jeux tests & maths

Jeux mathématiques du « Monde »

500 énigmes et leurs solutions

Élisabeth BUSSER
Gilles COHEN

EDITIONS POLE

Plan de l'ouvrage

Partie 1 : 001 à 300

Chapitre 1 : Affaire de logique p 9
Chapitre 2 : Figures libres p 61
Chapitre 3 : Curiosiés & paradoxes p 121
Chapitre 4 : Graphes & algorithmes p 175
Chapitre 5 : Défis numériques p 233

Partie 2 : 301 à 500

Chapitre 1 : Affaire de logique p 7
Chapitre 2 : Figures libres p 45
Chapitre 3 : Curiosiés & paradoxes p 87
Chapitre 4 : Graphes & algorithmes p 123
Chapitre 5 : Défis numériques p 163

N.B. Les pages de chacune des deux parties sont numérotées à partir de 1.

ISBN : 978 284 884 0741

PRÉFACE

Depuis 1996, 500 jeux et problèmes mathématiques ont été publiés dans « Le Monde », semaine après semaine, et plusieurs ouvrages ont paru, rassemblant à la fois les problèmes, les solutions, et les principales idées novatrices émises par les nombreux et fidèles lecteurs qui nous écrivent régulièrement depuis plus de dix ans, et que nous remercions chaleureusement.

Nous sommes heureux de publier aujourd'hui « L'intégrale » de ces 500 premiers problèmes, que beaucoup de lecteurs appelaient de leurs vœux.

Nous vous en souhaitons un usage fructueux et durable.

Gilles Cohen

E. Busser

Les jeux mathématiques du « Monde »

Sous la direction de Gilles Cohen - Éditions POLE

001-100 *Affaire de logique*

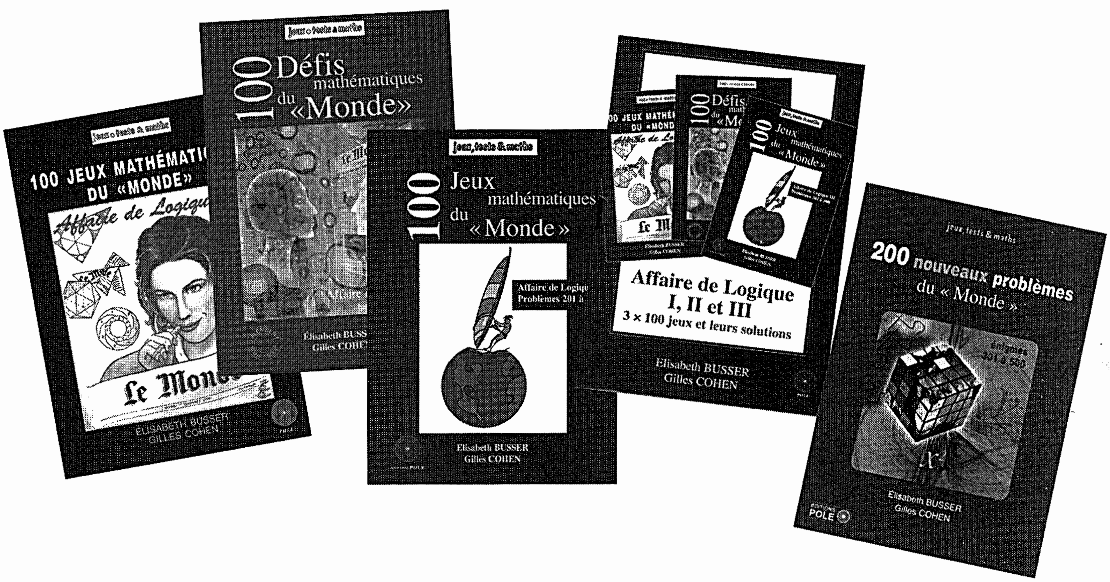
101-200 *100 défis mathématiques du « Monde »*

201-300 *100 jeux mathématiques du « Monde »*

301-500 *200 nouveaux problèmes du « Monde »*

001-300 *Coffret des jeux mathématiques du « Monde »*

001-500 *L'intégrale des jeux mathématiques du « Monde »*



Tous ces ouvrages, y compris le coffret, peuvent être commandés chez votre libraire.
Ils sont également disponibles à l'Espace Tangente (80 bd Saint-Michel à Paris) ou sur **www.poleditions.com**

Partie 1

JEUX MATHÉMATIQUES DU « MONDE »

001 à 300

TABLE DES MATIÈRES

chapitre 1 • AFFAIRE DE LOGIQUE

n°		énoncé	solution
001	Le tableau autoréférent	10	41
002	Histoires de familles	10	41
003	Le sac de lettres	11	41
004	La table polyglottee	11	41
005	Le champ de mines	12	42
006	Le tournoi de tennis	12	42
007	Bronzer idiot	13	42
008	Les jumeaux muets	13	42
009	Les nombres secrets	14	42
010	Soirée mondaine	14	43
011	Comme chat et chien	15	43
012	Il n'y a que médaille qui m'aille	15	43
013	Les clés de l'énigme	16	43
014	La cité autarcique	16	44
015	Le théorème galant	17	44
016	Les quatre enfants	17	44
017	Les locaux de la colo	18	45
018	Le dernier pion	18	45
019	Le rectangle rose	19	45
020	Les demi-cercles	19	46
021	L'agent secret	20	46
022	Le train d'engrenage	20	47
023	La neuvième carte	21	47
024	Encore des mains à serrer	21	47
025	Recensement sur l'archipel	22	48
026	Heure d'hiver	22	48
027	Les coffres minés	23	48
028	Fragilité des témoignages	23	49
029	Bataille navale	24	49
030	Le tableau noir	24	49
031	Les enfants terribles	25	50
032	La place de la mairie	26	50
033	Potins et commères	27	50
034	Les oeufs de paques	27	51
035	Enquête	28	51
036	Le numéro du coffre	28	51
037	Division nationale !	29	52
038	Jeux de cubes	29	52
039	1...2...3... Partez !	30	53
040	Les lapins farceurs	30	53
041	La soirée au casino	31	53
042	Les doublons	31	53
043	Le concours truqué	32	54
044	De plus en plus fort	32	54
045	Fête des mères	33	54
046	En noir et blanc	33	55
047	Porcelaine de Limoges	34	55
048	Gratte-ciel	34	55
049	Chassez les diviseurs	35	55
050	Les hexaminos	35	56
051	Les dix étiquettes	36	56
052	Le tournoi	36	56
053	Pile ou face	37	57
054	Élections dans l'archipel	37	57
055	La zone américo	38	57
056	La loterie	38	58
057	Le tableau effacé	39	58
058	Quel désordre !	39	58
059	Rendez à César...	40	58
060	Huit nombres à placer	40	59

chapitre 2 • FIGURES LIBRES

n°		énoncé	solution
061	Le partage du gâteau	62	93
062	Le tire-bouchon	62	93
063	Mik'anneaux	63	93
064	Un problème de robinet !	63	93
065	Mise en boîte	64	94
066	Id'M	64	95
067	Dodécagone ou carré ?	65	95
068	Le tapis brodé	65	95
069	Les survivants du milieu	66	95
070	Les partages de l'hexagone	66	96
071	Les anneaux concentriques	67	96
072	Art abstrait	67	97
073	Le fanion du club	68	97
074	Le champ de vision	68	97
075	L'archipel des échelles	69	97
076	Le centre perdu	69	98
077	Les douze points	70	98
078	Le billard triangulaire	70	99
079	La banderole	71	99
080	Le bon et le mauvais tracé	71	100
081	Un musée bien gardé	72	101
082	Le grand triangle	72	101
083	Pli parallèle	73	102
084	Retour dans l'archipel	73	102
085	Le cercle de la félicité	74	103
086	La coiffe alsacienne...	74	103
087	Le deuxième triangle	75	103
088	Les mailles du filet	75	104
089	L'île au trésor	76	104
090	La truffe du père Igor	77	104
091	Les deux cordes	77	105
092	Invariant pentagonal	78	105
093	Des sous ! Des sous !	78	105
094	Les polygones étoilés	79	106
095	Remembrement	79	106
096	Bricolage	80	107
097	Pique-nique d'anniversaire	80	107
098	La fête foraine	81	108
099	Mise en plis réductrice	81	108
100	Une figure simple	82	109

chapitre 2 • FIGURES LIBRES (suite)

n°		énoncé	solution
101	Le plus petit triangle	82	109
102	Ligne de partage circulaire	83	110
103	La quadrature du rectangle	83	110
104	La mouche du coche	84	111
105	Le cerf-volant articulé	84	111
106	Triangles inscrits	85	112
107	Construction à l'équerre	85	112
108	Équidistance	86	113
109	Un carré à la six-quatre-deux	86	113
110	Plan de coupe	87	114
111	Et M. Levôtre créa son jardin	87	114
112	Découpe harmonieuse	88	114
113	Les sept bandes	88	115
114	Le pavage de pentaminos	89	115
115	Malchance au Mondial...	89	116
116	Image miroir	90	116
117	Le rayon d'une sphère	90	117
118	La chèvre et son chevreau	91	117
119	Les pentagones	91	118
120	La quadrature du cercle	92	118

chapitre 3 • CURIOSITÉS & PARADOXES

n°		énoncé	solution
121	Rectangles sans faille	122	152
122	Pierre sur pierre	122	152
123	Économie de cartes	123	152
124	La fête à nœuds nœuds	123	152
125	L'armée des uns	124	153
126	Triangles « autonomes »	124	153
127	Triangles unicolores	125	153
128	L'armée des neufs	125	154
129	Le casino miraculeux	126	154
130	La suite de nombres composés	126	154
131	Le halage du bateau	127	154
132	Le pirate et l'aventurier	127	154
133	Le jeu des doublets	128	155
134	En noir et blanc	128	155
135	La ligne infernale	129	155
136	L'enseigne	129	156
137	Les hexaminos « H »	130	156
138	Le dé insolite	130	156
139	Gardons nos distances	131	156
140	Le « supercavalier »	131	157
141	La ronde des nombres	132	157
142	Le jeu de construction	132	157
143	Les pions noirs	133	157
144	Treillis	133	158
145	Le bois dont on fait les flutes	134	158
146	Les neuf alignements	134	159
147	Vendredi 13	135	159
148	Le pirate égyptologue	135	160
149	Le jardinier vantard	136	160
150	L'architecte négligent	136	161
151	La rame de la compagnie FIBO	137	161
152	Préfixes pour puissances	137	161
153	Le carré inscrit	138	162
154	Zigzag numérique	138	162
155	Le partage de l'hexagone	139	163
156	Touché - coulé	139	163
157	Pâte à modeler	140	163
158	Le partage du triangle	140	163
159	L'échangeur	141	164
160	La queue du dragon	141	164
161	Les 2001 points	142	164
162	Croisement interdit	142	165
163	Minimax	143	165
164	Triangles à carreaux	143	165
165	Grand-père euro	144	166
166	L'entraineur géomètre	144	166
167	Puzzles triangulaires	145	167
168	Le plus court chemin	145	167
169	Les triangles entiers	146	168
170	La baguette cassée	146	168
171	Les cercles magiques	147	169
172	Régionalisation	147	169
173	La diagonale des fous	148	169
174	Le bilboquet	148	170
175	De l'autre côté du miroir	149	171
176	Les carrés d'argent	149	171
177	Algèbre de boule	150	171
178	Texto	150	172
179	Open space	151	172
180	Armistice sur échiquier	151	173

chapitre 4 • GRAPHES & ALGORITHMES

n°		énoncé	solution
181	Désordre chez Maya	176	208
182	L'ascenseur capricieux	176	208
183	L'ascension fabuleuse	177	208
184	Brutalité sur le terrain	177	208
185	Les petits papiers	178	209
186	La roulette sans boule	178	209
187	Les deux touches de la calculatrice	179	209
188	Les nombres « chanceux »	179	209
189	Le plein s'il vous plaît !	180	209
190	Pour rester premier	180	210
191	Au cœur d'un ordinateur	181	210
192	Vacances de neige	181	210
193	Le défi du cavalier	182	211
194	Les balles de ping pong	182	211
195	Le dernier carré	183	211
196	Les trois directions	183	212

n°		énoncé	solution
197	Le « Monde » éparpillé	184	212
198	Encore une calculatrice bizarre !	184	212
199	Le revers de la médaille	185	212
200	L'œuf à la coque	185	213
201	La fédération économe	186	213
202	La chaîne la plus longue	186	214
203	La livraison de carburant	187	214
204	La fontaine romaine	187	214
205	Le théorème de Victor	188	215
206	Le partage du gruyère	188	215
207	La loi de la jungle	189	216
208	L'arme secrète	189	216
209	Noir ou blanc ?	190	217
210	Opérations à risques	190	217
211	Alternance souhaitée	191	217
212	La fausse piece	191	218
213	Les garnements et le gâteau	192	218
214	Les confettis qu'on fait ici	192	219
215	Les grains de riz	193	219
216	La piste infernale	193	219
217	Erreur d'aiguillage	194	220
218	Dans la peau d'un cambrioleur	195	220
219	Quelle Cruche !	196	221
220	Le moulin à nombres	196	221
221	Les satellites d'argent	197	221
222	Les racines emboîtées...	197	222
223	Le premier carré	198	223
224	Les carrés impairs	198	223
225	Echangisme version chocolat	199	224
226	Lynx et lapins	199	224
227	La table tournante	200	225
228	Par ici la monnaie !	200	226
229	Les bandelettes de papier	201	227
230	Brûler le temps	201	227
231	Jack-pot	202	227
232	Les caméléons	202	228
233	Tiens un carré !	203	228
234	Neuf jetons	203	228
235	Les oeufs en chocolat	204	229
236	Le tableau des nombres	205	229
237	La règle des signes	205	229
238	Les caramels	206	230
239	Jouer avec des allumettes	206	231
240	Qui veut gagner des euros ?	207	231

chapitre 5 • DÉFIS NUMÉRIQUES

n°		énoncé	solution
241	Les nombres croisés de l'année	234	183
242	Ôtez un carré !	234	183
243	Piscine de star	235	184
244	Le score impossible	235	184
245	Les groupages	236	184
246	Division muette	236	185
247	énigme policière	237	185
248	Périmètre magique	237	185
249	Magie triangulaire	238	185
250	Le compte est bon	238	186
251	Bonne année !	239	186
252	La spirale des milieux	239	187
253	La période	240	187
254	Les nombres heureux	240	187
255	Rendez-le magique !	241	188
256	Saucisson numérique	241	188
257	L'addition du « Mondial »	242	188
258	Nombres croisés	242	189
259	Une quinte de cinq	243	189
260	économie de salive	243	190
261	L'escalator	244	183
262	Le tarif publicitaire	244	183
263	étonnantes racines	245	184
264	La fraction du cancre	245	184
265	Les bicyclettes néelandaises	246	184
266	Tête à queue numérique	246	185
267	La fraction insolite	247	185
268	Somme de suites	247	185
269	La dîme	248	185
270	Enchanté !	248	186
271	Carrément carrés	249	186
272	L'anneau magique	249	187
273	Le nombre porte-bonheur	250	187
274	La grande famille	250	187
275	Le carré bègue	251	188
276	Les carrés antimagiques	251	188
277	élégance urbaine	252	188
278	La roue des différences	252	189
279	Le cancre récidive	253	189
280	La pointe du triangle	254	190
281	Déploiement triangulaire	255	190
282	Faîtes l'appoint !	255	190
283	Rationalité	256	192
284	Permutation circulaire	256	193
285	Trahie par la « Sécu » !	257	194
286	Enigme numérique	257	194
287	L'âge de César Thaire	258	195
288	Carré blanc	258	195
289	Par ici la monnaie !	259	195
290	Tourisme littéraire	259	195
291	Festival de trois	260	196
292	Addition-miroir	260	197
293	Carrés et cubes	261	198
294	Handicap	261	198
295	Décodage	262	198
296	La division	262	199
297	Le nombre triangulaire	263	200
298	Mystification	263	200
299	Enigme chiffrée	264	200
300	Le carré de Lucifer	264	201

Affaire de logique

Chapitre 1

1. Le tableau autoréférent

Problème n°3 du 04-02-97

Dans ce cadre,					
il y a	...	fois le chiffre	4	en dehors de cette ligne	1
il y a	...	fois le chiffre	3	en dehors de cette ligne	2
il y a	...	fois le chiffre	2	en dehors de cette ligne	3
il y a	...	fois le chiffre	1	en dehors de cette ligne	4

Remplissez les blancs à l'aide d'un chiffre de sorte que toutes les affirmations soient vraies.

