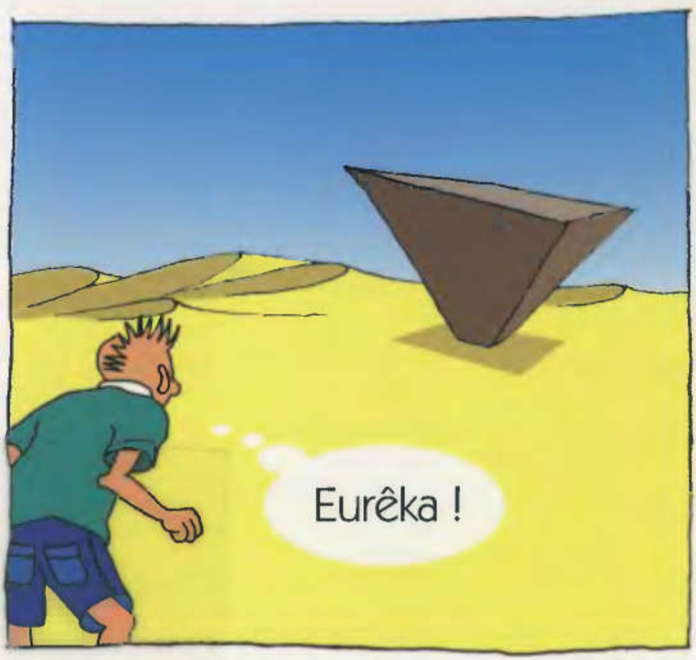
GÉOMÉTRIQUEMENT VÔTRE



JEUX ET ÉNIGMES MATHÉMATIQUES

DUNOD

Eurêka

Géométriquement vôtre

DUNOD

Dans la même collection

- Faites vos jeux — Eurêka
- Oh, les maths ! — Y. Perelman
- Le livre qui rend fou ! — R. Smullyan
- Ça y est, je suis fou !! — R. Smullyan
- Quel est le titre de ce livre ? — R. Smullyan

ISBN 2 10 002345 4

A mes enfants Caroline, Paul, Florence et Béatrice

AVANT-PROPOS

La géométrie classique a perdu sa place prépondérante dans l'enseignement secondaire. N'est-elle pas cependant le meilleur apprentissage possible pour la concentration, l'imagination du raisonnement, l'esprit de recherche ? C'est une merveilleuse discipline qui garde le lien avec l'image, et le monde concret. Elle trouve tout naturellement sa place dans les jeux mathématiques Dunod.

Voici donc un ensemble de problèmes, rangés simplement par ordre alphabétique* afin de laisser au lecteur le plaisir de découvrir lui même s'il s'agit d'application du 3e cas d'égalité des triangles, du théorème de Pythagore, des relations angulaires dans un cercle, du raisonnement sur les aires, de la définition d'une bissectrice, etc.

Les bases les plus élémentaires de cette discipline suffiront aisément pour s'attaquer à ce petit livre sans prétention. Prenez vite un papier, un crayon, une gomme. Prenez surtout un peu de temps, laissez provisoirement vos soucis de côté et ouvrez une page au hasard...

* ou approximativement alphabéthique

REMERCIEMENTS

Je remercie ici le journal Valeurs Actuelles d'avoir permis la retranscription des énigmes déjà publiées chaque semaine, dans leur rubrique-jeu.

Je remercie également certains lecteurs de ce journal (notament Messieurs Cohez, Clapier et Simot) pour m'avoir fait part de leurs idées.

À l'origine de certains de ces problèmes, se trouvent également les Professeurs Paul Vaderlind et Bernt Lindström (Université de Stockholm), Erik Agrell (Université de Chalmers à Göteborg) et François Berrondo (Université de Brest).

Je n'oublie pas non plus Mademoiselle Pierrette Ricard, mon ancien professeur de géométrie classique.

Qu'ils soient assurés ici de toute ma reconnaissance.

1 – ABC-Minute

Prenez un cercle de rayon 3,33 cm et un autre de rayon 4,44 cm tangent extérieurement au précédent au point A. La tangente commune aux 2 cercles touche le petit en B et le grand en C. Vous avez une minute pour calculer, à la minute près, l'angle $\widehat{BAC}$ ...

2 – Aide Humanitaire

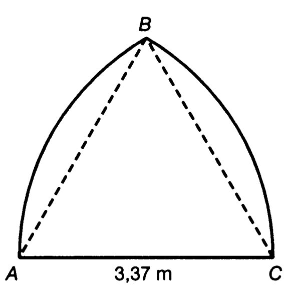
Nous devons expédier 77 boîtes de médicaments, ayant pour leurs 3 dimensions respectives 6,6 et 2 cm. Nous avons pour cela une caisse, parallélépipédique également, de dimensions 14,18 et 22 cm. Comment faire ?

3 – L'aire du trapèze

L'aire du trapèze est égale au produit de la longueur de l'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu du côté opposé. Pourquoi cela ?

4 – À la cathédrale d'Évry

La future cathédrale d'Evry comportera (du moins nous le supposons ici) une série de vitraux ayant une forme de triangles arrondis néogothiques, comme sur la figure ci-dessous :



Nous y observons que AB est un arc de cercle de centre C, que BC est un arc de cercle de centre A, la longueur d'AC étant de 3,37 m. Chacun de ces vitraux mesurera-t-il alors autant de m^2 qu'il y a de vertus théologales, de péchés capitaux, d'apôtres ou de commandements de Dieu ?

5 – À LA FOIRE

Trois petits gourmands achètent à la foire une pomme bien ronde dont la peau a été recouverte de chocolat. Pour se la partager, ils la coupent en 3 tranches circulaires d'égale épaisseur. Qui aura le moins de chocolat, celui qui a la part du milieu, ou chacun de ceux qui ont les autres morceaux ?

6 – À L'INTÉRIEUR D'UN QUADRILATÈRE

On considère un point quelconque à l'intérieur d'un quadrilatère convexe. Se peut-il que la somme des distances de ce point à chacun des quatre sommets du quadrilatère soit supérieure à 5 fois le tiers du périmètre ?

7 – À L'INTÉRIEUR D'UN TRIANGLE

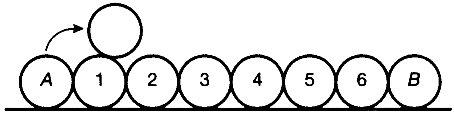
Placez-vous à l'intérieur d'un triangle. La somme des longueurs de ses 2 plus grands côtés est-elle inférieure, égale ou supérieure à la somme de vos distances à chacun des 3 sommets ?

8 – À LA PIZZERIA

J'invite mon petit-fils dans une pizzeria. On nous sert une pizza marinara triangulaire, chaque côté mesurant 28 centimètres. Je la coupe en 2 parties égales, d'un seul coup de couteau, et parallèlement à l'un des côtés. Le nombre de centimètres formé par la coupure est approximativement égal à l'âge de mon petit-fils, c'est-à-dire...

9 – AVEC 7 PIÈCES DE 10 FRANCS

Prenez 6 pièces de 10 francs, bien coincées dans une rainure, avec 2 places libres, l'une à gauche et l'autre à droite selon le schéma suivant :



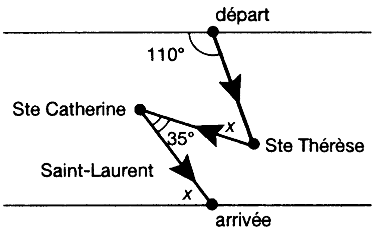
Faites alors rouler une 7^{e} pièce de la position *A* à la position *B*, bien précautionneusement.
Si, au départ, l'ange au flambeau qui orne cette pièce de monnaie, était debout face à vous, de quel angle sera-t-il penché à l'arrivée ?

10 – AUGMENTATION

Le rectangle *ABCD* mesure 3 cm de large et 7 cm de long. Doublez *AB* vers *B*, vous obtiendrez le point *B′*. Doublez *BC* vers *C*, vous obtiendrez le point *C′*. Doublez *CD* vers *D*, vous obtiendrez le point *D′*. Doublez enfin *DA* vers *A*, vous obtiendrez le point *A′*. Croyez-vous que l'aire du quadrilatère *A′B′C′D′* ainsi obtenue dépasse, oui ou non, la valeur de 100 cm^2 ?

11 – À TRAVERS LE SAINT-LAURENT

« Pour traverser le Saint-Laurent, je me suis arrêté sur l'île Sainte-Thérèse, puis sur l'île Sainte-Catherine, en suivant le plan ci-dessous :



C'est le fun. Mais pour trouver la valeur *x* des 2 angles indiqués, ce n'est pas le fun... ». Qu'en pensez-vous, cher lecteur ?

12 – AU CROQUET

Nous jouons au croquet. Les boules ont 10 cm de diamètre, le piquet en a 2,5, un arceau laisse un espace de 20 cm.

1° Est-il plus facile de franchir un arceau de face à une distance donnée ou de croquer à la même distance ? (croquer = heurter une autre boule).

2° De combien de fois est-il plus facile de croquer que de frapper le piquet (à la même distance bien entendu) ?

3° Est-il plus facile de franchir l'arceau de face à une distance donnée ou de frapper le piquet, à même distance ?

4° Supposons maintenant que les arceaux mesurent 30 cm. Est-il alors plus facile de franchir la cloche, étant bien placé, à une distance donnée, ou de croquer à la même distance ?

13 – AU LIDO

Lido est un quadrilatère tel que l'angle en *O* soit droit ($\widehat{DOL} = 90°$).

La somme des 3 longueurs *LI*, *ID* et *DL* est-elle alors, selon vous, inférieure, égale ou supérieure au double de la longueur *OI* ?

14 – Avec une hauteur et une bissectrice

Avez-vous remarqué que, dans tout triangle, l'angle formé en un sommet par la hauteur et la bissectrice qui en sont issues est égal à la demi-différence des 2 angles des 2 autres sommets ? Il ne vous reste plus alors qu'à le démontrer.

15 – Avec 2 tangentes et un point

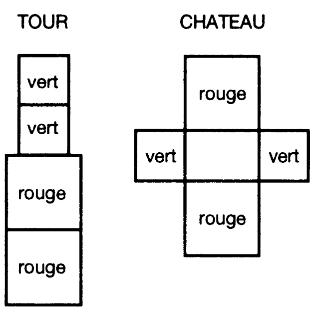
Sauriez-vous construire un cercle connaissant 2 de ses tangentes et un de ses points ?

16 – Alfred au cube

Alfred a reçu pour Noël 2 boîtes cubiques contenant des cubes identiques. Cela fait en tout 152 cubes. Quand Alfred met une boîte au-dessus de l'autre, il obtient une construction de 28 centimètres de haut. Quel est le volume de chacun de ces 152 cubes ?

17 – Avec quatre cubes

Prenez 2 cubes rouges identiques et 2 cubes verts identiques entre eux, un peu plus petits que les précédents. Placez-les les uns au-dessus des autres : vous obtiendrez ainsi une tour de 12 centimètres de hauteur et de 144 centimètres cubes de volume. Démolissez alors votre construction en hauteur et construisez à la place un château horizontal (vue de haut) comme ceci :



On demande de déterminer l'aire de la cour intérieure du château.

B

1 – BÉCÉOUIJI

On considère un triangle quelconque ABC. Soit O le centre du cercle inscrit et O' le centre du cercle exinscrit dans l'angle A^*. Soient I et J les projections respectives de O et O' sur la droite AB. Quel est alors selon vous le segment le plus long BC ou IJ ?

*Le cercle exinscrit est tangent à AB, BC, CA et extérieur au triangle.

2 – BISO-SEC-TRI-CÈLE

Montrez que si 2 des bissectrices d'un triangle sont égales, ce triangle est isocèle.

3 – BISSECTRICE

Dans tout triangle, la bissectrice d'un angle est confondue avec celle de l'angle formé par la hauteur et le diamètre du cercle circonscrit issu du même sommet. Pourquoi cela ?

4 – BISSECTRICES ET PROJECTIONS

Dessinez un triangle ABC et ses bissectrices issues de B et de C. Projetez leur point d'intersection sur chacun des 2 côtés AB et AC. Joignez ces projections H et K. Le segment ainsi obtenu est perpendiculaire à la bissectrice issue de A. Pourquoi cela ?

5 – BONNE ANNÉE 1987

Prenez un carton triangulaire de 1987 cm^2. Ecrivez-y en lettres dorées : « BONNE ANNÉE ». Puis calculez tout simplement le quart du produit des longueurs des 3 côtés du triangle (en cm). Divisez cela par le rayon du cercle circonscrit (en cm également). Ecrivez alors le mystérieux résultat en lettres argentées, à côté de l'inscription dorée…

6 – BOUM-X

$BOUM$ est un trapèze où BO est parallèle à MU. Les bissectrices des angles en M et en U se rencontrent en

X. Sachant que *BO* mesure 9 cm, *OU* 4 cm, *MB* 5 cm et *UM* 15,646 cm, sauriez-vous calculer la distance de *X* à *BO* ?

7 – La bobine de fil turquoise

Enroulez 32 mètres de fil turquoise, d'1 mm d'épaisseur autour d'une bobine en bois d'1 cm de diamètre et de 4 cm de hauteur. Quel est alors le diamètre de la bobine turquoise ?

ÉNIGMES C

1 – Un cadeau de Noël pas cher

Prenez un petit rectangle de carton blanc de 12 cm de long et 9 cm de large. Découpez-y une fenêtre centrale de 8 cm de long et 1 cm de large (figure 1). Il reste alors 100 cm^2 de carton puisque :

$$12 \times 9 - 8 = 100.$$

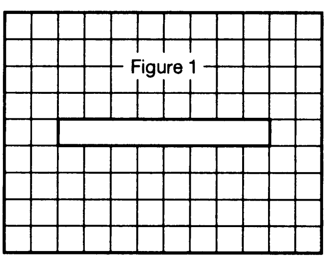


Figure 1

Joignez-y des petits ciseaux et la notice suivante :

« Comment découper ces 100 cm^2 de carton en 2 parties de telle sorte que l'on puisse les joindre pour réaliser un carré de 10 cm de côté ? »

Entourez tout cela avec un papier très chic et une ficelle dorée. Vous offrirez ce charmant cadeau peu ruineux au plus malin de vos petits-enfants...

2 – Catastrophe en Mer du Nord

Pour rechercher du pétrole, on plaça un derrick dans la Mer du Nord, sur un lourd socle en béton. La hauteur émergée, par mer calme, était de 40 m. A la suite d'une terrible tempête, il fut renversé autour de sa base. La

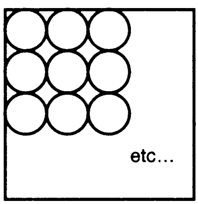
catastrophe fut filmée d'une plate-forme voisine et l'on remarqua ainsi que l'extrémité du derrick disparut dans la mer à 84 m du point où le derrick se dressait auparavant. Quelle est la profondeur de l'eau en ce lieu ?
Remarque : il ne faut pas tenir compte ici de la hauteur des vagues.

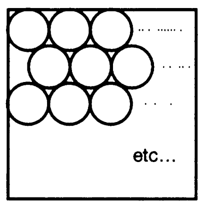
3 – LE CARRÉ FUNAMBULE

Considérez 3 droites non parallèles dans un même plan. Comment y construire un carré ayant 2 sommets sur l'une d'elles et un sur chacune des 2 autres ?

4 – LE CASIER À BOUTEILLES

Nos bouteilles ont 10 cm de diamètre. On les range dans des casiers carrés de l'une ou l'autre des 2 façons suivantes :





Si le casier est petit, le premier système est plus avantageux. Si le casier est grand, le second système permettra au contraire de ranger davantage de bouteilles. A partir de quelle dimension nous conseillez-vous de changer de système de rangement ?

5 – CERCLE ÉQUILATÉRAL

Considérez un triangle équilatéral, inscrit dans un cercle. Choisissez alors un point quelconque de ce cercle que vous joindrez respectivement à chacun des 3 sommets du triangle. L'un des 3 segments ainsi obtenus est égal à la somme des 2 autres ? Pourquoi cela ?

6 – CERCLE, RECTANGLE OU CARRÉ ?

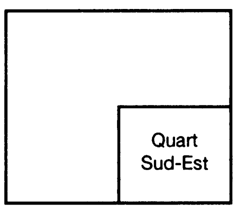
Le triangle équilatéral ABC est inscrit dans un cercle de centre O. D est un point quelconque de l'arc BC. BD coupe AC en E. CD coupe AB en F. On demande alors de comparer l'aire d'un carré ayant un côté égal à BC, celle d'un rectangle dont les côtés sont respectivement égaux à BF et CE, et l'aire du cercle de centre O. Quelle est la plus grande de ces 3 surfaces ?

7 – Chère trigonométrie

Combien y a-t-il de valeurs de x comprises entre 0° et 180° telles que l'équation suivante soit vérifiée : $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$?

8 – Un champ pour 4

« Mes chers enfants, vous êtes là tous les 4 et moi je vais mourir. Je n'ai qu'un champ à vous laisser, un carré de 300 m de côté. Vous vendrez le quart situé au sud-est pour payer tous les droits de l'héritage. Puis vous partagerez le reste en 4 parties d'un seul tenant de même forme et de même surface chacune ».

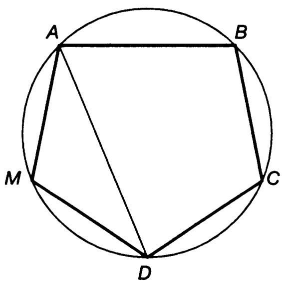


Les 4 enfants trouvèrent la solution de ce délicat problème. Le père en fut si content qu'il guérit aussitôt. Qu'en pensez-vous ?

9 – Un coin tranquille

J'ai acquis récemment, pour un prix très avantageux, un charmant terrain à la campagne, dont le seul inconvénient est sans doute d'être un peu trop bruyant. Il est en effet limité par trois tronçons rectilignes de même longueur : le chemin de fer, la route nationale et l'autoroute. Aussi ai-je décidé de construire ma maison en prenant comme centre le point dont la somme des distances à ces trois segments rectilignes est la plus grande possible. Où est situé ce point ?

10 – Cogitations sur pentagone



Considérez un pentagone $ABCDM$, inscrit dans un cercle. Comment démontrer que le produit des distances de M aux droites AB et CD est égal à celui des distances de M aux droites BC et DA ?

11 – Construction

Par deux points fixes A et B, sauriez-vous construire deux droites parallèles distantes d'une longueur donnée l inférieure à la distance qui sépare A et B ?

12 – Construction triangulaire

Un triangle rectangle a 10 cm de périmètre. Sa hauteur issue de l'angle droit mesure 2 cm. Construisez-le s'il vous plaît.

13 – Cordes perpendiculaires

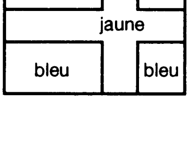
Sur un cercle de diamètre 10 cm, tracez 2 cordes perpendiculaires quelconques qui coupent respectivement le cercle en A, B et C, D. Les droites AB et CD se coupent en E. Veuillez alors calculer l'expression :
$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$...

14 – Crayon, gomme, équerre et compas

Prenez les 5 objets suivants : une feuille de papier blanc, une gomme, une équerre, un compas, un crayon. Sauriez-vous alors déterminer précisément deux segments dont la somme des longueurs soit égale à celle du crayon, et la racine carrée du produit égale à celle de la gomme ?

ÉNIGMES D

1 – Le drapeau Suédois



Voici le drapeau suédois : une croix jaune de largeur constante se détache sur un fond bleu, couvrant le tiers de la surface totale. Si ce drapeau mesure 1 mètre de longueur et 66 centimètres de largeur, saurez-vous trouver la largeur approximative de la croix jaune ?

2 – DANS LE DÉSERT

Deux hommes sont perdus dans une Jeep au milieu du désert. Depuis plusieurs heures, ils remarquent, à l'aide d'un système fort complexe, que la somme des carrés de leurs distances aux oasis de Sidi-Ben et de Ben-Sidi est égale au double du carré de leur distance à l'oasis de Sidi-Sidi.

« Nous sommes donc, dit le conducteur, sur une perpendiculaire à la piste qui joint Sidi-Sidi au milieu de la piste qui joint Sidi-Ben à Ben-Sidi. »

Qu'en pensez-vous ?

3 – DÉCOUPAGE

Tracez deux demi-cercles concentriques de rayons respectifs 2 cm et 4 cm. Découpez l'aire comprise entre ces deux demi-cercles et collez côte à côte les deux tronçons rectiligne. Quel est le volume du tronc de cône ainsi formé ?

4 – DEMI-DIFFÉRENCE

Pour obtenir la demi-différence entre 2 côtés AB et AC d'un triangle ABC quelconque, montrer qu'il suffit, par exemple, de tracer par le milieu M de BC la parallèle à la bissectrice de l'angle A qui recoupe le triangle en P, et de considérer la longueur AP.

5 – DEMI-TRIANGLE

On demande ici de tracer une droite passant par un point P situé sur l'un des côtés d'un triangle, et partageant ce triangle en 2 surfaces égales.

6 – DEVANT LA CLOCHE

Nous jouons au croquet. Les boules ont 10 centimètres de diamètre. Je dois passer la cloche formée par 2 anneaux perpendiculaires coupés en leur milieu. Quelle est la largeur minimale (en centimètres entiers) de chaque arceau pour que l'on puisse réellement franchir la cloche ?

7 – DUBLIN 1856

L'Irlandais Burlet démontra en 1856 que tout triangle rectangle a même surface que le rectangle ayant des côtés égaux aux segments découpés sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit. Comment fit-il ?

8 – DES DIFFICULTÉS DE CONSTRUCTION

Sauriez-vous construire un triangle dont le rayon du cercle inscrit mesure 2 cm et le rayon du cercle circonscrit 3 cm ?

9 – LA DIVINE PROPORTION

Les bâtisseurs de cathédrale avaient remarqué que dans tout pentagone régulier $ABCDE$, en appelant F le point d'intersection de AC et de BE, on a :

$$\frac{AC}{CF} = \frac{CF}{AF}$$

Sauriez-vous expliquer ce miracle en vous rappelant que le cosinus de 36° est égal au quart de $1+\sqrt{5}$.

ÉNIGMES E

1 – L'EAU, L'HUILE ET LE MERCURE

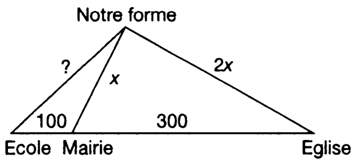
Dans un verre conique, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger tout en formant 3 couches d'égale épaisseur. Le verre contient-il alors une masse plus importante d'eau, d'huile ou de mercure ?

2 – UNE ÉVIDENCE ÉLÉMENTAIRE

Considérez un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) ; choisissez ensuite un point D au hasard sur AB ; construisez enfin sur le prolongement de AC un point E tel que la somme des longueurs $AD + AE$ soit égale à celle des longueurs $AB + AC$.

DE est bien sûr plus long que BC. Mais comment démontreriez-vous au juste cette évidence élémentaire ?

3 – L'ÉGLISE, L'ÉCOLE ET LA MAIRIE



Dans notre village, il n'y a qu'une seule route toute droite sur laquelle on rencontre successivement l'école, puis 100 mètres plus loin la mairie, puis 300 mètres plus loin l'église. Notre ferme se trouve au milieu des champs, 2 fois plus éloignée de l'église que de la mairie. A quelle distance est-elle de l'école ?

4 – ÉMIRAT

Paresseusement étendu sur le sable du désert, un riche émir contemple son dernier bijou. C'est une petite plaque d'or en forme de triangle équilatéral, tout incrustée de diamants. Il la tourne et la retourne amoureusement, puis constate soudain que l'ombre en est un triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale à la véritable longueur de chaque côté du bijou.
« Quel est, se demande-t-il alors, l'angle que forme le plan du bijou avec le sable horizontal du désert ? »
Mais il s'endort sous le soleil au zénith, avant d'avoir eu le temps de résoudre son problème. Sauriez-vous le résoudre à sa place en calculant par exemple le cosinus de cet angle ?

5 – L'ÉMIR ET SON PÉTROLE

Mon émirat comporte un vaste désert, au milieu duquel j'ai construit mon palais, et une zone territoriale en mer à laquelle je tiens beaucoup. Elle est en effet très étendue (autant que le tiers de mon désert) et recouvre une partie de ma nappe de pétrole. Sachant que j'ai trois fois plus de kilomètres carrés de désert à pétrole que de mer sans pétrole et que le septième de mon territoire sans pétrole se trouve en mer, sauriez-vous me dire précisément quelle est la proportion de ma nappe de pétrole qui se trouve sous la mer ?

6 – ENCADREMENT D'UNE MÉDIANE

Sauriez-vous démontrer que, dans un triangle, la longueur de toute médiane est comprise entre la demi-différence et la demi-somme des côtés qui l'encadrent ?

7 – ENCORE UN CARREAU CASSÉ !

Nous posons nous-mêmes nos carreaux de cuisine : ce sont des carrés jaune d'or. D'un geste maladroit, j'en casse 1 en 2 selon une fracture rectiligne.

– Tiens, me dis-je, les 2 morceaux sont superposables. Comment caractériser de façon aussi simple que possible une telle coupure ?

8 – ENTRE CHIEN ET LOUP

LOUP est un quadrilatère quelconque. *C* est au milieu de *LO*, *H* de *PU*, *E* de *PO*, *N* de *LU* et *I* de *CH*. Sauriez-vous calculer la distance de *I* à la droite *EN** ?

* Informations supplémentaires :

$LO = 2$ cm, $OU = 5$ cm, $LP = 6$ cm et $PU = 3$ cm.

9 – ÉQUILATÉRAL

Je suis un triangle équilatéral. La différence entre la longueur de l'un de mes côtés et celle d'une hauteur fait 20,37 mm. Vous en déduirez rapidement mon aire...

10 – L'ESSUIE-GLACE

Un pare-brise est balayé par deux essuie-glaces de longueur *L* articulés autour de deux points distants de *L*. Chacun d'eux couvre ainsi un demi-cercle. Quelle est la surface totale balayée ?

ÉNIGMES F

1 – DE FAUSSES COMPLICATIONS

ABC est un triangle rectangle dont l'hypoténuse *BC*, de longueur 7 centimètres, est entourée d'angles de valeurs respectives 58° et 32°. La bissectrice issue de *A* coupe l'hypoténuse au point *D*. Comment calculer sans calculette ni table trigonométrique, la valeur de l'expression : $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}-\dfrac{\sqrt{2}}{AD}$?

2 – DE FAUSSES DIFFICULTÉS

On rencontre souvent dans la vie de fausses difficultés : c'est le cas ici.

Sur un cercle de centre O, tracez 4 points A, B, C et D tels que $\widehat{AOB} = 56°$, que $\widehat{BOC} = 87°$, que $\widehat{COD} = 74°$ et que $\widehat{DOA} = 143°$.

Appelez M, N, P et Q les milieux respectifs des arcs AB, BC, CD et DA.

MP et NQ se coupent en I. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{PIN}$?

3 – FAUTEUIL CLUB, WHISKY ET GRAND SALON

Je suis assis sur le fauteuil-club du grand salon rectangulaire. Le bout de mon nez se trouve ainsi à 224 cm du coin nord-est, à 316 cm du coin nord-ouest, et à 447 cm du coin sud-est. Quant au nombre de whiskys que je viens d'absorber, il est égal à ma distance en mètres au coin Sud-Ouest. Vous en déduirez la couleur du bout de mon nez...

4 – FIGURE

On donne 5 points dans un plan tels que l'on ne puisse en trouver 3 alignés. On joint ces points deux à deux et l'on obtient ainsi des droites. En supposant qu'aucune de ces droites ne soit parallèle à une autre, quel est le nombre de points d'intersection de ces droites autres que les 5 points donnés ?

5 – UNE FIN THÉÂTRALE

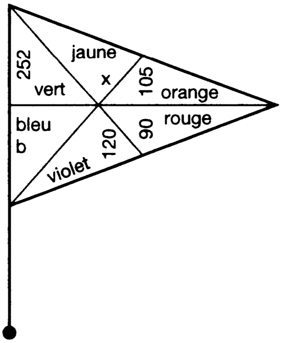
C'était une pièce de Molière. A la fin, sous un tonnerre d'applaudissements, les 7 personnages principaux saluent, sur la scène carrée. Chacun s'éloigne d'au moins 3 mètres de chacun des autres ? Quelle est la surface minimale de cette scène ?

