, 122, 131

- impair, 131, 133
- pair, 131, 132

## Oscillateur harmonique, 492, 493

## Ouverture rectangulaire, 37

## Paire

- de Fourier, 47, 121
- de lignes (ou traits) par mm, 21, 24

## Paquet d'ondes, 36, 333

*PDL* (*Polymer Dispersed Liquid Crystal*), 442

## Peigne de Dirac, 120, 121, 132, 462

## Période spatiale, 22

## Périodogramme, 516, 519

## Perméabilité

- d'un milieu, 16, 18
- relative, 18
- du vide, 18

## Permittivité

- d'un milieu, 16
- relative, 18
- du vide, 18, 230

## Phase quadratique, 45, 54, 159

## Photolithographie, 33

## Photométrie, 499

## Photon, 12

## Plan

- de corrélation, 454
- de Fourier, 106
- d'onde, 25
- principal, 93, 102

## Point(s)

- cardinaux, 87
- conjugués, 70, 91, 93
- élémentaire, 24

- principal, 81, 93, 216, 375, 382
- de Weierstrass (ou d'Young), 72, 217

## Poisson, S.-D., 14

## Polarisation

- elliptique, 100
- de la lumière, 16, 100

## Pôle d'une calotte sphérique, 41

## Polynômes

- d'Hermite, 196, 487, 492
- de Tchebycheff, 154

## Poursuite d'une cible, 144

## Principe

- de Babinet, 66, 435
- de Fermat, 14, 303, 391
- de Huygens-Fresnel, 15, 25, 35, 59, 61, 62, 170, 171, 173, 423, 494

## Processeur optique, 102

## Produit

- de convolution, 37, 217, 221, 225, 448
- – fractionnaire, 217, 241, 244
- – de Volterra, 473, 474
- scalaire, 475

## Profondeur de peau, 32, 34

## Projecteur de profil, 298

## Pupille, 87, 219, 227

- annulaire, 229
- circulaire, 235, 238
- d'entrée, 219, 221, 224, 229, 230, 235, 241
- de sortie, 219, 221, 242

## Quadrature entre onde directe et onde diffractée, 49, 105

## Radio-astronomie, 34

## Radio-électricité, 12, 13, 16, 19

## Radiométrie, 499

## Rayon

- de courbure, 41, 43
- – image, 190, 191
- – objet, 190, 191
- – temporel, 353
- transversal, 200, 203, 204, 206, 209
- – réduit, 413

## Rayons

- $\gamma$ , 19
- X, 19, 33

## Réalisation d'une fonction aléatoire, 511

## Récepteur

- aérien, 41, 170
- intermédiaire, 170, 184, 195
- plan, 59, 163
- réel, 184
- sphérique, 41, 55, 69, 162, 184, 286
- virtuel, 50, 165, 184

Réflexion spéculaire, 396

Réfrégier, P., 514

Régime

– de Bragg, 458

– de Raman–Nath, 457

Règle

– 1 (de l'origine du temps), 48

– 2 (de représentation d'une source ponctuelle), 56

– 3 (de représentation d'une onde monochromatique), 476

– 4 (de représentation de la diffraction de Fraunhofer), 477

– de Vaschy, 472, 473

Relation(s)

– de Kramers–Kronig, 338

– de Lagrange–Helmholtz, 81, 97, 228

– de Parseval, 477, 515

– de Parseval–Plancherel, 478–480

Repère de groupe, 335, 338, 351

Réponse percussionnelle, 53, 238, 243, 401

– de cohérence, 294, 301, 302

– cohérente, 223, 231, 234

– d'un détecteur, 114

– incohérente, 231, 245

– spatiale, 60, 221, 254

– spatio-temporelle, 257, 270, 293

– d'un système optique, 217

Représentation

– fréquence totale, 253, 261

– fréquentielle, 251

– fréquentio-temporelle, 253

– mixte, 253, 288

– spatio-temporelle, 252, 286, 288

– temporelle, 251

Réseau de diffraction, 100

– de dimensions finies, 124

– échelette, 394, 395, 405

– échelon de Michelson, 398, 406

– holographique, 402

– à ouvertures rectangulaires, 122, 157

– à traits infiniment fins, 121

Résolution

– d'un détecteur, 117

– d'une émulsion, 424

– intrinsèque d'un réseau de diffraction, 396

Résolvance, 396

Résonateur

– confocal, 98, 215

– dual, 419

– image, 410

– instable, 198, 414

– à modes confinés, 199

– stable, 198, 199

– symétrique, 98, 203

Restitution, 426, 455

– holographique, 423

Sensitométrie, 432

Silice, 259, 333, 340, 523

Snell, V., 38

Soleil, source primaire, 12

Source

– blanche, 263, 275

– ponctuelle, 289

– primaire, 12, 27

– réductible, 289

– secondaire, 12, 13

*Speckle*, 5, 275

Spectre

– angulaire, 31, 35, 37, 46, 104, 253, 423

– d'une ouverture rectangulaire, 37

– sphérique, 463

– cannelé, 264, 265

– infra-rouge, 19

– quadratique, 234

– ultra-violet, 19

– visible, 19

Sphère

– cardinale, 54, 164

– confocale, 45, 101

– de Fourier, 47, 48, 73, 100, 101, 103, 105, 106, 112, 160, 163, 165, 171, 173, 221, 227