2. Histoires de familles

Problème n°8 du 11-03-97

Dans l'archipel Désaccord, la population ne porte que l'un des deux noms de famille : Duvrai et Dufaux. Une tradition ancestrale veut qu'un Duvrai ne mente jamais tandis qu'un Dufaux ne dira jamais la vérité. Un navigateur naufragé, qui se retrouve dans cet archipel, rencontre trois jeunes indigènes. Connaissant la particularité de ces îles, il demande à ses interlocuteurs leurs noms de famille. Voici les réponses qu'il obtient :

Eric : «Les deux autres se nomment Dufaux.»
Marie : «Deux exactement parmi nous s'appellent Dufaux.»
Stéphane : «Un seul d'entre nous a pour nom Dufaux.»

Quels sont les noms de famille des trois jeunes gens ?

3. Le sac de lettres

Problème n°13 du 15-04-97

Il reste encore pas mal de lettres dans le sac du scrabble (vous savez exactement lesquelles), et vous devez faire votre choix.

- Pour être sûr d'avoir 2 voyelles, il faudrait tirer 10 lettres ou plus.
- Pour être sûr d'avoir 2 consonnes, il faudrait en tirer au moins 12.
- Pour être sûr d'avoir 2 « A », il faudrait en tirer au moins 16.
- Pour être sûr d'avoir un « A » et un « S », il faut également en tirer 16 ou plus.

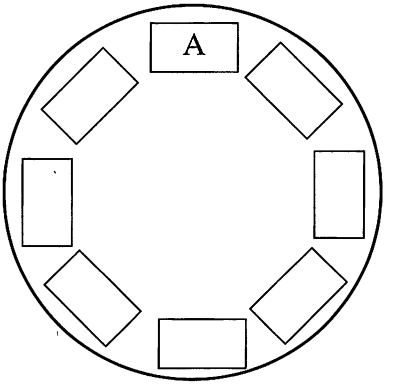
Quelle est la composition du sac : en consonnes ?
En voyelles ? En « A » ? En « S » ?

4. La table polyglotte

Problème n°18 du 20-05-97

Un dîner réunit huit personnes de nationalités différentes. Voici les langues qu'elles parlent :

Ann : anglais, français, portugais.
Biba : anglais, portugais, russe.
Charles : anglais, russe.
Dimitri : anglais, allemand, portugais, russe.
Evita : allemand, espagnol, néerlandais.
Frédéric : français, espagnol, néerlandais.
Gunther : allemand, italien.
Helena : espagnol, italien.



Complétez les cartons indiquant l'initiale des convives autour de la table ronde de sorte que :
– chaque convive puisse converser avec chacun de ses deux voisins autrement que par signes ;
– il y ait alternance entre les hommes et les femmes.

5. Le champ de mines

Problème n°23 du 24-06-97

Voici le plan d'un champ miné. Il est subdivisé en 64 cases qui sont les zones susceptibles de contenir une mine. Un détecteur ingénieux permet d'inscrire sur chacune des zones du plan le nombre de mines qui l'entourent, parmi toutes les zones en contact (même par un simple sommet). Mais ce détecteur ne comptabilise pas l'éventuelle mine de la zone elle-même.

2	2	4	2	3	2	3	1
3	3	4	3	2	1	4	2
2	2	4	4	5	4	5	2
3	3	3	1	2	1	4	2
2	2	3	4	6	4	5	2
3	5	3	2	2	1	3	1
2	5	2	5	4	3	3	2
1	4	1	3	0	1	1	0

Ainsi, 2 des 3 voisines de la zone située en haut à gauche sont minées.
Pour une zone intérieure, le détecteur totalise les zones minées parmi les 8 en contact.

Hachurez sur le plan les zones minées

6. Le tournoi de tennis

Problème n°28 du 29-07-97

Un tournoi de tennis oppose quatre joueurs, qui se rencontrent tous mutuellement une fois. À l'issue du tournoi, on attribue les points suivants à chaque match :
– Le perdant ne marque aucun point.
– Le gagnant marque autant de points que le perdant remporte de victoires dans le tournoi.

	Anne	Bruno	Caroline	Daniel	Total
Anne					
Bruno					
Caroline					
Daniel					

Anne perd le premier match contre Bruno, mais remporte néanmoins le tournoi en terminant seule en tête. Daniel est bon dernier.

Reconstituez le résultat des rencontres en remplissant le tableau ci-dessus. Sur la ligne de chaque joueur, vous ferez apparaître le nombre de points qu'il a marqués contre chacun des autres.

7. Bronzer idiot

Problème n°33 du 02-09-97

Quatre excursions culturelles sont proposées à cent vacanciers qui coulent de paisibles heures de plage dans un hôtel de Grèce.
49 personnes s'inscrivent pour Thèbes, 42 pour Rhodes, 35 pour Athènes et 30 pour Delphes. Si le total excède 100, c'est que 24 courageux ont pris une option pour deux excursions, 10 autres se sont inscrits pour trois excursions, et il se trouve même en plus quelques acharnés pour faire les quatre circuits. Bien sûr, il y en a comme toujours qui restent à bronzer idiots sans faire la moindre excursion, mais ils se comptent sur les doigts de la main.

Combien sont-ils ?

8. Les jumeaux muets

Problème n°38 du 07-10-97

Vous venez de participer aux éliminatoires d'un concours de logique. Parmi les arbitres, figurent les jumeaux Veris et Factis, qui se ressemblent tellement qu'ils sont indiscernables. Le premier dit toujours la vérité, tandis que le second ne sait que mentir. Facétieux, les deux jumeaux affectent de ne pas parler et se sont forgé un langage de gestes auquel personne ne comprend goutte. Tout juste sait-on qu'ils disent « oui » et « non » en levant un des bras, et encore ignore-t-on le bras qui signifie « oui » et celui qui signifie « non ».

• Vous rencontrez un des jumeaux. Vous voulez savoir s'il est Veris ou s'il est Factis.
Quelle question lui posez-vous ?

• Vous rencontrez un des jumeaux. Vous voulez lui faire lever le bras droit.
Quelle question lui posez-vous ?

• Vous rencontrez un des jumeaux. Vous voulez savoir si vous êtes qualifié.
Quelle question lui posez-vous ?

9. Les nombres secrets

Problème n°43 du 11-11-97

Deux candidats s'affrontent lors du jeu télévisé : «Les nombres secrets». L'animateur précise que les nombres secrets sont deux entiers (le premier est strictement plus petit que le deuxième) compris entre 1 et 7. Le but des candidats est de les deviner.
«Je calcule le double du premier que j'ajoute au triple du second, j'écris le résultat sur ce morceau de papier, et je vous le confie, monsieur Léonhardt».
Puis, se tournant vers le deuxième candidat :
«Je calcule le double du second que j'ajoute au triple du premier, j'écris le résultat sur ce deuxième morceau de papier, et je vous le confie, monsieur Blaise». Puis, s'adressant aux deux : «Vous n'avez droit qu'à une réponse, et vous avez une minute pour me la donner, par écrit, naturellement».
Les deux candidats, qui sont de bons matheux mais pas forcément de bons stratèges, griffonnent quelques calculs. Puis chacun rend une feuille de résultat à l'animateur, qui les dépouille, et s'écrie : «Les deux réponses sont fausses.»

Quels sont les deux nombres secrets ?

10. Soirée mondaine

Problème n°48 du 16-12-97

Lors de cette soirée mondaine qui rassemble vingt-six invités triés sur le volet, Aline s'ennuie à mourir : elle ne connaît guère qu'une personne. Le deuxième invité, Bruno, est à peine mieux loti : il n'a déjà rencontré que deux des présents. Caroline, un peu plus heureuse, en connaît trois. Quatre des convives sont familiers à Dimitri. Eliane, la cinquième invitée, connaît cinq personnes, Fabrice six, et ainsi de suite, chaque invité connaissant un convive de plus que le précédent jusqu'à Yvonne, vingt-cinquième invitée, qui, elle, tutoie carrément tout le monde.

Mais combien donc de personnes connaît Zinedine, le vingt-sixième invité ?

Pour vous aider : si l'individu X connaît l'individu Y, alors Y connaît X.

11. Comme chat et chien

Problème n°67 du 28-04-98

Tous les chats du quartier mangent dans le plat de mon chien. Aucun chat roux ne peut être autrement que rusé. Le chat Bichou n'a jamais eu de panier.
Les compagnons d'errance de mon chien aiment tous les os à moëlle.
Seuls les chats du quartier sont rusés.
Seuls ses compagnons d'errance mangent dans le plat de mon chien.
Les chats qui ne sont pas roux ont tous un panier.

Bichou aime-t-il les os à moëlle ?

12. Il n'y a que médaille qui m'aille

Problème n°57 du 17-02-98

Alexandre, Brigitte, Daniel, Charles, et Emilie sont les cinq lauréats d'un concours très médiatisé. Tandis que les deux femmes sont restées chez elles, les trois hommes se sont donné rendez-vous chez Alexandre pour écouter le palmarès à la télévision. Chacun sait qu'il doit être décerné une médaille d'or, deux médailles d'argent et deux médailles de bronze, mais le secret a été gardé jusqu'au dernier moment quant à savoir qui obtient quoi.
Alexandre rentre chez lui en retard et manque l'annonce de sa propre médaille et de celle de Brigitte, car le présentateur a adopté l'ordre alphabétique : prénom, type de médaille. Charles le rejoint quelques instants plus tard, alors que la médaille de Daniel est annoncée. Quant à Daniel, retenu chez un client, il arrive au moment où il est question d'Emilie.
Alexandre, pourtant bon logicien, peste à haute voix qu'il est incapable d'en déduire la couleur de sa propre médaille. Charles, tout aussi bon logicien, et à qui Alexandre, taquin, n'a rien dit de ce qu'il a entendu, s'avoue alors lui aussi incapable de déterminer la couleur de sa médaille. Mais Daniel, à qui pourtant ni Alexandre ni Charles n'ont appris ce qu'ils avaient entendu, peut proclamer qu'il est sûr d'avoir une médaille d'argent.

Quelle est la couleur de la médaille d'Emilie ?

13. Les clés de l'énigme

Problème n°62 du 24-03-98

Dans l'agence «l'énigme, filatures en tous genres», la confiance règne, mais sans excès. Ainsi, le coffre qui contient les pièces à conviction est fermé par plusieurs serrures. Le directeur et chacun des cinq détectives disposent d'un certain nombre de clés, de telle sorte que :

- Trois quelconques d'entre eux puissent toujours ouvrir le coffre en unissant leurs clés.
- Le directeur puisse toujours ouvrir le coffre quand un de ses détectives est présent.
- Mais deux quelconques des détectives, ou le directeur seul ne puissent jamais obtenir l'ouverture.

Combien de serrures, au minimum, seront nécessaires ?

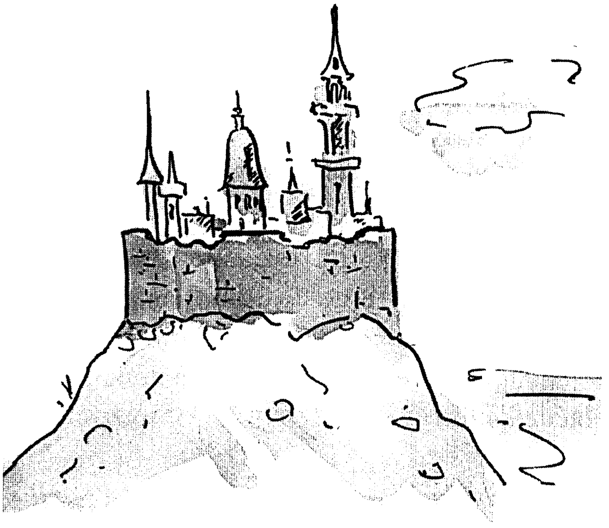
Quel sera alors le nombre de clés attribué à chacun ?

14. La cité autarcique

Problème n°68 du 05-05-98

Dans la cité de Vaseclaux, il ne vient jamais d'étranger. Alors les 7843 habitants doivent se contenter de choisir leurs relations parmi les Vaseclausiens. D'ailleurs, chacun tient à jour un registre précis des personnes qu'il connaît (et qui donc le connaissent).

Y a-t-il deux habitants qui connaissent le même nombre de personnes ?



15. Le théorème galant

Problème n°73 du 09-06-98

Dans ce dîner de gala, 47 convives, 28 hommes et 19 femmes, sont attablés autour de l'immense table ronde. 11 hommes ont une femme placée immédiatement à leur droite.

Combien d'hommes ont une femme assise immédiatement à leur gauche?

Pourriez-vous énoncer une loi générale à ce sujet (le théorème galant) ?

16. Les quatre enfants

Problème n°78 du 14-07-98

Tiens, c'est ma voisine, assise là, sur le banc public avec ses quatre enfants, chez qui je suis allé quelquefois faire du baby-sitting.
« – Quel âge cela leur fait-il ? Oh, arrondissez au nombre entier le plus proche.
– Je sais que tu es très fort en mathématiques, alors je vais te répondre par énigme. Le produit de leurs âges est 72. La somme... tiens justement elle est égale à ton âge », répond ma malicieuse voisine qui sait, comme tout l'immeuble, que j'ai fêté la semaine dernière mon anniversaire.
Moi :
« – Cela ne me suffit pas... l'un au moins de vos enfants a-t-il deux ans ? »
Elle répond à ma question et cette fois, je suis en mesure d'indiquer l'âge des quatre enfants.

Et vous ?

17. Les locaux de la colo

Problème n°83 du 18-08-98

Dans une colonie de vacances, cinq groupes d'enfants occupent les chambres 1 à 5.

Le lendemain, pendant leur absence, un moniteur facétieux accroche aux portes de certaines chambres une pancarte du style :

« pour raisons d'organisation, les occupants de cette chambre sont priés de changer de chambre et de se rendre en chambre ... » (suit un numéro compris entre 1 et 5).

Peu contrariants, les enfants obtempèrent. Ainsi, le groupe qui occupait la chambre 1 se rend en chambre 2...

Le lendemain, à la même heure, les pancartes n'ayant pas changé de place, les jeunes suivent à nouveau les instructions. Il en est de même le troisième jour, où, coïncidence, les cinq groupes se retrouvent dans leur chambre initiale.

Combien le moniteur avait-il accroché de pancartes ?

18. Le dernier pion

Problème n°88 du 22-09-98

Cinquante pions sont sur la table, deux joueurs (dont vous) autour d'elle. Vous jouez selon la règle suivante : chacun, à tour de rôle, enlève un, deux ou trois pions. Celui qui ramasse le dernier pion gagne.

Votre adversaire enlève trois pions. Qui va gagner ?

Nouvelle partie : la règle du jeu a changé. Chacun, à tour de rôle, enlève toujours un, deux ou trois pions, mais il est interdit d'enlever le même nombre de pions que celui que vient d'ôter l'adversaire. Pour gagner, il faut enlever le dernier pion ou mettre son adversaire dans l'impossibilité de jouer.