6 – LE FANION MULTICOLORE

J'ai accroché sur mon voilier un fanion multicolore ainsi constitué (en cm^2).

Combien de cm^2 cela fait-il en bleu ? Combien de cm^2 cela fait-il en jaune ?

(Voir figure page suivante.)



ÉNIGMES G

1 – La grand-messe

Le vitrail principal d'une église moderne est un cercle de 2 m de diamètre, traversé par une croix, formée par 2 droites perpendiculaires qui se coupent en un point quelconque, situé à 50 cm du centre du vitrail. Pendant la grand-messe, l'un des paroissiens, quelque peu distrait, s'amuse à calculer la somme des carrés des longueurs des 2 segments de cette croix.
– Tiens, se dit-il, je trouve autant de mètres carrés qu'il y a de péchés capitaux.
Pourquoi cela ?

2 – La galette des rois

Le jour de l'Epiphanie, une mère de famille sert à ses enfants une galette des rois. Elle commence par la couper en 2 suivant un diamètre, et s'arrête en sentant que son couteau heurte la fève. Elle fait alors une nouvelle incision rectiligne, formant un angle de 45 degrés avec la précédente. Mais elle s'y prend maladroitement et heurte encore la fève. Ses enfants, plus mathématiciens que gourmands, s'aperçoivent alors que la somme des carrés des segments déterminés sur la deuxième incision par la fève est égale au double du carré du rayon de la galette.
S'agit-il, selon vous, d'une simple coïncidence ?

3 – DE LA GÉOMÉTRIE BIEN CLASSIQUE

Tracez un cercle de centre O et de diamètre $AB = 36$ mm. Par A, menez une tangente de longueur $AT = AB$. Tracez TO. Prolongez jusqu'à l'intersection D avec le cercle. Tracez alors le carré $DTUV$. Puis sur VD, tracez le point E tel que $DE = AB$. Par E menez la parallèle à TD qui coupe TU en W. Combien de centimètres carrés mesure approximativement l'aire du rectangle $EWUV$?

4 – GÉOMÉTRIE DANGEREUSE

ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 3,14 cm. D est un point de l'arc BC tel que l'arc BD ait une longueur de 1,994 cm. Sauriez-vous alors calculer, au millimètre près, la différence entre la longueur de la corde AD et les sommes des longueurs des cordes BD et DC ?

5 – GÉOMÉTRIE EN OR

Prenez un carré $ABCD$. Placez M au milieu de AB, N au milieu de BC, P au milieu de CD. Puis tracez les segments AP, CM, DN. AP et NC coupent DN respectivement en H et en I. Si tous ces segments étaient en fil d'or et que l'on vous demandait de choisir entre IN, la moitié de IC, le tiers de IM, le quart de ID ou le cinquième de AC, que choisiriez-vous ?

6 – GÉOMÉTRIE SECONDE

Considérez un quart de cercle AOB. Placez un point quelconque C sur l'arc AB. Projetez-le alors d'une part sur OA (point D) et d'autre part sur OB (point E). Joignez D à E. Le segment DE est-il alors plus court, égal, ou plus long que OA ?
(réponse à donner en 30 secondes).

7 – GÉOMÉTRIE RÉVOLUTIONNAIRE

Soit un triangle ABC rectangle en B. Soit M le point de l'hypoténuse équidistant des 2 côtés du triangle. Sauriez-vous trouver la valeur de l'expression suivante :

$$E = \sqrt{1830}\left(AC - \sqrt{AB^2 + BC^2}\right)$$

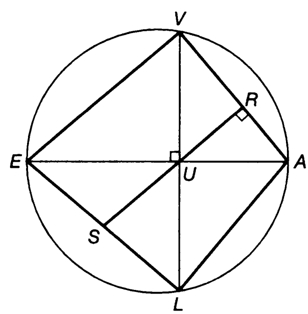
$$+1789 - \frac{\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} - \dfrac{\sqrt{2}}{BM}\right)}{(1848)^3}.$$

8 – GÉOMÉTRIE VARIABLE

Considérez un triangle muni de ses 3 médianes. Déformez-le en sorte que chaque côté prenne comme nouvelle longueur celle de la médiane qui aboutissait en son milieu. Quel rapport y a-t-il entre l'aire du triangle originel et celle du triangle déformé ?

9 – LA GÉOMÉTRIE DES VALEURS

VALE est un quadrilatère inscrit dans un cercle, tel que ses diagonales *VL* et *AE* soient perpendiculaires et se coupent en *U*. *R* est le pied de la perpendiculaire issue de *U* sur le segment *VA*. Le segment *RU* prolongé coupe *LE* en *S*. Sachant que *VL* a une longueur inférieure à celle de *AE*, quel sera le plus long des 2 segments, *LS* ou *SE* ?



10 – UN GRAND ET DES PETITS

Prenez un grand carré. Sauriez-vous le partager en *n* petits carrés, lorsque *n* vaut 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? 6 ? 7 ? 8 ? 9 ? Attention : il n'y a que 3 valeurs de *n* qui ne correspondent pas à une solution…

11 – LE GRAND CERCLE ET LES SIX PETITS

Prenez un cercle et divisez-le par 3 diamètres en 6 parties égales. Dans chacune d'elles, construisez un petit cercle inscrit. Quelle est la proportion de l'aire du grand cercle occupée par les 6 petits ?

1 – Hauteur de phare

Un phare est visible jusqu'à une distance de 32 km. A quelle hauteur au-dessus du niveau de la mer se trouve son projecteur ?

2 – Hauteur de satellites

Deux satellites identiques tournent autour de l'équateur avec la même vitesse, la même altitude et dans le même sens. Leur distance l'un de l'autre est en permanence égale à 2 fois le rayon terrestre. On peut toujours trouver au moins un point sur l'équateur d'où ces 2 satellites apparaissent selon des angles de vision distincts de 90°. Quelle condition sur la hauteur de ces 2 satellites peut-on en déduire ?

3 – Hauteur, médiane et bissectrice

Si dans un triangle, la bissectrice d'un angle est également bissectrice de l'angle formé par la hauteur et la médiane issues du même sommet, que peut-on dire de ce triangle ?

4 – Des hauteurs aux bissectrices

Les 3 hauteurs d'un triangle sont les 3 bissectrices du nouveau triangle formé par les pieds des hauteurs précédentes. Sauriez-vous le démontrer ?

5 – Héritage

Un fermier possède un très grand champ en forme de parallélogramme, $ABCD$, à l'intérieur duquel se trouve un puits en un certain point quelconque O. Se sentant mourir, il donne à son fils Pierre les 2 champs triangulaires AOB et OCD et tout le reste à son fils Jean, le puits lui-même restant leur copropriété. Sachant que la longueur de AB est supérieure à celle de BC, quel est, selon vous, celui des 2 frères qui est le plus favorisé ?

6 – L'HEXAGONE

Considérez un hexagone et dites-moi combien il y a de diagonales, c'est-à-dire de droites joignant 2 sommets non consécutifs.

Si vous trouvez cela trop facile, prolongez les 6 côtés pour en faire des droites et dites-moi alors en combien de points distincts des 6 sommets de l'hexagone se coupent toutes ces droites (côtés et diagonales) ?

7 – UNE HISTOIRE DE TANGENCE

Dessiner 2 cercles tangents en T, l'un d'eux étant intérieur à l'autre. Tracer ensuite une tangente quelconque en P au petit cercle qui coupe le grand cercle en A et B. Sauriez-vous alors démontrer que TP est la bissectrice de l'angle ATB ?

8 – HAUTEUR ET BISSECTRICE POUR ANGLE

Construisez un triangle quelconque ABC ($AC > AB$). Tracez ensuite la bissectrice AD puis la hauteur AH. Comment exprimeriez-vous de façon aussi simple que possible la valeur de l'angle $\widehat{DAH}$, en fonction des angles en B et en C ?

ÉNIGMES I

1 – INSCRIT ET CIRCONSCRIT

Tracez un triangle rectangle. Construisez ensuite son cercle inscrit et son cercle circonscrit. Vous constatez alors que la somme des côtés de l'angle droit est égale à la somme des diamètres des 2 cercles. Pourquoi cela ?

2 – INTERSECTIONS

On considère un quadrilatère quelconque. Montrez que les 2 segments qui joignent les milieux des côtés opposés, ainsi que celui qui joint le milieu des diagonales, se rencontrent en leurs milieux.

3 – ITALIE 1678

Vous avez peut-être appris autrefois le théorème de Jean de Ceva, mathématicien italien du XVIIe siècle. Voici ce qu'il dit : soit P un point quelconque intérieur à un triangle ABC, les droites AP, BP et CP recoupant respectivement le triangle aux points X, Y et Z.
Nous avons alors :

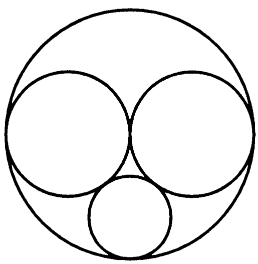
$$\frac{BX}{CX} \times \frac{CY}{AY} \times \frac{AZ}{BZ} = 1 .$$

Sauriez-vous encore le démontrer ?

ÉNIGMES J

1 – J'AI VU DES MARTIENS

J'ai vu des Martiens ; ils sont très vilains avec leurs pieds palmés, leurs bras démesurément longs, et surtout leur tête...



Imaginez : des figures toutes plates, rondes, de 15 cm de rayon, avec des yeux ronds tangents entre eux, et tangents au tour de la figure, de 7,5 cm de rayon. N'oubliez pas la bouche, ronde également, tangente aux yeux et au menton. Sauriez-vous, cher lecteur, calculer son rayon ?

2 – LE JARDIN DE MON GRAND-PÈRE

Dans le jardin de mon grand-père, 3 longues allées empierrées forment un triangle à l'intérieur duquel se

trouve un très beau et très vieux saule pleureur. Des allées recouvertes de gravier le joignent directement à chacun des 3 coins du triangle.
En se promenant dans son jardin, mon grand-père aime à dire que la longueur des allées recouvertes de gravier est comprise entre la moitié et la totalité de la longueur des allées empierrées. Êtes-vous bien de son avis ?

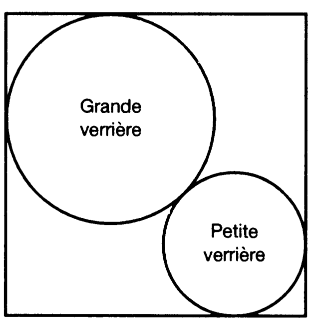
3 – Une jolie petite construction

Considérez un angle aigu xOy. Prenez alors un point P quelconque, extérieur à l'angle xOy. Puis, à partir de P, construisez une sécante qui coupe Ox en A et Oy en B de façon que le triangle AOB ait un périmètre égal à 7 cm...

ÉNIGMES K

1 – Kansas-City Airport

Voici, vue d'avion, le nouveau hall principal de l'aéroport de Kansas-City (rectangle de 40 mètres sur 45 mètres) avec ses 2 verrières circulaires, tangentes. Le rayon de la plus petite des 2 verrières fait 10 mètres. Combien fait le rayon de la grande verrière du Kansas-City Airport ?



1 – LENINGRAD-CARACARAÏ

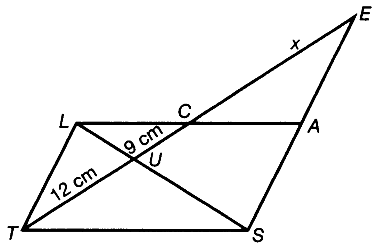
Un terroriste international, posté dans la forêt brésilienne près de Caracaraï (en un point exactement situé sur l'équateur à 60° de longitude ouest), attend ses ordres de Leningrad (60° nord, 30° est). La transmission s'effectue à l'aide d'un sous-marin spécialement équipé en un point situé sur le plus court chemin entre les 2 points à relier, sur le 15e méridien ouest. Est-il bien ainsi situé à mi-chemin entre Leningrad et Caracaraï ?

2 – UN LIEU BIEN CLASSIQUE

Dans ce triangle ABC, le côté BC est fixe. La différence des longueurs des côtés AB et AC est constante. De B, et de C, on abaisse des perpendiculaires à la bissectrice de l'angle A. On obtient ainsi les points B' et C'. A quelle courbe fixe appartiennent ces 2 derniers points lorsque A varie ?

3 – LASTUCE

$LAST$ est un parallélogramme où LA est parallèle à ST. U est un point de la diagonale LS, plus proche de L que de S. La droite TU coupe LA en C et le prolongement de AS en E. Voici d'ailleurs la figure correspondante :



Si l'on vous dit que TU mesure 12 cm et que UC en fait 9, quelle est la longueur de CE ?

1 – La mouche et l'araignée

Notre salle de bain est un cube de 2 mètres de côté. Pendant qu'une mouche grimpait la face sud en diagonale, du sud-est au sud-ouest, une araignée se promenait au plafond du coin nord-est au coin nord-ouest. La mouche et l'araignée arrivèrent ainsi ensemble au coin sud-ouest du plafond. Elles semblèrent ravies de se rencontrer et discutèrent longuement afin de déterminer l'angle formé par leurs 2 trajectoires. L'araignée soutenait que cela faisait 90°. La mouche disait que cela n'en faisait que 60°. A qui donneriez-vous raison ?

2 – Monuments parisiens

De mon hôtel, situé sur les boulevards des Maréchaux à Paris, j'aperçois à 3 km de mes yeux, la Tour Eiffel d'une part, la Tour Montparnasse d'autre part. J'aperçois aussi le dôme des Invalides, situé un peu plus loin à 2,25 km de chacune des 2 tours. Ces 2 dernières sont à 3600 m l'une de l'autre. Quelle est donc la distance qui me sépare à vol d'oiseau du tombeau de Napoléon ?

3 – Médianes

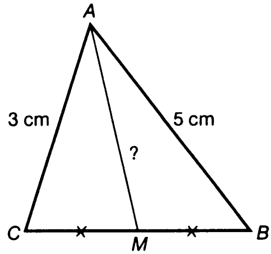
Se peut-il que la somme des longueurs des 3 médianes d'un triangle soit plus petite que les $\frac{3}{4}$ de son périmètres.

4 – Médianes perpendiculaires en rose et en bleu

Considérez un triangle *ABC* dont les médianes *BM* et *CN* sont perpendiculaires. Tracez alors les 3 carrés extérieurs au triangle, ayant pour côtés respectifs *AB*, *AC* et *BC*.
Coloriez les 2 premiers en rose, le troisième en bleu. Combien vous faudra-t-il de carrés bleus pour obtenir une surface égale à celle des 2 carrés roses réunis ?

5 – MÉDIANES PLAUSIBLES

Attention : l'angle en A est ici inconnu.



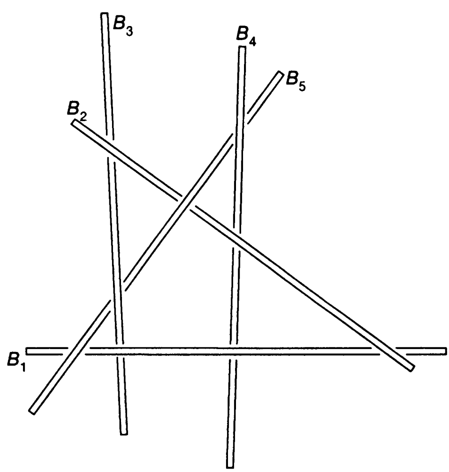
Quelles sont alors ici les longueurs plausibles pour la médiane AM :

2,5	0,9	7	4,6	4,2	1,1	3,9

en cm

6 – MIKADO SPATIAL

Prenez 5 baguettes très fines et rigides tirées par exemple d'un jeu de Mikado. Sauriez-vous construire la figure ci-jointe s'il n'y avait pas de pesanteur ?



Attention : il s'agit d'une représentation de l'espace vue de haut, et pour tout croisement de baguettes, l'une des 2 est clairement au-dessus de l'autre.

7 – M-O-C-H-E

Voici les longueurs respectives du triangle *MEC* : 4 cm pour *ME* ; 5 cm pour *EC* et 6 cm pour *CM*. Soit *H* le pied de la hauteur issue de *M*. Soit *O* le centre du cercle circonscrit. Tracez alors les bissectrices respectives des angles *EMC* et *OMH*. Puis calculez leur angle...

ÉNIGMES N

1 – NÎMES 1816

Vecten, professeur de mathématiques à Nîmes, fit, dans les annales de Gergonne, en 1816, la publication suivante : il prit un triangle rectangle : autour de chacun des côtés, il construisit extérieurement un carré. Il en joignit les nouveaux sommets et obtint ainsi un hexagone. Il démontra alors que la somme des carrés des 6 côtés de ce polygone était égale à 8 fois le carré de l'hypoténuse du triangle originel. Comment fit-il ?

2 – LE NOUVEAU CERCLE ÉQUILATÉRAL

A, *B* et *C* sont 3 points sur un cercle de rayon *r* tels que $AB = BC = l$.

D est un point intérieur au cercle, tel que le triangle *BCD* soit équilatéral. La droite *AD* coupe le cercle en *E*. Peut-on alors dire que *DE* est égal à *r* ou à *l* ? Et pourquoi ?

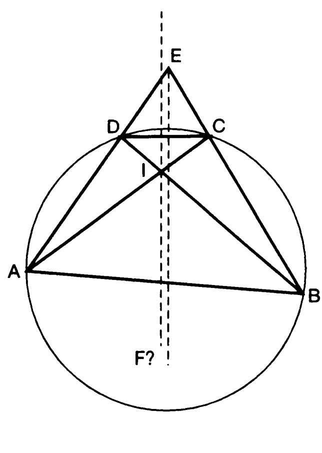
1 – ORANJADA

« Je ne bois plus que de l'Oranjada. C'est super bon, c'est pas cher et c'est écologique. On l'achète en effet, dans des cylindres métalliques de 226 cm^3 qui utilisent aussi peu de surface de métal que possible car elles ont une hauteur de… »

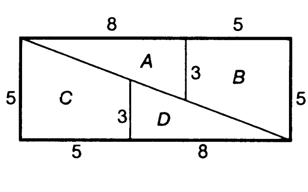
À vous de compléter, cher lecteur, le nombre manquant.

2 – OÙ EST PASSÉ LE POINT F ?

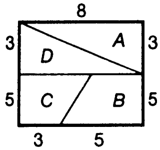
ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle. *AD* et *BC* se coupent en *E*. *BD* et *AC* se coupent en *I*. *F* est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BIA}$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BEA}$. Mais où est donc passé le point *F* ?



3 – OÙ L'ON DÉMONTRE QUE 64 ÉGALE 65



Dans un rectangle de côtés respectifs 5 et 13 cm, on découpe 2 triangles rectangles *A* et *D*, et 2 trapèzes, également rectangles *B* et *C*, comme indiqué ci-contre.



Puis on les assemble, comme sur la figure 2, pour formé un carré de 8×8.
Leurs surfaces n'ayant pas varié, dans l'opération, force est donc de constater que :

$$5 \times 13 = 8 \times 8$$

c'est-à-dire que 65 égale 64…

4 – Orange ou clémentine

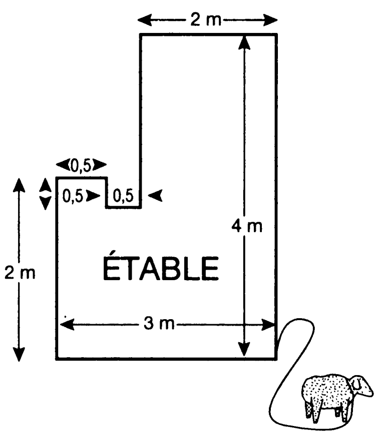
Le peau de la dernière orange que j'ai mangée pesait 4 fois plus lourd que celle de la dernière clémentine. Combien de fois l'orange pesait-elle alors plus lourd que la clémentine ?

ÉNIGMES P

1 – Parallélogramme

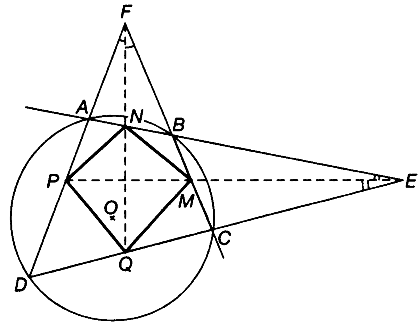
Un parallélogramme invariable *ABCD* se déplace dans un plan de façon que 2 côtés adjacents *AB* et *AD* passent respectivement par 2 points fixes *M* et *N*. Sauriez-vous démontrer qu'alors la diagonale *AC* passe elle aussi par un point fixe ?

2 – Pauvre mouton



Un pauvre mouton était accroché au bout d'une corde de 6 mètres de long au coin su-est de l'étable ci-desous, au milieu d'un immense champ. Quelle était la surface mise ainsi à sa disposition ?

3 – UNE PENSÉE POUR AIMENEPAICU



Dans un cercle de centre O, placez 4 points A, B, C et D. Les droites AB et CD se coupent en E. Les droites BC et AD se coupent en F. La bissectrice de l'angle en E coupe respectivement les segments BC et AD en M et en P. La bissectrice de l'angle en F coupe respectivement les segments AB et CD en N et en Q. Que pensez-vous du quadrilatère *AIMENEPAICU* ?

4 – PETIT T OU GROS T'

– Je suis le petit triangle équilatéral T, inscrit dans le cercle C. Mon périmètre est de 3 416 mm.
– Et moi, je suis le gros triangle équilatéral T', circonscrit au cercle C. Mon périmètre est de…
À vous de compléter, cher lecteur, la valeur manquante.

5 – LE PETIT VILLAGE DES LANDES

Nous voici dans un petit village des Landes. Le paysage y est tout plat. La voie ferrée, la nationale et les rues y sont parfaitement droites. La nationale est perpendiculaire à la voie ferrée. La gare est sur la nationale ; l'église aussi, 300 mètres plus loin. La rue Victor Hugo joint l'église à la mairie par un trajet de 250 mètres et la rue du Général-de-Gaulle joint la gare à la mairie en 250 mètres également. La rue Victor Hugo se prolonge au-delà de la voie ferrée par un passage à niveau manuel. Quelle distance doit effectuer le garde-barrière quand il se rend à l'église ?

6 – PÉRIMÈTRE ET DEMI

Considérez un point intérieur à un triangle quelconque. Joignez-le à chacun des sommets. La somme des longueurs des 3 segments ainsi obtenues est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du triangle. Pourquoi cela ?

7 – La pièce d'eau

Avez-vous remarqué la forme originale de la pièce d'eau du parc du château de R... ? Elle est limitée par les 2 allées *AB* et *CD*, des tiers de cercles concentriques (le centre étant matérialisé par la statue du marquis de R...), ainsi que par les 2 allées radiales *AC* et *BD* au bout desquelles on peut apercevoir la statue du marquis de R... Indiquez, s'il vous plaît, le plus court chemin pour aller en marchant de *A* à *B*.

8 – Pier

Dans un cercle de rayon *r*, tracez un triangle équilatéral *BIP* et un carré *CARE*. La somme des longueurs *PI* + *ER* est-elle alors inférieure, égale ou supérieure au produit $\pi \times r$?

9 – Plein de longueurs !

Tracez un cercle dont le diamètre a pour longueur 8 cm. Soit *BC* une corde de longueur 6 cm. Soit *A* un autre point quelconque de ce cercle. Soit enfin *P* un point quelconque du plan, qui soit tel que le segment *AP* mesure 4 cm. On projette *P* sur *AB* et *AC*. Quelle est la longueur du segment qui joint les 2 pieds des 2 projections ?
(Ne pas oublier la loi des sinus dans un triangle.)

10 – Le plus grand voyageur

Paul va de Gdansk (latitude 55°, longitude 18° est) au Cap (lat. 35° sud, long. 18° est).
Caroline va d'Anchorage (lat. 60°, long. 150° ouest) au Caire (lat. 30°, long. 30° est).
Béatrice va du pôle Sud à Miami (lat. 25° nord, long. 80° ouest).
Florence va de Bélen (lat. 0°, long. 50° ouest) à Nairobi (lat. 0°, long. 40° est).
Trouvez le plus grand voyageur.

11 – La plus simple démonstration du théorème de Pythagore

« Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des 2 autres côtés ».

Comment démontreriez-vous, aussi simplement que possible, ce fameux théorème de Pythagore ?

12 – Points sur cercle

Placez au hasard 3 points sur la circonférence d'un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'ils se trouvent tous les 3 sur une même demi-circonférence ?

13 – Polygones

Partagez un cercle en n arcs égaux, puis, joignez les sommets ainsi obtenus, de p en p, jusqu'à retrouver le sommet de départ. Combien y a-t-il de côtés au polygone ainsi formé ?

Remarque : on pourra vérifier la formule générale ainsi trouvée pour $n = 10$, avec successivement $p = 2$, $p = 3$ et $p = 4$.

14 – Pouf

Il était une fois un petit cercle et un grand cercle, tangents extérieurement au point P. Tous deux étaient posés sur une tangente commune horizontale, respectivement au point F et au point U. La droite FP recoupait le grand cercle au point O. Combien mesurait $\widehat{OUF}$?

15 – Ptolémée

Vers 125 après Jésus-Christ, dans sa syntaxe mathématique nommée « Almageste » (« très grande » , en arabe), Ptolémée donne le premier traité de trigonométrie rectiligne et sphérique qui nous soit parvenu. On y trouve notamment la démonstration du théorème suivant : dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Sauriez-vous aussi démontrer ce théorème ?

Remarque : dans le cas où les diagonales sont orthogonales, une très belle démonstration en a été faite par le géomètre hindou Brahmagupta au VII^{e} siècle.

16 – Perpapenradicullelle

Deux droites parallèles entre elles coupent 2 droites perpendiculaires entre elles, et déterminent ainsi sur ces dernières 2 segments respectivement égaux à 3 et 4 cm. Quelle est donc la distance entre les 2 parallèles ?

17 – PRODUIT DE LONGUEURS

« Dans tout triangle, le produit des longueurs de 2 des côtés est égal à celui de la longueur du diamètre du cercle circonscrit par la longueur de la hauteur s'appuyant sur le 3^e côté » .
Sauriez-vous démontrer cette charmante propriété ?

ÉNIGMES Q

1 – LE QUADRILATÈRE

Un quadrilatère inscrit dans un cercle présente la particularité suivante : une de ses diagonales est un diamètre. Que pensez-vous alors des projections sur l'autre diagonale des 4 côtés de ce quadrilatère ?

2 – UN QUART ET DEUX DEMIS

Tracez un quart de cercle et les 2 demi-cercles intérieurs ayant pour diamètre les rayons extrêmes du quart de cercle précédent. Comment démontreriez-vous, le plus simplement possible, que la surface commune aux 2 demi-cercles est égale à la surface du quart de cercle restée à l'extérieur des 2 petits ?

R

1 – Recherches pétrolières

Des procédés fort complexes ont montré l'existence d'une nappe de pétrole très précisément délimitée par les 65^e et 66^e parallèles, d'une part, par les 6^e et 7^e méridiens d'autre part.
Quelle est sa surface ?

2 – Les remparts

Une petite ville est entourée de remparts en forme de demi-cercle. Trois portes permettent d'en sortir : les 2 premières, P_1 et P_2, sont situées aux extrémités du côté droit, la troisième, P_3, sur un point quelconque du demi-cercle. De chacune de ces portes partent des routes tangentes au demi-cercle qui se rencontrent en 2 points. Une autre longe la partie droite des remparts. Un cycliste contourne cette ville à vitesse constante, le long des routes que l'on vient de décrire. Il constate que s'il élève au carré le temps de parcours $P_1\ P_2$, il obtient le produit des temps de parcours $P_1\ P_3$ et $P_3\ P_2$. Comment expliqueriez-vous ce phénomène ?