– réelle, 50

– virtuelle, 50

– osculatrice, 43

– de Poincaré, 100

– de Rayleigh, 419

Stabilité d'un résonateur

– confocal, 215

– dual, 419

– à miroirs concentriques, 215

– à miroirs plans, 215

Stationnarité

– faible, 513

– forte, 512

– au sens large, 513

– au sens strict, 512

Stigmatisme

– approché, 105, 218, 223

– rigoureux, 217

Strioscopie, 460

Surface

– aérienne, 19

– équiphase, 16, 206

– d'onde, 13, 16

## Système

- afocal, 79, 89, 90, 209, 215
- centré, 78, 87
- schéma canonique (d'un), 84
- à foyers, 78, 79, 90, 91, 209
- linéaire, 31, 473, 474

Télécommunications optiques, 212, 266

Téléphone mobile, 34

Temps de calcul d'une transformée de Fourier, 102

## Théorème

- 1 (Diffraction de Fraunhofer), 48, 376
- 2 (Imagerie cohérente), 78, 376, 377
- 3 (Grandissement des rayons), 80
- 4 (Formation des images), 221
- 5 (Transfert du champ spatio-temporel), 257, 295
- 6 (Transfert de la cohérence), 295
- *central limit*, 510
- d'échantillonnage, 464
- de Parseval, 252, 478
- de Van Cittert–Zernike, 311, 313, 314, 318, 321, 327
- de Wiener–Khinchine, 285, 287, 515, 517–519

## Théorie

- classique de la formation des images, 246
- corpusculaire de la lumière, 12
- électromagnétique de la lumière, 14, 71
- métaxiale, 41, 55, 219, 273
- ondulatoire de la lumière, 12
- scalaire de la diffraction, 16, 21, 32, 34, 100, 101, 213, 251
- des signaux et systèmes, 1, 21, 393
- standard de la formation des images, 219

Train d'onde, 274, 277, 281, 282

- apparent, 274, 282, 283
- physique, 274, 282

Traitement du signal optique, 102, 445

## Transfert

- direct, 167, 171, 172, 184, 242
- d'ordre complexe, 164
- d'ordre réel, 164
- réciproque, 167, 171, 172, 185, 242
- virtuel, 170, 173

## Transformation

- de Fourier, *voir* Transformation de Fourier
- de Fourier–Bessel, 482
- de Fresnel, 1, 52, 54, 188, 494
- de Hankel, 39, 482
- Transformation de Fourier, 50, 234, 251

- ajustable, 154
- fractionnaire, 159, 160, 162–164, 167, 183–185, 188, 191, 194–196, 198, 217, 219, 490
- méthode (de la), 245
- inverse, 22, 30, 35, 50, 476
- optique, 48, 101–103, 159, 212, 221, 429, 448
- entre deux plans, 101, 103
- partielle, 476
- spatiale, 429, 476, 484
- standard, 159, 163, 165
- temporelle, 253, 476

Translation fractionnaire, 464

## Transparence

- associée à un dioptré, 87, 88
- associée à une lentille mince, 95
- associée à un système centré, 89
- de courbure, 45, 70, 74, 87, 88, 159
- et lentille mince, 45, 95

Trous d'Young, 109, 110, 264, 276, 308, 315, 327, 421, 424, 425, 455

Ultra-violet, 19, 33

Valeur principale de Cauchy, 483, 496

## Variable

- conjuguée, 21, 475
- réduite, 160, 161, 164, 165, 167, 172, 184–186, 191, 193–195, 243
- séparable, 106, 481

## Vecteur

- de Fresnel, 16
- d'onde, 24, 29
- de Poynting, 16–18, 500

Vergence, 85

## Vibration

- lente, 100, 130
- propre, 133
- rapide, 100, 130

Viénot, J.-C., 5

Vinci, *voir* Léonard de Vinci

## Vitesse

- de groupe, 334
- de la lumière dans le vide, 17, 18, 230
- de phase, 17, 47, 258, 267, 331
- spatiale, 332
- temporelle, 332
- VLT (Very Large telescope)*, 327

*Waist*, *voir* Col

Young, T., 14

Zernike, F., 4, 461

Zones de Fresnel, 67