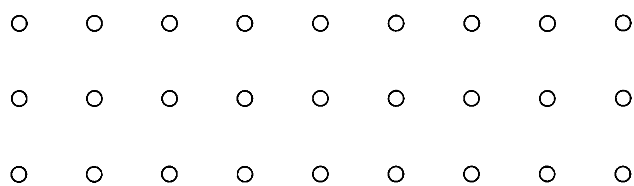
Votre adversaire commence encore en ôtant trois pions parmi les cinquante de départ.

Qui va gagner ?

19. Le rectangle rose

Problème n°93 du 27-10-98

Vingt-sept points sont régulièrement disposés aux sommets d'un maillage carré, comme sur le dessin. Chacun de ces points est colorié en noir ou en rose de telle sorte qu'aucun rectangle n'ait ses quatre sommets noirs.

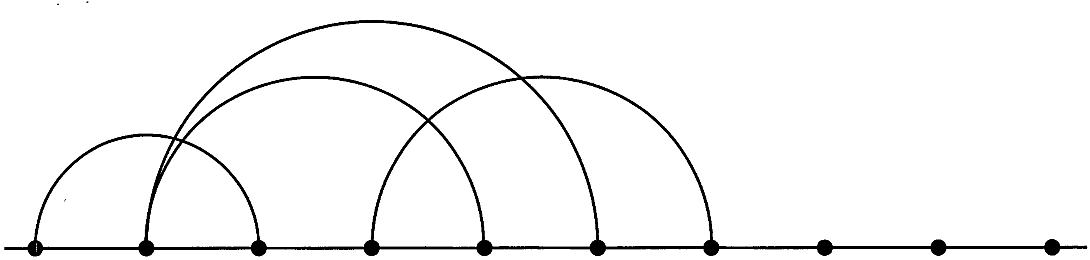


Existe-t-il forcément un rectangle dont les quatre sommets sont roses ?

20. Les demi-cercles

Problème n°98 du 01-12-98

On trace, sur une droite, 10 points régulièrement espacés, puis tous les demi-cercles situés au-dessus de la droite dont les diamètres sont les segments reliant deux des dix points.



Combien ces demi-cercles déterminent-ils d'intersections en dehors de la droite ?

21. L'agent secret

Problème n°103 du 05/11/1998

L'avenir d'un pays tout entier dépend de la partie de dés acharnée qui se joue entre « l'agent secret » et « l'espion ». Il utilisent pour la circonstance un certain nombre de dés identiques non pipés à six faces qui ont la particularité de compter deux faces bleues, deux faces blanches et deux faces rouges.
Chacun, à tour de rôle, lance un dé et le laisse sur la table. La partie s'arrête dès que l'une des configurations suivantes se produit :
– On peut former avec les faces supérieures de trois dés joués la combinaison « bleu-blanc-rouge », auquel cas l'agent secret a gagné.
– Trois des faces supérieures des dés joués sont de la même couleur, auquel cas c'est l'espion qui l'emporte.

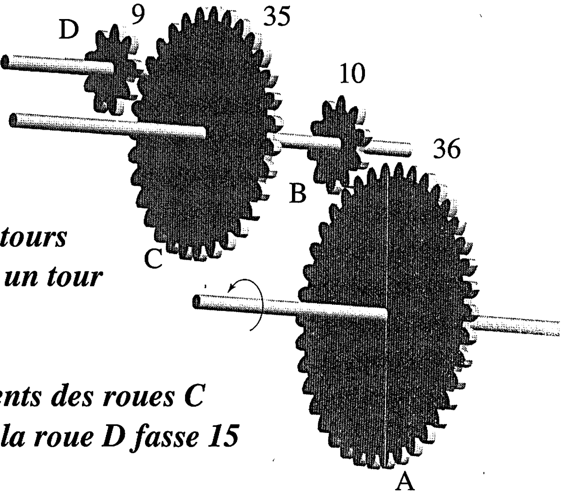
Combien de dés, au maximum, seront lancés lors de la partie ?

Qui a le plus de chances de l'emporter, et avec quelle probabilité ?

22. Le train d'engrenages

Problème n°108 du 09/02/1999

Un train d'engrenages est formé de quatre roues dentées A, B, C, D de 36, 10, 35 et 9 dents, disposées sur trois tiges comme sur la figure ci-dessus.



De combien de tours ou fractions de tours tournera la roue D lorsque la roue A fait un tour complet ?

Si vous pouviez modifier le nombre de dents des roues C et D, combien en mettriez-vous pour que la roue D fasse 15 tours quand la roue A en fait 1 ?

23. La neuvième carte

Problème n°113 du 23/03/1999

On range dans ces neuf cases neuf cartes : des As, des Rois, des Dames et des Valets. Toutes ces figures sont en double, sauf l'une d'entre elles qui est en triple exemplaire.

	1	2	3
A			
B			
C			

On dit que deux cartes sont voisines si les cases qui les contiennent ont un côté commun.
• chaque Valet est voisin d'au moins un Roi et une Dame ;
• chaque Dame est voisine d'au moins un As et un Roi ;
• chaque Roi est voisin d'au moins un As.

Quelle carte occupe la case centrale ? Quelle carte est en triple exemplaire ?

24. Encore des mains à serrer

Problème n°118 du 27/04/1999

1999 personnes assistent à un congrès. Chacune serre la main de 1600 personnes.

Existe-t-il forcément un groupe de six congressistes dont chacun a serré la main de chacun des cinq autres ?

25. Recensement sur l'archipel

Problème n°123 du 01/06/1999

Sur l'île de la Dichotomie, dans l'Archipel Désaccord, il n'y a que deux familles : les Duvrai (qui disent toujours la vérité) et les Dufaux (qui mentent systématiquement). Chacun des 400 adultes de l'île est soit chasseur, soit pêcheur, soit fonctionnaire.
C'est pourquoi le formulaire de recensement, retourné à l'administration par tous les adultes, ne comporte que les trois questions :
1. Êtes-vous chasseur ?
2. Êtes-vous pêcheur ?
3. Êtes-vous fonctionnaire ?
300 habitants ont répondu « oui » à la première question, 200 à la deuxième, 150 à la troisième.

Combien y a-t-il de Duvrai et de Dufaux dans l'île ?

26. Heure d'hiver

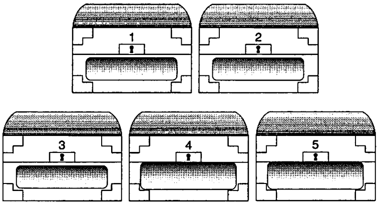
Problème n°128 du 06/07/1999

Chaque matin, le chauffeur de Mme la Présidente emprunte à la même vitesse l'unique route qui mène de la ville au domicile champêtre de la dirigeante pour y parvenir à 8 heures tapantes. Madame la Présidente s'engouffre immédiatement dans le véhicule et arrive invariablement à la même heure aux bureaux de sa multinationale.
Ce lundi matin-là, Madame la Présidente a oublié qu'on était passé à l'heure d'hiver pendant le week-end. Ne voyant pas son chauffeur à ce qu'elle croit être 8 heures du matin et détestant attendre, elle prend, à pied, le chemin de son bureau. Lorsque son chauffeur, parti à la même heure que de coutume, arrive à sa hauteur, il s'arrête pour lui permettre de monter en voiture, fait instantanément demi-tour et arrive au bureau 8 minutes plus tôt que d'habitude.

Combien de temps Madame la Présidente a-t-elle marché ?

27. Les coffres minés

Problème n°133 du 10/08/1999

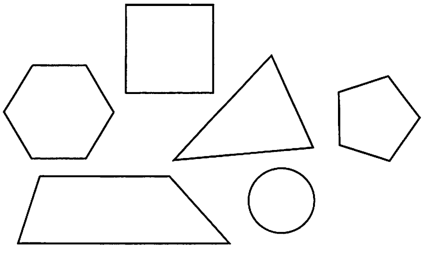


Chacun de ces cinq magnifiques coffres numérotés de 1 à 5 et déterrés par un pirate contient soit un lingot d'or, soit une mine qui pulvérisera celui qui tentera de l'ouvrir.
Un perroquet, qui a assisté à l'enterrement des coffres, pourrait renseigner le pirate, mais il est très facétieux. Il le prévient donc : « Tu as le droit de me poser 11 questions auxquelles je répondrai par "oui" ou par "non". Mais tu dois déterminer par écrit les 11 questions avant de connaître ma réponse, et je me réserve le droit de mentir en répondant à l'une d'entre elles (au plus) ».

Quelles questions le pirate a-t-il posées pour connaître le contenu des cinq coffres ? Pouvait-on connaître ce contenu en moins de onze questions ?

28. Fragilité des témoignages

Problème n°138 du 14/09/1999

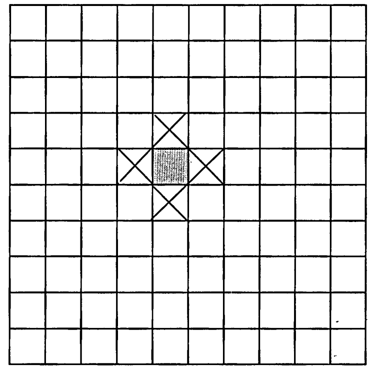


Six figures, un cercle, un triangle, un carré, un trapèze, un pentagone et un hexagone, ont été coloriées sur un tableau dans six couleurs différentes.
On demande le lendemain leurs couleurs à deux élèves.
Alexandre : « un cercle rouge, un triangle bleu, un carré blanc, un trapèze vert, un pentagone rose et un hexagone jaune ».
Bénédicte : « un cercle jaune, un triangle vert, un carré rouge, un trapèze bleu, un pentagone rose et un hexagone blanc ».
Alexandre s'est trompé trois fois, Bénédicte deux fois.

Quelle était la couleur de chacune des six figures géométriques ?

29. Bataille navale

Problème n°143 du 26/10/1999



Le service de renseignements est formel : les navires ennemis sont concentrés dans un carré d'un kilomètre de côté. Sur la carte, l'amiral a divisé ce carré en 100 zones de 100 m sur 100 (voir dessin). Il va utiliser sa nouvelle arme, les torpilles à fragmentation.

Chaque fois qu'une salve est dirigée vers l'une de ces zones (en gris), elle se scinde en quatre, et les quatre zones adjacentes par un côté à la zone visée (croix) sont littéralement pulvérisées.

Curieusement, la zone visée est épargnée ! Ces superbes armes n'ont qu'un inconvénient : elles sont chères. Aussi l'amiral désire-t-il les économiser.

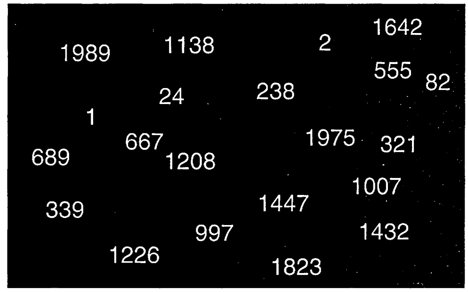
Combien de salves, au minimum, l'amiral devra-t-il faire tirer pour être sûr de détruire intégralement la flotte adverse ?

30. Le tableau noir

Problème n°150 du 14/12/1999

Sur un immense tableau noir, un élève écrit patiemment les nombres de 1 à 2000. Puis, il en choisit deux, les efface, et écrit leur différence au tableau.

Il recommence consciencieusement la même manœuvre : il choisit deux nombres, les efface, écrit leur différence au tableau, et ainsi de suite… jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre.



Combien de nombres l'élève a-t-il effacés ?

Le seul nombre restant écrit est « 111 ».

Pourquoi est-on certain que l'élève a fait une erreur de calcul ?

31. Les enfants terribles

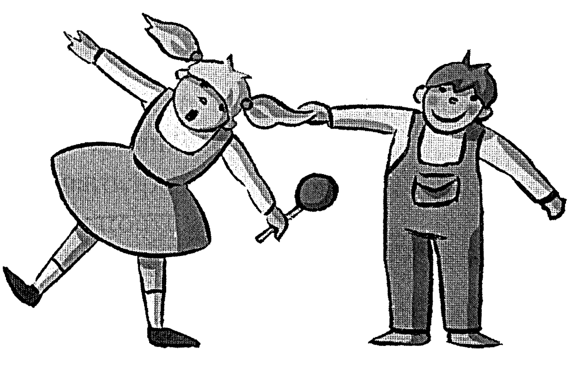
Problème n°153 du 04/01/2000

Un paquet de bonbons vient d'être dérobé dans une confiserie. Le commerçant interroge, en présence de leur instituteur, quatre enfants qui se sont trouvés (pas au même moment) dans son magasin peu avant le vol. Voici leurs déclarations :

- Arnaud : « Je n'ai rien volé».
- Bénédicte : « Caroline est coupable ».
- Caroline : « Bénédicte ment ! »
- Daniel : « C'est Bénédicte qui a commis le larcin ».

L'instituteur connaît le coupable, mais ne veut pas le dénoncer explicitement. Il se contente donc d'indiquer au commerçant le nombre de gamins qui ont dit la vérité et le nombre de gamins qui ont menti. Mais cela ne permet pas au confiseur d'être certain du coupable.

Combien de garnements ont dit la vérité ?
Entre quels coupables le confiseur hésite-t-il ?



32. La place de la mairie

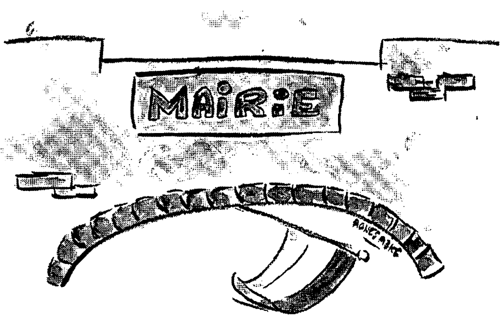
Problème n°158 du 08/02/2000

Dans ce village, il y a cinq carrefours et dix rues, les rues joignant chaque carrefour à chacun des quatre autres. La circulation y est extrêmement réglementée.
• Toutes les rues sont à sens unique, le même d'un bout à l'autre de la rue. Les sens ont été posés de telle sorte, évidemment, qu'on puisse aller de tout point à tout autre de la ville.
• Lorsque deux rues se rencontrent ailleurs qu'à un des cinq carrefours, les voitures n'ont pas le droit de tourner pour changer de rue. Elles doivent continuer jusqu'au carrefour qui constitue l'extrémité de la rue.
Le conseil municipal décide d'ériger une mairie à l'un des carrefours, de telle sorte qu'en partant de n'importe lequel des carrefours, on puisse parvenir à la mairie en empruntant au plus deux rues.

Un tel emplacement existe-t-il forcément sans qu'on ait rien à changer au sens de la circulation dans les rues ?

Une autre ville, comportant cette fois 41 carrefours gigantesques (et un nombre de rues qu'on vous laisse calculer), est construite selon la même logique. On y a édicté les mêmes règles de circulation. On veut, là encore, ériger une mairie à l'un des carrefours, de telle sorte qu'en partant de n'importe lequel des carrefours, on puisse parvenir à la mairie en empruntant au plus deux rues.

Un tel carrefour existe-t-il toujours ?



33. Potins et commères

Problème n°163 du 14/03/2000

Chacune de ces cinq commères connaît un potin croustillant qu'elle voudrait bien faire partager à ses quatre complices.
Mais voilà, les cinq commères sont dispersées ce jour-là aux cinq coins de la ville. Heureusement, elles possèdent un téléphone portable.

Combien d'appels téléphoniques, au minimum, seront nécessaires pour que chacune des cinq commères possède chacun des cinq potins ?