3 – Racines de cercle pour tangentes entières

Considérez 2 cercles égaux de rayon $\sqrt{2}$ cm de centres respectifs A et B. Ils sont tangents en T. La droite AB recoupe les cercles en C et D. Par chacun de ces points C et D, on mène ensuite les tangentes au cercle de centre B, qui se coupent en E. Les longueurs des segments EC et ED sont alors des nombres entiers. Lesquels ?

4 – Le ruban de scotch

Un rouleau de scotch d'1 mm d'épaisseur entoure un cylindre central en plastique de 2 cm de diamètre. La bobine pleine fait 4 cm de diamètre. Quelle est la longueur du rouleau de scotch ?

1 – La sieste

Albert somnole, paresseusement étendu sur une terrasse ensoleillée. Il s'amuse à observer sa main droite : « Mon index et mon majeur font un angle approximatif de 20°, se dit-il. Si je conserve ce même écartement, puis-je tourner ma main de telle sorte que les projections au sol de mes doigts soient perpendiculaires ? » 1 minute plus tard, ayant trouvé la réponse, il se rendort profondément. Vous seriez-vous rendormi aussi vite à sa place ?

2 – Si la Terre étaient une orange

Entourez une orange bien ronde avec une ficelle rouge. Puis allongez la ficelle de façon à entourer l'orange tout en restant à 1 m de sa surface. Entourez alors la Terre entière (supposée sphérique) avec une ficelle bleue. Et allongez cette ficelle de façon à entourer la Terre tout en restant à 1 m de sa surface.
Quel est, selon vous, le plus grand des 2 allongements, celui de la ficelle rouge autour de l'orange ou celui de la ficelle bleue autour de la Terre ?

3 – Surfaces égales

Considérez un triangle isocèle ABC, rectangle en A. Tracez-en le demi-cercle circonscrit, puis l'arc de cercle tangent en B et AB et en C à AC, intérieur au triangle. L'aire comprise entre l'arc et le demi-cercle est égale à celle du triangle lui-même. Pourquoi cela ?

4 – Les statues

Dans un très grand parc, une allée rectiligne passe successivement sur 4 petits ponts, séparés par des intervalles inégaux, au milieu desquels se trouvent 3 statues de personnages historiques. On trouve ainsi successivement : Vercingétorix, Charlemagne et Henri IV. Tandis qu'au milieu de l'intervalle séparant le premier pont du quatrième se trouve Louis XIV. On décide alors de rajouter une statue de Napoléon. Où conseilleriez-vous de la placer :

- à mi-chemin entre Vercingétorix et Henri IV ?
- à mi-chemin entre Charlemagne et Louis XIV ?

5 – Surfaces à réfléchir

Sur un triangle *ABC* équilatéral, on place 3 points *D*, *E* et *F* respectivement sur les côtés *BC*, *CA* et *AB* de telle sorte que *BD* = *CE* = *AF* = *AB* : 3. Puis on joint *A* à *D*, *B* à *E* et *C* à *F*. On voit alors apparaître, bordé par ces 3 nouveaux segments, un petit triangle *MNP*. On demande ici le rapport entre la surface *ABC* et celle de *MNP*. Réfléchissez...

6 – Secret

Bonjour. Je suis un triangle aux mensurations parfaites : 95 mm de périmètre pour une aire de 380 mm^2. Quant au rayon de mon cercle inscrit. C'est un secret...

ÉNIGMES T

1 – Tangence

Deux cercles sont tangents extérieurement. Par leur point de tangence, on mène 2 droites, qui coupent les 2 cercles en 4 autres points. Quelle est la nature du quadrilatère obtenu en joignant ces 4 points ?

2 – Terre, Lune et Soleil

Depuis la Terre, la Lune et le Soleil semblent à peu près de même grosseur. Sachant que le Soleil est environ 387 fois plus éloigné que la Lune, combien faudrait-il de lunes pour faire un volume égal à celui du Soleil ?

3 – Un trapèze rouge et bleu

Il était une fois un trapèze coupé en 4 petits triangles par ses 2 diagonales. Les 2 de ces triangles dont les bases étaient parallèles étaient peints en bleu. Les 2 autres étaient en rouge. Si l'on vous dit que l'un de ces triangles rouges faisait 17 cm^2, combien faisait l'autre ?

4 – TRAP

TRAP est un trapèze isocèle dont les 4 côtés sont tangents à un même cercle. Si *TR* mesure 124,5 mm et que *PA* mesure 75,5 mm, combien de cm font chacun des 2 côtés égaux *TP* et *RA* ?

5 – DE TIC À TRAC EN TROIS MINUTES

TRAC est un parallélogramme où la longueur du segment *RA* est de 6,2832 cm et où la longueur du segment *CA* est de 3,1416 cm. I est au milieu de *RA*. Vous avez 3 minutes pour calculer l'angle *TIC*.

6 – TRIANGLE

Sauriez-vous construire un triangle connaissant son périmètre, un angle et la hauteur abaissée du sommet de cet angle ?

7 – LE TRIANGLE A GRANDI

Il était une fois un triangle *ABC* très mignon qui se plaignait amèrement de sa petite taille : « Je ne suis pas assez grand, disait-il. Je ne mesure que 7 cm^2, c'est ridicule. Tant que je ne mesurerai pas 50 cm^2, je serai bourré de complexes ! »

La fée Trigéomme eut pitié de lui : « Ne pleure plus, petit triangle *ABC* : je vais te faire grandir. Double *AB* vers *B*, tu obtiendras le point *M*. Double *BC* vers *C*, tu obtiendras le point *N*. Double *CA* vers *A*, tu obtiendras le point *P*. » Puis, d'un coup de baguette magique, la gentille fée Trigéomme transforma le petit triangle *ABC* en *MNP*. Fut-il ainsi délivré de tous ses complexes ?

8 – TRIANGLE À CARREAU

Prenez une feuille à petits carrés, ordinaire. On demande ici de tracer un triangle équilatéral ayant ses 3 sommets sur des croisements du papier quadrillé. Bonne chance…

9 – LE TRIANGLE ET LES TROIS CARRÉS

Observez un triangle *ABC*. Utilisez chacun de ses côtés pour construire un carré extérieurement au triangle. Joignez un sommet du triangle au centre du carré opposé. Vous obtiendrez ainsi un segment égal et perpendiculaire au segment qui joint les centres des 2 autres carrés. Pourquoi cela ?

10 – TRIANGLE RECTANGLE CONSÉCUTIF

Trouver un triangle rectangle tel que les longueurs de ses côtés soient 3 nombres consécutifs.

11 – TROUVEZ LE DIAMÈTRE

Placez sur un cercle les points *A*, *B* et *C* de telle sorte que la longueur de *AB* soit de 3 cm et que celle de *AC* soit de 4 cm. Abaissez alors une perpendiculaire *AH* sur la corde *BC*. Si l'on vous dit que *AH* fait 2,5 cm, quelle est, parmi les 7 longueurs suivantes, celle que vous choisiriez comme diamètre du cercle initial :

3,6 cm	4,2 cm	4,8 cm	5 cm	4,5 cm	6 cm	4 cm

12 – TRUC-X

TRUC est un parallélogramme. *X* est dans *TRUC*. Le triangle *TRX*, le triangle *RUX* et le quadrilatère *CTXU* ont la même aire. Comment construiriez-vous précisément le point *X* ?

ÉNIGMES U

1 – ULM 1860

Le recteur de l'école industrielle (real schule) d'Ulm, Nagel, né en 1803 et mort en 1882, démontra que les rayons qui joignent les sommets d'un triangle au centre du cercle circonscrit sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent 2 à 2 les pieds des hauteurs du triangle.
Sauriez-vous en faire autant ?

2 – UNSURABÉPLUSUNSURACE

Considérez un angle quelconque ayant pour sommet un point *A*. Sur la bissectrice de cet angle, on construit un point *P*. Puis, on fait varier une droite sécante *D* par le point *P*. Soit *B* et *C* les points où cette droite rencontre chacun des côtés de l'angle *A*.

L'expression « $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ » dépend-elle, oui ou non, de la position précise de la sécante D ?

ÉNIGMES

VWXYZ

1 – UNE VALEUR BIEN SYMPATHIQUE

Tracez 2 cercles égaux de rayon 5 cm, et dont les centre O et O' sont distants de 7,07 cm. Par A, un des points d'intersection, tracez une droite quelconque qui coupe le premier cercle en B et le second en C. Calculez alors l'expression (en cm^2) $AB^2 + AC^2$. Vous obtenez une valeur bien sympathique. Laquelle ?

2 – LE VIEUX POLYGONE

Il était une fois un polygone régulier fier de ses multiples côtés et de ses nombreux angles tous égaux à 176 degrés et 24 minutes. Il se trouvait très beau. Pourtant, il était déjà bien vieux : son âge était en effet égal au nombre de ses côtés, c'est-à-dire…

3 – LE VILLAGE ALSACIEN

La rue principale coupe la rue de Général-De-Gaulle, perpendiculairement, sur la place de la Mairie. L'église catholique donne sur la rue principale, et l'église protestante sur la rue du Général-De-Gaulle. L'école est située sur la rue qui joint les 2 églises, à égale distance à vol d'oiseau (500 m) de chacune des 2 rues précédentes. Toutes les rues sont rectilignes. L'instituteur demande un jour à ses élèves de calculer la somme des inverses des distances en mètres de la mairie à chacune des 2 églises. Ils ne connaissent ni la trigonométrie ni la géométrie analytique. Que doivent-ils répondre à leur instituteur ?

4 – VUE D'AVION

Par le hublot de l'avion, je peux voir un morceau d'île, un morceau de nuage et un peu de mer. Sachant que le nuage occupe la moitié du hublot, qu'il cache ainsi un quart de l'île, qui semble alors occuper elle-même seulement un quart du hublot, quelle est, au travers de ce hublot, la proportion de mer cachée par le nuage ?

5 – WALLACE OU SIMSON

Prenez un triangle ABC. Tracez son cercle circonscrit. Placez alors un point M quelconque sur ce cercle. Abaissez les 3 perpendiculaires issues de M sur chacune des droites AB, BC et CA.

Les 3 pieds respectifs correspondants H, K et L sont alignés. Ils forment la droite de Simson, ainsi nommée d'après Robert Simson (1687-1768). C'est pourtant seulement en 1797 que Willian Wallace la découvrit... Comment fit-il ?

6 – UNE VIE DE CHIEN

Monsieur et Madame Dubois vont faire une promenade avec leur chien. Chacun d'eux voulant lui-même le tenir en laisse, ils finissent par accrocher à la pauvre bête 2 chaînes différentes, mesurant chacune 1 m. Sachant que Monsieur et Madame Dubois marchent toujours à 1 m l'un de l'autre, quelle est à chaque instant la surface dans laquelle le chien peut évoluer librement ?

7 – ZONE PIÉTONNIÈRE

Une zone piétonnière est formée par 7 petites rues rectilignes. Se peut-il que chacune d'elles en croise exactement 3 autres ?

1 – 2 BOUGIES

Deux bougies cylindriques de même qualité ont des longueurs et des grosseurs différentes. La rouge se consume en 3 heures et demi et la blanche en 5 heures. Si on les allume en même temps, elles ont la même longueur au bout de 2 heures. Si la rouge mesure 21 centimètres de long et 2,5 centimètres de rayon, quelle est la longueur de la blanche ?

2 – LES 2 CERCLES

Deux cercles sont tangents intérieurement en un point A. Soit B le point diamétralement opposé à A sur le plus grand des 2 cercles. On y mène une corde BD, tangente en C au plus petit des 2 cercles. AC est alors la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$. Pourquoi cela ?

3 – LES 2 LUNES

Considérons un triangles ABC rectangle en A, ayant pour côtés respectifs : $AB = 3$ cm ; $BC = 5$ cm ; $CA = 4$ cm. Tracez le demi-cercle circonscrit à ce triangle. Puis tracez les 2 demi-cercles extérieurs de diamètres respectifs AB et AC. On demande ici de calculer, sans se fatiguer, la somme des aires des 2 lunes ainsi formées.

4 – LES 2 PONTS

Un grand canal rectiligne passe entre 2 petits villages A et B, plus près de l'un que de l'autre. On veut y construire 2 ponts perpendiculaires aux rives. Le premier sera tel que les 2 villages soient à distance égale de l'entrée correspondante du pont ; le second tel que la route joignant les 2 villages soit aussi courte que possible. Comment faut-il s'y prendre ?

5 – LES 3 CERCLES

Considérons 2 cercles de rayons respectifs p et q, qui se coupent en un point A. Puis traçons une tangente commune à ces 2 cercles qui les touche respectivement en B et C. Appelons r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Comment démontrer la relation :
$r^2 = p \times q$?

N.B. Ne pas oublier que dans tout triangle XYZ aux côtés respectifs x, y et z, nous avons :

$$\frac{x}{\sin \hat{x}} = \frac{y}{\sin \hat{y}} = \frac{z}{\sin \hat{z}}$$

6 – 900° À L'OMBRE

Il fait très chaud. Nous sommes à l'ombre sous une tente qui a la forme d'un polygone convexe dont la somme des angles fait 900°. S'agit-il d'un pentagone, d'un hexagone ou d'un septagone ?

7 – 3 MORCEAUX DE DIAGONALE

Considérez le parallélogramme $ABCD$ ($BC > AB$). Placez le point M au milieu de AD puis le point N au milieu de CD.

Les droites BM et BN coupent la diagonale AC en 3 morceaux AP, PQ et QC. Quel est le plus grand des 3 ?

8 – LES 3 PERPENDICULAIRES

Sauriez-vous démontrer que la somme des 3 longueurs des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur à un triangle équilatéral sur chacun des côtés est indépendante de la position précise de ce point ?

9 – 3-4-5 BISS

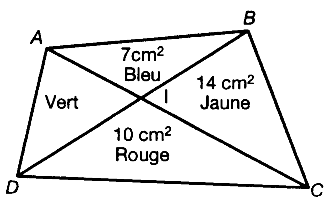
Dessinez un triangle de côtés respectifs 3, 4 et 5 cm. Vous verrez apparaître un bel angle droit, que vous couperez en 2 parties égales. Quelle est la longueur de la bissectrice ainsi dessinée ?

10 – LES 4 ARMURES

Dans un musée, une petite pièce carrée (de 3,414 m de côté) présente une armure dans chacun de ses coins. Le conservateur pense qu'elles seraient mieux mises en valeur si chacune des 4 était placée dans une niche de section triangulaire (une dans chaque coin), de telle façon que la pièce ainsi déformée comporte 8 côtés égaux. Le menuisier chargé de ce travail se demande au préalable quelles doivent être les dimensions de ces niches. Aidez-le.

11 – LES 4 COULEURS

Observez la figure suivante :
Quelle est l'aire coloriée en vert ?



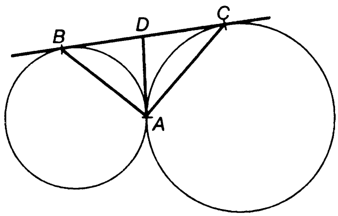
12 – LES 5 CERCLES

Sur chacun des côtés d'un quadrilatère inscriptible, on construit un cercle quelconque admettant ce côté comme corde. Ces 4 cercles se coupent 2 à 2 en 4 autres points qui appartiennent à un certain nouveau cercle. Sauriez-vous le démontrer ?

13 – 6 POUR 1

Considérez un grand triangle et ses 3 médianes concourantes. Vous déterminez ainsi 6 petits triangles d'aire identique. Pourquoi cela ?

1 – ABC-Minute



Traçons par A la tangente aux 2 cercles qui coupe BC en D. Nous avons : $DA = DB = DC$. A est donc sur le demi-cercle centré en D. L'angle $\widehat{BAC}$ vaut ainsi 90°.

2 – Aide Humanitaire

Calculons l'aire de chacun des côtés de la boîte :

$36\ cm^2$ ou $12\ cm^2$.

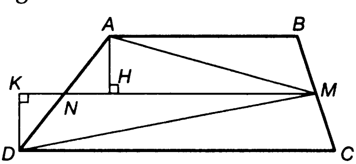
Ce sont des multiples de 3. Calculons l'aire de chacun des côtés de la caisse :

$252\ cm^2$; $396\ cm^2$; et $308\ cm^2$.

Cette dernière n'est pas un multiple de 3. Or le volume total des 77 boîtes ($5\ 544\ cm^3$) est égal à celui de la caisse. On ne peut donc laisser de la place libre dans la caisse. Cependant la 3ème face ($308\ cm^2$) ne pourra être précisément couverte par les aires des faces des petites boîtes : il est donc impossible de mettre les 77 petites boîtes dans la caisse.

3 – L'aire du trapèze

Observons la figure ci-dessous. M étant le milieu de BC.



Aire ADM = ($AD \times$ distance de M à AD) : 2

Nous voulons donc démontrer que l'aire d'un trapèze est égale à 2 fois l'aire du triangle ADM :

Or : aire ADM

= aire ANM + aire NMD.

$$= \frac{1}{2} \times (AH \times NM) + \frac{1}{2} \times (KD \times MN)$$

$$= \frac{1}{2} \times (AH + KD) \times MN$$

= demi-produit de la distance entre les bases par la demi-somme des bases.
= demi-aire du trapèze.
L'aire du trapèze est donc égale à 2 fois celle du triangle *ADM*, c'est-à-dire au produit de la longueur de l'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu du côté opposé. CQFD.

4 – À LA CATHÉDRALE D'ÉVRY

Surface du sixième de cercle de centre *A*, de rayon *AB* :

$$\frac{\pi \times 3,37^2}{6}$$

Surface du sixième de cercle de centre *C*, de rayon *BC* :

$$\frac{\pi \times 3,37^2}{6}.$$

Si nous les ajoutons, nous avons compté 2 fois la surface commune, c'est-à-dire celle du triangle *ABC*. Enlevons-la. On obtient :

$$2 \times \left(\frac{\pi \times 3,37^2}{6}\right) - \left(\frac{3,37 \times 3,37 \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}\right) = 7.$$

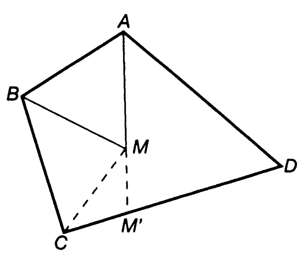
C'est-à-dire le nombre de péchés capitaux.

5 – À LA FOIRE

L'aire d'une zone sphérique de rayon *R* délimitée par 2 plans parallèles distants de *h* étant en effet : $2 \pi Rh$. Nos 3 petits gourmands ont donc reçu chacun la même quantité de chocolat (seule la part de pomme était différente).

6 – À L'INTÉRIEUR D'UN QUADRILATÈRE

Soit *ABCD* un quadrilatère convexe quelconque et *M* un point intérieur.
Démonstration préliminaire :



AM coupe *CD* en *M'*.
$MA + MB$
$< MA + (MC + BC)$
$< MA + (MM' + M'C) + BC$
$< AM' + M'C + BC$
$< (AD + DM') + M'C + BC$
$MA + MB$
$< AD + CD + BC.$

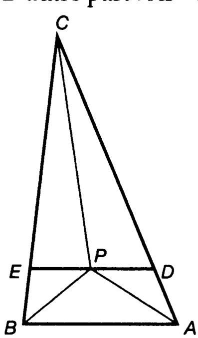
Démonstration principale :
Utilisons 4 fois successivement la propriété démontrée ci-dessus :
$MA + MB < AD + CD + BC$
$MB + MC < AB + AD + CD$
$MC + MD < BC + AB + AD$
$MD + MA < AB + BC + CD$
Additionnons. Il vient :
$2\,(MA + MB + MC + MD) < 3\,(AB + BC + CD + DA)$

Soit : $MA + MB + MC + MD < \frac{3}{2}$ (périmètre).

La somme des distances du point M à chacun des 4 sommets du quadrilatère, ne peut excéder 3 fois le demi-périmètre et donc, a fortiori, 5 fois son tiers.

7 – À L'INTÉRIEUR D'UN TRIANGLE

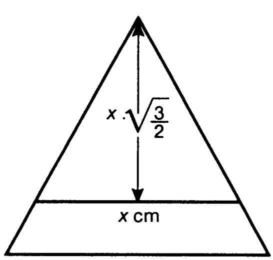
Soit ABC un triangle tel que : $AB < BC < AC$
Soit P le point intérieur où vous vous êtes placé.
De P, traçons DE, la parallèle à AB.
DEC et ABC sont homothétiques.
Donc : $DE < EC < DC$ et $CP < CD$.
D'autre part : $AP < AD + DP$; $PB < PE + EB$



or $CP < CD$ et $DE < EC$
Additionnons membre à membre ces 4 inégalités :
$AP + PB + CP + DE < (AD + CD) + (EC + EB) + (DP + PE)$
Eliminons DE dans chaque membre de l'inégalité.
Ou : $AP + PB + CP < AC + BC$
Ce qu'il fallait démontrer.
Remarque : ce théorème, dû à J.N. Visschsers, professeur à Bois-le-Duc (Pays-Bas), a paru en 1902 dans le périodique « De Vriend des wikunde » .

8 – À LA PIZZERIA

Observons la figure ci-contre :



Surface de la pizza :

$$14 \times (28\sqrt{\frac{3}{2}}) = 339{,}5\,\text{cm}^2.$$

Surface de chaque moitié :

$$\frac{339{,}5}{2} = 169{,}7\,\text{cm}^2.$$

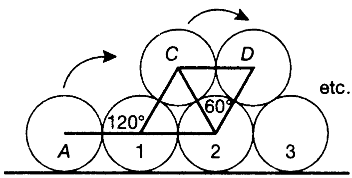
L'une des deux moitiés est un triangle équilatéral ayant pour côté la longueur demandée : x.
D'où l'équation :

$$(x)\times(x\sqrt{\frac{3}{2}})=169{,}7\text{cm}^2 .$$

Soit $0{,}433\times x^2 = 169{,}7$ cm^2.
Ou : $x = 19{,}8$.
Mon petit-fils a 20 ans.

9 – AVEC 7 PIÈCES DE 10 FRANCS

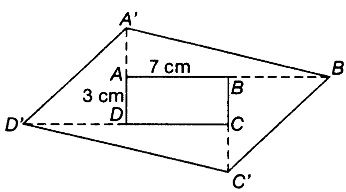
Observons le schéma suivant :



On voit que la pièce roulera d'abord de 120° avant de se coincer entre les 2 premières pièces de monnaie. Elle roulera ensuite de 60° avant de se coincer entre les 2 pièces de monnaie suivantes. Et ainsi de suite...

Rotation totale : 120° + (5 × 60°) + 120° = 540° = 360° + 180°
L'ange au flambeau aura donc la tête en bas !

10 – AUGMENTATION



Chacun des triangles *A' AB'*, *B' BC'*, *C' CD'* et *D' DA'* a une aire égale à celle du rectangle lui-même (triangles ayant une hauteur égale à la largeur et une base égale au double de la longueur, ou l'inverse).

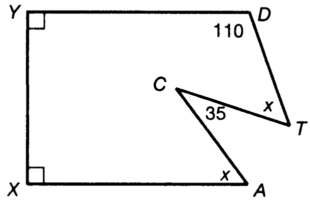
L'aire totale du nouveau quadrilatère sera donc égale à 5 fois celle du rectangle lui-même, soit :

$$5\times 3\times 7 = 105 \text{ cm}^2.$$

La valeur de 100 cm^2 est donc dépassée.

11 – À TRAVERS LE SAINT-LAURENT

Complétons l'hexagone *DTCAXY* par une sécante perpendiculaire au Saint-Laurent (un pont par exemple) :



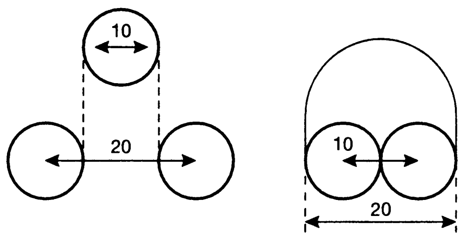
La somme des angles d'un hexagone fait 4 fois 180° :

$$110 + (360 - 35) + 2x + 2 \times 90 = 4 \times 180$$

Soit
$$110 - 35 + 2x = 180$$
$$2x = 105$$
$$x = \frac{105^\circ}{2} = 52°30'$$

12 – Au croquet

1° Pour croquer, le centre de la boule doit se trouver sur un



segment de 20 cm.

Pour passer l'arceau, sur un segment de 10 : c'est 2 fois plus difficile.

2° $$\frac{20}{12,5} = 1,6.$$

C'est 1,6 fois plus facile de croquer que de frapper le piquet.

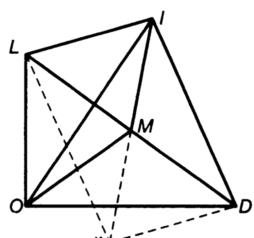
3° $$\frac{12,5}{10} = 1,25.$$

Il est 1,25 fois plus facile de frapper le piquet que de franchir l'arceau.

4° Si les arceaux mesurent 30 cm, l'ouverture du double arceau à la cloche est de 21,2 cm. En se reportant à la question 1, on verra qu'ici encore il est plus facile de croquer.

13 – Au Lido

Soit M le milieu de LD.

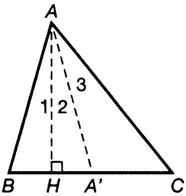


$OI < IM + MO$
ou $2\,OI < 2\,IM + 2\,MO$
or LOD est un triangle.
Donc $MO = ML = MD$
et $2\,MO = LD$.
Donc : $2\,OI < 2\,IM + LD$.
Complétons alors le parallélogramme $LIDI'$.
$II' = 2\,IM < ID + DI'$
Donc $2\,IM < ID + LI$

Et l'inégalité « $2\,OI < 2\,IM + LD$ » devient : « $2\,OI < ID + LI + LD$ ». La somme de LI, ID et DL est donc supérieure au double de OI.

14 – Avec une hauteur et une bissectrice

Soit ABC un triangle quelconque.



Soit AH la hauteur et AA' la bissectrice issues du sommet A. Nous avons :

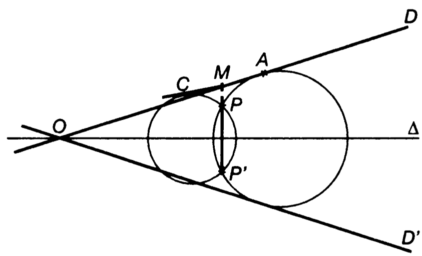
$$\hat{A}_1 = 90° - \hat{B}$$

$$\hat{A}_3 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{180° - \hat{B} - \hat{C}}{2} = 90° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

Donc : $\hat{A}_3 - \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$

Ce qu'il fallait démontrer.

15 – Avec 2 tangentes et un point



Soient D et D' les 2 tangentes. Soit O leur point d'intersection. Soit Δ la bissectrice de l'angle formé par ces 2 droites. Soit P le point donné dans l'hypothèse. Soit P' le symétrique de P par rapport à Δ. Soit M le point d'intersection de PP' avec D. Traçons un cercle quelconque passant par P et P'. De M traçons une tangente à ce cercle MC. Soit A un point de D distant de M d'une longueur égale à MC. Le cercle circonscrit au triangle APP' répond à la question.
En effet : $MA^2 = MP \times MP'$. Donc ce cercle est tangent à D (et à D' par raison de symétrie) et il passe par P.

16 – Alfred au cube

Nous savons que :

$$1^3 = 1 \,;\, 2^3 = 8 \,;\, 3^3 = 27$$
$$4^3 = 64 \,;\, 5^3 = 125 \,;\, 6 > 152.$$

Nos 2 boîtes contiennent donc respectivement 125 et 27 cubes. La hauteur obtenue en le plaçant l'un sur l'autre est celle de

5 + 3 = 8 cubes, ce qui correspond à 28 centimètres. Dimension de chaque cube :

$$\frac{28}{5} = 3{,}5 \text{ cm.}$$

Volume : $3{,}5^3 = 42{,}875 \text{ cm}^3$.