Et avec un nombre quelconque de commères ?

N.B. Aucune n'a un abonnement permettant la « conversation à trois » (ou plus) ni même le signal d'appel.

34. Les œufs de Pâques

Problème n°168 du 18/04/2000

En famille ou entre voisins, pour Pâques, il est de tradition de cacher des œufs dans le jardin, et c'est à qui en trouvera le plus. Quatre enfants sont là, avec leur père ou leur mère.
Au bout de la matinée, Alexandre a découvert 5 œufs, Bérénice en a trouvé 4, Chloé une demi-douzaine, et Damien 2 seulement.
Les parents eux aussi participent à la recherche, et ce ne sont pas les moins acharnés : Monsieur Xeres en trouve trois fois plus que son enfant, Madame Yvon deux fois plus que le sien, Madame Zinox cinq fois plus que son rejeton, et Monsieur Toudou autant que le sien.
Du nombre total d'œufs, on sait juste qu'il se termine par 5.

Quels sont les noms de famille des quatre enfants ?

35. Enquête

Problème n°173 du 30/05/2000

Trois malfaiteurs sont soupçonnés de meurtre. Un et un seul des trois est coupable. Les enquêteurs ont recueilli trois déclarations de chacun d'entre eux :

André :
(A1) – Je suis innocent
(A2) – D'ailleurs, à l'heure du crime, j'étais avec Béatrice.
(A3) – Claude est coupable
Béatrice :
(B1) – Je suis innocente
(B2) – André aussi
(B3) – Mais il n'était pas avec moi à l'heure du crime
Claude :
(C1) – Je suis innocent
(C2) – Béatrice aussi
(C3) – André a menti trois fois

Sachant que chacun des suspects a menti au moins une fois, qui est coupable ?

36. Le numéro du coffre

Problème n°178 du 04/07/2000

Dans cette société, seul le directeur connaît la combinaison du coffre, qui comporte cinq chiffres.
Chacun des dix employés, pour sa part, n'a connaissance que d'un faux numéro, mais pas tout à fait choisi au hasard : un des cinq chiffres et un seul de sa combinaison est positionné à la bonne place.
Voici les numéros que possèdent les dix employés :
07344, 14098, 27356, 36429, 45374, 52207, 63822, 70558, 85237, 97665.

Quelle est la combinaison du coffre ?

37. Division nationale

Problème n°183 du 08/08/2000

Il y a quelques années, une grande irrégularité marqua le championnat de France de football. 20 équipes formaient comme aujourd'hui l'élite professionnelle, chacune d'entre elles rencontrant deux fois chacune des 19 autres.
À l'époque, une victoire valait 2 points, un nul 1 point, une défaite 0 point.
Cette année-là, les vingt équipes obtinrent lors des matches retours un nombre de points différent d'au moins 20 points (en plus ou en moins) du total obtenu lors des matches aller.
Ainsi, l'équipe de Nantes fut bien meilleure après la trêve qu'avant.

De combien de points améliora-t-elle lors des matches retour son score des matches aller ?

38. Jeux de cubes

Problème n°188 du 12/09/2000

Alice assemble un certain nombre de cubes unité pour former un grand cube, dont elle peint certaines faces (complètement), les autres faces restant immaculées. Quand la peinture est sèche, elle démonte le grand cube pour retrouver les petits. Elle constate que 60 cubes n'ont pas la moindre trace de peinture.

Combien de faces du grand cube a-t-elle peint ?

Amusée par l'expérience, elle recommence la même opération quelque temps plus tard. Elle confie à son créateur, le grand écrivain et logicien Lewis Carroll, le nombre (inférieur à 100) de petits cubes dont une des faces (au moins) a été peinte. À sa grande surprise, ce dernier s'avère incapable de trouver la taille du grand cube qu'elle a constitué.
Si elle lui avait dit qu'un et un seul des petits cubes était peint sur trois faces, il aurait trouvé.

Quelle est la taille de ce grand cube et combien de faces en a-t-elle peint ?

39. 1...2...3... Partez !

Problème n°193 du 17/10/2000

Depuis un départ raté, Marie-José est obsédée par les nombres comme 123, 123123, 123123123, ... s'écrivant en concaténant un certain nombre de fois la combinaison 123, si bien que tous ses amis les appellent "nombres de Marie-José". Le nombre 2001, quant à lui, marque aussi un départ : celui d'une nouvelle année, d'un nouveau siècle, d'un nouveau millénaire.

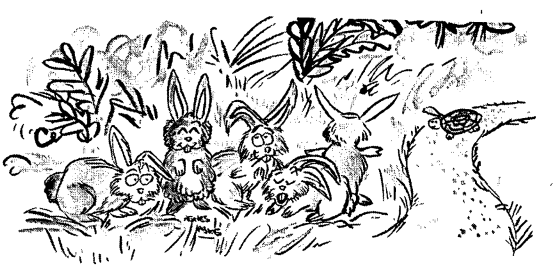
Existe-t-il un nombre de Marie-José qui soit multiple de 2001 ?

40. Les lapins farceurs

Problème n°198 du 21/11/2000

Cinq lapins, Aristide, Barnabé, Caligula, Dodu et Eustache, après avoir batifolé dans la rosée, décident d'organiser une course. Dame tortue a bien essayé de les suivre, mais sans succès. Pour connaître leur ordre d'arrivée, elle doit se contenter des informations que les protagonistes veulent bien lui fournir. Ces derniers, farceurs, l'informent que chacun d'entre eux va lui donner deux renseignements, un vrai et l'autre faux :
– « Dodu était deuxième, moi quatrième », lance Aristide.
– « Dodu a fini premier, je n'ai été que deuxième » se plaint Caligula.
– « Je suis arrivé brillant second et Dodu troisième », affirme Eustache
– « Ne les crois pas, j'ai fini dernier, Barnabé a gagné » rectifie Dodu.
Avant que Barnabé ne s'exprime, la tortue a déjà trouvé le classement.

Quel est l'ordre d'arrivée des cinq lapins ?



41. La soirée au casino

Problème n°203 du 26/12/2000

Cinq amies viennent pleines d'illusions jouer à la roulette. Elles se répartissent, à raison de quatre jetons par personne, la somme qu'elle ont changée. Las ! Cinq coups plus tard, elles doivent quitter le casino, ratissées, sans avoir gagné le moindre pari. Pourtant, leurs stratégies s'étaient avérées toutes différentes. Annette avait misé (et perdu) ses quatre jetons lors du premier coup. Brigitte avait commencé par risquer trois jetons, puis son jeton restant. Elise avait joué ses jetons un par un, Charlotte deux par deux. Quant à Déborah, elle avait d'abord joué deux jetons puis deux fois un jeton.
Lors de chacun des cinq coups, les jetons dépensés au total par les cinq amies ont toujours été moins nombreux que lors du coup précédent. En dehors d'Annette, aucune des filles n'a misé toute sa fortune lors de coups consécutifs.

Reconstituez les mises de chacun des cinq coups !

42. Les doublons

Problème n°208 du 30/01/2001

Les « doublons de 4 » sont des nombres de huit chiffres.
Chaque chiffre compris entre 1 et 4 y est employé deux fois.
De plus, entre les deux chiffres « 1 », s'intercale 1 chiffre, entre les deux chiffres « 2 » s'intercalent 2 chiffres, entre les deux chiffres « 3 » s'intercalent 3 chiffres et entre les deux chiffres « 4 » s'intercalent 4 chiffres.

Quels sont les doublons de 4 ?

Les « doublons de 5 » sont des nombres de dix chiffres. Chaque chiffre entre 1 et 5 y est employé deux fois. Ces chiffres ont les mêmes propriétés (entre les deux chiffres « 5 » s'intercalent 5 chiffres etc.).

Quels sont les doublons de 5 ?

43. Le concours truqué

Problème n°213 du 06/03/2001

Dans ce concours, trois candidats s'affrontent lors de trois épreuves. Voici leurs notes :

	Epreuve 1	**Epreuve 2**	**Epreuve 3**
André :	13	15	08
Bernard :	07	10	14
Charlotte :	10	08	12

Si on faisait le total des trois notes, le verdict serait sans appel : André l'emporterait devant Bernard et Charlotte. Seulement, voilà : une directive administrative secrète exige que l'on engage une femme. Le directeur du concours s'appuie donc sur le fait que les coefficients n'ont pas été publiés pour parvenir au résultat souhaité. Mieux : le classement est inversé.

Quels coefficients (entiers au moins égaux à 1) le directeur a-t-il choisis pour chaque épreuve ?

Le total des coefficients doit être le plus petit possible.

(D'après une idée de Bernard Novelli).

44. De plus en plus fort

Problème n°219 du 17/04/2001

Dans un club de musculation, une masse comprise entre 19 et 20 kilos est placée sur le plateau droit d'une balance. Sur l'autre plateau, Mathieu pose au premier tour un poids d'un kilo. Sophie a alors le choix lors du deuxième tour : ajouter un poids d'un ou de deux kilos. Mathieu peut alors choisir d'ajouter un, deux ou trois kilos. Et ainsi de suite : à chaque tour, chacun doit ajouter (d'un seul bras) un nombre entier de kilos compris entre 1 et le numéro du tour.

Celui qui réussit à faire pencher la balance du côté gauche a gagné.

Qui gagnera, sachant que chacun est suffisamment musclé, tant physiquement qu'intellectuellement ? Comment ?

45. Fête des mères

Problème n°223 du 15/05/2001

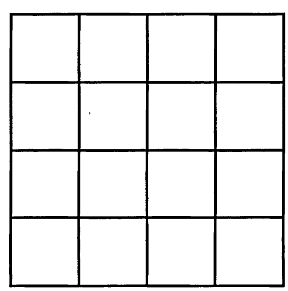
Je voudrais deux disques classiques pour ma mère, demande Annie.
– Deux disques de jazz pour la mienne, renchérit Barbara.
– Un de chaque pour moi, déclare Caroline.
– Ma mère est plus moderne, précise Dorothée, mettez un disque de jazz et un de rap.
Le vendeur prépare quatre jolis paquets, et, pour les distinguer, colle dessus quatre étiquettes sur lesquelles il a noté le contenu.
Au moment où les quatre amies quittent les lieux, il prend un air confus et avoue : « Excusez-moi, je me rends compte que j'avais préparé les étiquettes dans l'ordre où j'avais disposé les paquets sur le comptoir de gauche à droite, et que je les ai collées de droite à gauche. »
Barbara se résigne donc à ouvrir un des paquets. Elle lit le titre du CD du dessus, et, bien qu'il ne s'agisse pas du disque de rap, annonce qu'elle connaît maintenant le contenu des quatre paquets.

Attribuez les « vraies » étiquettes aux quatre paquets.

46. En noir et blanc

Problème n°228 du 19/06/2001

Coloriez en noir certaines cases de la grille ci-dessus de telle sorte que 3 cases consécutives (en ligne, en colonne ou en parallèlement à l'une des diagonales) ne soient jamais noircies à la fois.



Quel est le nombre maximum de cases qu'on puisse colorier ?

Et si on exige que trois cases consécutives ne puissent être de la même couleur (noire ou blanche) ?

47. Porcelaine de Limoges

Problème n°233 du 11/07/01

2001 assiettes identiques sont réparties en cinq piles. On ne sait qu'une chose : des piles différentes sont forcément de hauteurs différentes. Un restaurateur achètete la plus haute pile.

Quel est le nombre minimum d'assiettes qu'il emporte ?

Pouvez-vous généraliser à n'importe quel nombre d'assiettes et de piles ?

(D'après le Tournoi mathématique du Limousin).

48. Gratte-ciel

Problème n°238 du 04/09/2001

Un bloc de la ville de New York a été représenté dans une grille. Chaque case (blanche) contient un immeuble de 10, 20, 30 ou 40 étages. Les immeubles d'une même rangée (ligne ou colonne) sont tous de tailles différentes. Les informations données sur les bords indiquent le nombre d'immeubles visibles sur la rangée correspondante, par un observateur situé à cet endroit.
Par exemple, si une ligne contient la disposition 20-40-30-10, deux immeubles sont visibles à partir de la gauche (le 20 et le 40) et trois immeubles sont visibles à partir de la droite (le 10, le 30 et le 40).

	2	2			
					2
1					3
2					1
2					
			3		

Retrouvez la hauteur de chaque immeuble !

(D'après le magazine « Tangente-Jeux »).

49. Chassez les diviseurs

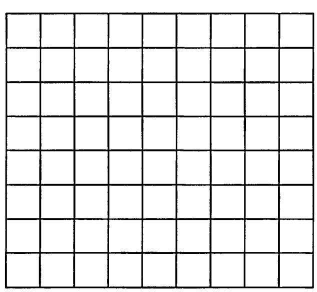
Problème n°243 du 09/10/2001

On appelait autrefois « parties aliquotes » d'un nombre entier les diviseurs (y compris 1) autres que l'entier lui-même.
Deux joueurs se mesurent de la manière suivante. Le premier à parler annonce un nombre N.
Puis chacun, à tour de rôle, enlève du nombre annoncé par son adversaire l'une de ses parties aliquotes. Le premier à parvenir à 1 a gagné.

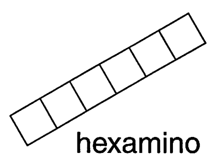
Pour quelles valeurs de N le premier joueur est-il assuré de l'emporter ? Quelle doit être alors sa stratégie ?

50. Les hexaminos

Problème n°248 du 13/11/2001



grille



hexamino

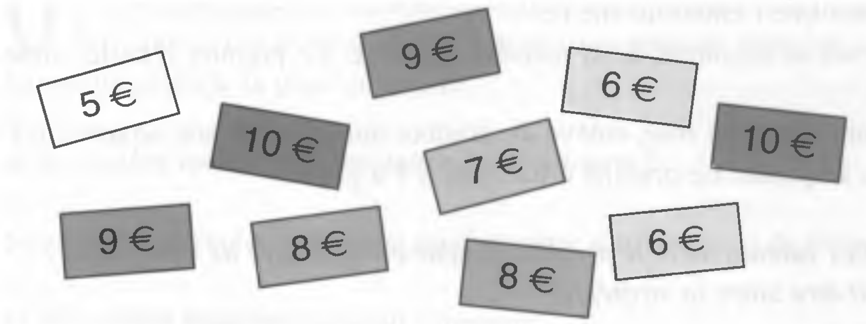
On dispose d'une grille de 8 cases sur 9, et de douze « hexaminos » 6×1, baguettes rectangulaires de six cases sur une.

Peut-on paver la grille à l'aide des hexaminos ?

Quelles sont les dimensions des grilles qu'on peut paver (sans chevauchements) à l'aide d'hexaminos 6 × 1 ?

51. Les dix étiquettes

Problème n°253 du 04/12/2001



Des chaussettes de cinq sortes sont en vente dans ce magasin. Le commerçant décide de les proposer par lots de deux paires de types différents. Il édite donc dix étiquettes, puisqu'il y a dix façons de faire des lots. Voici ces étiquettes.

Retrouvez le prix de chaque sorte, de la moins chère à la plus chère.

52. Le tournoi

Problème n°258 du 22/01/2002

Alex, Babette, Claude et Diane disputent un tournoi de tennis. Chacun rencontre chacun des autres.
Pour déterminer le vainqueur, les quatre amis décident d'attribuer les points de la façon suivante. Chaque joueur marquera un point :
- quand il gagne un match
- chaque fois qu'un des adversaires qu'il a battus (ou qu'il battra) gagne un match.

Bien qu'aucun joueur n'ait gagné ses trois matches, le classement final ne fait pas apparaître d'ex-aequo. Diane l'emporte devant Alex, Claude et Babette, dans cet ordre.

Retrouvez le résultat des six matches.