17 – AVEC 4 CUBES

Soit x et y les longueurs respectives des côtés des cubes rouges et verts. Nous avons :

$$2(x^3 + y^3) = 144 \text{ et } 2x + 2y = 12$$

Or : $$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= (x^3 + y^3) + 3xy\,(x + y)$$

Donc : $$xy = \frac{(x+y)^3 - (x^3+y^3)}{3(x+y)}$$

$$= \frac{6^3 - 72}{3 \times 6} = 8$$

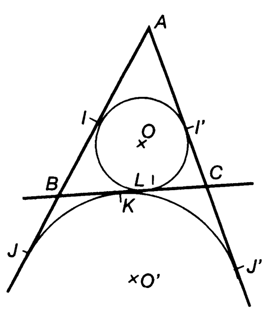
La cour intérieure fait 8 cm^2.

SOLUTIONS

B

1 – BÉCÉOUIJI

Soient I' et J' les points de tangence respectifs de la droite AC avec chacun des 2 cercle O et O'.
Soient K et L les points de tangence respectifs de la droite BC avec chacun des 2 cercles O' et O.



Nous avons :
$IJ = BI + BJ = BL + BK$
Or $AJ = AJ'$ et $AI = AI'$
Donc : $IJ = I'J' = CL + CK$ et
$BL + BK = CL + CK$
$BK + KL + BK = CL$
Donc : $BK = CL$.
et $IJ = BL + BK = BL + CL = BC$.
BC et IJ ont donc la même longueur.

2 – Biso-sec-tri-cèle

Soit ABC un triangle tel que : $\hat{B} > \hat{C}$. Nous allons démontrer que la bissectrice BB' est alors plus courte que la bissectrice CC'. Traçons en effet le cercle circonscrit au triangle BCB'. Soit M son point d'intersection avec CC' :

$\widehat{MBB'} = \widehat{MCB'}$ comme interceptant le même arc.

Donc $\widehat{MBC} = \dfrac{(\hat{B}+\hat{C})}{2}$ est plus grand que $\widehat{BCB'} = \dfrac{(\hat{B}+\hat{B})}{2}$.

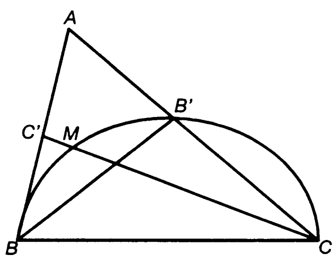
L'arc MC intercepté par $\widehat{MBC}$ est ainsi supérieur à BB' intercepté par $\widehat{BCB'}$, puisque tous deux sont inférieurs à 90°

$\left[\dfrac{(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})}{2} = 90°\right]$. Or M étant bien entendu intérieur au

segment CC' (car $\widehat{MBB'} < \widehat{B'BA}$), nous avons :

$$CC' > CM > BB'$$

BB' est donc plus court que CC', ce qui prouve notre conclusion (démonstration par l'absurde) : si 2 bissectrices sont égales, le triangle est isocèle.



Remarque : cette démonstration a été établie par les ingénieurs anglais G. Gilbert et D. Mac Donnel en 1963. Elle simplifie énormément les démonstrations précédentes du même théorème.

3 – Bissectrice

Soient ABC un triangle quelconque, O le centre du cercle circonscrit, A' le point diamétralement opposé à A et H le pied de la hauteur issue de A.

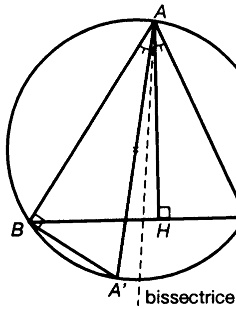
Nous avons

$\widehat{HAC} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{BCA}$

et $\widehat{BAA'} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{BA'A}$.

Mais : $\widehat{BCA} = \widehat{BA'A}$ comme interceptant le même arc.

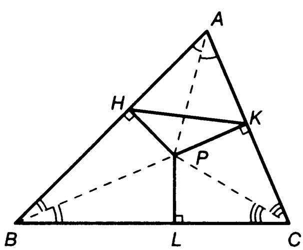
Donc : $\widehat{BA'A} = \widehat{HAC}$ comme complémentaire de deux angles égaux.



Et par conséquent, l'angle $\widehat{A'AH}$ a même bissectrice que $\widehat{BAC}$.

4 – Bissectrices et projections

Observons la figure suivante. P est le centre du cercle inscrit. Il est donc sur la bissectrice issue de A.
Les points H et K sont les points de tangente sur les tangentes issue de A. Ils sont symétriques par rapport à AP. Donc HK est perpendiculaire à AP.
CQFD.



5 – Bonne Année 1987

Soit ABC ce triangle. Soit R le rayon du cercle circonscrit. Soient a, b et c ses 3 côtés (a est opposé à A, b à B et c à C). La loi des sinus nous dit que :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

Donc : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} \times \dfrac{b}{\sin\hat{B}} \times \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2^3 \times R^3$

et $\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{8R^3}{4R} \sin A \times \sin B \times \sin C$

$$= \frac{1}{2} 2R \sin \hat{A} \times 2R \sin \hat{B} \times \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

Or $b \sin \hat{C}$ = longueur de la hauteur issue de A

Donc : $(\frac{1}{2}) ab \sin \hat{C}$ = aire de ABC

Il en résulte :

$\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ = aire de $ABC = 1987 \text{ cm}^2$.

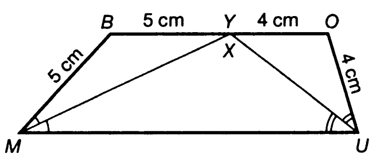
ET BONNE ANNÉE 1987 à tous nos lecteurs !

6 – BOUM-X

Soit Y le point de BO situé à 5 cm de B et à 4 cm de O. BYM est isocèle. Donc $\widehat{BYM} = \widehat{BMY}$.

D'autre part, BO étant parallèle à MU, nous avons :

$\widehat{BYM} = \widehat{YMU}$. Donc Y appartient à la bissectrice issue de M.



7 – LA BOBINE DE FIL TURQUOISE

Soit x le diamètre inconnu en cm.

$$(\pi \times \frac{x^2}{4} \times 4) - (\pi \times 0,5^2 \times 4) = 3200 \times \pi \times \frac{0,1^2}{4}$$

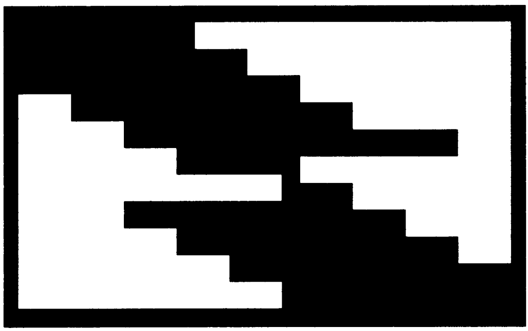
$\Rightarrow x^2 = 8 + 1 = 9$

$\Rightarrow x = 3$ cm.

SOLUTIONS C

1 – Un cadeau de Noël pas cher

Et voilà…



2 – Catastrophe en Mer du Nord

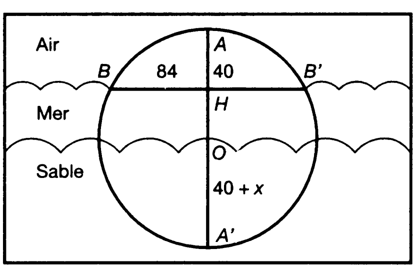
Soit x cette profondeur inconnue.
Soit O le pied du derrick.
Soit H son point d'émergence.
Soit A le point où se trouvait le sommet du derrick avant le sinistre.
Soit B le point où ce sommet s'est enfoncé dans la mer.
Traçons le cercle de centre O et de rayon OA. Prolongeons BH jusqu'en B' et AO jusqu'en A'. Nous avons alors :

$$HA \times HA' = HB \times HB',$$

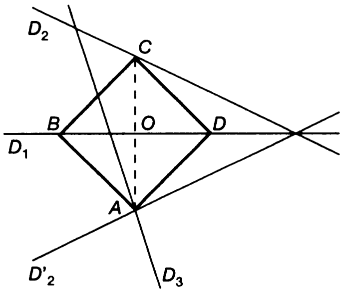
c'est-à-dire : $40 \times (40 + 2\,x) = 84^2$.

Nous en déduisons : $2x = \dfrac{84^2}{40} - 40$ ou $x = 68{,}2$.

La profondeur de la mer en ce lieu est de 68,2 m.



3 – LE CARRÉ FUNAMBULE



Voici une possibilité. Appelons D_1, D_2 et D_3 les 3 droites initiales. Soit D'_2 la symétrique de D_2 par rapport à D_1. Soit A le point d'intersection de D_3 avec D'_2. Soit C le symétrique de A par rapport à D_1. Soit O le point d'intersection de AC avec D_1. Le cercle de centre O et passant par A et C coupe D_1 en B et D.

Considérons alors le quadrilatère $ABCD$: c'est un carré qui répond à la question posée.

4 – LE CASIER À BOUTEILLES

Le second système diminue la taille de certaines rangées. Il n'est intéressant que lorsqu'il augmente le nombre de ces rangées. Observons de plus près :

Les centres des 2 cercles sont dans un cas distants de 2 R, et dans l'autre de $R \times \sqrt{3}$.

Le gain de place est donc de :

$$2R - R\sqrt{3} = 0{,}268R.$$

Gain total pour n rangées : $(n - 1) \times 0{,}268\ R$.

Cela est intéressant dès que ce gain permet une dernière rangée supplémentaire nécessitant :

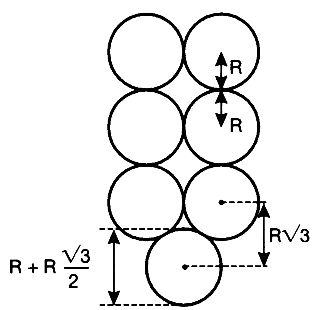
$R + R\sqrt{\dfrac{3}{2}} = 1{,}866R$; n doit donc être tel que :

$0{,}268\ R\ n - 0{,}268\ R \geq 1{,}866\ R$

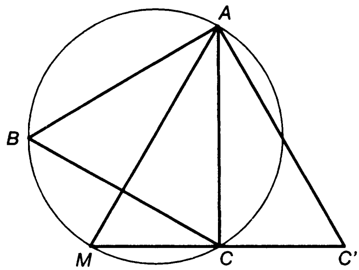
$0{,}268\ n > 2{,}134$

$n > 7{,}96.$

Nous conseillons de changer de système dès que le casier mesure 80 cm de côté.



5 – CERCLE ÉQUILATÉRAL



Soit ABC ce triangle équilatéral, M un point du cercle situé entre B et C. Prolongeons MC de telle sorte que $MC' = MA$. Le triangle MAC', isocèle avec l'angle en M égal à 60°, est équilatéral.

Donc $AM = AC'$ et $\widehat{CAC'} = 60° - \widehat{MAC} = \widehat{BAM}$.

Les triangles BAM et CAC' sont donc égaux et $BM = CC'$.
Donc $MA = MC' = MC + CC' = MC + MB$.
Ce qu'il fallait démontrer.

6 – CERCLE, RECTANGLE OU CARRÉ

Observons la figure ci-contre : Soit a le côté du triangle équilatéral.

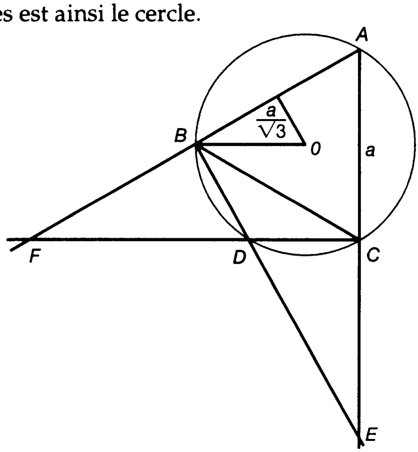
Aire du carré : a^2.

Aire du cercle : $\pi \times (\frac{a}{\sqrt{3}})^2 = \pi \times \frac{a^2}{3}$

Observons alors les triangles BFC et BCE. Ils sont semblables. Donc :

$$\frac{BC}{CE} = \frac{BF}{BC}\text{. Soit : } BC^2 = BF \times CE.$$

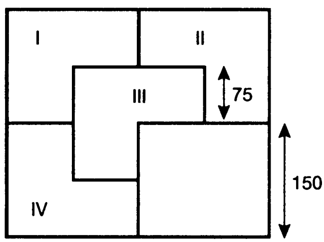
L'aire du rectangle est donc de a^2. La plus grande des 3 figures est ainsi le cercle.



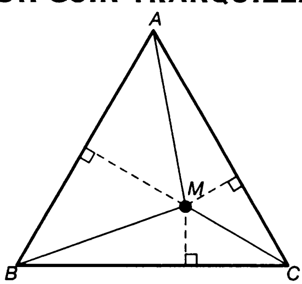
7 – CHÈRE TRIGONOMÉTRIE

Nous savons que :
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Notre équation s'écrit donc :
$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$.
Or $\sin x \leq 1$ et $\cos x \leq 1$.
Donc $\sin^3 x \leq \sin^2 x$ et $\cos^3 x \leq \cos^2 x$.
Notre égalité ne peut donc se vérifier que si :
$\sin^3 x = \sin^2 x$ et $\cos^3 x = \cos^2 x$.
Ce qui donne, ou bien $\sin x = 0$ et $\cos x = 1$ ($x = 0°$).
Ou bien $\sin x = 1$ et $\cos x = 0$ ($x = 90°$).
Cette dernière solution est la seule qui soit intérieure à l'intervalle (0°, 180°). Il n'y a donc qu'une seule valeur de x qui résolve l'équation initiale.

8 – UN CHAMP POUR 4



9 – UN COIN TRANQUILLE



Mon terrain est un triangle équilatéral. Je peux centrer ma maison en n'importe quel point intérieur à ce triangle, car de chacun de ces points, la somme des distances aux 3 côtés sera la même. En effet, soit ABC ce triangle et M un point quelconque intérieur à ABC.

Aire ABC = aire AMB + aire BMC + aire CMA.

Ce qui s'écrit : aire $ABC = (\frac{1}{2}) \times AB \times$ distance de M à AB

$+ (\frac{1}{2}) \times BC \times$ distance de M à $BC + (\frac{1}{2}) \times CA \times$ distance de M à CA.

Donc :

Somme des 3 distances $= \dfrac{2 \times \text{aire}\, ABC}{\text{côté du triangle}}$.

Ce qui est, bien sûr, indépendant de la position du point M.

10 – Cogitations sur pentagone

Préliminaire :

Considérons le triangle inscrit MAB dans le cercle donné. Nous allons démontrer que :

$MA \times MB = 2R \times MH$

R étant le rayon du cercle et H le pied de la perpendiculaire issue de M sur AB.

Soit M' le point du cercle diamétralement opposé à M.

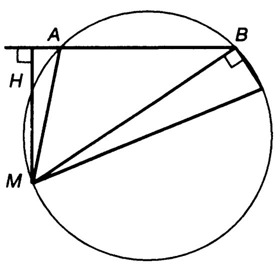
$MBM' = 90° = MHA$ et $MAB + MM'B = 180°$ (interceptant des arcs supplémentaires).

Donc : $MAH = MM'B$

Donc MAH et $MM'B$ sont des triangles semblables.

Donc : $\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{MB}{MM'} = \dfrac{MB}{2R}$

Il en résulte :



$MA \times MB = 2R \times MH$

$= 2R \times$ distance de M à AB.

Appliquons ensuite le résultat de ce préliminaire successivement aux triangles MAB, MBC, MCD et MDA :

$MA \times MB = 2R \times$ dist. (M à AB)

$MB \times MC = 2R \times$ dist. (M à BC)

$MC \times MD = 2R \times$ dist. (M à CD)

$MD \times MA = 2R \times$ dist. (M à DA).

Il en résulte :

dist. (M à BC) $\times$ dist. (M à DA)

$= \left(\dfrac{MB \times MC}{2R}\right) \times \left(\dfrac{MD \times MA}{2R}\right)$

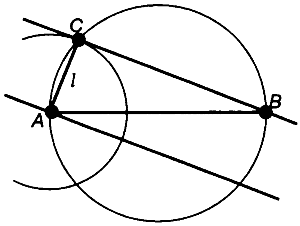
$= \dfrac{MA \times MB \times MC \times MD}{4R^2}$

et dist. (M à AB) $\times$ dist. (M à CD)

$= \left(\dfrac{MA \times MB}{2R}\right) \times \left(\dfrac{MC \times MD}{2R}\right) = \dfrac{MA \times MB \times MC \times MD}{4R^2}$

Ces 2 produits sont donc égaux : CQFD.

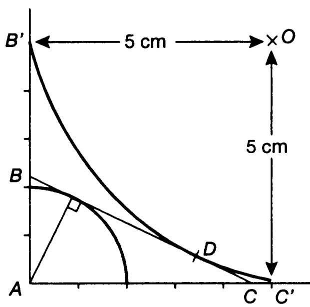
11 – CONSTRUCTION



Traçons un cercle de diamètre AB. De A, traçons alors un arc de cercle de rayon l. Soit C un des points d'intersection avec le cercle précédent. Joignons BC. Par A, menons la parallèle à BC. La longueur AC (l) est la distance entre les deux parallèles ainsi construites (figure ci-contre).

12 – CONSTRUCTION TRIANGULAIRE

Supposons le problème résolu. Nous avons la figure ci-jointe :

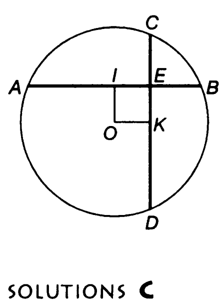


(le triangle ABC est rectangle en A ; B' et C' sont les points de tangence des droites respectives AB et AC avec le cercle exinscrit dans l'angle A, centre en O).
Soit D le point de tangence avec BC. Nous remarquons :
$AB' + AC' = AB + BD + DC + CA$ = Périmètre = 10 cm.
Donc $AB' = AC' = 5$ cm.

Pour construire le triangle ABC, nous opérerons donc ainsi :
1°) construction de l'angle A droit.
2°) construction du cercle de centre A et de rayon 2 cm.
3°) construction du cercle (de centre O), de rayon 5 cm tangent aux 2 côtés de l'angle droit en B' et C'.
4°) construction de la tangente commune aux 2 cercles précédents qui coupe les 2 côtés de l'angle droit en B et C.
Le triangle ABC répond à la question.

13 – CORDES PERPENDICULAIRES

Observons la figure ci-jointe (I et K sont les milieux respectifs de AB et CD).



Nous avons :
$EA = EI + IA$
$EB = -EI + IB = -EI + IA$.
Donc :
$EA^2 + EB^2 = EI^2 + 2EI \times IA + IA^2 + EI^2 - 2EI \times IB + IB^2$
$= 2EI^2 + 2IA^2$
De même, on aurait :
$EC^2 + ED^2 = 2EK^2 + 2KD^2$
Donc $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 2\,(EI^2 + KD^2) + 2\,(IA^2 + EK^2)$
Or $IEKO$ est rectangle.
Donc $EI = OK$ et $EK = IO$.
Or $OK^2 + KD^2 = R^2$ et $IO^2 + IA^2 = R^2$, d'après Pythagore.
Il en résulte :
$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 2R^2 + 2R^2 = (2R)^2 = 100\ \text{cm}^2$.

14 – Crayon, gomme, équerre et compas

Posons le crayon sur le papier. Avec la pointe du compas, marquons-en les extrémités A et B. Joignons-les avec l'équerre et le crayon.

Traçons alors la médiatrice de AB (construction classique), afin de définir le milieu de AB. Puis traçons un demi-cercle de diamètre AB.

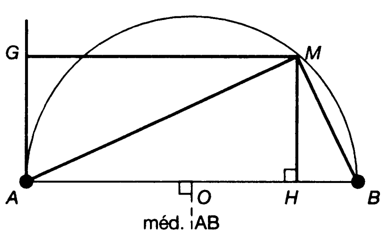
Avec l'équerre, traçons ensuite la demi-droite perpendiculaire en A à AB, du côté du demi-cerlce.

Posons alors la gomme le long de cette perpendiculaire, à partir de A. Puis posons l'équerre contre la gomme afin de tracer la perpendiculaire à cette première perpendiculaire tangentiellement à la gomme. Elle coupe le demi-cercle en 2 points. Soit M l'un des 2 points.

Traçons alors la perpendiculaire à AB issue de M (avec l'équerre). Soit H le pied de cette perpendiculaire.

Les segments AH et HB répondent à la question : en effet, on a « $AH + HB = AB$ = longueur du crayon », et d'autre part, étant donné la similitude des triangles AMH et MHB :

« $\dfrac{AH}{MH} = \dfrac{MH}{HB}$ », ou « $AH \times HB = MH^2$ = longueur de la gomme au carré ».



1 – Le drapeau Suédois

Soit x cette largeur inconnue (en cm). Aire de la croix jaune :

$$100x + 66x - x^2 = \frac{(66 \times 100)}{3}$$

c'est-à-dire : $x^2 - 166\,x + 2\,200 = 0$
Résolvons cette équation du second degré :
$\Delta = 166^2 - 4 \times 2\,200 = \approx 68{,}5^2$
Donc :

$$x = \frac{83 \pm 68{,}5}{1} = 151{,}5 \text{ impossible}$$

ou 14,5 possible
La croix jaune a donc une largeur approximative de 14,5 centimètres.

2 - Dans le désert

Appelons : S l'oasis de Sidi-Ben ; B l'oasis de Ben-Sidi ; I l'oasis de Sidi-Sidi ; M le milieu de la piste Sidi-Ben, Ben-Sidi ; J l'emplacement de la Jeep ; H le pied de la perpendiculaire à IM issue de J.
Nous avons : $JB^2 + JS^2 = 2JI^2$.
Or nous savons que la somme des carrés de 2 côtés d'un triangle est égale à la somme du double du carré de la médiane aboutissant au troisième côté, et de la moitié du carré de ce même troisième côté (cela peut se retrouver aisément grâce au théorème de Pythagore). Appliquons alors le théorème de Pythagore dans les triangles JHI et JHM.
On en déduira aisément :

$$HI = \frac{IM^2 + \frac{BS^2}{4}}{2IM}.$$

HI a donc une longueur constante : la Jeep se déplace ainsi perpendiculairement à IM. Le conducteur de la Jeep avait raison.

3 – Découpage

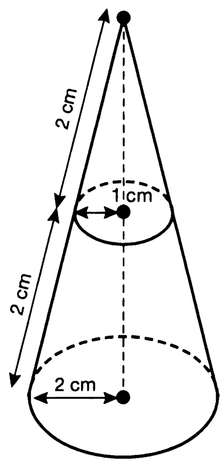
Le tronc de cône est coupé par 2 cercles de rayons respectifs 1 et 2 cm (moitié de 2 et de 4 cm). Or la distance entre 2 points correspondants de ces cercles est de 2 cm (4 – 2 = 2). Le théorème de Pythagore nous indique alors que les plans de ces cercles sont distants de $\sqrt{3}$ cm (car $2^2 - 1 = 3$).

Le volume du tronc de cône est égal à la différence des volumes des cônes virtuels ayant pour bases respectives chacun des 2 cercles et construits dans le prolongement du tronc de cône :

$$V = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\pi \times 2^2\right)\left(2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\pi \times 1^2\right)\left(\sqrt{3}\right),$$

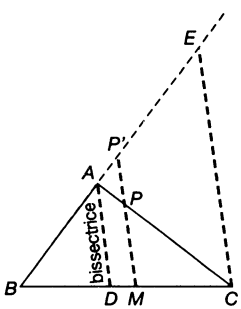
$$V = 7\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 12{,}697.$$

Le tronc de cône a donc un volume de 12,697 cm^3.
Remarque : le volume d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur.



4 – DEMI-DIFFÉRENCE

Supposons que $AC > AB$.
Donc P est sur AC. Prolongeons la droite MP jusqu'à son intersection P' avec la droite AB.



Soit D l'intersection de la bissectrice en A avec BC.
PP′ est parallèle à AD.

Donc $\widehat{AP'P} = \widehat{BAD}$ et $\widehat{P'PA} = \widehat{PAD}$

Donc $\widehat{AP'P} = \widehat{P'PA}$.

APP' est isocèle. Et $AP = AP'$.

De façon analogue, si nous menons par C la parallèle à AD, qui coupe la droite AB en E, nous aurons : $AE = AC$.
De plus, les triangles $BP'M$ et BEC sont semblables.
Donc $BP' = P'E$ puisque $BM = MC$.

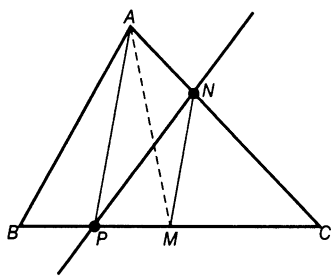
$$AP = 2\frac{AP'}{2} = \frac{AE - P'E}{2} + \frac{AP'}{2}$$

$$= \frac{AC + AP' - P'B}{2} = \frac{AC - (P'B - AP')}{2} = \frac{AC - AB}{2}.$$

AP est bien égal à la demi-différence entre les côtés AB et AC.
C'est ce qu'il fallait démontrer.

5 – Demi-triangle

Soit ABC notre triangle. Supposons que P soit sur BC. Soit M le milieu de BC.
Par M, traçons la parallèle à AP, qui coupe AC en N. La droite PN est la droite cherchée.

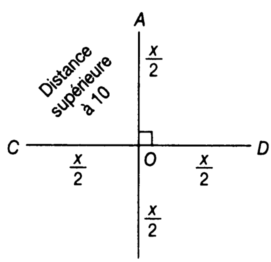


Explication :

$$\begin{aligned} \text{Aire } ABPN &= \text{Aire } ABP + \text{Aire } APN \\ &= \text{Aire } ABP + \text{Aire } APM \\ &= \text{Aire } ABM \\ &= \frac{1}{2} \text{ Aire } ABC. \end{aligned}$$

6 – Devant la cloche

Soit x cette largeur inconnue. Nous avons la figure suivante :



Nous pouvons par exemple appliquer le théorème de Pythagore au triangle OAC :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2>10^2$$

ou $$\frac{x^2}{2}>100$$

et $x > 14{,}14$ centimètres;

Largeur minimale en centimètres entiers : 15 centimètres.

7 – DUBLIN 1856

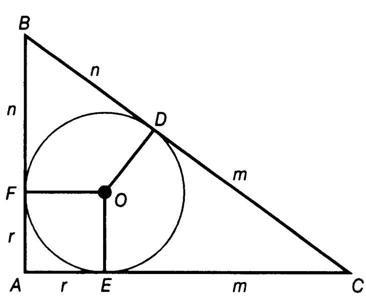
Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit D, E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit de centre O avec les 3 segments BC, AC et AB. Soit $r = AE = AF$.
Soit $m = CD = CE$. Soit $n = BD = BF$.

$$\text{Surface } ABC=\left(\frac{1}{2}\right)\times(AB\times AC)$$
$$=\frac{1}{2}\times(AE+EC)(AF+FB)$$
$$=\frac{1}{2}\times(r+m)(r+n)$$
$$=\frac{1}{2}\left[r^2+r(m+n)+mn\right].$$

Mais nous avons aussi : surface ABC = surface $AEOF$ + surface $FODB$ + surface $DOEC$ = r^2 + 2 (surface BOF) + 2 (surface ODC) = $r^2 + nr + mr = r^2 + r(m + n)$.
Remplaçons alors « $r^2 + r(m + n)$ » par « surface ABC » dans l'égalité précédente.
Il vient :

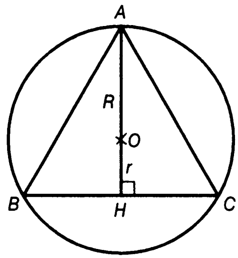
$$\text{surface}\,ABC=\frac{1}{2}(\text{surface}\,ABC+mn)$$

ou : 2 (surface ABC) = surface ABC + mn
ou : mn = surface ABC.
C'est ce qu'il fallait démontrer.



8 – DES DIFFICULTÉS DE CONSTRUCTION

Pour un cercle circonscrit donné, plus le triangle intérieur se rapproche d'un triangle équilatéral, plus sa surface est grande, et plus la surface du cercle inscrit est grande elle aussi.



Observons ce cas limite (triangle équilatéral) :
Les centres des 2 cercles sont confondus au point O situé au tiers de la hauteur AH à partir de sa base BC. Le rayon du cercle inscrit OH est la moitié de celui du cercle circonscrit OA. Le rayon du cercle circonscrit est donc toujours au moins le double de celui du cercle inscrit. La construction demandée est IMPOSSIBLE.
Une démonstration plus précise se fait par le théorème établissant la formule :
$d^2 = R^2 - 2rR$
R étant le rayon du cercle circonscrit, r celui du cercle inscrit et d la distance entre les centres de 2 cercles.

9 – LA DIVINE PROPORTION

Soit O le centre du cercle circonscrit supposé de rayon 1. Soit H l'intersection de BE et de OA. Soit K celle de CD et du prolongement de OA. Nous voulons démontrer que :

$$\frac{AC}{CF} = \frac{CF}{AF}.$$

Or BE est parallèle à CD. Donc :

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AK}{KH} \text{ et } \frac{CF}{AF} = \frac{KH}{AH}.$$

Or $OH = \cos\frac{360}{5} = \cos 72° = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}$

et $OK = \cos\frac{180}{5} = \cos 36° = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$.

Donc $AH = 1 - \cos 72° = \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)}{4}$

$$KH = \cos 36° + \cos 72° = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

et $AK = 1 + \cos 36° = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)}{4}$.

Donc $\frac{AK}{KH} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$

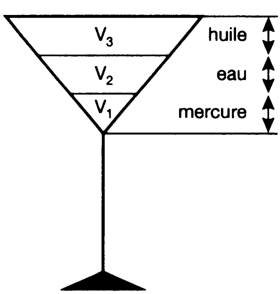
et $\frac{KH}{AH} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$

D'où l'égalité : $\frac{AC}{CF} = \frac{CF}{AF}$.

SOLUTIONS E

1 – L'EAU, L'HUILE ET LE MERCURE

Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de la surface de base par la hauteur. Mais le rayon du cercle de base, pour un angle au sommet donné, est lui-même proportionnel à la hauteur correspondante. Le volume est donc proportionnel au cube de cette hauteur. Soit V_1, le volume de mercure, V_2 le volume d'eau et V_3 celui de l'huile. Soit h la hauteur de chaque couche, et a un certain coefficient de proportionnalité. Considérons successivement les 3 cônes de hauteur respectives h, $2h$ et $3h$. Nous avons :



$V_1 = a \times h^3$; $V_1 + V_2 = a(2h)^3 = 8\ V_1$

$V_1 + V_2 + V_3 = a(3h)^3 = 27\ V_1$.

Donc $V_2 = 7\ V_1$ et $V_3 = 19\ V_1$.

Il en résulte que les 3 masses respectives pour le mercure, l'eau et l'huile sont :

13,59 V_1, 7 V_1 et 0,915 × 19 V_1 = 17,384 V_1.

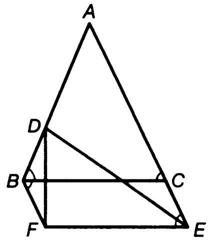
La masse d'huile est donc la plus grande des trois.

2 – UNE ÉVIDENCE ÉLÉMENTAIRE

Construisons un parallélogramme $BCEF$

$$\widehat{CEF} = \widehat{CBF} = \widehat{BCA} = \widehat{CBA}$$

D'autre part : $BD = CE = BF$. Joignons DF.
FBD est donc un triangle isocèle.



BC, bissectrice de l'angle $\hat{B}$, est aussi médiatrice de DF. Donc DF est perpendiculaire à BC et à FE. Dans le triangle rectangle DFE, l'hypoténuse est le plus grand des côtés :
$DE > EF$ ou $DE > BC$. CQFD.

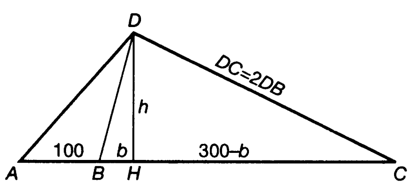
3 – L'ÉGLISE, L'ÉCOLE ET LA MAIRIE

Soient A, B, C et D les points représentant respectivement l'école, la mairie, l'église et la ferme. Soit H le pied de la perpendiculaire issue de la ferme sur la route droite. Soient b et h les longueurs respectives de BH et de DH en mètres. Nous appliquerons seulement ici le théorème de Pythagore, tout d'abord au triangle HCD, puis au triangle BHD, et enfin au triangle AHD.

$DC = 2\ BD$ donc $DC^2 = 4\ BD^2$.
Soit encore : $(300 - b)^2 + h^2 = 4\ (b^2 + h^2)$
Soit $300^2 + b^2 + h^2 - 600\ b = 4b^2 + 4h^2$
ou : $3\ (h^2 + b^2) + 600\ b = 300^2$
Donc : $h^2 + b^2 + 200\ b = 30\ 000$.
Quelle est alors la distance AD ?

$$\begin{aligned} AD^2 &= h^2 + (100 + b)^2 \\ &= (h^2 + b^2 + 200\ b) + 10\ 000 \\ &= 30\ 000 + 10\ 000 \\ &= 40\ 000 \end{aligned}$$

Il en résulte que $AD = 200$.



4 – ÉMIRAT

Soit BC le côté du triangle équilatéral qui a la même longueur que sa projection. Soit M son milieu. Soit A le troisième sommet du triangle équilatéral. Soit H la projection de A sur le plan horizontal passant par BC.

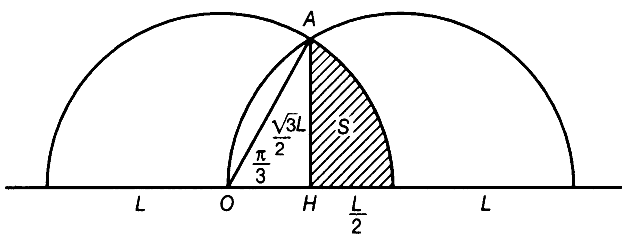
L'angle des plans ABC et HBC n'est autre que l'angle AMH, dont le cosinus est : $\frac{HM}{AM}$ La longueur de AM est celle de la hauteur dans un triangle équilatéral :

$$AM = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (\text{longueur de côté}).$$

Quant à MH (puisque l'angle BHC est droit, et donc inscrit dans le demi-cercle de diamètre BC), il a pour longueur la moitié de BC.

Il en résulte :

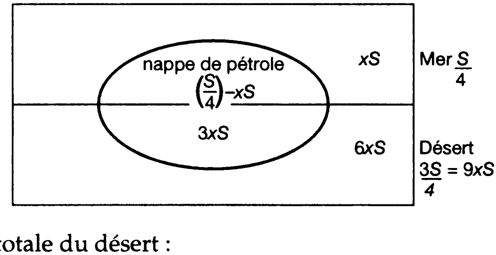
$$\text{Cosinus recherché} = \frac{\frac{BC}{2}}{BC \times \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



5 – L'ÉMIR ET SON PÉTROLE

Soit S l'aire de mon territoire. Aire de territoire en mer : $\frac{S}{4}$.

Soit xS l'aire de mon territoire en mer sans pétrole. Aire de désert à pétrole : $3xS$. Aire de désert sans pétrole : $6xS$.



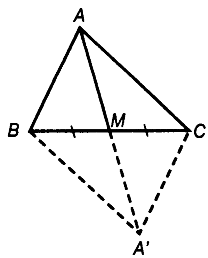
Aire totale du désert :

$$3xS + 6xS = 3\frac{S}{4}$$

Donc : $x = \frac{1}{12}$

Proportion cherchée : $\dfrac{\left(\frac{S}{4}\right) - xS}{\left(\frac{S}{4}\right) - xS + 3xS} = \dfrac{\frac{2S}{12}}{\frac{5S}{12}} = \dfrac{2}{5}$

6 – ENCADREMENT D'UNE MÉDIANE



Soit ABC un triangle et AM la médiane issue de A. Prolongeons AM d'une longueur MA' égale à AM.
Le quadrilatère $ABA'C$ dont les diagonales se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.
Donc : $AC = BA'$.
Considérons alors le triangle ABA' : le côté AA' est compris entre la somme et la différence des 2 autres côtés :

$$|AB - A'B| < AA' < AB + A'B$$

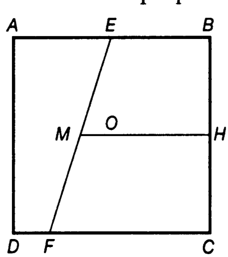
ou: $|AB - AC| < 2 \times AM < AB + AC$

ou: $\dfrac{|AB - AC|}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

7 – ENCORE UN CARREAU CASSÉ

Soit $ABCD$ le carreau initial, centré en O.
EF la coupure, et M son milieu.
Abaissons la perpendiculaire MH à BC (voir figure).



Les 2 morceaux coupés sont des trapèzes rectangulaires ayant les mêmes angles et les mêmes distances entre les côtés parallèles.
Aire du morceau $EBCF$:

$$BC \times \frac{(EB + FC)}{2} = BC \times MH.$$

Si M est confondu avec O, il est aisé de démontrer que $EB = DF$; les 2 morceaux sont alors superposables. Si M non confondu avec O, les 2 surfaces de chacun des 2 morceaux ne sont pas les mêmes : ils ne sont donc pas superposables.
En conclusion, on peut caractériser une coupure qui donne 2 morceaux superposable par le fait qu'elle passe par le centre du carré.

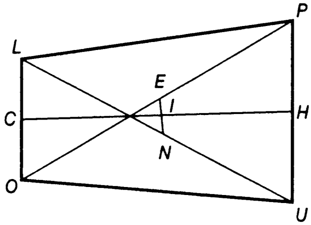
8 – ENTRE CHIEN ET LOUP

Considérons le triangle *LOU*. *CN* joint 2 milieux de côtés : il est parallèle et égal à la moitié du troisième :

$CN \,//\, OU$ et $CN = \dfrac{OU}{2}$

Il en est de même pour EH si nous observons le triangle *POU* :

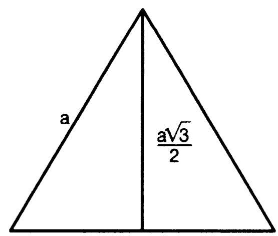
$EH \,//\, OU$ et $EH = \dfrac{OU}{2}$



EH et *CN* sont donc 2 segments égaux et parallèles. *EHCN* est ainsi un parallélogramme : ses diagonales se coupent en leurs milieux. *I* appartient donc à *EN* : la distance de *I* à *EN* est nulle.

9 – ÉQUILATÉRAL

Observons la figure ci-contre. Soit *a* le côté.



$$a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}037\text{cm} \Rightarrow a = 15{,}20$$

$$\text{Aire} = \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Soit : } 100 \text{ cm}^2$$

10 – L'ESSUIE-GLACE

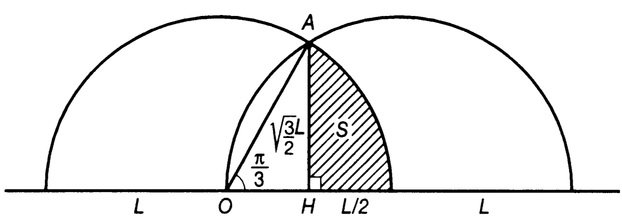
Surface balayée : $\pi\, L^2 - 2\, S$

Aire du secteur *OAO'* : $\left(\dfrac{1}{6}\right)\pi L^2$

Aire du triangle *OAH* : $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times L \times \dfrac{L}{2} \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{3} \times \dfrac{L^2}{8}$.

Par conséquent : $S = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right) \times L2.$

La surface balayée est donc : $\left(2\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \times L^2.$ ou $2{,}527 \times L^2$.

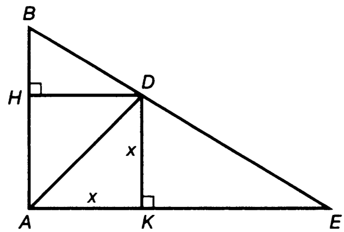


SOLUTIONS

F

1 – De fausses complications

Ecrivons de 2 façons la surface du triangle ABC :



$$\frac{AB\times AC}{2}=x^2+\frac{x(AC-x)}{2}+\frac{x(AB-x)}{2}$$

Développons. Il vient :

$AB \times AC = x\,(AB + AC)$

Observons ADH. Appliquons le théorème de Pythagore : $AD^2 = x^2 + x^2$

Soit : $x=\dfrac{AD}{\sqrt{2}}$

Il en résulte :

$$AB\times AC=\left(\frac{AD}{\sqrt{2}}\right)\times(AB+AC)$$

ou : $\dfrac{\sqrt{2}}{AD}=\dfrac{1}{AC}+\dfrac{1}{AB}$.

L'expression cherchée est donc : $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}-\dfrac{\sqrt{2}}{AD}=0$.

2 – De fausses difficultés

Pour un même arc, l'angle au centre est le double de l'angle inscrit. Il en résulte :

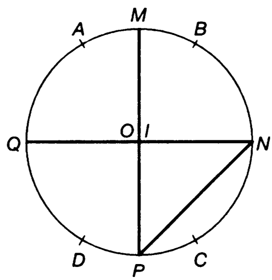
$$\widehat{INP}=\widehat{QNP}=\frac{\widehat{QOP}}{2}=\frac{\widehat{QOD}}{2}+\frac{\widehat{DOP}}{2}=\frac{\widehat{AOD}}{4}+\frac{\widehat{DOC}}{4}$$

donc $\widehat{INP} + \widehat{IPN} = \frac{\widehat{AOB}}{4} + \frac{\widehat{BOC}}{4} + \frac{\widehat{COD}}{4} + \frac{\widehat{DOA}}{4}$

$$= \frac{360°}{4} = 90°$$

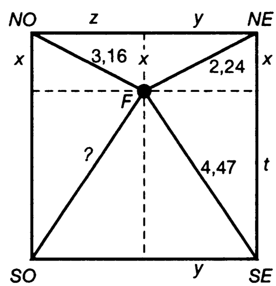
Ainsi, dans le triangle INP, l'angle en I est égal à : 180° – 90° = 90°

donc : $\widehat{PIN} = 90°$



Le résultat est indépendant des valeurs précises des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOA}$. D'où le titre de ce problème.

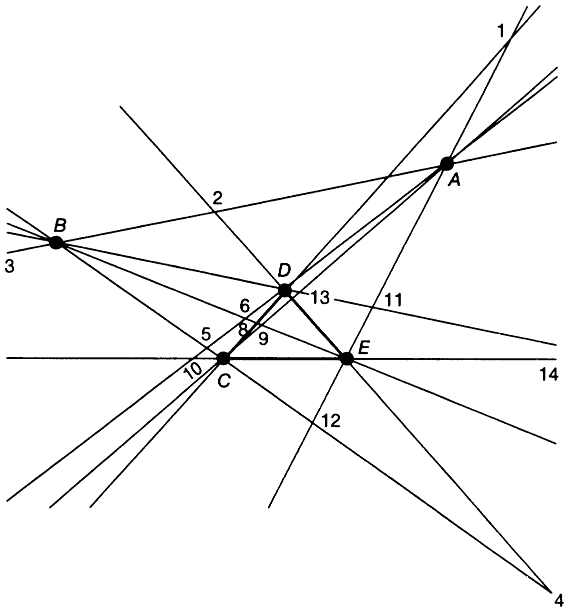
3 – FAUTEUIL CLUB, WHISKY ET GRAND SALON



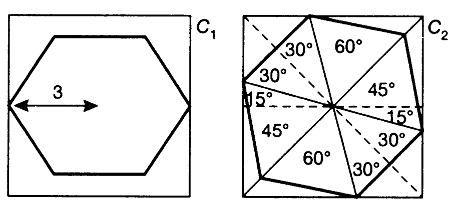
Travaillons en m :
$x^2 + z^2 = 10$
$z^2 + y^2 = 5$
$y^2 + t^2 = 20$
$2\,(y^2 + z^2) + x^2 + t^2 = 45 \Rightarrow x^2 + t^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2 + t^2} = 5.$
J'ai donc bu 5 whiskys, ce qui implique : nez rouge.

4 – FIGURE

Soient A, B, C, D et E les 5 points donnés. Considérons la droite AB. Elle est coupée par les 3 côtés du triangle CDE. Cela fait 3 points d'intersection. Il y en a autant pour chaque droite. Or il y a autant de droites que de façons de choisir 2 points par 5, c'est-à-dire : 10. Cela ferait 3 × 10 = 30 points, si chacun d'eux n'avait été ainsi compté 2 fois. Cela n'en fait en réalité que 15.



5 – UNE FIN THÉÂTRALE



Voici 2 solutions possibles. Observons chaque fois les aires correspondantes :
1^{er} cas : $(3 + 3)^2 = 36\ m^2$
2^e cas : $(3 \cos 15° + 3 \cos 15°)^2 = 36 \times 0{,}966^2 = 33{,}58\ m^2$
La 2^e solution semble la meilleure possible.

6 – LE FANION MULTICOLORE

Faisons des rapports entre les aires :

$$\frac{b}{252}=\frac{120+90+b}{252+105+j}$$

$$\frac{j}{105}=\frac{252+j+b}{120+105+90}$$

Il en résulte : $j = 210$ et $b = 168$.

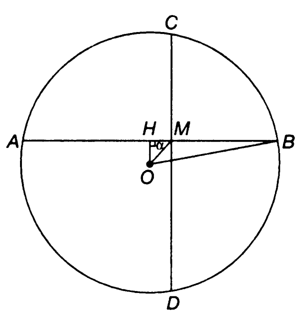
Il y a 210 cm^2 de jaune et 168 cm^2 de bleu.

SOLUTIONS G

1 – LA GRAND-MESSE

Soient AB et CD les 2 segments de cette croix.
Soient M son milieu (intersection de AB et CD).
Soient O le centre du vitrail et H sa projection sur AB.
Soit α l'angle $\widehat{OMH}$ ·

Considérons le triangle rectangle OHB :
$HB^2 - OB^2 - OH^2 = OB^2 - OM^2 \sin^2 \alpha^2$.
Or AB est le double de HB. Donc :
$AB^2 = 4\ OB^2 - 4\ OM^2 \sin^2 \alpha = (4 - \sin^2 \alpha)\ \text{m}^2$.
Pour calculer CD^2, on procéderait de façon analogue, le nouvel angle jouant le rôle de a étant bien entendu égal à 90° – a.
On trouve ainsi :
$CD^2 = 4\ OC^2 - 4\ OM^2 \sin^2 (\ 90° - \alpha) = (4 - \cos^2\alpha)\ \text{m}^2$.
Il en résulte : $AB^2 + CD^2 = 7\ \text{m}^2$.
Notre paroissien distrait trouve 7. C'est le nombre de péchés capitaux.



2 – La galette des rois

Soit O le centre de la galette. Soit F la fève. Soit AB la corde représentant la deuxième incision. Soit I son milieu. Considérons les triangles OAF et OBF. Nous avons :

$OA^2 = FA^2 + OF^2 + 2\,FA \times FI,$

$OB^2 = FB^2 + OF^2 - 2\,FB \times FI.$

Ajoutons membre à membre ces 2 égalités. Nous obtenons :

$2\,OA^2 = FA^2 + FB^2 + 2\,OF^2 - 4FI^2.$

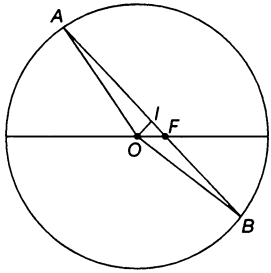
Or, le triangle OFI étant rectangle isocèle, nous avons :

$OF = (FI)\sqrt{2},$

C'est-à-dire : $2\,OF^2 - 4FI^2 = 0.$

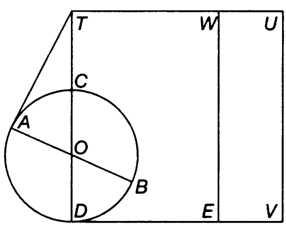
Il en résulte : $FA^2 + FB^2 = 2 \times OA^2.$

Il ne s'agit donc pas d'une simple coïncidence.



3 – De la géométrie bien classique

Observons la figure ci-dessous :



$TC = TD - AB.$

$TC \times TD = TD^2 - AB \times TD = AT^2$

$= AB^2.$

Aire du rectangle $EWUV$

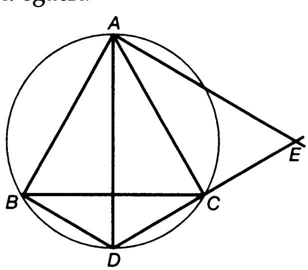
= aire du carré $DTUV$ – aire du rectangle $TWED$

$= TD^2 - AB \times TD = AB^2$

$= 3{,}6^2$ ou 13 cm^2.

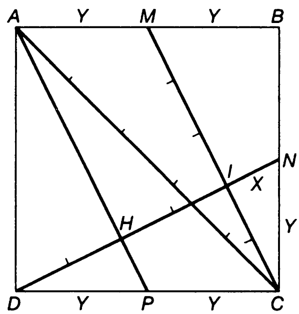
4 – Géométrie dangereuse

Prolongeons DC d'une longueur CE égale à DB. Les triangles ACE et ABD sont égaux.



En effet, $AB = AC$; $BD = CE$; et $\widehat{ABD} = 180° - \widehat{ACD} = \widehat{ACE}$.
Il en résulte que : $AD = AE$
Le triangle ADE est donc isocèle. Mais $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 60°$.
ADE est ainsi équilatéral. Il en résulte :
$AD = DE = DC + CE = DC + BD$.
Donc : $AD - (BD + DC) = 0$ mm
La longueur du rayon du cercle inscrit et celle de l'arc BD étaient des données inutiles ! (D'où le titre de l'énigme).

5 – GÉOMÉTRIE EN OR

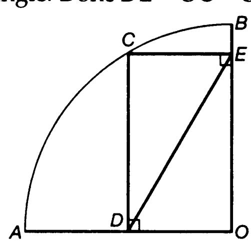


Toutes ces longueurs, sauf la dernière, sont égales. Il suffit pour le démontrer d'observer la figure ci-dessus et de la remplir petit à petit en fonction de x et de y, x étant la longueur de IN et y la moitié du côté du carré initial. Les similitudes entre de très nombreux triangles y sont en effet évidentes.

Quant au cinquième de AC, il est supérieur au cinquième de MC, c'est-à-dire à la moitié de IC, ou au tiers de IM.
En conclusion : choisissez le cinquième de AC !

6 – GÉOMÉTRIE-SECONDE

$OECD$ est un rectangle. Donc $DE = OC = OA$.



7 – GÉOMÉTRIE RÉVOLUTIONNAIRE

1° Le théorème de Pythagore nous dit : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Il en résulte : $AC - \sqrt{AB^2 + BC^2} = 0$.

2° Aire ABC = aire ABM + aire BMC.
C'est-à-dire :

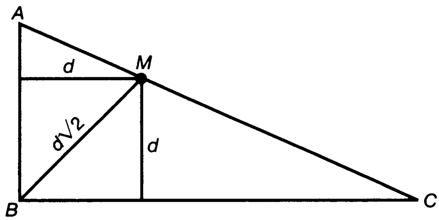
$$\frac{AB \times BC}{2} = AB \times \frac{d}{2} + BC \times \frac{d}{2} \text{ ou } \frac{1}{d} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AB}.$$

Or, $BM = d\sqrt{2}$.

D'où il résulte :

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}-\frac{\sqrt{2}}{BM}=0.$$

3° Appliquons les résultats de nos 2 premières remarques dans l'expression E. Il vient
$E = 1789$.

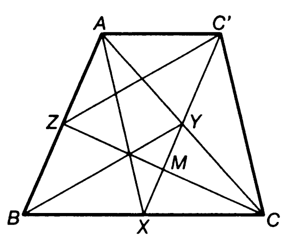


8 – GÉOMÉTRIE VARIABLE

Soit ABC un certain triangle, soit AX, BY et CZ ses 3 médianes. Par C, menons le segment parallèle et égal à AX ce que nous noterons : CC' p.e. AX.
$CXAC'$ est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu : $C'X$ passe par Y. Donc $C'Y$ p.e. YX p.e. ZB. $ZBYC'$ est donc un parallélogramme et ZC p.e. BY.
Notre problème revient donc à comparer les surfaces des triangles ABC et ZCC' ou leurs moitiés respectives AXC et $C'MC$, M étant à l'intersection de ZC et de $C'X$. Or : aire de AXC = aire de $C'XC$ (mêmes hauteurs, mêmes bases) ; et aire de XCM = aire MCY. Tandis que aire $C'MC = 3 \times$ aire MCY, puisque les 3 médianes du triangle $CC'Z$ se coupent en son centre de gravité qui est au tiers de chacune à partir du sommet correspondant.

Par conséquent : $\dfrac{\text{aire } ABC}{\text{aire } CC'Z}=\dfrac{\text{aire } C'XC}{\text{aire } C'MC}=\dfrac{4 \text{ aire } MCY}{3 \text{ aire } MCY}=\dfrac{4}{3}$

C'est le rapport demandé.



9 – LA GÉOMÉTRIE DES VALEURS

$\widehat{SEU} = \widehat{LEA} = \widehat{LVA} = \widehat{UVA}$

(correspondant au même arc de cercle AL)

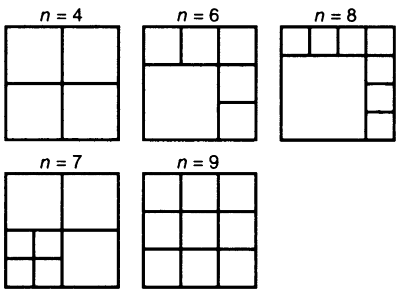
or $\widehat{UVA} = \widehat{RUA}$ (côtés perpendiculaires) et $\widehat{RUA} = \widehat{EUS}$ (opposés par le sommet).

Donc $\widehat{SEU} = \widehat{EUS}$.

SEU est un triangle isocèle. Donc $SE = SU$. On démontrerait de même que $SL = SU$.
Il en résulte que $LS = SE$.

10 – UN GRAND ET DES PETITS

Seules les valeurs 2, 3 et 5 ne donnent pas de solutions. Voici les autres :

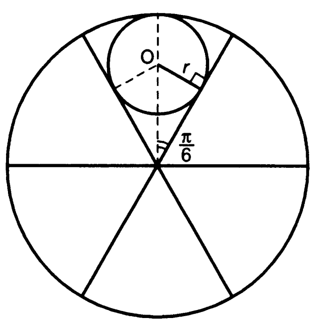


11 – LE GRAND CERCLE ET LES 6 PETITS

$$\text{Proportion recouverte} = \frac{6\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{6r^2}{R^2}$$

$$\text{Or } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{r}{R-r}$$

$$\text{Donc } r = \frac{R}{3}. \text{ Donc } = \frac{6R^2}{9R^2} = \frac{2}{3}$$

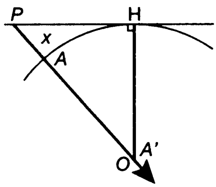


SOLUTIONS

H

1 – HAUTEUR DE PHARE

Observons la figure (x est la hauteur inconnue en km).
Soit A' le symétrique de A par rapport à O centre de la terre.
Nous avons :



$$PH^2 = PA \times PA'$$

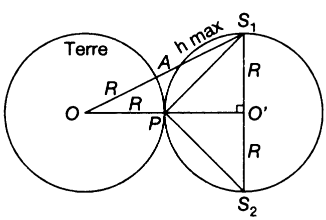
Soit : $32^2 = x\left(\frac{40000}{\pi} + x\right)$

Soit :

$$x \approx \frac{32^2 \times \pi}{40000} = 0,080 \approx 80 \text{ mètres.}$$

2 – HAUTEUR DE SATELLITES

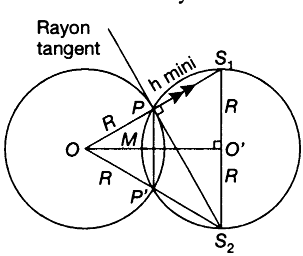
Soit O le centre de la Terre, R son rayon, P le point d'observation des satellites sur l'équateur, S_1 le premier satellite, S_2 le second et O' le milieu de S_1, S_2.
Figure correspondante dans le cas où la hauteur commune h est maximum :



(A est l'intersection de OS avec la surface terrestre).
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle $OO'S$: $(R+h)^2 = (R+R)^2 + R^2 = 5R^2$.
Donc : $R + h = R \times \sqrt{5}$

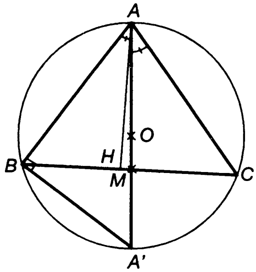
et $h = R\left(\sqrt{5} - 1\right) = 1,236R$.