53. Pile ou face

Problème n°263 du 26/02/2002

Dans le jeu télévisé « Qui veut gagner le magot ? », les producteurs sont désespérés. Malgré tous les efforts déployés pour leur faciliter la tâche, les candidats se montrent toujours incapables de gagner. On décide donc de faire appel au bon vieux hasard. Les candidats tirent un nombre dans une urne : c'est le nombre d'épreuves de « pile ou face » auxquelles ils doivent se soumettre. Si, à l'issue de leur série, ils ont réalisé strictement plus de « face » que de « pile », ils repartent avec le magot.
La première candidate, Amandine, a tiré le nombre « 9 » et lance donc 9 fois sa pièce.
La deuxième candidate, Babette, a tiré le nombre « 12 » et joue 12 fois à « pile ou face ». Quant à Charlotte, elle a tiré « 14 » et effectue 14 lancers.
Le sort leur étant favorable, elles gagnèrent toutes les trois.

Mais laquelle des trois avait le moins de chances de remporter le magot ?

54. Élections dans l'archipel

Problème n°268 du 02/04/2002

Dans l'archipel Désaccord, la population est divisée en deux tribus, les Duvrai (qui disent toujours la vérité) et les Dufaux (qui mentent toujours). L'élection présidentielle prochaine s'annonce très serrée, car il y a peu d'écart entre les deux populations, et les candidats en présence sont un Duvrai (qui recueillera les suffrages de tous les Duvrai) et un Dufaux (pour lequel voteront tous les Dufaux). Un journaliste étranger se met en quête d'interroger les 2002 électeurs. Il leur pose la question suivante : « combien y a-t-il de Dufaux sur l'archipel ? ». Il obtient les réponses suivantes :
Habitant 1 : « il y a au moins 1 Dufaux sur l'archipel ».
Habitant 2 : « il y a au moins 2 Dufaux sur l'archipel ».
Habitant 3 : « il y a au moins 3 Dufaux sur l'archipel ».
Et ainsi de suite jusqu'à :
Habitant 2001 : « il y a au moins 2001 Dufaux sur l'archipel ».
Quand au dernier interrogé, il répond : « il y a 2002 Dufaux sur l'archipel ».

Lequel des deux candidats sera élu ?

55. La zone américo

Problème n°272 du 30/04/2002

Une nouvelle monnaie, l'Américo, vient de voir le jour dans un continent lointain. Tous les prix de la zone sont exprimés en nombres entiers d'Américos. Il a été décidé de frapper des pièces de différentes valeurs comprises entre 1 et 100 Américos de telle sorte qu'avec un jeu de pièces (une de chaque sorte), un prix donné ne puisse pas être obtenu de plus d'une façon (quand il peut être obtenu).

Est-ce possible en frappant sept pièces ?

Est-ce possible en frappant dix pièces ?

56. La loterie

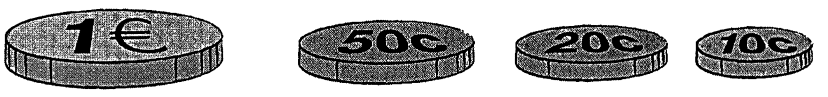
Problème n°278 du 18/06/2002

Approchez, approchez ! Choisissez un total et pour un Euro, tirez un billet !

Si la somme des chiffres figurant sur votre billet est égale au total que vous avez choisi, vous gagnerez 10 Euros ! Tous les numéros entre 100 et 999 ont la même probabilité de sortir !

Quel total choisirez-vous ?

Quelle est votre probabilité de gagner 10 Euros ?



57. Le tableau effacé

Problème n°283 du 24/07/2002

On écrit sur un tableau noir, l'un à la suite de l'autre, les entiers de 1 à 20 :

123456789101112...20

On efface 20 de ces chiffres.

Quel est le plus grand nombre qui puisse rester sur le tableau ?

58. Quel désordre !

Problème n°288 du 27/08/2002

Alban est paresseux et n'est pas très ordonné. Aussi, quand on lui offre un petit meuble pour y ranger les boîtes contenant ses six paires de chaussures (trois paires de mocassins et trois paires de baskets), se contente-t-il d'étiqueter chacune des trois étagères de deux initiales parmi « B » et « M », B désignant les baskets, et M les mocassins (chaque étagère contient deux boîtes).
Une semaine plus tard, Alban a tout dérangé. Sa mère prend les choses en mains. Elle décide de marquer chaque boîte du symbole « B » ou « M ». Elle sait que les trois indications portées sur les étagères sont désormais toutes les trois fausses.

Combien de boîtes lui suffira-t-il d'ouvrir pour identifier à coup sûr les contenus des six boîtes ?

59. Rendez à César...

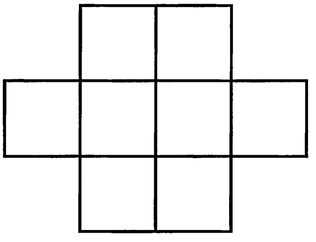
Problème n°293 du 01/10/2002

Quatre jeunes gens, Aline, Basile, Coralie et Domitien, ont chacun une planche à roulettes, et bien sûr le bonnet qui va avec, de même couleur que la planche. Ils ont aujourd'hui décidé d'échanger leurs matériels, si bien qu'aucun n'utilise sa propre planche ni ne porte son propre bonnet. Ils poussent même le jeu jusqu'à ne jamais assortir planche et bonnet.
Ainsi, celui (ou celle) qui a le bonnet de Domitien a la planche de Basile, celui (ou celle) qui a la planche d'Aline a le bonnet de Coralie. Celui(ou celle) qui a le bonnet de Basile a la planche du (ou de la) titulaire du bonnet de Coralie, et celui (ou celle) qui a la planche de Coralie a le bonnet du détenteur (ou de la détentrice) de la planche de Basile.

Rendez à César ce qui appartient à César !

60. Huit nombres à placer

Problème n°298 du 05/11/2002



Placez les nombres entiers de 1 à 8 dans cette grille de sorte que deux nombres consécutifs ne soient jamais placés dans des cases se touchant par un côté ou même simplement par un sommet.

Combien y a-t-il de solutions possibles ?

Affaire de logique SOLUTIONS

1. Le tableau autoréférent

Si x, y, z, t sont, dans l'ordre, les nombres cherchés, aucun ne peut excéder 3.
Par ailleurs, le nombre des chiffres du tableau est $x + y + z + t = 8$, et leur somme donne $4x + 3y + 2z + t = x + y + z + t + 10$, d'où les deux conditions :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

x ne peut être que **1**, d'où $\mathbf{y = t = 2}$ et $\mathbf{z = 3}$. *Il n'y a qu'une solution :*

Dans ce cadre,					
il y a	**1**	fois le chiffre	4	en dehors de cette ligne	1
il y a	**2**	fois le chiffre	3	en dehors de cette ligne	2
il y a	**3**	fois le chiffre	2	en dehors de cette ligne	3
il y a	**2**	fois le chiffre	1	en dehors de cette ligne	4

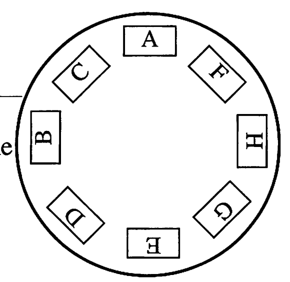
2. Histoire de familles

Marie est une Duvrai, tandis qu'Eric et Stéphane répondent au nom de Dufaux. *Démonstration :*
• Si Stéphane était un Duvrai, l'affirmation d'Eric serait fausse. Comme celle de Stéphane serait vraie, le seul Dufaux serait Eric, ce qui est en contradiction avec l'affirmation de Marie. **Stéphane est donc un Dufaux.**
• Si Eric était un Duvrai, son affirmation serait juste. Marie serait une Dufaux, et pourtant, dirait la vérité puisqu'il y aurait bien deux Dufaux. Absurde. **Eric est donc un Dufaux.**
• Si Marie était une Dufaux, l'affirmation d'Eric serait juste (« les deux autres sont des Dufaux »), ce qui est impossible puisque ce dernier est un Dufaux. **Marie est donc une Duvrai.**

3. Le sac de lettres

Le sac contient **8 consonnes** (avec 10 lettres on a au moins deux voyelles, mais pas forcément avec 9 lettres). Il contient **10 voyelles**. Il contient 14 lettres autres que des A d'où **4 A** (18-14). Il contient 15 lettres autres que des S d'où **3 S** (18-15).

4. La table polyglotte



(à la symétrie près)
On part d'Héléna et de Gunther, forcément voisins, pour construire de proche en proche la disposition

⊠ *Jean-Claude GAILLOT, Bois-le-Roi.*

5. Le champ de mines

La solution est unique. On y parvient en commençant par le bas (à droite), puis en se plaçant successivement au centre de carrés (de 3 cases sur 3) dont on connaît la nature de toutes les cases sauf une, ce qui est presque toujours possible, sauf pour une étape où une simulation permet d'éliminer la fausse piste.

2	2	4	2	3	2	3	1
3	3	4	3	2	1	4	2
2	2	4	4	5	4	5	2
3	3	3	1	2	1	4	2
2	2	3	4	6	4	5	2
3	5	3	2	2	1	3	1
2	5	2	5	4	3	3	2
1	4	1	3	0	1	1	0

6. Le tournoi de tennis

	Anne	Bruno	Caroline	Daniel	Total
Anne		0	2	1	3
Bruno	2		0	0	2
Caroline	0	1		1	2
Daniel	0	1	0		1

7. Bronzer idiot

Dans le total des quatre effectifs (49 + 42 + 35 + 30 = 156), les 24 touristes qui font deux excursions sont décomptés deux fois (une fois de trop) et les 10 touristes qui font trois excursions sont décomptés trois fois (deux fois de trop). 156 – 24 – 2 × 10 = 112. Les *acharnés* faisant le « grand chelem » sont décomptés quatre fois (trois fois de trop) : il y en a au moins quatre.

• S'il y avait exactement 4 *acharnés*, c'est que les cent touristes partiraient au moins une fois, ce qui est contraire à l'hypothèse.

• S'il y en avait six ou plus, en enlevant 18 ou plus, on trouverait un effectif de 94 ou moins : plus de cinq paresseux ne partiraient pas.

• Il y a donc 5 *acharnés*, pour un effectif de 97 partants et **3 sédentaires**.

8. Les jumeaux muets

• Pour savoir à qui vous avez affaire, vous pouvez demander : « **Lever le bras droit signifie-t-il OUI ?** ». Si le bras droit signifie « OUI », Veris lèvera le bras droit et Factis le bras gauche. Mais ce sera la même chose si le bras droit signifie « NON ».

• Pour lui faire lever le bras droit, vous pouvez poser la question : « **Quand on vous demande si le bras droit signifie OUI, levez-vous le bras droit ?** ». Quel que soit le cas de figure, votre interlocuteur lèvera le bras droit.

• Pour savoir si vous êtes qualifié, dites : « **Si je demande à votre frère si je suis qualifié, lève-t-il le bras droit ?** ». Si le bras droit se lève, vous n'êtes malheureusement pas qualifié, mais si c'est le bras gauche, victoire !

9. Les nombres secrets

• Léonhardt n'a pas de chance. Le résultat communiqué par l'animateur peut, selon les nombres secrets, prendre les valeurs 8, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31 ou 33. Parmi ces résultats possibles, seul 23 correspond à deux cas, chacun des autres étant pris une seule fois. En d'autres termes, si 14 s'écrit sans ambiguïté 2 × 1 + 3 × 4, 23 a deux écritures (2 × 1 + 3 × 7 ou 2 × 4 + 3 × 5), ce qui contraint notre candidat à répondre au hasard entre les solutions (1 et 7) ou (4 et 5).

• Blaise n'est pas plus veinard. Son résultat peut, selon les nombres secrets, prendre les valeurs 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 29 ou 32 une seule fois et 17 deux fois : ($17 = 3 \times 1 + 2 \times 7$ ou $3 \times 3 + 2 \times 4$), ce qui lui laisse le choix entre les solutions (1 et 7) ou (3 et 4).

Le hasard a mal fait les choses, puisque les deux se sont trompés.

La bonne réponse était donc la solution commune **1 et 7**.

⌧ *Mais, comme le font remarquer notamment Michel Mengual, de Paris, et Dominique VEYRIER, d'Aix-en-Provence, en poussant la logique jusqu'au bout, les deux candidats auraient pu se douter que l'animateur aurait choisi les nombres de façon à créer une incertitude chez les deux !*

10. Soirée mondaine

Zinedine connaît 13 invités.

En effet, il ne connaît pas Aline (qui ne connaît qu'Yvonne), mais connaît Yvonne (qui connaît tout le monde).

Il connaît le convive 24 (qui connaît tout le monde sauf Aline), mais ne connaît pas Bruno (qui ne connaît que les convives 24 et 25).

Il connaît le convive 23 (qui connaît tout le monde sauf Aline et Bruno), mais ne connaît pas Caroline (qui ne connaît que les numéros 23, 24 et 25), et ainsi de suite ...

Il connaît le convive 14 (qui connaît tout le monde sauf les 12 premiers), mais ne connaît pas le convive numéro 12 (qui ne connaît que les numéros de 14 à 25).

Il connaît le 13 (qui ne connaît aucun des numéros 1 à 12, donc connaît les numéros 14 à 26).

En définitive, il connaît les 13 convives portant les numéros de 13 à 25.

11. Comme chien et chat

Bichou aime les os à moëlle.

Il n'a pas eu de panier : il est donc roux, et par conséquent rusé. C'est donc un chat du quartier.

Il mange dans le plat de mon chien. C'est un de ses compagnons d'errance.

Il aime donc les os à moëlle.

⌧ *Un chat plein d'humour mais pas très bon logicien a cru déceler une erreur.*

12. Il n'y a que cette médaille qui m'aille

Emilie a une médaille de bronze.

• Si Alexandre ne connaît pas sa médaille, c'est que Charles, Daniel et Emilie n'épuisent pas à eux trois deux des couleurs des médailles. Ils totalisent donc l'une des trois configurations :

(1 or, 1 argent, 1 bronze), (2 argent, 1 bronze) ou (1 argent, 2 bronze).

• Charles conclurait donc pour lui-même si Daniel et Emilie totalisaient :

2 bronze (→ argent), 2 argent (→ bronze), 1 or + 1 argent (→ bronze), 1 or + 1 bronze (→ argent).

Si Charles ne peut conclure, c'est que Daniel et Emilie totalisent une médaille d'argent et une de bronze.

• Daniel conclut qu'il a une médaille d'argent : c'est qu'il a vu qu'Emilie avait une médaille de bronze.

⌧ *Jean BUSSIERAS, de Saint-Maur, nous a permis d'améliorer l'énoncé.*

13. Les clés de « l'énigme »

Le coffre doit comporter onze serrures.

La « clé » (c'est le cas de le dire) consiste à imaginer une serrure par « groupe insuffisant » pour ouvrir le coffre. Ainsi, deux quelconques des détectives forment un « groupe insuffisant » : la clé de la serrure correspondant à ce groupe sera donnée aux quatre autres protagonistes, mais ces deux-là, seuls, ne pourront ouvrir puisqu'il leur manque cette clé. Il y aura de même une serrure correspondant au directeur seul, dont la clé sera donnée à chacun des cinq détectives. Total :

– 10 serrures pour les 10 choix possibles de 2 détectives parmi 5.

– 1 serrure pour le directeur

Soit un total de 11 serrures. **Le directeur en possèdera 10 clés, chacun des détectives 7** (toutes sauf les 4 associées aux quatre groupes insuffisants dont le détective fait partie).