Figure correspondante dans le cas où h est minimum : (P' est le second point dans le plan de la figure où l'on voit les satellites selon des rayons visuels perpendiculaires).



Soit M l'intersection de PP' avec OO'. Les cercles (O) et (O') étant égaux, M est le milieu de OO'. PP' étant parallèle à $S_1 S_2$, P est le milieu de OS_1.
On en déduit : $h = R$.
En conclusion, h variera entre R et 1,236 R. Soit entre 6 366 et 7 869 kilomètres.

3 – Hauteur, médiane et bissectrice



Soit ABC un triangle quelconque, O le centre du cercle circonscrit, A' le point diamétralement opposé à A, H le pied de la hauteur issue de A, et M le milieu de BC.

Nous avons $\widehat{HAC} = 90° - \widehat{BCA}$ et $\widehat{BAA'} = 90° - \widehat{BA'A}$.

Mais $\widehat{BCA} = \widehat{BA'A}$ comme interceptant le même arc.

Donc : $\widehat{BAA'} = \widehat{HAC}$.

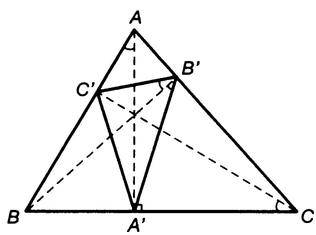
La bissectrice est donc commune aux angles $\widehat{A'AH}$ et $\widehat{BAC}$.

Si elle l'est aussi à $\widehat{HAM}$, AM et AA' sont confondus. Or O et M sont sur la médiatrice de BC. Si O, M et A sont alignés, c'est que : ou bien A est sur cette médiatrice (triangle isocèle), ou bien O et M sont confondus (triangle rectangle en A).

4 – Des hauteurs aux bissectrices

Nous voulons démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle $A'B'C'$ formé par les pieds des hauteurs du précédent.

Il suffit de démontrer que BB' par exemple est bissectrice de $\widehat{C'B'A'}$.
Dans un demi-cercle
$BC'B'C$ est inscriptible donc
$\widehat{C'B'B} = \widehat{C'CB}$
Dans un demi-cercle
$AC'A'C$ est inscriptible donc
$\widehat{C'CB} = \widehat{C'AA'}$
Dans un demi-cercle
$AB'A'B$ est inscriptible donc $\widehat{C'AA'} = \widehat{BB'A'}$

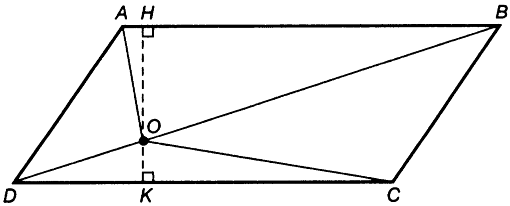


Donc $\widehat{C'B'B} = \widehat{BB'A'}$ ce qui caractérise BB' comme bissectrice de $\widehat{C'B'A'}$. Ce qu'il fallait démontrer.

5 – Héritage

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissé de O sur AB et K celui de la perpendiculaire abaissée de O sur CD.

Surface laissée à Pierre : $\frac{1}{2}(OH \times AB) + \frac{1}{2}(OK \times CD) = AB \times \frac{HK}{2}$.

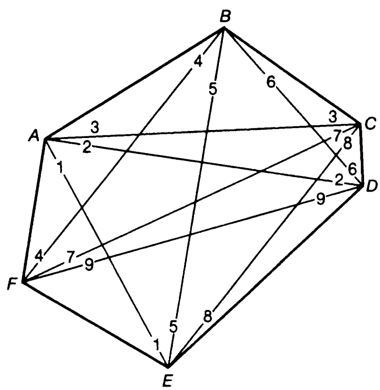


Surface totale du champ-parallélogramme $ABCD$: AB × HK. Pierre a donc la moitié de cette surface, Jean l'autre moitié : aucun des 2 frères n'est favorisé par rapport à l'autre.

6 – L'HEXAGONE

1° Avec 6 points différents, on peut construire autant de droites qu'il y a de façons de choisir 2 éléments parmi 6, c'est-à-dire* :

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$



Parmi ces 15 droites, 6 sont des côtés. Il reste alors 9 diagonales.

2° 15 droites ont en général autant de points d'intersection qu'il y a de façons différentes d'en choisir 2, soit* :

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!31!} = 105.$$

Mais ici, chacun des 6 sommets de l'hexagone correspond à l'intersection de 5 droites différentes ; c'est donc le rassemblement de 10 sommets car* :

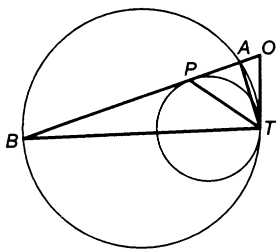
$$C_5^2 = \frac{5!}{2!31!} = 10.$$

* D'après la formule d'algèbre combinatoire : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Les 6 sommets en remplacent ainsi 60. Il reste par conséquent : 105 – 60 = 45 points d'intersection distincts des sommets de l'hexagone.

7 – Une histoire de tangence

Traçons la tangente commune aux 2 cercles. Soit O le point où elle coupe la droite AB.



Les angles $\widehat{OTA}$ et $\widehat{OBT}$ sont égaux puisqu'ils interceptent le même arc sur le grand cercle.

Les triangles OAT et OBT sont donc semblables. Donc :

$$\frac{TA}{TB}=\frac{OT}{OB}=\frac{OA}{OT}=\frac{OT-OA}{OB-OT}$$

Or $OT = OP$. Donc : $\dfrac{TA}{TB}=\dfrac{OP-OA}{OB-OP}=\dfrac{PA}{PB}$ et $\dfrac{PA}{TA}=\dfrac{PB}{TB}=k$

Considérons alors les triangles ATP et BTP.
La loi des sinus nous donne :

$$\frac{\sin\widehat{ATP}}{PA}=\frac{\sin\widehat{APT}}{TA}\ (\text{donc}\ \sin\widehat{ATP}=k\sin\widehat{APT})$$

et $$\frac{\sin\widehat{BTP}}{PB}=\frac{\sin\widehat{BPT}}{TB}\ (\text{donc}\ \sin\widehat{BTP}=k\sin\widehat{BPT}).$$

Or : $\sin\widehat{APT}=\sin\widehat{BPT}$ (angles supplémentaires).

Donc : $\sin\widehat{ATP}=\sin\widehat{BTP}\cdot TP$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ATB}$, ce qu'il fallait démontrer.

8 – Hauteur et bissectrice pour angle

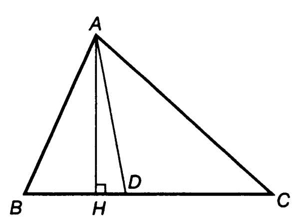
$$\widehat{DAH}=\widehat{CAH}-\widehat{CAD}$$

$$=\left(90°-\hat{C}\right)-\frac{\widehat{BAC}}{2}$$

$$=\left(90°-\hat{C}\right)-\frac{1}{2}\left(180°-\hat{B}-\hat{C}\right)$$

$$=90°-\hat{C}-90°+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}$$

$$\widehat{DAH}=\frac{1}{2}\left(\hat{B}-\hat{C}\right)$$



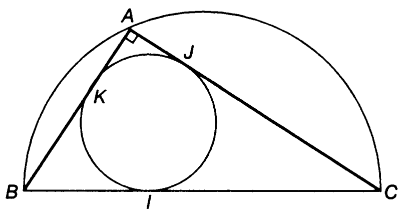
1 – Inscrit et circonscrit

Soit ABC un triangle rectangle (angle droit en A). Soit I, J et K les points de contact respectifs de BC, CA et AB avec le cercle inscrit.

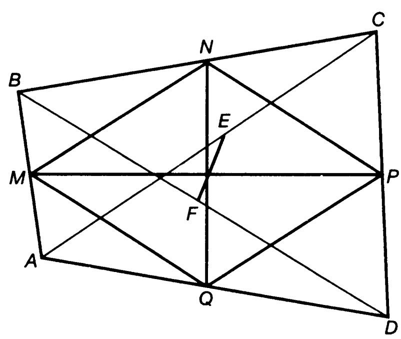
Soit r et R les rayons respectifs des cercles inscrit et circonscrit. Nous avons :

$$\begin{aligned} AB + AC &= BK + KA + AJ + JC \\ &= AK + AJ + KB + JC \\ &= r + r + IB + IC \\ &= 2\,r + BC \\ &= 2\,r + 2\,R \end{aligned}$$

CQFD.



2 – Intersections



Soit $ABCD$ un quadrilatère, soit M, N, P, Q les milieux respectifs des côtés AB, BC, CD, DA. Dans le triangle ACB, MN, qui joint les milieux des côtés AB et BC, est parallèle à AC et égal à sa moitié. Il en est de même pour QP. Le quadrilatère $MNPQ$, qui a 2 côtés égaux et parallèles, est un parallélogramme. Ses diagonales MP et QN se coupent donc en leurs milieux.

Considérons alors les milieux de AC et BD (notés respectivement E et F). Dans le triangle ABD, on voit que FQ est égal à $\frac{AB}{2}$ et lui est parallèle. Il en est de même de NE dans le triangle ABC. $NEQF$ est donc un parallélogramme. Ses diagonales FE et NQ se coupent en leurs milieux.
MP, QN et FE concourent ainsi en leurs milieux : c'est ce qu'il fallait démontrer.

3 – Italie 1678

Nous convenons d'abord de noter A (–, –, –) l'aire du triangle défini par les 3 lettres entre parenthèses.

Nous avons alors :

$$\frac{A(BPX)}{A(CPX)}=\frac{\frac{1}{2}\times BX\times \text{distance de } P \text{ à } BC}{\frac{1}{2}\times CX\times \text{distance de } P \text{ à } BC}=\frac{BX}{CX}.$$

Pour les mêmes raisons, nous avons : $\frac{A(BAX)}{A(CAX)}=\frac{BX}{CX}$.

Par conséquent :

$$\frac{A(BAX)-A(BPX)}{A(CAX)-A(CPX)}=\frac{BX}{CX} \text{ ou } \frac{A(ABP)}{A(ACP)}=\frac{BX}{CX}.$$

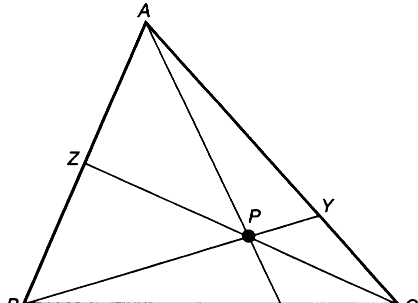
De façon analogue, on démontrerait :

$$\frac{A(BPC)}{A(BPA)}=\frac{CY}{AY} \text{ et } \frac{A(APP)}{A(BPC)}=\frac{AZ}{BZ}.$$

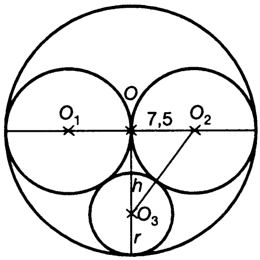
Le produit des rapports $\frac{BX}{CX}\times\frac{CY}{AY}\times\frac{AZ}{BZ}$ est alors égal à :

$$\frac{A(BAP)}{A(ACP)}\times\frac{A(BPC)}{A(BPA)}\times\frac{A(APC)}{A(BPC)}=1.$$

C'est ce qu'il nous fallait démontrer.



1 – J'AI VU DES MARTIENS

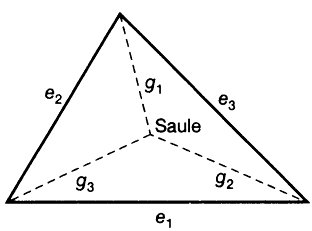


Observons la figure ci-contre. Soit r ce rayon inconnu. Soit h la distance OO_3. Nous avons les 2 équations :
$h + r = 15$, obtenue en prolongeant OO_3
$h^2 + 7{,}5^2 = (7{,}5 + r)^2$, obtenue en observant OO_2O_3.

On en déduit :
$h = 15 - r$ et $(15 - r)^2 + 7{,}5^2 = 7{,}5^2 + 15\,r + r^2$.
D'où : $225 - 30\,r = 15\,r$
$45\,r = 225$ et $r = 5$ cm.
La bouche des Martiens a donc 5 cm de rayon.

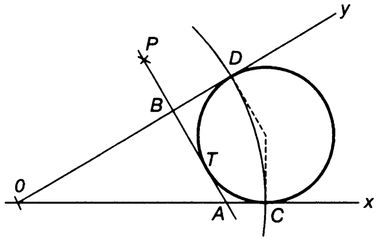
2 – LE JARDIN DE MON GRAND-PÈRE

Observons la figure ci-contre où sont indiquées les longueurs :
Nous avons :
$e_1 < g_2 + g_3 < e_2 + e_3$
$e_2 < g_1 + g_3 < e_1 + e_3$
$e_3 < g_1 + g_2 < e_1 + e_2$
Ajoutons terme à terme ces 3 séries d'inégalités :
$(e_1 + e_2 + e_3) < 2\,(g_1 + g_2 + g_3) < 2\,(e_1 + e_2 + e_3)$
Autrement dit :
$$\frac{e_1 + e_2 + e_3}{2} < (g_1 + g_2 + g_3) < (e_1 + e_2 + e_3) :$$
La somme des longueurs des allées recouvertes de gravier est comprise entre la moitié et la totalité de la longueur des allées empierrées.



3 – Une jolie petite construction

Soit C et D les points d'intersection respectifs entre les demi-droites Ox et Oy et le cercle de centre O et de rayon 3,5 cm. Traçons alors le cercle tangent à Ox en C et à Oy en D.



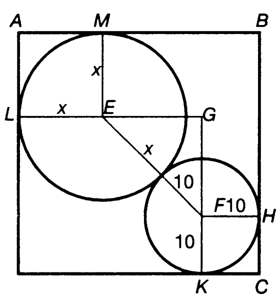
Traçons alors la tangente à ce nouveau cercle, qui passe par P, et qui sépare ce cercle du point O. Soit A et B les points où cette tangente coupe respectivement Ox et Oy. Le triangle OAB ainsi construit répond à la question. En effet, en appelant T le point de tangence de AB avec le nouveau cercle, nous avons :

Périmètre de $OAB = OA + AT + TB + BO = OA + AC + OB + BD = 2 \times 3{,}5$ cm $= 7$ cm.

SOLUTIONS

K

1 – Kansas-City Airport

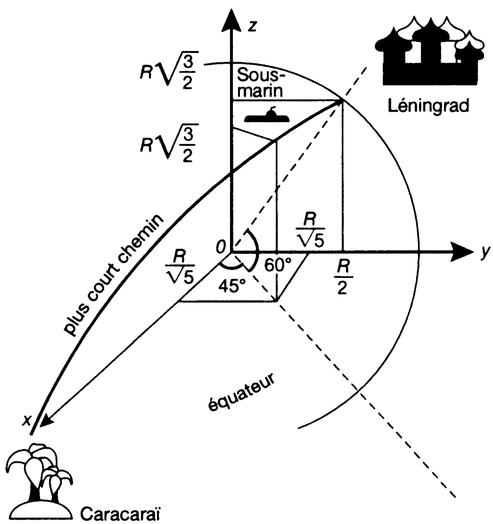


Observons la figure ci-contre :
Décomposons AB, puis BC. Il vient :
$40 = x + 10 + EG$
$45 = x + 10 + GF$
Donc : $EG = 30 - x$ et $GF = 35 - x$
Ecrivons alors le théorème de Pythagore dans le triangle EFG :
$(10 + x)^2 = (30 - x)^2 + (35 - x)^2$
la seule solution possible de cette équation du second degré est :
$x = 15$.

Le rayon de la grande verrière du Kansas-City Airport fait donc 15 mètres.

1 – Leningrad-Caracaraï

Empiriquement : Un certain changement de longitude correspond à une distance beaucoup plus courte à une latitude élevée que près de l'équateur. Le plus court chemin entre Leningrad et Caracaraï se composera donc, grosso modo, d'un changement de longitude près de Leningrad, puis de latitude près de Caracaraï. Lorsque la moitié du changement de longitude est effectué (méridien 15° ouest), on sera ainsi beaucoup plus proche de Leningrad que de Caracaraï, et non pas à mi-chemin.



Théoriquement :
Soit R le rayon terrestre.
Prenons le système de coordonnées explicité par le dessin ci-dessous :
Coordonnées de Caracaraï : R, O, O.

Coordonnées de Leningrad : $O, \frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Equation du méridien 15° ouest : $x = y$.

Équation du plan du grand cercle passant par Leningrad et Caracaraï : $\sqrt{3y} = z$.

Équation de la sphère terrestre :

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Le sous-marin a donc pour coordonnées :

$$\frac{R}{\sqrt{5}}, \frac{R}{\sqrt{5}} \quad et \quad \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

Le sinus de sa latitude s'écrira ainsi : $\dfrac{\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)}{R} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Latitude cherchée = arc sin $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ = arc sin 0,774 6 = 50°46′.

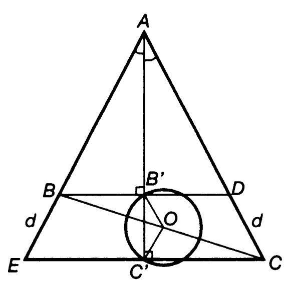
Le sous-marin se trouve ainsi au sud-ouest de l'Irlande, beaucoup plus près de Leningrad que de Caracaraï.

2 – UN LIEU BIEN CLASSIQUE

Prolongeons BB' jusqu'à sa rencontre avec AC en D, puis CC' jusqu'à sa rencontre avec AB en E. Soit O le milieu de BC. $EBDC$ est un trapèze isocèle dont chaque côté non parallèle est égal à la différence entre AB et AC. Soit d cette différence. Dans chaque triangle BCD et BCE, les segments respectifs OB' et OC' joignent les milieux de 2 côtés. Ils ont donc une longueur égale à la moitié du troisième côté :

$$OB' = \frac{d}{2} \quad et \quad OC' = \frac{d}{2}.$$

Le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{d}{2}$ est fixe : c'est la courbe cherchée.



3 – Lastuce

Les triangles LUC et TUS sont semblables, chacun des côtés de LUC faisant respectivement les 3 quarts de ceux de TUS.

Donc $LC = \frac{3}{4} \times TS$.

Or $AL = TS$. Donc $AC = \frac{TS}{4}$.

Les triangles EAC et ETS sont semblables, chacun des côtés de EAC faisant respectivement le quart de ceux de ETS. Appelons alors x la longueur cherchée. Il en résulte :

$$\frac{x}{(12+9+x)} = \frac{1}{4}.$$

Soit $4x = 21 + x$.
Donc $x = 7$ cm.

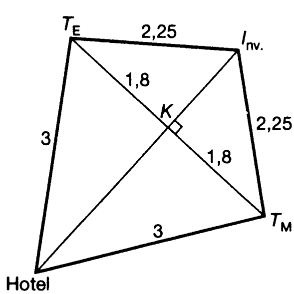
SOLUTIONS M

1 – La mouche et l'araignée

Traçons, sur la face, le segment joignant le coin nord-est du plafond au coin sud-est du sol. Il forme avec les 2 trajectoires un triangle équilatéral. L'angle cherché est donc 60° : la mouche a raison.

2 – Monuments Parisiens

Observons la figure ci-dessous :



Appliquons-y 2 fois le théorème de Pythagore :
$IK^2 + 1{,}8^2 = 2{,}25^2$ donc : $IK = 1{,}35$
$HK^2 + 1{,}8^2 = 3^2$ donc : $HK = 2{,}4$
Il en résulte : $HI + IK + KI = 1{,}35 + 2{,}4 = 3{,}75$ km. C'est la distance demandée.

3 – MÉDIANES

Soit ABC un triangle quelconque, et G le point d'intersection des 3 médianes. Nous savons que G est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet du triangle correspondant.

Considérons alors le segment AB. La ligne droite étant le plus court chemin d'un point à un autre, nous avons :

$$AB < AG + GB.$$

Et nous établirons de même les inégalités :

$$BC < BG + GC, \quad CA < CG + AG.$$

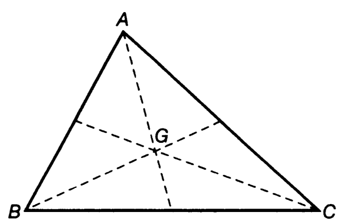
Additionnons membre à membre les termes de ces 3 inégalités :
périmètre $< 2\ (AG + BG + CG)$

ou : périmètre $< 2\ (\frac{2}{3}$ médiane issue de A + $\frac{2}{3}$ médiane issue de B + $\frac{2}{3}$ médiane issue de C).

Et nous avons ainsi :

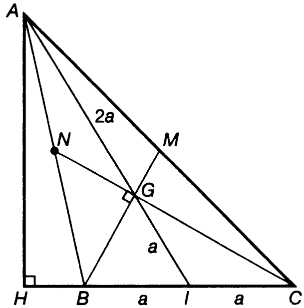
somme des longueurs des médianes > $\frac{3}{4}$ (périmètre).

La réponse à la question posée est donc : NON.



4 – MÉDIANES PERPENDICULAIRES EN ROSE ET EN BLEU

Soit AI la troisième médiane. Soit AH la hauteur issue de A.
Soit G le centre de gravité (intersection des 3 médianes).
Posons : $BI = CI = IG = a$ (dans un triangle rectangle, la médiane est égale à la moitié de l'hypoténuse).
Surface bleue : $4a^2$.
Surface rose (d'après Pythagore)* :



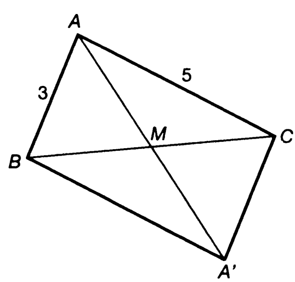
$AB^2 + AC^2 = (AH^2 + HB^2) + (AH^2 + HC^2)$
$= 2\,(AI^2 - IH^2) + (HI - IB)^2 + (HI + IC)^2$
$= 2\,(9a^2 - IH^2) + 2\,HI^2 + IB^2 + IC^2$
$= 18\,a^2 + 2\,a^2$
$= 20\,a^2 = 5 \times 4\,a^2.$

Il faudra donc 5 carrés bleus pour obtenir une surface égale à celle des 2 carrés roses réunis.

* En supposant que $AB < AC$ avec $B > 90°$. Démonstration analogue dans les autres cas.

5 – MÉDIANES PLAUSIBLES

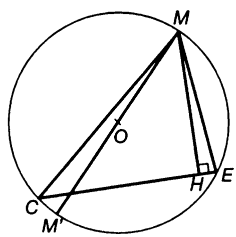
Soit A′ le symétrique de A par rapport à M. Nous avons alors :
$AA' < AB + BA'$
et
$AA' > BA' - AB.$
Or, $AA' = 2\,AM$.
Une médiane est donc comprise entre la demi-somme et la demi-différence des longueurs des segments qui l'entourent.
Ici, elle est donc comprise entre 1 et 4. Valeurs plausibles :
2,5 ; 1,1 ; 3,9.



6 – MIKADO SPATIAL

Supposons le problème résolu*. Soit A le point de B_1 caché par B_5. Tournons B_1 autour de A jusqu'à ce qu'elle touche B_2. B_1 et B_2 sont alors dans un même plan. Soit P ce plan. B_5 passe sur B_1 et sur B_2 donc sur P. B_3 passe sous B_1 et sous B_2 donc sous P. B_5 passe donc au-dessus de B_3. Or la figure montre le contraire. Cette construction est donc impossible.

7 – M-O-C-H-E



$\widehat{EMH} = 90° - \widehat{MEC}$

Soit M' le point diamétralement opposé à M.

$\widehat{CMO} = \widehat{CMM'} = 90° - \widehat{MM'C}$

Or $\widehat{MM'C} = \widehat{MEC}$

comme interceptant le même arc. Donc :

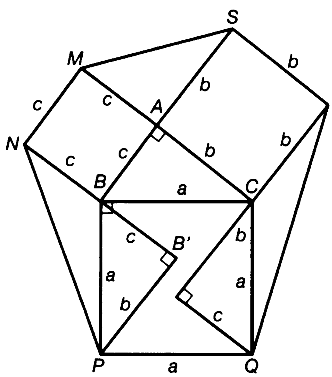
$\widehat{CMO} = 90° - \widehat{MEC} = \widehat{EMH}$

Les angles $\widehat{OMH}$ et $\widehat{EMC}$ ont donc la même bissectrice : l'angle à calculer est donc de 0°, indépendamment des longueurs précises données en hypothèses.

SOLUTIONS N

1 – Nîmes 1816

Soit ABC le triangle originel.
Soit $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Relation entre ses côtés :
$a^2 = b^2 + c^2$.
Soit $MNPQRS$ l'hexagone. Nous remarquons de suite que :
$MN^2 = c^2$
$PQ^2 = a^2$
$RS^2 = b^2$
$MS^2 = b^2 + c^2 = a^2$.
Construisons ensuite les triangles $BB'P$ et $CC'Q$ égaux à ABC.



Il est clair que BB' est dans l'alignement de NB. Nous avons alors :

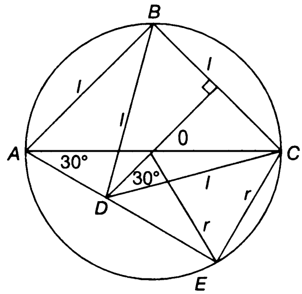
$$NP^2 = NB'^2 + B'P^2 = (2\,c)^2 + b^2 = 4\,c^2 + b^2$$

et de même : $QR^2 = 4\,b^2 + c^2$.
Il en résulte :
$MN^2 + PQ^2 + RS^2 + MS^2 + NP^2 + QR^2 = 7\,b^2 + 7\,c^2 + a^2 = 8\,a^2$.
Ce qu'il fallait démontrer.

2 – Le nouveau cercle équilatéral

Traçons le cercle de centre B, de rayon I. Il passe par A, C et D. CD est une corde correspondant à un angle au centre de 60°.

Donc $\widehat{CAD} = 30° = \widehat{CAE}$.
Dans le cercle initial, la corde CE a une longueur égale à r, et $\widehat{COE} = 60°$.



D'autre part OD est la médiatrice de BC. C'est donc la bissectrice de $\widehat{BCD}$. Donc $\widehat{OCD} = 30°$. Considérons le cercle de centre E et de rayon r. Il passe par C et par O. OCE est équilatéral et $\widehat{ODC} = 30°$. Donc D est sur ce nouveau cercle. Autrement dit : $DE = r$.

SOLUTIONS O

1 – ORANJADA

Soit r le rayon du cylindre en centimètres.
Surface de base : πr^2.

Volume : 226 cm^3. Hauteur : $\dfrac{226}{\pi r^2}$

Surface de métal :

$$y = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{226}{\pi r^2} = 2\left[\pi r^2 + \frac{226}{r}\right].$$

Si nous voulons rendre cette surface minimale, il nous faudra annuler sa dérivée par rapport à r :

$$y' = 2\left[2\pi r - \frac{226}{r^2}\right] = 0.$$

Donc : $\dfrac{226}{r^2} = 2\pi r$ ou : hauteur $= \dfrac{226}{\pi r^2} = 2r$.

Soit : $r^3 = \frac{226}{2\pi}$.

Donc $r = \sqrt[3]{\frac{226}{2\pi}} \approx 3{,}3$.

La hauteur du cylindre est donc de 6,6 cm à peu près.

2 – OÙ EST PASSÉ LE POINT F ?

$\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$

Comme interceptant le même arc AB.