⌧ Patrick CAILLOT, de Tours, a imaginé avec un de ses amis une solution « de bricoleur », non mathématique mais ingénieuse : utiliser trois serrures identiques à simple bec de cane qui se ferment automatiquement sous l'action d'un ressort et qu'on ouvre en tournant une clé qui contrarie l'action du ressort tant qu'on la maintient tournée. Sept clés identiques sont en circulation, une pour chaque détective, deux pour le directeur. Pour ouvrir, il faut introduire trois clés et les tourner simultanément.

Solution malheureusement inacceptable, car, de nos jours, il est si facile de faire reproduire une clé, même de sûreté !

14. La cité autarcique

Il y a forcément au moins deux habitants qui connaissent le même nombre de personnes.

En effet, le nombre de relations d'un individu semble pouvoir prendre en théorie 7843 valeurs, tous les entiers compris entre 0 et 7842.

Mais il est impossible qu'à la fois un Vaseclausien connaisse tout le monde et un autre ne connaisse personne (ils se connaîtraient).

Le nombre de relations d'un individu peut donc prendre au maximum 7842 valeurs. Or, il y a 7843 habitants. C'est que deux d'entre eux (au moins) connaissent le même nombre de personnes.

15. Le théorème galant

Autant d'hommes ont une femme assise immédiatement à leur droite que d'hommes ont une femme située immédiatement à leur gauche. Peu importe le nombre de convives et leur répartition. Appelons D le club des hommes ayant une femme assise immédiatement à leur droite, et G celui des hommes possèdant une voisine de gauche. Supposons que chaque membre de D envoie un billet à l'homme le plus proche situé à sa droite. On constate que les destinataires des missives appartiennent tous à G ! Réciproquement, tout membre de G reçoit une lettre de l'homme le plus proche situé à sa gauche, puisque cet homme appartient à D. Il y a donc autant de membres dans le clan D que dans le clan G. Vous remarquerez que certains hommes sont à la fois expéditeurs et destinataires d'un billet. Ils sont entourés de deux femmes, les veinards !

16. Les quatre enfants

Voici toutes les façons d'obtenir 72 par produit de quatre nombres entiers et la somme correspondante :

1	1	1	72	Somme :	75
1	1	2	36		40
1	1	3	24		29
1	1	4	18		24
1	1	6	12		20
1	1	8	9		19
1	2	2	18		23
1	2	3	12		18
1	2	4	9		16
1	**2**	**6**	**6**		**15**

1	**3**	**3**	**8**	**15**
1	3	4	6	14
2	**2**	**2**	**9**	**15**
2	2	3	6	13
2	3	3	4	12

Seule la somme 15 donne lieu à plusieurs possibilités, trois en l'occurrence.
J'ai donc 15 ans et j'hésite entre 1-2-6-6, 1-3-3-8 et 2-2-2-9.
Si je suis en mesure de connaître les âges après sa réponse, c'est qu'elle m'a répondu « non » (sinon j'hésiterais encore). La seule possibilité qui me permette alors de conclure : **les enfants ont 1, 3, 3 et 8 ans.**

17. Les locaux de la colo

Le moniteur avait accroché une pancarte **à trois portes**. Leurs occupants ont effectué une permutation circulaire qui leur permet, le troisième jour, de retrouver leur chambre initiale. Les occupants des deux autres chambres n'ont pas bougé.

18. Le dernier pion

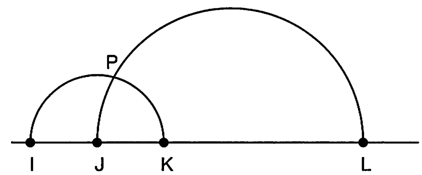
• Avec la première règle, vous allez gagner en adoptant une stratégie toute simple : enlever d'abord trois pions pour arriver à 44, puis toujours ôter le complément à 4 du nombre pris par l'adversaire. Vous laisserez ainsi les multiples successifs de 4. Lorsqu'il restera quatre pions, quoi que fasse l'autre, vous pourrez enlever l'intégralité des pions restants.
Remarquez que si au début, il avait ramassé deux pions au lieu de trois, c'est vous qui étiez pris dans la nasse.
• Avec la deuxième règle, vous êtes mal parti(e). **S'il joue bien, votre adversaire va l'emporter !** Seule l'erreur commise dans la partie précédente par votre opposant peut vous rendre espoir.
Voici la stratégie gagnante qu'il est en mesure d'adopter :
• Si vous enlevez 1 pion, il en prend 3 et vous vous retrouvez dans la même situation avec quatre pions de moins : 43 sans avoir le droit d'en prendre 3.
• Si vous enlevez 2 pions, il en prend 1, et vous vous retrouvez avec un multiple de 4 pions.
- Prenez-en trois, il en enlève un pour vous laisser avec un multiple de 4.
- Prenez-en deux, il en prend 1. Quoi que vous fassiez alors, il est en mesure de vous laisser un multiple de 4.
Epilogue :
Vous vous retrouvez ainsi, en descendant...
- à un total de 3 pions sans avoir le droit d'en prendre 3 : il gagne facilement ;
- à un total de 4 pions : votre seul espoir, en prendre 2 ; mais l'adversaire en prendra 1, et vous ne pourrez plus jouer.

19. Le rectangle rose

Oui, il existe forcément un rectangle rose.
Il y a en effet huit façons de colorier une colonne de trois points (voir ci-contre). Or, il y a neuf colonnes. C'est que deux d'entre elles sont coloriées de la même manière.
Elles ne peuvent être coloriées selon le schéma 1, 2, 3 ou 4 sous peine d'engendrer un rectangle ayant ses quatre sommets noirs. Elles le sont donc selon l'un des schémas 5, 6, 7 ou 8, ce qui garantit la présence d'un rectangle rose.

●	○	●	●	●	○	○	○
●	●	○	●	○	●	○	○
●	●	●	○	○	○	●	○
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

20. Les demi-cercles



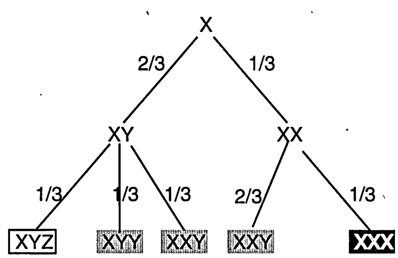
Pour tout groupe de 4 points (dans l'ordre I, J, K et L) pris parmi les 10, on trouve une seule intersection P correspondant aux demi-cercles de diamètres IK et JL. Les demi-cercles de diamètres IJ et KL ne se coupent pas, pas plus que les demi-cercles de diamètres IL et JK ou encore que les demi-cercles IJ, IK et IL etc. qui ne se coupent que sur la droite.
Or il y a 210 façons de choisir 4 points parmi 10 :
10 (les choix possibles du premier point) que multiplie 9 (les choix possibles du deuxième) que multiplie 8 (les choix du troisième) que multiplie 7 (les choix du quatrième), le tout divisé par 24, car chaque groupe de 4 points a été compté 24 fois (dans les 24 ordres possibles).
Il semblerait y avoir 210 intersections. C'est en touts cas un maximum.

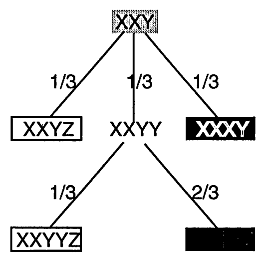
> ⊠ *Mais plusieurs lecteurs, tels Claude CARDOT, de Paris, Jean-Daniel LEFRANC, de Fontenay aux roses, ont fait remarquer que, selon la répartition initiale certains de ces points pouvaient être confondus.*
>
> ⊠ *Ainsi, pour une équirépartition des dix points, Bernard LOUZEAU, de Paris, Marc ROGALSKI et Guy BASTIEN, de Paris, et J. SCHLEICK, ont fait le calcul. Ils ont trouvé 5 points communs chacun à trois cercles, donc obtenus trois fois dans le calcul qui mène à 210 (il y a chaque fois trois couples de cercles). Il faut donc enlever deux fois ces cinq points.*

En définitive, il reste 200 points d'intersection.

21. L'agent secret

La partie comporte au maximum 5 lancers de dés.
En effet, la seule configuration à 4 dés qui ne soit pas décisive est du type XXYY où X et Y sont deux des couleurs. On voit alors que le cinquième coup verra forcément l'un des deux joueurs l'emporter.
Les arbres ci-contre montrent que **la probabilité de gain de l'agent secret est de 14 chances sur 27 contre 13 chances sur 27 à l'espion.**





• L'arbre du haut figure les trois premiers coups, les nombres sur les branches leurs probabilité. La couleur sortant au premier coup étant appelée X, on voit que l'agent secret a **2 chances sur 9** (2/3 × 1/3) de l'emporter au troisième coup (rectangle blanc) contre **1 chance sur 9** (1/3 × 1/3) à l'espion (rectangle noir).
• Dans les 6 cas sur 9 restants (rectangles gris, 2 chances sur 3), on se retrouve dans le cas de l'arbre du bas. On parvient à la victoire de l'agent secret avec la probabilité 1/3 + 1/9 = 4/9 contre 5/9 à celle de l'espion.
Ces probabilités sont à multiplier par 2/3 (probabilité d'un cas gris) et à ajouter aux probabilités de gain en trois coups vues plus haut.
Pour l'agent secret, cela donne : 8/27 + 2/9 = 14/27.

22. Le train d'engrenage

La roue D tournera de 14 tours.

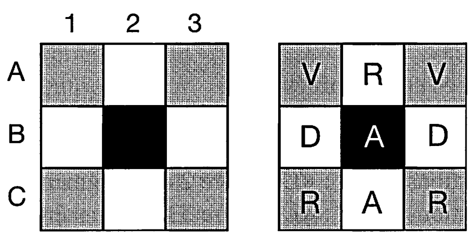
• La rotation complète de la roue A, qui a 36 dents, entraînera la rotation de la roue B de 3,6 tours (puisqu'elle a 10 dents), et donc la rotation d'autant de la roue C. Or, cette dernière ayant 35 dents, entraînera $35 \times 3{,}6 = 126$ dents de la roue D. Il ne reste plus qu'à constater que cela entraîne une rotation de cette dernière de 14 tours, puisque $14 \times 9 = 126$.

• Pour obtenir 15 tours de la roue D sans changer les roues A et B, il faut transformer les 3,6 tours de la roue B (et donc C) en 15 tours. Le nombre de dents de la roue C doit être plus important que celui des dents de la roue D dans le rapport $15/3{,}6 = 25/6$. Il suffit donc que les roues C et D aient respectivement **25 et 6 dents** (ou des nombres proportionnels de dents).

✉ *Georges STEVENS (64, Lons-France) a trouvé ce problème étonnamment facile. Il indique que tout vient du fait que si a désigne le nombre de roues de A, b de B..., le rapport des angles décrits par D et A est :* $\frac{ac}{bd}$.

23. La neuvième carte

La case centrale est un As, le Roi est en triple exemplaire.



Le raisonnement peut porter sur la place des Valets.

• Si un valet est dans une case blanche, par exemple A2, cela impose (à des symétries près) une Dame en B2, un Roi en A1.
On raisonne alors sur la figure en A3 : ce ne peut être une Dame ni un Valet.
– Si c'est un Roi, un As doit se trouver en B3 et il n'y a plus de place pour le deuxième Valet ou la deuxième Dame.
– Si c'est un As, on cherche la position de la deuxième Dame et on a des impossibilités dans chaque cas.

• Si un Valet est dans la case noire (centrale), on doit placer un Roi en A2 et on distingue deux cas pour la Dame, en C2 ou B3. On cherche alors la place du deuxième Valet qui ne peut être que sur une case grise (voir plus haut), et on arrive à une contradiction.

• Les Valets sont donc dans des cases grises. S'ils sont sur une même diagonale, on arrive rapidement à une contadiction. Seule convient la configuration de droite (aux symétries près).

24. Encore des mains à serrer

Il existe toujours 6 personnes s'étant mutuellement serré la main.

• Prenons l'un des participants, Antony. Les personnes qu'il a saluées (appelons-les ses « correspondants ») forment un groupe A, dans lequel figure Blaise.

• Parmi les correspondants de Blaise, seuls 399 (= 1999 – 1600) peuvent ne pas être des correspondants d'Antony. Il y a donc au moins 1201 (= 1600 – 399) correspondants communs à Antony et Blaise, qui forment le groupe B, dans lequel figure Charles.

• Parmi les correspondants de Charles, seuls 798 (= 1999 – 1201) peuvent ne pas appartenir au groupe B. Il y a donc au moins 802 (= 1600 – 798) correspondants communs à Antony, Blaise et Charles, qui forment le groupe C, dans lequel figure Daniel.

• Parmi les correspondants de Daniel, seuls 1197 (= 1999 – 802) peuvent ne pas appartenir au groupe C. Il y a donc au moins 403 (= 1600 – 1197) correspondants communs à Antony, Blaise, Charles et Daniel, qui forment le groupe D, dans lequel figure Elie.

• Parmi les correspondants d'Elie, seuls 1596 (= 1999 – 403) peuvent ne pas appartenir au groupe D. Il y a donc au moins 4 (= 1600 – 1596) correspondants communs à Antony, Blaise, Charles, Daniel et Elie, parmi lsequels figure François.
Antony, Blaise, Charles, Daniel, Elie et François se sont mutuellement serré la main.

25. Recensement sur l'archipel

Il y a 250 Dufaux et 150 Duvrai.
• Chaque Duvrai a répondu «oui» une fois.
• Chaque Dufaux a répondu «oui» deux fois, soit une de trop.
Le nombre de «oui» au-delà de 400 (le nombre d'habitants) est donc le nombre de Dufaux.
Il y a 300 + 200 + 150 = 650 «oui», ce qui entraîne la présence de 250 Dufaux.

26. Heure d'hiver

La présidente a marché 56 minutes.
Le chauffeur a économisé le double de la distance parcourue par la présidente, et a gagné 8 minutes. C'est qu'il parcourt cette distance en 4 minutes. Habitué à arriver à 8 heures au domicile, il a donc rencontré sa patronne 4 minutes avant, soit à 7 heures 56.

27. Les coffre minés

• Voici par exemple onze questions que pouvait poser le pirate :
Questions 1 et 2 : «Le coffre 1 est-il miné ?»
Questions 3 et 4 : «Le coffre 2 a-t-il le même contenu que le coffre 1 ?»
Questions 5 et 6 : «Le coffre 3 a-t-il le même contenu que le coffre 2 ?»
Questions 7 et 8 : «Le coffre 4 a-t-il le même contenu que le coffre 3 ?»
Questions 9 et 10 : «Le coffre 5 a-t-il le même contenu que le coffre 4 ?»
Question 11 : «Le coffre 5 est-il miné ?»
Si les réponses à l'un des couples de questions identiques sont discordantes, on se sert de la question 11 pour reconstituer les contenus inconnus à partir de la fin.

⌧ *Voici une autre solution d'Henri ATGER (78, Versailles) :*
Questions 1 à 5 : «Le coffre X est-il miné ?» avec X = 1, 2, 3, 4, 5
Questions 6 à 10 : «Le coffre X est-il miné ?» avec X = 1, 2, 3, 4, 5
Question 11 : «Le nombre de coffres minés est-il pair ?»

• Des centaines de lecteurs ont contribué au problème du nombre minimal de questions à poser. Qu'ils en soient remerciés, même si nous ne citons ici, faute de place, qu'une partie de ceux qui ont trouvé la bonne réponse.

⌧ *On pouvait parvenir à déterminer le contenu des cinq coffres en neuf questions. Voici la solution d'André LAMOTHE (78, Plaisir) :*
Questions 1 à 5 : «Le coffre X est-il miné ?» avec X = 1, 2, 3, 4, 5
Questions 6 à 9 : «Le nombre de coffres minés parmi les numéro Y est-il pair ?», avec Y = {1, 2, 5}, {3, 4, 5}, {1, 3}, {2, 4}.
Notre lecteur précise que la solution est minimale, et qu'elle s'inscrit dans la théorie des codes correcteurs d'erreur.

⌧ *Gérard BATTAIL (26, Chabeuil), Romain BETEILLE (75, Paris), Hubert COMON (94, Cachan), Jean-François GILBERT (06, Saint-Jeannet), Michel HEBRAUD (31, Toulouse), R. HILAIRE (91, Massy), Maurice et Yves LACHAUD (82, Montauban), Laurent ROSAZ, Ilan VARDI (91, Bures).*

28. Fragilité des témoignages

Le cercle est jaune, le triangle bleu, le carré rouge, le trapèze vert, le pentagone rose et l'hexagone blanc.

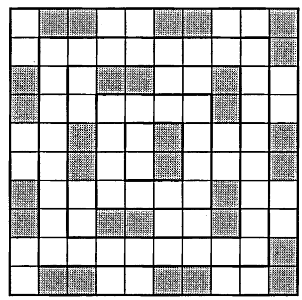
En effet, les deux élèves ont sept réponses justes à eux deux pour six questions. Ils n'ont en commun que la réponse du pentagone rose, qui est donc juste. Pour les cinq autres figures, ils ont à eux deux cinq réponses justes, c'est-à-dire qu'un des deux et un seulement a raison sur chaque figure.

• Si le cercle n'était pas jaune, il serait rouge, et le carré ne serait pas rouge. Le carré serait blanc et l'hexagone ne pourrait pas l'être. Bénédicte aurait trois fautes.

• Donc le cercle est jaune, ce qui entraîne que l'hexagone n'est pas jaune mais blanc, ce qui entraîne que le carré n'est pas blanc mais rouge. Alexandre a déjà ses trois erreurs, et ses autres réponses sont justes.

29. Bataille navale

Il faudra tirer 30 salves pour être sûr d'atteindre toutes les cases.



D'une manière générale, si le carré a un nombre pair $2n$ de cases sur chacun de ses côtés, on montre qu'il faut (et c'est suffisant) tirer $n \times (n + 1)$ salves bien choisies.

On peut l'établir en construisant, comme sur le dessin ci-contre, un plan de tir en divisant le champ de tir en couronnes concentriques. Sur la couronne extérieure, on alternera deux cases visées (en gris) et deux cases non visées. La couronne suivante ne sera pas visée. La couronne d'après le sera suivant la même méthode que l'extérieure, mais en choisissant les cases visées « en quinconce » par rapport à la première. Et ainsi de suite....

Cette méthode, qui utilise $n \times (n + 1)$ salves, ne peut être améliorée dans la mesure où toute case est atteinte mais aucune ne l'est par deux salves différentes. Ce problème est inspiré par un sujet d'olympiade mathématique 1999, et sa solution suggérée par François Lo Jacomo.

> ✉ *Christian ROMON montre l'analogie de ce problème et de celui du pavage du plan par des formes de huit cases obtenues à l'aide de deux salves contigües.*
>
> ✉ *Marie-Thérèse PENEAU (91, Massy) déplore l'« habillage » violent du problème. Qu'elle veuille bien nous en excuser.*

30. Le tableau noir

• Chaque fois que l'élève efface deux nombres et en écrit un, l'effectif des nombres inscrits au tableau diminue de 1. Pour passer de 2000 nombres à 1 nombre, il faut une diminution d'effectif de 1999, donc 1999 actions d'effacer deux nombres. **L'élève a ainsi effacé 3998 nombres.**

• Lorsqu'on remplace deux nombres par leur différence, la parité de la somme de tous les nombres inscrits au tableau ne change pas. En effet, la différence de deux nombres est de même parité que leur somme. Ainsi, la parité de la somme des nombres inscrits au tableau à n'importe quel instant est celle du début, c'est-à-dire la parité de la somme des 2000 premiers entiers.

Cette somme vaut 2 001 000, puisque la somme des N premiers entiers vaut N (N + 1)/2. **L'unique nombre restant à la fin est donc un nombre pair**. L'élève a fait une erreur de calcul.

> ✉ *André HUILLIER (39, Sermange) et Michel MENGUAL (75, Paris) ajoutent que si l'on s'abstient d'écrire les zéros, on peut arriver à un seul nombre en effaçant beaucoup moins de 3998 nombres.*

31. Les enfants terribles

Deux des garnements ont menti.

Le confiseur hésite entre accuser Caroline, Daniel ou aucun des quatre enfants. Explication :

• Parmi Bénédicte et Caroline, l'une ment, l'autre dit la vérité. Le nombre de menteurs est donc 1, 2 ou 3.

• S'il n'y a qu'un menteur, il est parmi Bénédicte et Caroline. Daniel dit la vérité : Bénédicte a commis le larcin (comme ce n'est pas Caroline, la menteuse est Bénédicte). Le confiseur connaîtrait donc la coupable.

• S'il y a trois menteurs, l'enfant «sincère» est parmi Bénédicte et Caroline. Daniel et Arnaud mentent : ce dernier est le coupable, facilement identifiable par le commerçant.

• Reste le cas de deux menteurs. Cette fois :

– ou bien Caroline ment, Bénédicte dit vrai et Caroline est coupable (Arnaud dit vrai et Daniel ment).

– ou bien Caroline dit vrai, Bénédicte ment. Si Arnaud ment tandis que Daniel dit vrai, il y aurait contradiction. Donc Arnaud dit vrai, Daniel ment : le coupable est soit Daniel, soit aucun des quatre.

32. La place de la mairie

Quel que soit le nombre de carrefours de la ville, on pourra construire la mairie.

• Supposons que dans toute ville de X carrefours, on puisse construire une mairie à un carrefour que nous appellerons M. Les carrefours qui ne mènent pas directement à M sont tous reliés à au moins un carrefour «relais» qui, lui, mène directement à M.

Ajoutons un X-et-unième carrefour K et toutes les rues correspondantes qu'on affecte d'un sens de circulation.

– Si une rue mène de K à M ou de K à un des carrefours relais, on pourra encore construire la nouvelle mairie en M.

– Sinon, c'est qu'on peut parvenir directement à K depuis M et depuis tous les carréfours relais, donc en deux temps au plus de tous les carrefours. On peut donc construire la mairie en K.

• On montre alors de manière évidente qu'on peut construire une mairie dans une ville de trois carrefours, puis on passe de 3 à 4, de 4 à 5, ..., de 40 à 41 comme on est passé de X à (X + 1) carrefours.

33. Potins et commères

• 6 appels téléphoniques sont nécessaires et suffisants pour que chacune des cinq commères possède les cinq potins.

Si on appelle les commères A, B, C, D et E, voici une suite possible d'appels :

A☎B - C☎D - B☎E - B☎D - C☎E - A☎C.

• Cas général (N commères) :

– 2 commères échangent leurs informations en 1 coup de fil.

– 3 commères en 3 coups de fil.

– Avec un nombre N de commères (N ≥ 4), on parvient à communiquer en (2N – 4) appels.

Exemple (les commères sont désignées par leurs numéros de 1 à N) :

1☎2, 1☎3, ...1☎(N–2)	soit (N–3) appels
(N–1)☎N, (N–1)☎1	soit 2 appels
(N–1)☎(N–2), (N–1)☎(N–3), (N–1)☎(N–4), ..., (N–1)☎2	soit (N–3) appels

Total : 2N – 4 appels.

✉ *On ne peut pas faire mieux. Dominique PASTRE (92, Issy-les-Moulineaux) et Christian ROMON en donnent la démonstration.*

34. Les œufs de Pâques

Les noms complets des enfants : Bérénice Xeres, Alexandre Yvon, Damien Zinox et Chloé Toudou.

Désignons par x, y, z et t le nombres d'œufs trouvés par les enfants, x pour l'enfant Xeres, y pour Yvon, ... (l'initiale du nom de famille).

Ainsi, les Xeres ont trouvé $4x$ œufs (x pour l'enfant, $3x$ pour son père), et de même, les Yvon en ont trouvé $3y$, les Zinox $6z$ et les Toudou $2t$.

Le nombre total d'œufs est $4x + 3y + 6z + 2t$.

Le total est impair puisqu'il se termine par 5, ce qui impose à y d'être impair.

Parmi les valeurs possibles de y, qui sont 2, 4, 6, 5, le seul impair est 5 ; $y = 5$. Alexandre s'appelle Yvon. x, y et t sont pairs, puisqu'ils valent (dans quel ordre ?) 2, 4 et 6.

En divisant par 2, il vient que $2x + 3z + t$ est multiple de 5, et comme c'est un nombre pair, il se termine par 0.

Le minimum de cette expression, obtenu pour $z = 2$, $x = 4$ et $t = 6$ vaut 20 et convient. C'est la seule possibilité. En effet, les autres dispositions donnent un résultat supérieur mais non multiple de 10, le maximum, obtenu pour $z = 6$, $x = 4$ et $t = 2$, valant 28.

35. Enquête

C'est Béatrice, la coupable.

• Si André était coupable, les déclarations (A1), (A2) et (A3) seraient fausses. (C3) serait donc vraie, et du même coup les trois affirmations de Claude.

Conclusion contradictoire avec l'énoncé : André n'est pas coupable.

• Si Claude était coupable, (A1) et (A3) seraient vraies, donc (A2) fausse. Donc (B1), (B2) et (B3) vraies.

Encore une fois, résultat contraire à l'énoncé : Claude n'est pas coupable.

• Il ne reste que la culpabilité de Béatrice. (A2), (A3), (B1), (C2) et (C3) sont fausses, les autres vraies.

> ⊠ *Jean-Marie Audrin (44, Saint-Sébastien sur Loire), Emmanuel Fraisse (92, Bourg-la-Reine) et Geneviève LETZGUS (73, Saint-Alban sur Eysse) nous ont permis d'améliorer le problème en supprimant une information qui parasitait l'énoncé initial (lieu où se trouvaient André et Béatrice à l'heure du crime). Qu'ils en soient remerciés.*

36. Le numéro du coffre

La combinaison est 47228

Sur les dix combinaisons, le premier chiffre n'est correct qu'une fois.

L'un des quatre autres chiffres (au moins) est donc correctement placé trois fois.

Seuls, le 7 en deuxième position ou le 3 en troisième position sont utilisés trois fois. Etant simultanément présents dans une combinaison, ils ne peuvent être corrects tous les deux.

Un chiffre est donc correctement placé trois fois, trois chiffres correctement placés deux fois, le premier chiffre une fois.

Le deuxième chiffre est soit le 7 (utilisé trois fois) soit le 5 (utilisé deux fois). Mais si c'était le 5, le troisième chiffre serait 3 (restant seul à être utilisé trois fois), ce qui est impossible à cause de la combinaison 45374.

En conséquence, le deuxième chiffre est 7. Du coup, le troisième ne peut être que 2 (utilisé deux fois), le cinquième 8 (car le 7, autre chiffre utilisé deux fois, cohabite avec le 2 de la troisième position), et le quatrième 2 (élimination du 5 à cause de 70558). Il ne reste plus qu'à conclure.

37. Division nationale

Toutes les équipes marquèrent 20 points en plus ou en moins lors des matches retour.
Appelons G le groupe des équipes qui améliorèrent leurs scores, P celui des équipes qui s'effondrèrent. L'une au moins des équipes de G ne fit pas mieux qu'avant la trève contre les autres équipes de G. Cette équipe a donc marqué 20 points de plus contre les équipes de P qui sont donc au moins au nombre de 10.
Par un raisonnement symétrique, on voit que les équipes de G sont aussi au moins au nombre de 10. Il y a donc 10 équipes dans G, 10 équipes dans P.
Chaque équipe de G n'a pu marquer que 20 points de plus qu'à l'aller contre les équipes de P et n'a pu faire moins bien que jeu égal avec les autres équipes de G. C'est donc que toutes les équipes de G ont fait jeu égal entre elles et ont battu les 10 équipes de P qui les avaient battues à l'aller.
Nantes (comme toutes les équipes de G) a donc marqué 20 points de plus qu'à l'aller.

38. Jeux de cubes

Tout réside dans le tableau suivant qui indique le nombre de petits cubes peints (on se restreint à 100 petits cubes) : n est le nombre d'unités de l'arête du grand cube, les lettres A à I désignant la façon de peindre le grand cube.
• **Le premier cube était un cube 5 × 5 × 5 dont trois faces (dont deux opposées) étaient peintes.**
60 est le complément à 125 du nombre écrit dans la case grisée D5.

	Nb de cubes	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
A : 1 face	n^2	4	9	16	**25**	36	49	64	81
B : 2 faces opposées	$2n^2$	8	18	32	50	72	98		
C : 2 faces adjacentes	$2n^2 - n$	6	15	28	45	66	91		
D : 3 faces sans coin	$3n^2 - 2n$	8	21	40	65	96			
E : 3 faces en coin	$3n^2 - 3n + 1$	7	19	37	61	91			
F : 4 faces latérales	$4n^2 - 4n$	8	24	48	80				
G : 4 faces avec coin	$4n^2 - 5n + 2$	8	23	46	77				
H : 5 faces	$5n^2 - 8n + 4$	8	**25**	52	89				
I : 6 faces	$6n^2 - 12n + 8$	8	26	56	98				

• **Le deuxième cube reconstitué était un cube 6 × 6 × 6 dont trois faces en coin étaient peintes.**
En effet, seuls trois nombres prêtent à confusion : 25, 91 et 98 (en gras dans le tableau). Si c'était 25 ou 98, il n'y aurait aucun ou plusieurs cubes à trois faces peintes. C'est donc 91 cubes peints, dont un seul a trois de ses faces peintes, donc la configuration E6.

✉ *François ADRIEN (78, Versailles), Yves ARCHAMBAULT (75, Paris), Jean-Daniel LE FRANC (92, Fontenay-aux-Roses), Michel MENGUAL (75, Paris), Christian ROMON, ont remarqué que l'énoncé originellement posé dans « Le Monde » comportait deux solutions. Nous avons en conséquence modifié le problème pour que la solution soit unique.*

39. 1... 2... 3... Partez !

Montrons l'existence d'un nombre de Marie-José divisible par 2001 :

Si on pose $A_1 = 123$, $A_2 = 123123$, ... $A_n = 123123...123$ où la combinaison 123 intervient n fois, écrivons les restes de la division de A_1, A_2, ... A_{2002} par 2001. Comme il n'y a que 2001 restes possibles, deux d'entre eux, au moins, sont égaux : ceux de A_p et A_q où $q > p$.
Alors la différence $A_q - A_p$ est multiple de 2001.
Cette différence D s'écrit D = 123 123 123 ...123 000 000 000 ... 000
avec $(q-p)$ tranches 123 et $3p$ zéros. On retrouve ainsi le nombre A_{q-p} au début de D, autrement dit $D = A_{q-p} \times 10^{3p}$ est divisible par 2001. Et comme 2001 n'a aucun diviseur commun avec 10^{3p}, 2001 divise A_{q-p}.

⊠ *Jean DUBOC (75, Paris), Jean-Pierre ETIENNE (60, La Morlaye), Claude GEORGE (75, Paris), Jean LUCE (75, Paris), Dominique PASTRE (92, Issy), Christian ROMON, Jacques VERGER (75, Paris), ajoutent que non seulement on peut montrer l'existence de ces nombres, mais qu'on peut les trouver.*

An est multiple de 2001 si et seulement si n est multiple de 308.

La démonstration consiste à écrire A_n sous la forme $3 \times 41 \times \frac{10^{3n}-1}{999}$ et à exprimer qu'il est multiple de $2001 = 3 \times 23 \times 29$.
Un calcul des restes des puissances de 10 dans la division par 23 et 29 permet de conclure.