Soit α cette valeur commune. Soit $\varepsilon = \widehat{DEC}$.

La bissectrice issue de E fait un angle $\frac{\varepsilon}{2}$ avec la droite AD.

Soit J le point d'intersection de la bissectrice issue de I avec la droite AD.

$\widehat{DIJ} = \frac{\widehat{DIC}}{2}$.

Observons le quadrilatère $EDIC$. La somme des ses 4 angles est de 360°. Donc :

DIC $= 360° - (180° - \delta) - \varepsilon = 2\delta - \varepsilon$ et $\widehat{DIJ} = \delta - \frac{\varepsilon}{2}$.

Observons alors le triangle DJI. La somme de ses angles est de 180°. Donc :

$\widehat{DJI} = 180° - (180° - \delta) - (\delta - \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Les 2 bissectrices font donc le même angle $\frac{\varepsilon}{2}$ avec la droite AD : elles sont parallèles. On peut chercher longtemps le point F...

3 – OÙ L'ON DÉMONTRE QUE 64 ÉGALE 65

Observons attentivement la diagonale du rectangle de la figure 1.

Cette diagonale a pour pente $\frac{5}{13} = 0{,}3846$.

Elle est apparemment formée de 3 morceaux ayant pour pentes respectives :

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0{,}333 \quad ; \quad \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

La figure est donc fausse, une ligne droite ayant été confondue du fait de l'épaisseur du trait avec une ligne brisée. L'égalité entre les surfaces totales des figures 1 et 2 n'a donc plus aucune raison d'être, et 5 fois 13 ne font pas 8 fois 8 !

4 – ORANGE OU CLÉMENTINE

Supposons que l'orange et la clémentine soient des sphères...(aire $4\pi R^2$) Les poids de leurs peaux sont alors proportionnels aux carrés de leur rayon. Celui de l'orange est le double de celui de la clémentine. Or leurs poids sont proportionnels aux cubes de ces rayons $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$. L'orange pèse donc approximativement 8 fois plus lourd que la clémentine.

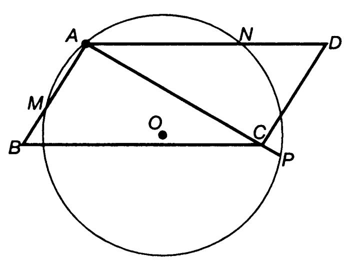
SOLUTIONS

P

1 – PARALLÉLOGRAMME

L'angle $\widehat{DAB}$ étant constant, le sommet A du parallélogramme demeure sur un certain cercle passant par M et N, lorsque le parallélogramme se déplace. Soit P le point d'intersection de ce cercle avec la diagonale AC. L'angle $\widehat{DAC}$ ou $\widehat{NAP}$ étant constant, le point P ne varie pas au cours du déplacement. C'est le point fixe recherché.

Remarque : il s'agit là d'un théorème énoncé par Maurice d'Ocagne en 1880, alors qu'il était élève à Polytechnique. Il correspond au théorème des statiques suivant (Abel Transon, 1863) : « Lorsqu'on fait tourner 2 forces concourantes d'une même quantité angulaire et dans le même sens autour de leurs points respectifs d'application, la résultante tourne d'une même quantité et passe par un point fixe. »



2 – PAUVRE MOUTON

Surface à sa disposition :

$\frac{3}{4}$ de cercle de rayon 6 m

$\frac{1}{4}$ de cercle de rayon 2 m

$\frac{1}{4}$ de cercle de rayon 3 m

$\frac{1}{4}$ de cercle de rayon 1 m

$\frac{1}{4}$ de cercle de rayon 0,50 m

Total : 96 m^2.

Notre pauvre mouton n'avait que 96 m^2 à sa disposition.

3 – UNE PENSÉE POUR AIMENEPAICU

ABCD est inscriptible. Les angles en *B* et *D* sont donc supplémentaires. Les angles $\widehat{FDC}$ et $\widehat{FBA}$ sont ainsi égaux (ayant même suppléments). Les triangles *FNB* et *FDQ* sont donc semblables.

Alors $\widehat{FNB} = \widehat{FQD}$.

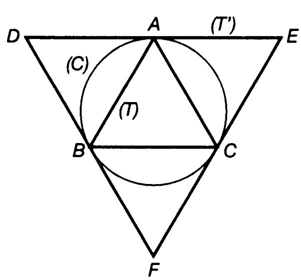
Leurs suppléments $\widehat{ENQ}$ et $\widehat{NQE}$ sont ainsi égaux : *NEQ* est isocèle. Sa bissectrice *EM* est aussi médiatrice de *NQ*. Les diagonales de *MNPQ* sont donc des segments perpendiculaires qui se coupent en leurs milieux. Nous avons ainsi démontré que *AIMENEPAICU* forme un losange.

4 – PETIT T OU GROS T'

Observons la figure suivante :

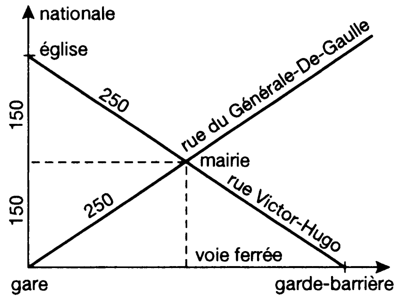
Les triangles *ADB, BCF, CAE* sont équilatéraux. Par conséquent : $AB = AD = DB = BC = BF = FC = AC = AE = EC$

Le gros triangle *T'* a donc un périmètre double de celui du précédent, soit : $2 \times 3\,416 = 6\,832$ mm.



5 – LE PETIT VILLAGE DES LANDES

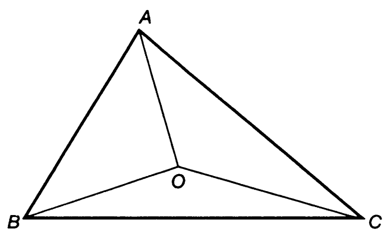
Observons la figure ci-jointe :



La mairie se trouve sur la médiatrice du segment église-gare. La rue du Général de Gaulle correspond donc à la médiane d'un triangle rectangle issue de l'angle droit : sa longueur est la moitié de celle de l'hypothénuse qui fait ainsi 500 mètres. C'est la distance à effectuer par le garde-barrière pour se rendre à l'église.

6 – PÉRIMÈTRE ET DEMI

Observons la figure.



Nous avons d'autre part :

$AC < AO + OC$

$BC < BO + OC$

$AB < AO + OC$

périmètre < 2 sommes des longueurs.

Nous avons d'autre part :

$AO + OC < AB + BC$

$BO + OC < AB + AC$

$AO + BO < AC + BC$

ce qui donne par addition :

2 sommes des longueurs < 2 périmètres.

Il en résulte :

périmètre < 2 sommes des longueurs < 2 périmètres

demi-périmètre < somme des longueurs < périmètre.

Ce qu'il fallait démontrer.

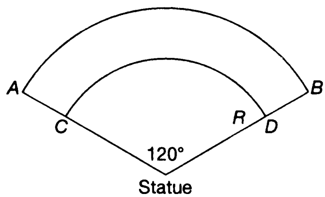
7 – LA PIÈCE D'EAU

Soit R le rayon relatif à l'allée CD. Soit r la longueur de AC ou BD.

Longueur du trajet AB en passant par CD : $2r + 2\frac{\pi R}{3}$.

Longueur du trajet par l'allée AB : $2\frac{\pi(r+R)}{3} = 2\frac{\pi r}{3} + 2\frac{\pi R}{3}$.

$\frac{\pi}{3}$ est superieur à 1 : le trajet est donc plus court en passant par l'allée CD.



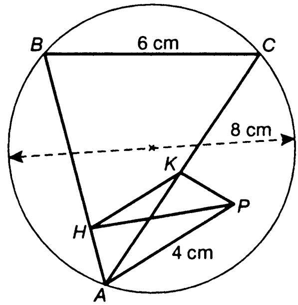
8 – PIER

$r\sqrt{3} + r\sqrt{2} = 3{,}14626r > 3{,}14159r$

C'est supérieur mais de 0,15 % seulement !

9 – PLEINE DE LONGUEURS !

Soit H et K les projections respectives de P sur AB et AC. Le quadrilatère $AHPK$ est inscriptible puisque H et K appartiennent tous deux au cercle de diamètre AP.



Appliquons la loi des sinus dans AHK :

$$\frac{HK}{\sin \hat{A}} = AP = 4$$

Appliquons-la alors dans ABC :

$$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = 2R = 8$$

Donc $\sin\hat{A} = \frac{BC}{8} = \frac{6}{8}$

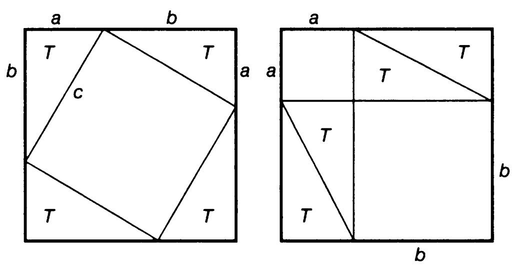
et $HK = 4\sin\hat{A} = \frac{4\times 6}{8} = \frac{24}{8} = 3\,\text{cm}.$

10 – Le plus grand voyageur

Caroline, Paul et Florence parcourent chacun un quart du cercle terrestre, soit approximativement
10 000 kilomètres.
Seule Béatrice en parcourt davantage avec 25° de plus que les autres, ce qui correspond à un trajet total de 12 778 kilomètres.
C'est donc elle qui fait le plus grand voyage.

11 – La plus simple démonstration du théorème de Pythagore

Soit T un triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs respectives a, b et c (c est la longueur de l'hypoténuse). Traçons alors 2 carrés égaux de côtés ($a + b$) et plaçons dans chacun 4 fois le triangle T, comme ci-dessous :



Une fois retirés nos 4 triangles T, que reste-t-il ? Un carré de surface c^2 par la première méthode, 2 carrés de surfaces respectives a^2 et b^2 par la seconde. D'où l'égalité : $a^2 + b^2 = c^2$.
C'est bien le théorème de Pythagore n'est-ce pas ?

12 – Points sur cercle

Soit 2 c la longueur de la circonférence. Soit x la longueur de l'arc compris entre les 2 premiers points. Soit y celle de l'arc compris entre le premier et le troisième point. On a :
$0 < x < 2\,c$ et $0 < y < 2\,c$.
(Ce qui correspond au carré sur la figure).

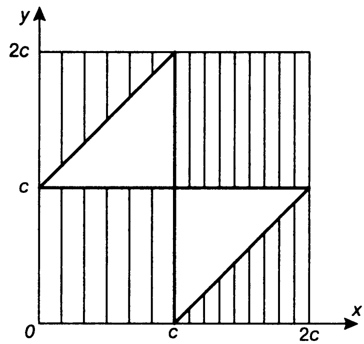
Pour que les 3 points appartiennent à la même demi-circonférence, il faut que l'une des 4 séries de conditions soit réalisée.

1° $x < c$ et $y < c$.
2° $x > c$ et $y > c$.
3° $x < c$ et $y > c$ et $y - x > c$.
4° $x > c$ et $y < c$ et $x - y > c$.

(Ce qui correspond à la partie hachurée).

La probabilité demandée sera donc égale au quotient de l'aire de la partie hachurée sur celle de 'laire du carré soit :

$$\frac{3c^2}{4c^2} = \frac{3}{4}.$$



13 – Polygones

Si p est un diviseur de n, le nombre de côtés du polygone est : $\frac{n}{p}$. Si p n'est pas un diviseur de n, il faut multiplier le quotient $\frac{n}{p}$ par le nombre x de tours de cercles correspondant :

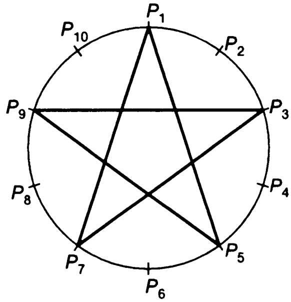
$x = \text{Inf}\ (y$ tel que $\left(\frac{yn}{p}\right)$ entier). C'est-à-dire :

$n \times \frac{x}{p} = \frac{PPCM(n,p)}{p}$ avec $PPCM\ (n,p)$ = plus petit commun multiples de n et p.

Lorsque $n = 10$ et $p = 2$: $\frac{10}{2} = 5$.

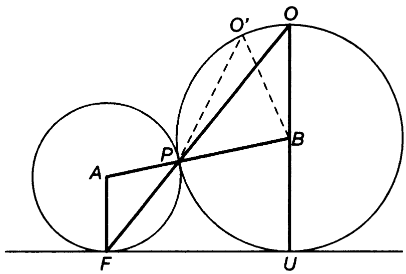
Lorsque $n = 10$ et $p = 3$: $\frac{30}{3} = 10$.

Lorsque $n = 10$ et $p = 4$: $\frac{20}{4} = 5$. (Voir figure page ci-contre).



14 – POUF

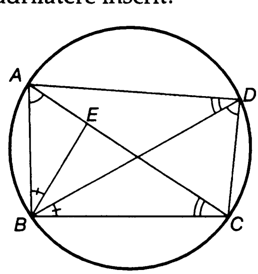
Soit A et B les 2 centres (voir figure).



AB passe par P. PAF et PBO sont des triangles semblables (isocèles avec 2 angles égaux).
Joignons UB qui coupe le cercle (B) en O'. UO' est parallèle à AF. Donc PAF et PBO' sont semblables. Donc les triangles PBO et PBO' sont égaux. Donc O est confondu avec O'. Donc OU est perpendiculaire à FU. L'angle OUF mesure 90°.

15 – PTOLÉMÉE

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit.



$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ car ils interceptent un même arc. Donc il est toujours possible de définir un point E de AC tel que les triangles ABE et DBC soient semblables.

Alors $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$, donc $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ mais $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$; donc les triangles ADB et ECB sont aussi semblables.

Nous pouvons ainsi écrire d'une part : $\dfrac{AE}{CD} = \dfrac{AB}{BD}$

Soit $AE \times BD = AB \times CD$, d'autre part, $\dfrac{CE}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$

Soit $CE \times BD = AD \times BC$.
Soit, en additionnant :

$$AE \times BD + CE \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

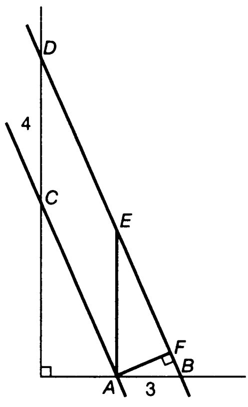
Soit,

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

16 – PERPAPENRADICULLELLE

Observons la figure ci-jointe : *



$EA = CD = 4$ cm.
Appliquons Pythagore dans AEB :
$EB^2 = EA^2 + AB^2 = 9 + 16 = 25$.
Donc $EB = 5$ cm.
Or EAF est semblable à EAB.

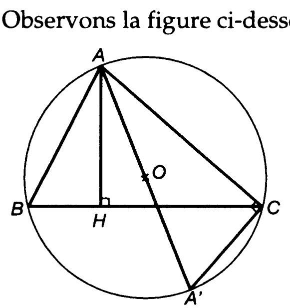
Donc : $\dfrac{AF}{EA} = \dfrac{AB}{EB}$.

Donc $AF = \dfrac{EA \times AB}{EB} = \dfrac{4 \times 3}{5} = \dfrac{12}{5}$ cm.

Il en résulte : les 2 parallèles sont distantes de 24 mm.

17 – PRODUIT DE LONGUEURS

Observons la figure ci-dessous.

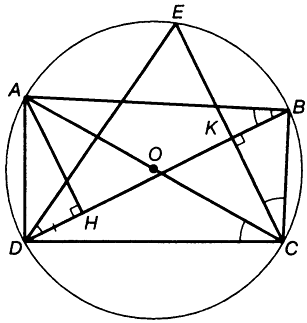


Les angles en A' et en B sont égaux puisqu'ils interceptent le même arc. Leurs sinus sont donc égaux : $\dfrac{AC}{AA'} = \dfrac{AH}{AB}$.

Et par conséquent :
$AB \times AC = AH \times AA'$.
CQFD.

1 – LE QUADRILATÈRE

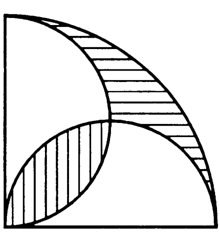
Soit *ABCD* ce quadrilatère, *AC* étant un diamètre. Soit *H* et *K* les projections respectives de *A* et de *C* sur *BD*. Soit *E* le point d'intersection de la droite *CK* avec le cercle.



Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ECD}$ ayant leurs côtés perpendiculaires 2 à 2 sont égaux. Il en est donc de même des arcs *AB* et *ED*, et par conséquent, des segments *AB* et *ED*. Les arcs *AD* et *EB* sont égaux aussi (on les obtient en diminuant chacun des arcs précédents du même arc *AE*). Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDE}$ le sont donc également. Il en résulte l'égalité des triangles rectangles *ABH* et *EKD*. Par conséquent, les segments, *BH* et *KD* sont égaux. Il en est de même, bien sûr, des segments *BK* et *DH*.

Les projections des côtés opposés du quadrilatère initial sur la diagonale, qui n'est pas un diamètre, sont donc égales.

2 – UN QUART ET DEUX DEMIS



Le total des surfaces des 2 demi-cercles est égal à la surface du quart de cercle ($\frac{\pi R^2}{4}$ dans chaque cas). Il est alors évident que la surface commune aux 2 petits cercles est égale à la surface du grand cercle qui leur est restée extérieure.

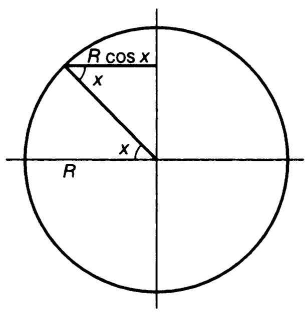
1 – Recherches pétrolières

La nappe de pétrole est assimilable à un trapèze isocèle, de hauteur $\dfrac{40000\,\text{km}}{360}$ (distance entre 2 parallèles successives), de grande base $\dfrac{40000}{360}\cos 65°$ et de petite base $\dfrac{40000}{360}\cos 66°$.

Surface:

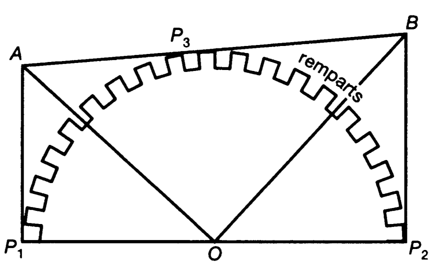
$$\left(\frac{40000}{360}\right)^2\left(\frac{\cos 65° + \cos 66°}{2}\right) = 0{,}415 \times \left(\frac{1000}{9}\right)^2 = 5123{,}5\,\text{km}^2.$$

Remarque : le tour de xe parallèle mesure en effet : 40 000 cos x.



2 – Les remparts

Appelons O le centre du demi-cerlce et A et B les points de rencontre respectifs des tangentes en P_1 et P_3 d'une part, en P_2 et P_3 d'autre part.



Les angles $\widehat{P_1AP_3}$ et $\widehat{P_2BP_3}$ sont supplémentaires puisque la somme des angles de P_1ABP_2 est de 360°. Leurs moitiés respectives ($\widehat{OAP_1}$ et $\widehat{OBP_2}$) sont donc complémentaires. Il en résulte que les triangles rectangles OAP_1 et OBP_2 sont semblables et par conséquent :

$$\frac{AP_1}{OP_1} = \frac{OP_2}{BP_2}.$$

ou $AP_1 \times BP_2 = OP_1^2$

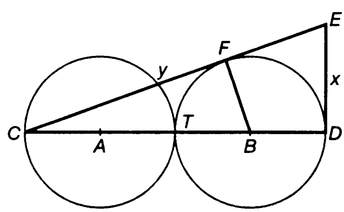
et $(P_1A + AP_3) \times (P_3B + BP_2) = 4 \times OP_1^2 = P_1P_2^2$.

C'est ce que nous voulions démontrer.

3 – Racines de cercles pour tangentes entières

Soit F le point de tangence au cercle (B) situé sur CE. Soit x la longueur de DE et y celle de CF. Nous avons :

$ED = FE = x$; $CB = 3\sqrt{2}$; $CD = 4\sqrt{2}$; $BF = \sqrt{2}$.



Puis calculons y par le théorème de Pythagore :

$y = CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{18-2} = 4$

CFB et CDE sont semblables :

$\frac{DE}{FB} = \frac{CD}{CF}$. Donc : $DE = \sqrt{2} \times 4\frac{\sqrt{2}}{4} = 2.$

En conclusion, DE mesure 2 cm et EC en mesure 6.

4 – Le ruban de scotch

Soit y cette longueur inconnue en cm :

$y \times 0,1 = \pi \times \frac{4^2}{4} - \pi \times \frac{2^2}{4}$

Donc : $0,1\,y = 4\,\pi - \pi = 3\,\pi$

$y = 31,4 \times 3 = 94,2$ cm.

S

1 – La sieste

Albert a posé les extrémités de son majeur et de son index sur la terrase (surface horizontale) tout en maintenant entre ses 2 doigts un écartement constant (20°). Lorsque sa main tourne autour de ces 2 points d'appui, l'angle que font les ombres de ses doigts évolue : c'est 20° lorsque sa main est à plat, 180° lorsqu'elle est dans le plan parallèle aux rayons du soleil. Comme ce changement d'angle est bien entendu continu, il arrivera un moment où les 2 ombres feront précisément un angle de 90° (valeur comprise entre 20° et 180°). Cette position est donc facile à trouver : tout comme Albert, nous nous serions rendormis rapidement.

2 – Si la Terre était une orange

Soit r le rayon de l'orange et R celui de la Terre exprimés en mètres. La ficelle rouge est passée d'une longueur de $2\pi r$ à une longueur de $2\pi (r + 1)$: soit une augmentation de 6,283 m. La ficelle bleue est passée d'une longueur de $2\pi R$ à une longueur de $2\pi (R + 1)$ soit une augmentation de 6,283 mètres seulement. Les 2 allongements sont identiques.

3 – Surfaces égales

Soit a la longueur de AB ou de AC. Surface du triangle ABC :

$$\frac{a^2}{2}.$$

Longueur de l'hypoténuse BC : $a\sqrt{2}$.

Surface du demi-cercle de diamètre BC : $\frac{1}{2}\pi\frac{BC^2}{4} = \pi\frac{a^2}{4}$.

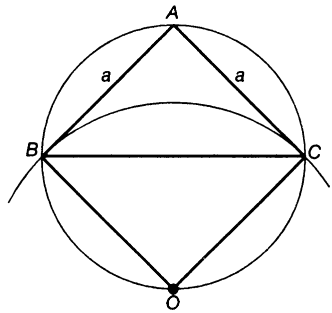
Soit O le centre du cercle tangent en B à AB et en C à AC. OBC est un triangle rectangle isocèle égal à ABC :

surface $OBC = \frac{a^2}{2}$.

Surface du quart de cercle OBC : $\pi\frac{a^2}{4}$.

Surface comprise entre les 2 arcs BC = surface du demi-cercle de diamètre BC – (surface du quart de cercle OBC – surface du triangle OBC) = $\pi\frac{a^2}{4} - \left(\pi\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$ = surface ABC.

La surface comprise entre les 2 arcs BC est égale à celle de ABC.



4 – LES STATUES

Soit P_1, P_2, P_3 et P_4 les 4 ponts successifs.

Distance de P_1 à Vercingétorix : $\dfrac{P_1P_2}{2}$.

Distance de P_1 à Henri IV : $P_1P_2 + P_2P_3 + \dfrac{P_3P_4}{2}$.

Donc, distance de P_1 au milieu de l'intervalle joignant ces 2 statues :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P_1P_2}{2} + P_1P_2 + P_2P_3 + \frac{P_3P_4}{2}\right).$$

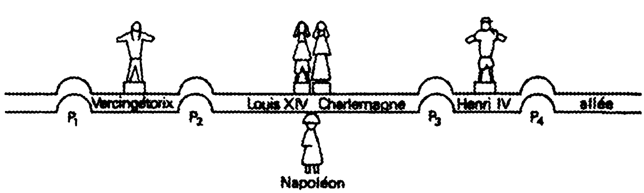
Distance de P_1 à Charlemagne : $P_1P_2 + \dfrac{P_2P_3}{2}$.

Distance de P_1 à Louis XIV : $\dfrac{(P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4)}{2}$.

Donc : distance de P_1 au milieu de l'intervalle joignant ces 2 dernières statues :

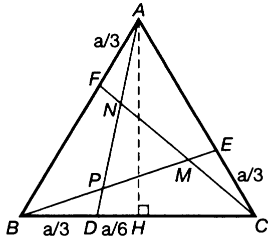
$$\frac{1}{2}\left(P_1P_2 + \frac{P_2P_3}{2} + \frac{P_1P_2}{2} + \frac{P_2P_3}{2} + \frac{P_3P_4}{2}\right).$$

Les 2 emplacements proposés pour placer la statue de Napoléon sont donc confondus.



5 – SURFACES À RÉFLÉCHIR

Soit a la longueur de chacun des côtés du triangle ABC. Soit A l'aire de ABC. Nous avons :



$$EC = \frac{AC}{3} = \frac{a}{3}$$
$$= AF = BD$$

Aire (ABD) = Aire (BCE) = Aire (CAF) = $\frac{A}{3}$.

Les triangles BPD et ABD sont semblables (un angle commun et 2 autres angles égaux en A et B). Donc :

$$\text{Aire } (BPD) = \left(\frac{DB}{AD}\right)^2 \text{ aire } (ABD) = \frac{\frac{a^2}{9}}{\left(\frac{a}{6}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} \times \frac{A}{3} = \frac{A}{21}$$

Il en résulte :

Aire (MNP) = Aire (ABC) – Aire (ABD) – Aire (BCE) – Aire (CAF) + Aire (BPD) + Aire (CEM) + Aire (NAF)

$$= A - \frac{3A}{3} + \frac{3A}{21} = \frac{A}{7}$$

Le rapport demandé est de $\frac{1}{7}$.

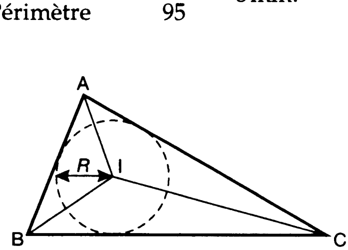
6 – SECRET

Soit R le rayon du cercle inscrit. Soit ABC le triangle.

Aire (ABC) = Aire (IAB) + Aire (IBC) + Aire (ICA)

$$= \frac{R \times AB}{2} + \frac{R \times BC}{2} + \frac{R \times CA}{2}$$
$$= R\left(\frac{AB + BC + CA}{2}\right)$$

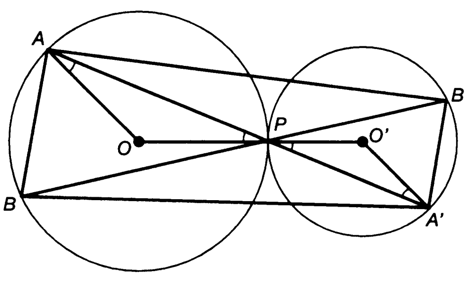
Donc $R = \frac{2 \times \text{aire}(ABC)}{\text{Périmètre}} = \frac{2 \times 380}{95} = 8\,\text{mm}.$



1 – TANGENCE

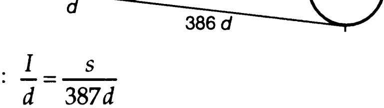
Soit O et O' les centres respectifs de chacun des 2 cercles. Soit P le point de tangence. La droite OO' y passe.
Soit AA' et BB' les 2 droites menées par P, A et B étant sur le cercle de centre O, A' et B' sur celui de centre O'.

Les angles $\widehat{APO}$ et $\widehat{O'PA'}$ sont égaux comme opposés par le sommet. Or les triangles AOP et $A'O'P$ sont isocèles. Donc les angles $\widehat{AOP}$ et $\widehat{A'O'P}$ sont égaux. Or dans le cercle de centre O, l'angle $\widehat{ABP}$ qui intercepte l'arc AP est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant : $\widehat{AOP}$. De façon analogue, $\widehat{PB'A'}$ est égal à la moitié de $\widehat{PO'A'}$. Les angles $\widehat{PBA}$ et $\widehat{PB'A'}$ sont donc égaux : les droites AB et $A'B'$ sont ainsi parallèles : le quadrilatère $ABA'B'$ est un trapèze.



2 – TERRE, LUNE ET SOLEIL

Soit d la distance de la Lune à la Terre. Soit l le diamètre de la Lune. Soit s celui du Soleil.

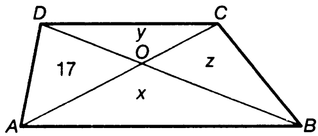


Nous avons : $\frac{l}{d} = \frac{s}{387d}$

Donc $s = 387\ l$.
Comme le volume est proportionnel au cube du rayon (ou du diamètre), il faudrait à peu près 58 millions de Lunes pour faire un volume égal à celui du Soleil, car $387^3 = 57\,960\,603$.

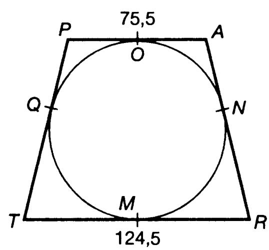
3 – UN TRAPEZE ROUGE ET BLEU

Observons la figure ci-contre :
Nous avons : Aire DAB = Aire CAB et Aire DAC = Aire DBC (même base et hauteurs égales).
Ce qui donne : $17 + x = z + x$ et $17 + y = z + y$
Additionnons ces 2 égalités $34 + x + y = 2z + x + y$
Les 2 triangles rouges ont donc la même aire, car $2z = 34$ et $z = 17$.



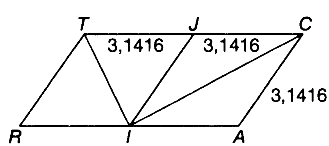
4 – TRAP

Observons la figure ci-dessous.
$TP + RA = TQ + QP + AN + NR = TM + PO + AO + RM$
$= TR + AP = 200$ mm.
Chacun des 2 côtés égaux fait donc 10 cm.



5 – DE TIC À TRAC EN TROIS MINUTES

Soit J le milieu de TC.

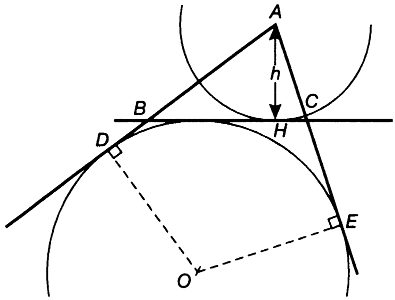


$JI = CA = 3{,}1416$ cm et $JT = JC = \dfrac{6{,}2832}{2} = 3{,}1416$ cm.

I est donc sur le demi-cercle de diamètre TC. Donc $\widehat{TIC} = 90°$.

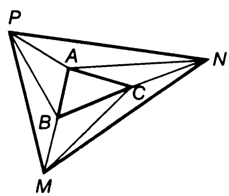
6 – TRIANGLE

Construisons un angle égal à celui de la donnée. Soit A son sommet. Soit D et E les points situés sur ses côtés, à une distance de A égale au demi-périmètre de la donnée. Soit O le point d'intersection des perpendiculaires issues de D et de E. Traçons alors le cercle de centre O, de rayon OD ou OE. Puis traçons un autre cercle de centre A et tel que son rayon soit égal à la hauteur de la donnée. Menons une tangente commune aux 2 cercles (intérieurement). Soit B et C ses points d'intersection avec les côtés de l'angle A. On a : $AB + BC + CA = AD + AE$ = périmètre car $BC = BD + CE$. Et le triangle ABC représente le triangle cherché (voir figure).



7 – Le triangle a grandi

Observons la figure ci-dessous.



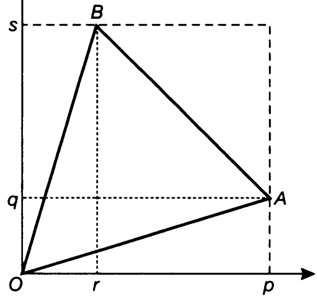
Il est clair que chacun des 6 triangles T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6 a une surface égale à celle de T (même hauteur et base égale).

Donc : surface de MNP = 7 surf. $T = 49\ cm^2$.

Il manque encore 1 cm^2. En conclusion, la fée Trigéomme ne fait pas bien son travail.

8 – Triangle à carreau

Supposons le problème résolu : le triangle demandé est OAB. Les coordonnées de $A(p, q)$ et de $B\ (r, s)$ sont des nombres entiers*.



Nous allons calculer la surface de ce triangle de 2 façons différentes :

1) $\frac{1}{2}OA \times$ hauteur issue de B

$$= \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{p^2+q^2}\right) \times \left(\sqrt{p^2+q^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(p^2+q^2\right)$$

2) Différence entre la surface du rectangle et celles des 3 petits triangles rectangles (voir figure) :

$$ps - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{2}sr - \frac{1}{2}(p-r)(s-q)$$

$$= \frac{1}{2}(ps-rq) = \frac{1}{2}(ps-rq)\frac{\sqrt{3}}{4}\left(p^2+q^2\right)$$

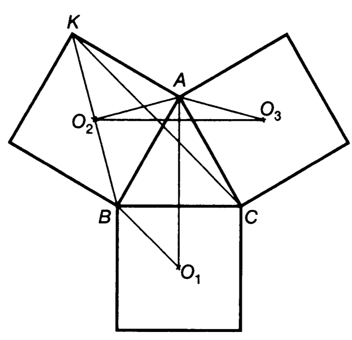
Soit $\sqrt{3}\left(p^2+q^2\right) = 2(ps-rq)$.

Nous ne pouvons avoir l'égalité entre un nombre entier et un nombre non entier. Notre hypothèse était donc fausse : il n'y a pas de solution à ce problème.

* L'unité choisie est tout simplement la longueur d'un côté d'un petit carré formant le quadrillage initial.

9 – LE TRIANGLE ET LES TROIS CARRÉS

Observons la figure suivante.



Considérons les triangles AO_2O_3 et AKC.

Le second se déduit du premier en appliquant successivement une rotation de 45°, et une homothétie de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (centres en A).

Donc $O_2O_3 = \dfrac{KC}{\sqrt{2}}$ et O_2O_3 fait un angle de 45° avec KC.

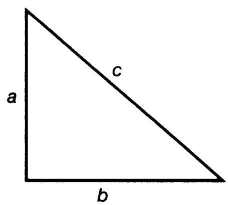
Considérons alors les triangles O_1BA et CBK. Le second se déduit du premier en appliquant successivement une rotation de 45°, et une homothétie de $\sqrt{2}$ (centres en B).

Donc $O_1A = \dfrac{KC}{\sqrt{2}}$ et O_1A fait un angle de 45° avec KC.

En conclusion : $O_1A = O_2O_3$
$O_1A \perp O_2O_3$

10 – TRIANGLE RECTANGLE CONSÉCUTIF

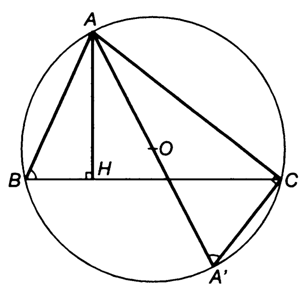
a, b et c étant déterminés sur le dessin, on a :
$a < b < c$, donc $c = a + 2$ et $b = a + 1$



D'autre part, le théorème de Pythagore nous donne :
$a^2 + b^2 = c^2$.
$a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2$
soit : $a^2 - 2a - 3 = 0$
soit : $(a + 1) \times (a - 3) = 0$.
Soit, puisque a est nécessairement un nombre positif : $a = 3$.
On a donc : $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ qui vérifient bien les conditions de Pythagore.

11 – TROUVEZ LE DIAMÈTRE

Observez la figure suivante.



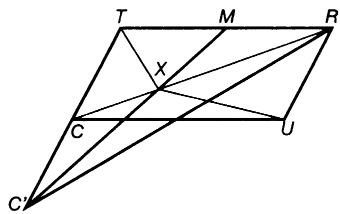
ABH est semblable à $AA'C$. Donc, il en résulte : $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AA'}{AC}$

et $AB \times AC = AH \times AA' \Rightarrow AA' = \frac{3 \times 4}{2,5} = 4,8.$

C'est la 3e valeur que nous choisissons.

12 – TRUC-X

Supposons le problème résolu.
T et U sont équidistants de la droite XR. Donc $X \in CR$.
L'aire de chaque triangle est égale au tiers de celle du parallélogramme. Le point X est donc situé au tiers de CR à partir de C. Pour le construire, nous utiliserons donc la propriété du centre de gravité d'un triangle, en prolongeant TC d'une longueur égale CC'. Soit M le milieu de TR. $C'M$ et CR sont 2 médianes de $TC'R$ qui se coupent au tiers de leurs longueurs respectives à partir de la base, c'est-à-dire au point X, ainsi construit.



SOLUTIONS

U

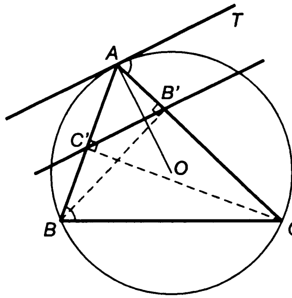
1 – ULM 1860

Observons la figure page suivante.
Nous voulons démontrer que AO est perpendiculaire à $C'B'$.
Il suffit de démontrer que la tangente en A au cercle circonscrit (perpendiculaire au rayon AO) est parallèle à $C'B'$.

Or $\widehat{TAC} = \widehat{ABC}$ car ils interceptent un même arc. D'autre part $BC'B'C$ est inscriptible donc :

$\widehat{AB'C'} = 180° - \widehat{C'B'C} = \widehat{ABC}$.

Il en résulte que $TAC = AB'C'$.



Or ces 2 angles sont alterne internes par rapport aux droites AT et $C'B'$. Celles-ci sont donc parallèles. Ce qu'il fallait démontrer.

2 – UNSURABEPLUSUNSURACE

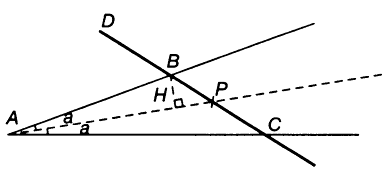
Observons la figure ci-dessous.

$$\text{Aire } (ABP) = \frac{(AP \times BH)}{2} = \frac{\left(AP \times \frac{BH}{AB} \times AB\right)}{2} = \frac{AP \times \sin a \times AB}{2}$$

L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles ABP et ACP, ce qui s'écrit :
$AP \times AB \sin a + AP \times AC \sin a = AB \times AC \sin 2a$
Divisons les 2 termes de cette expression par
$AB \times AC \times \sin a \times AP$

Il vient : $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB} = \dfrac{\sin 2a}{AP \times \sin a}$

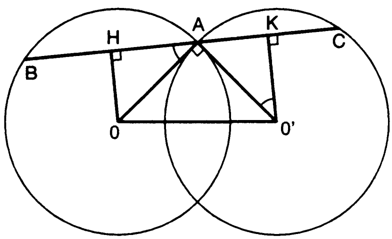
Ce qui est indépendant de la position précise de la droite D.



VWXYZ

1 – UNE VALEUR BIEN SYMPATHIQUE

Nous remarquons tout d'abord que :
$OO'^2 = 50 = OA^2 + O'A^2$.
Le triangle OAO' est donc rectangle-isocèle. Soit alors H et K les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de O et O' sur la droite BC.



Les triangles AHO et $O'KA$ sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et les angles aigus égaux (côtés perpendiculaires). Donc : $AH = O'K$.
Et : $AH^2 + AK^2 = O'K^2 + AK^2 = AO'^2 = 25$.
Par conséquent :
$AB^2 + AC^2 = (2AH^2) + (2AK)^2 = 4 \times 25 = 100$.
Telle est la valeur qu'il fallait obtenir.

2 – LE VIEUX POLYGONE

Un polygone régulier de 3 côtés est un triangle équilatéral :

chacun de ses angles vaut : $\dfrac{180°}{3} = 60°$.

Quand nous ajoutons un côté à ce polygone régulier, la somme de ses angles augmente de 180°.
Et quand nous ajoutons n côtés, la somme de ses angles augmente de : $n \times 180°$.

Chaque angle vaut alors : $\dfrac{(180 + n \times 180)}{(n+3)}$

d'où l'équation : $(n + 1) \times 180 = 176{,}4\ (n + 3)$
Donc : $3{,}6\ n = 349{,}2$ et $n = 97$.
Le nombre total de côtés est donc de $97 + 3 = 100$: le polygone a 100 ans !

3 – LE VILLAGE ALSACIEN

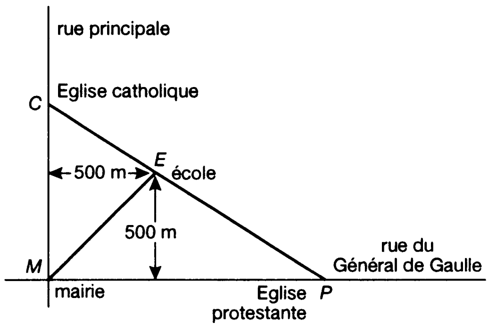
Soit E l'école, M la mairie, P l'église protestante et C l'église catholique.

L'aire du triangle MCP est égale à la somme des aires des triangles MCE et MPE. Ce qui s'écrit :

$$500 \times \frac{MC}{2} + 500 \times \frac{MP}{2} = MP \times \frac{MC}{2}.$$

Il en résulte : $MC + MP = \dfrac{MP \times MC}{500}$.

C'est-à-dire : $\dfrac{1}{MC} + \dfrac{1}{MP} = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$.



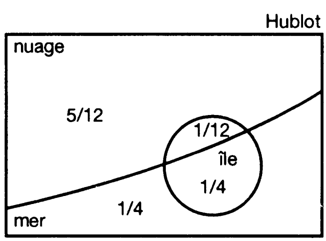
4 – VUE D'AVION

Les trois quarts de l'île occupent un quart du paysage. Donc :

île = $\dfrac{1}{3}$ (paysage).

Donc mer = $\dfrac{2}{3}$ (paysage).

Mer non cachée par le nuage : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ (paysage).

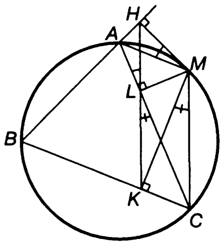


Donc, la proportion de mer cachée par le nuage :

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

5 – WALLACE OU SIMSON

Observons la figure ci-dessous.



LMAH est un quadrilatère inscrit dans un cercle de diamètre *AM*.

Donc : $\widehat{ALH} = \widehat{AMH}$.

De même, *LMKC* est un quadrilatère inscrit dans un cercle de diamètre *CM*.

Donc $\widehat{KLC} = \widehat{KMC}$.

Or *CMAB* et *KMHB* sont inscriptibles.

Donc : $\widehat{CMA} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - \widehat{HBK} = \widehat{HMK}$

Soit encore : $\widehat{CMK} + \widehat{KMA} = \widehat{HMA} + \widehat{AMK}$

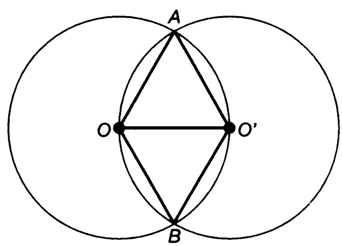
et : $\widehat{HMA} = \widehat{CMK}$

Donc : $\widehat{ALH} = \widehat{KLC}$.

Ces angles ont la position d'alternes-internes autour de *AC* si les points *HLK* sont alignés. Ils le sont donc et forment ainsi LA DROITE DE SIMSON, découverte par WALLACE.

6 – UNE VIE DE CHIEN

Soit *O* et *O'* les emplacements respectifs de Monsieur et de Madame Dubois à un instant donné.



Si le chien n'était attaché qu'à Monsieur Dubois, sa surface d'action serait π (surface du cercle de 1 m^2).

Il en serait de même s'il n'était attaché qu'à Madame Dubois. Tandis qu'il ne peut se déplacer en réalité que dans l'intersection de 2 cercles, de rayon 1 m, et dont les centres sont distants de 1 m. Soit *A* et *B* les points d'intersection de ces cercles (centre *O* et *O'*, rayon 1 m).

Aire du losange *OAO'B* : 2 (surface *OAO'*) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aire du secteur de centre *O* compris entre *A* et *B* : $\frac{\pi}{3}$.

Aire du secteur de centre *O'* compris entre *A* et *B* : $\frac{\pi}{3}$.

Donc la surface de l'intersection des 2 cercles est :

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=2{,}094-0{,}866=1{,}228.$$

7 – ZONE PIÉTONNIÈRE

Considérons un tableau carré à 7 lignes et 7 colonnes (une par rue) la 4e rue par exemple correspondant à la 4e ligne et à la 4e colonne. Remplissons chaque case avec un 1 si les 2 rues correspondantes se croisent, un 0 autrement (la diagonale sera remplie de 0).

		j		i			
	0						
j		0		1			
			0				
i		1		0			
					0		
						0	
							0

Première remarque : s'il y a un 1 à l'intersection de la *i*-ième ligne et de la *j*-ième colonne, il y aura aussi un 1 à l'intersection de la *j*-ième ligne et de la *i*-ième colonne. Le tableau est donc symétrique par rapport à la première diagonale, et comporte un nombre pair de « 1 » .
Deuxième remarque : si chacune de ces 7 rues en coupe exactement 3 autres, on trouvera 3 fois « 1 » dans chaque ligne, et le nombre total de 1 sera : $7 \times 3 = 21$, ce qui est un nombre impair. D'où l'impossibilité d'un tel cas.

NUMÉROS

1 – 2 BOUGIES

Soit L la longueur de la bougie blanche. Après avoir brûlé pendant 2 heures, les longueurs respectives des bougies rouge et blanche ont diminué dans les proportions :
$\frac{2}{3}$, 5 et $\frac{2}{5}$. Elles sont alors égales.

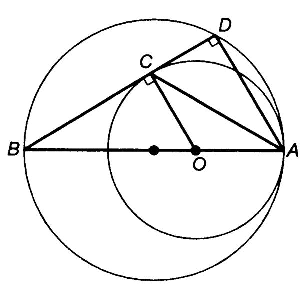
D'où l'équation : $\left(\frac{1,5}{3,5}\right)\times 21 = \frac{3}{5}\times L$

Donc : $L = \frac{5}{3}\times\frac{1,5}{3,5}\times 21 = 15\text{cm}$

La bougie blanche a donc une longueur de 15 centimètres (le rayon de la bougie rouge était ainsi une information inutile).

2 – LES 2 CERCLES

Observons la figure ci-contre : les droites CO et DA sont parallèles (toutes deux perpendiculaires à DB).
Par conséquent, les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{COB}$ sont égaux.
Or, dans le petit cercle, l'angle $\widehat{CAO}$ intercepte une corde dont l'angle au centre correspondant est $\widehat{COB}$.



Par conséquent : $\widehat{CAO} = \frac{\widehat{\text{COB}}}{2} = \frac{\widehat{\text{DAB}}}{2}$.

Donc $\widehat{CAO} = \widehat{DAC}$. Donc AC est ainsi la bissectrice de $\widehat{DAB}$.

3 – Les 2 Lunes

D'après Pythagore, nous avons : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

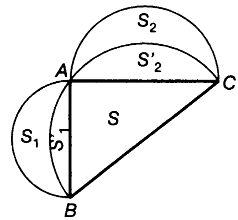
ou $\pi\times\frac{BC^2}{8} = \pi\times\frac{AB^2}{8}\pi\times\frac{AC^2}{8}$

Soit :

$S'_1 + S'_2 + S = (S_1 + S'_1) + (S_2 + S'_2)$

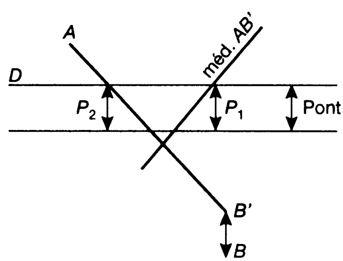
Donc : $S = S_1 + S_2$.

Soit : $S_1 + S_2 = \frac{AB\times AC}{2} = 6\,\text{cm}^2$.



4 – Les 2 ponts

Soit A et B les 2 villages. Soit B' le point tel que BB' soit un segment égal et parallèle à chaque futur pont, B' étant plus proche du canal que B. Soit D la droite représentant la rive du canal la plus proche de A.

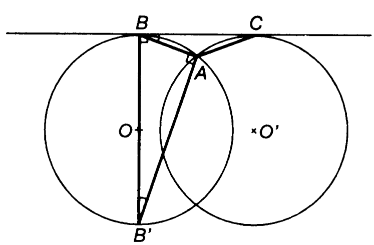


L'intersection de la médiatrice de AB' avec D donne le point de départ du premier pont, tandis que l'intersection de AB' lui-même avec D donne celui du deuxième pont (démonstrations triviales).

5 – Les 3 cercles

Considérons le triangle ABC. Soit a, b et c les côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C. La loi des sinus nous dit :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2r$$



Soit B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle de centre O. On a : $\widehat{AB'B} = \widehat{ABC}$ (côtés perpendiculaire)

Donc : $\sin \hat{B} = \dfrac{c}{2p}$.

On aurait de même : $\sin \hat{C} = \dfrac{b}{2q}$.

Reprenons alors la loi des sinus : $\dfrac{b}{\frac{c}{2p}} = \dfrac{c}{\frac{b}{2q}} = 2r$

Ou $\dfrac{pb}{c} = \dfrac{qc}{b} = r$

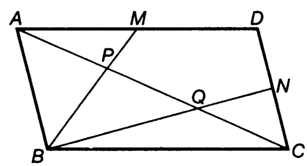
On en déduit : $\dfrac{pb}{c} \times \dfrac{qc}{b} = r^2$ ou $pq = r^2$. CQFD.

6 – 900° À L'OMBRE

Soit n le nombre de côtés du polygone.
$(n-2) \times 180° = 900°$. Donc : $n = 7$. Il s'agit d'un septagone.

7 – 3 MORCEAUX DE DIAGONALE

Les triangles APM et PBC sont semblables.



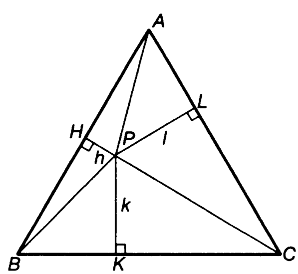
Or $AM = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2}$.

Donc : $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

AP a donc pour longueur le tiers de la longueur AC. On démontrerait qu'il en est de même pour QC.
Les 3 morceaux AP, PQ et QC sont donc égaux.

8 – LES 3 PERPENDICULAIRES

Soit ABC un triangle équilatéral et P un point intérieur quelconque. Soit H, K et L les 3 pieds des perpendiculaires abaissées respectivement sur AB, BC et CA. Soit h, k et l les longueurs respectives de PH, PK et PL.



La somme des 3 aires des triangles APB, BPC et CPA est égale à celle de ABC. Ce qui donne la relation :

$$h \times \frac{AB}{2} + k \times \frac{BC}{2} + l \times \frac{CA}{2} = \text{aire } ABC.$$

Or $AB = BC = CA$. Il en résulte :

$$h + k + l = \frac{2}{AB} \times \text{aire de } ABC.$$

La somme des 3 longueurs est donc indépendante de la position précise du point P.

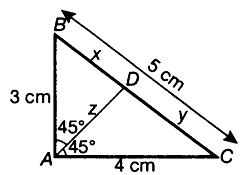
9 – 3-4-5 BISS

Observons la figure ci-dessous.
Remarques préliminaires :
$x + y = 5$

$$\sin \hat{B} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{3}{5}$$

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Démonstration : Appliquons la loi des sinus successivement dans les triangles ABD et ACD :

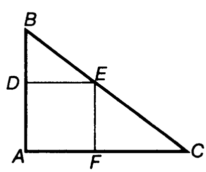
$$\frac{x}{\sin 45°} = \frac{z}{\sin \hat{B}} = \frac{5z}{4}; \frac{y}{\sin 45°} = \frac{z}{\sin \hat{C}} = \frac{5z}{3}$$

Soit $x = \frac{5z}{4\sqrt{2}}$ *et* $y = \frac{5z}{3\sqrt{2}}$

Ecrivons alors que $x + y = 5$:

$$\frac{5z}{4\sqrt{2}} + \frac{5z}{3\sqrt{2}} = 5$$

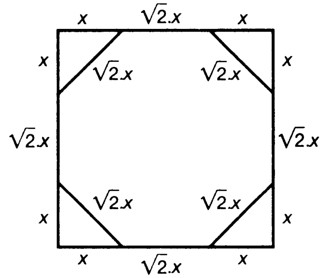
Donc : $z = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.



10 – LES 4 ARMURES

Chaque niche aura pour section un triangle rectangle isocèle de côté x. L'hypoténuse mesurera donc : $\sqrt{2}x$.

Cette hypoténuse est égale à l'un des 8 côtés égaux. Il faudra donc partager chacun des côtés du carré initial en 3 :
x pour la niche de gauche, pour le côté de l'octogone, x pour la niche de droite.



Donc : $(2 + \sqrt{2})\, x = 3{,}414$ m.

Et par conséquent : $x = 1$ m.

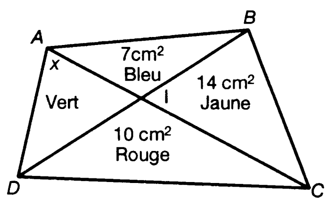
La section triangulaire de chaque niche a donc pour côtés : 1 m, 1 m et 1,414 m.

11 – Les 4 couleurs

Soit x cette aire. Ecrivons les relations entre les 4 aires des triangles ayant pour bases la diagonale BD. Nous avons :

$\left(\frac{x}{7}\right) = \left(\frac{10}{14}\right)$. Donc : $x = 5$.

Il y a 5 cm^2 en vert.



12 – Les 5 cercles

Soit $ABCD$ le quadrilatère inscriptible. Soit E, F, G et H les autres points d'intersection des 4 autres cercles, E étant à l'intersection du cercle de corde AB et de celui de corde DA, F correspondant aux cordes AB et BC, etc.

$\widehat{FEH} = 360° (\widehat{AEF} + \widehat{AEH}) = 360° [(180°- \widehat{ABF}) + (180° \widehat{ADH})]$ puisque $AEFB$ et $AEHD$ sont des quadrilatères inscriptibles.

Donc : $\widehat{FEH} = \widehat{ABF} + \widehat{ADH}$.

on démontrerait de même : $\widehat{FGH} = \widehat{CDH} + \widehat{FBC}$.

D'où il résulte :

$\widehat{FEH} + \widehat{FGH} = (\widehat{ABF} + \widehat{FBC}) + (\widehat{ADH} + \widehat{CDH})$

$= \widehat{ADC} + \widehat{ABC}) = 180°$.

$EFGH$ est donc un quadrilatère inscriptible : les 4 points E, F, G, H appartiennent à un même nouveau cercle.

13 – 6 POUR 1

Soit ABC le grand triangle, et G l'intersection des 3 médianes. Soit S_1, S_2... S_6 les surfaces respectives des 6 petits triangles (voir figure) :

La surface d'un triangle étant égale au demi-produit de sa base par la hauteur correspondante, nous avons en considérant $\frac{BC}{2}$ comme base : $S_3 = S_4$

et $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6$.

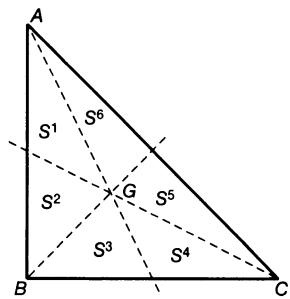
Nous aurions de même, en considérant l'une après l'autre, les bases CA et AB, coupées en 2 :

$S_5 = S_6$ et $S_3 + S_4 + S_5 = S_6 + S_1 + S_2$

puis :

$S_1 = S_2$ et $S_2 + S_3 + S_4 = S_5 + S_6 + S_1$.

Tout ceci est plus que suffisant pour prouver l'égalité des surfaces de nos 6 petits triangles entres elles.



Imprimé en France. - JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 218916D. - Dépôt légal : Juin 1994