40. Les lapins farceurs

Ordre d'arrivée : Barnabé, Caligula, Dodu, Aristide, Eustache.

Des affirmations de Caligula et Eustache, on déduit que Dodu est premier ou troisième, selon que le deuxième soit Eustache ou Caligula. Mais alors, Dodu ne peut être deuxième, c'est donc qu'Aristide est quatrième. Dodu ne peut non plus être dernier, c'est donc que Barnabé a gagné. Ce n'est donc pas Dodu, il est troisième, et le classement est reconstitué.

⊠ *Patrick ZULKE (94, Vitry) précise qu'en cas d'ex aequo, la tortue ne pourrait conclure.*

41. la soirée au casino

	coup 1	coup 2	coup 3	coup 4	coup 5
Annette	4				
Brigitte		3		1	
Charlotte	2		2		
Déborah	2	1		1	
Élise	1	1	1		1
TOTAL	9	5	3	2	1

42. Les doublons

l existe deux doublons de 4 :
- **41312432**
- **23421314**

Il n'existe qu'un seul doublon de 5 :
- **3524321514**

43. Le concours truqué

Les coefficients sont 5, 1 et 6.

Pour trouver les coefficients, disons x, y et z, on écrit les inégalités à vérifier pour que Charlotte passe devant Bernard et Bernard devant André :

$3x > 2y + 2z$

$6z > 5y + 6x$

On constate que le plus petit des coefficients sera y.

En essayant avec $y = 1$, la plus petite solution qui apparaît donne $x = 5$ et $z = 6$.

Les solutions avec $y = 2$ ou plus donnent un total de coefficients plus important.

Classement affiché : Charlotte (130), Bernard (129), André (128).

⊠ *Michel MENGUAL (Paris), Christian ROMON (78420 Carrières sur Seine) et Antoine WEHENKEL (Luxembourg) ont envoyé des solutions détaillées. Certains lecteurs ont déploré cet exemple de « discrimination positive ».*

44. De plus en plus fort

Sophie gagnera.

Au deuxième tour, elle ajoutera un kilo pour atteindre 2 kilos.

Quoi que fasse Mathieu au troisième tour, elle complètera au quatrième tour le plateau à 6 kilos.

Quoi que fasse Mathieu au cinquième tour, elle complètera au sixième tour le plateau à 12 kilos.

Elle sera alors en mesure au huitième tour de faire pencher la balance.

⊠ *Christian ROMON s'intéresse aux solutions perdantes héritées d'un adversaire qui, jouant le coup n°l, laisse un plateau de k kilos. Il les désigne tout naturellement par les couples (k, l) et en dresse la liste : (2, 2), (4, 4), (5, 4), (6,3), (6, 4), (9, 8), (9, 9), (10, 7), (10, 8), (11, 6), (11, 7), (12, 5), (12, 6), (13, 5), (20, p) où p ≥ 6. D'après lui, Sophie hérite de (1, 1) qui va lui permettre de gagner en allant à (2, 2) et ainsi de suite jusqu'à ce que, quoique fasse son adversaire, elle gagne en allant à (20, 8).*

45. Fête des mères

Si on désigne par leurs initiales les mots « jazz », « classique », et « rap », la manipulation du vendeur entraîne trois permutations possibles du contenu des paquets :

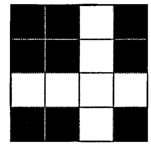
étiquette	C-C	C-J	J-J	J-R
Permutation 1	C-J	C-C	J-R	J-J
Permutation 2	J-J	J-R	C-C	C-J
Permutation 3	J-R	J-J	C-J	C-C

Si Barbara avait ouvert le paquet à l'étiquette J–J, elle ne pouvait conclure entre la permutation 1 ou la 3 en voyant un disque de jazz, entre les permutations 2 et 3 en tombant sur un disque classique. De même, elle ne pouvait conclure en ouvrant le paquet étiqueté J–R. En revanche, en ouvrant le paquet noté C–C, s'il est vrai qu'elle ne pouvait conclure en voyant un disque de jazz, elle l'aurait pu en découvrant un disque classique. Il en était de même en ouvrant le paquet à l'étiquette C–J. De plus, dans les deux cas, sa conclusion aurait été la même : c'est la permutation 1.

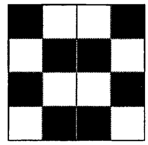
Le vendeur a donc interverti les étiquettes C-C et C-J, ainsi que les étiquettes J-J et J-R.

46. En noir et blanc

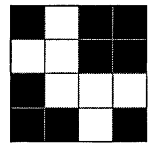
• **On ne peut faire mieux que colorier 9 cases** (ci-contre une des configurations possibles) dans le cas où trois cases consécutives ne peuvent être noires.



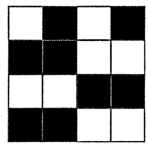
• **On ne peut faire mieux que colorier 8 cases** (ci-contre une des configurations possibles) dans le cas où trois cases consécutives ne peuvent être de la même couleur.



⊠ *Christian ROMON donne quelques solutions complémentaires comme celle-ci dans le cas général :*



Celle-ci encore dans le cas particulier où trois cases consécutives ne peuvent pas être de la même couleur :



47. Porcelaine de limoges

Le nombre minimum d'assiettes emportées par le restaurateurs est 403 (dans la configuration de piles 398-399-400-401-403).

Dans le cas général, on appelle A le nombre d'assiettes et P le nombre de piles.
Le minimum de la pile la plus haute est alors le quotient entier de la division par P du nombre A + 2 pour 2 piles, A + 5 pour 3 piles, A + 9 pour 4 piles, A + 14 pour 5 piles, ...,

$A + \frac{(P+2)(P-1)}{2}$ pour P piles.

48. Gratte-ciel

	2	2			
	20	30	40	10	2
1	40	10	30	20	3
2	30	20	10	40	1
2	10	40	20	30	
			3		

49. Chassez les diviseurs

Le premier joueur l'emportera si N est un nombre impair.

Sa stratégie consistera alors à toujours annoncer un nombre impair. En effet, les nombres impairs n'ayant que des diviseurs impairs, le deuxième joueur sera contraint d'annoncer un nombre pair.
Il sera toujours possible au premier joueur d'en ôter un diviseur impair (1 au besoin) pour annoncer un nombre impair.

⊠ *Christian ROMON raisonne ici encore en termes de positions gagnantes (paires) et perdantes (impaires).*

50. Les hexaminos

• On ne peut pas recouvrir une grille 8 × 9 à l'aide d'hexaminos 6 × 1.

Une solution consiste à numéroter les cases de la grille avec les chiffres de 1 à 6 se suivant dans les deux directions suivant le même cycle, comme dans le schéma ci-contre.

1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2	3	4	5
4	5	6	1	2	3	4	5	6
5	6	1	2	3	4	5	6	1
6	1	2	3	4	5	6	1	2
1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4

Ainsi, un hexamino posé sur la grille recouvrira-t-il forcément six cases portant des numéros différents. Un éventuel pavage recouvrirait alors 12 cases 1, 12 cases 2, …, 12 cases 6.
Or, il n'y a que 11 cases 5 et 6 et 13 cases portant les numéros 2 et 3.

• En s'appuyant sur ce raisonnement, on constate qu'on ne peut paver à l'aide d'hexaminos 6 × 1 que les grilles dont une des dimensions est un multiple de 6.

⊠ *Christian ROMON envisage, de façon très pratique, l'impossibilité d'un pavage de la grille 8 × 9 par des hexaminos 6 × 1 en créant une disposition obligatoire des pavés. Pour la généralisation, il montre de même l'impossibilité du pavage d'un rectangle 2p × 3q où q est impair et p non multiple de 3, retrouvant ainsi que le pavage n'est possible que si l'une des dimensions au moins est multiple de 6.*

51. Les dix étiquettes

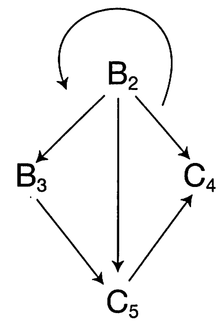
Les paires coûtent, par ordre croissant : 1,5 ; 3,5 ; 4,5 ; 5,5 €.
On commence par montrer que la somme des prix est 19,5 € (le quart de la somme des étiquettes), puis on trouve le prix de la paire de prix moyen (4,5 €) en ôtant de 19,5 l'étiquette la plus chère et l'étiquette la moins chère. Grâce au deuxième prix le plus élevé et au deuxième prix le plus bas, on trouve le prix des paires les plus chères et les moins chères. On complète grâce aux étiquettes extrêmes.

⊠ *Même si certains lecteurs se sont fourvoyés en imaginant à tort que les prix devaient être entiers ou que des chaussettes de qualité différente ne pouvaient pas être au même prix, d'autres ont imaginé des solutions astucieuses. Michel MENGUAL (Paris) fait remarquer que le problème peut être résolu sans les données 6, 7 et 8. Jean-Yves NAU (17000 La Rochelle) utilise un classement des prix par paires pour résoudre rapidement le problème.*

52. Le tournoi

Diane a battu Alex et Babette.
Alex a battu Babette et Claude.
Claude a battu Diane.
Babette a battu Claude.

Classement final : Diane (5 points), Alex (4 points), Claude (3 points), Babette (2 points).



⊠ *On peut faciliter la recherche de la solution en classant, comme Christian ROMON, les joueurs en trois catégories :*
- A, ceux qui ont perdu leurs trois matches,
- B, ceux qui en ont perdu deux et gagné un,
- C, ceux qui en ont perdu un et gagné deux.
L'absence d'ex-aequo implique comme seules possibilités CCCA (6 = 2 +2 +2 + 0), cas à éliminer, et CCBB (6 = 2 +2 +1 +1), avec nécessairement un joueur B à 2 points (B2) et un B à 3 points (B_3), puis un C à 4 points (C_4) et un autre à 5 points (C_5), d'où le graphe de la relation « x gagne contre y » : C'est donc Diane le joueur C_5, Alex le C_4, Claude le B_3, Babette le B_2.

53. Pile ou face

C'est Babette qui avait le moins de chances de remporter le magot.

Dans le cas d'un nombre impair de jets, la probabilité d'obtenir davantage de «face» que de «pile» est un demi.

Cette probabilité est diminuée par la possibilité d'égalité, qui existe en cas de nombre pair de jets, et est d'autant plus grande que le nombre de jets est petit.

⊠ *Nos lecteurs ont ici rivalisé de précision en donnant les formules exactes de la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles, $\frac{1}{2}$ dans le cas d'un nombre impair de lancers, $\frac{1}{2} - \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}+1}$ dans le cas d'un nombre pair (2n) de lancers (C_x^p désigne le nombre de com binaisons de p éléments pris parmi n). Ainsi, pour 9, 12 et 14 lancers, trouve-t-on respectivement des probabilités de 0,5 ; 0, 387 et 0, 395. Paul BETOUT (Paris) précise même en utilisant la formule de Stirling, cette probabilité varie comme $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses) signale une sorte de paradoxe : la chance de gagner en jouant 14 fois est plus faible que celle d'un joueur qui ne lancerait les dés que 13 fois...*

54. Élections dans l'archipel

Il y aura égalité parfaite entre les deux candidats.

En effet, s'il y avait moins de 1001 Dufaux, par exemple 500, les affirmations des habitants 501 à 2002 seraient fausses, ce qui entraîne l'existence de plus de 500 Dufaux.

S'il y en avait plus de 1001, par exemple 1500, les affirmations des 1500 premiers habitants seraient vraies, ce qui contredit l'existence de 1500 Dufaux.

En définitive, il ne peut y avoir que 1001 Duvrai (les habitants 1 à 1001) et 1001 Dufaux (les habitants 1002 à 2002). Gare au réveil qui ne sonne pas le jour du scrutin !

55. La zone américo

En frappant 7 pièces marquées 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 Américos, on est certain qu'avec un jeu de pièces, on ne pourra pas obtenir une même somme de deux façons différentes.

En frappant 10 pièces, c'est impossible, quel que soit le choix de ces dix pièces.

En effet, il y a $2^{10} = 1024$ façons de choisir une «poignée» de ces dix pièces. Or les sommes qu'on peut obtenir ne dépassent pas 1000 Américos. C'est donc qu'il existe deux sous-ensembles de ces dix pièces de même total. Si ces sous-ensembles ont des pièces en commun, on les élimine, ce qui nous mène à deux groupes distincts de pièces de même total.

Quant à ce qui se passe quand on frappe huit ou neuf pièces, nous faisons appel aux lecteurs pour nous éclairer.

⊠ *La question concernant 8 ou 9 pièces n'est pas restée longtemps en suspens, et l'appel lancé aux lecteurs a été entendu. Laurent ROSAZ (Paris) prouvent qu'il existe une solution pour 8 pièces, mais pas pour 9. Il raisonne sur le nombre de « trous », ainsi nomme-t-il les nombres qui n'apparaissent pas comme sommes partielles. Il en trouve plus de 108 inférieurs à 300 et montre qu'il existe au moins 30 sommes de trois frappes de monnaie entre 275 et 297, intervalle qui ne contient que 23 valeurs, d'où la conclusion : il n'existe pas 9 entiers inférieurs ou égaux à 100 sans qu'ils contiennent au moins deux sous-ensembles de même somme. Il* *exhibe, comme Daniel et Jean-Pierre KIEKEN (56230 Larré), une solution à 8 pièces : 100, 99, 98, 96, 93, 87, 76, 56 en signalant d'ailleurs que 54 peut remplacer 56.*

56. La loterie

Vous choisirez le total 14 qui offre la meilleure probabilité de gagner.
Cette probabilité se monte à 7/90, soit environ 7,77 %.
En effet, avec un total 14 :
le nombre de billets gagnants commençant par 1 est 6 (la dizaine varie de 4 à 9).
le nombre de billets gagnants commençant par 2 est 7 (la dizaine varie de 3 à 9).
Puis 8, puis 9, puis 10 (billets commençant par 5), puis on redescend à 9, 8, ... jusqu'à 6 pour les billets commençant par 9. En tout : 70 billets gagnants pour 900 possibles.
On n'atteint pas ce nombre pour les autres totaux.

⌧ *Bonnes solutions de Antoine WEHENKEL (Luxembourg) et Christian ROMON. Ce dernier précise également que, pour n compris entre 1 et 9 il existe* $\frac{n(n+1)}{2}$ *façons de décomposer n en somme ordonnée de trois chiffres, le premier n'étant pas nul. Pour n supérieur à 9, ce nombre devient* $-n^2 + 28n - 126$, *maximal pour* $n = 14$.

57. Le tableau effacé

95617181920
De 1 à 20, on a écrit 31 chiffres. On en efface 20, il en reste 11. Le seul « 9 » utile est le premier, celui de 19 arrivera trop tard. Le premier des 10 chiffres restants ne peut être que le 5 de 15 (les chiffres plus grands arrivent trop tard). La fin est imposée, une fois effacé le 1 de 16 : 6 17 18 19 20.

58. Quel désordre !

Il lui suffira d'ouvrir deux boîtes.
Les trois étagères portent forcément les indications « BB », « MM » et « BM ». En effet, si elles portaient toutes les trois les indications « BM », les trois indications ne pourraient être fausses en même temps.
• La mère d'Alban ouvre d'abord une boîte de l'étagère marquée « BM » (qui est en réalité « BB » ou « MM ») et connaîtra donc le contenu de ces deux boîtes (supposons par exemple que ce soient deux boîtes de baskets).
• Il lui suffit alors d'ouvrir une seule boîte de l'étagère marquée « MM » (qui ne peut contenir qu'une paire de baskets et une paire de mocassins). Elle saura alors ce que contiennent toutes les boîtes, puisque la dernière étagère, marquée « BB » ne peut contenir que deux boîtes de mocassins.

59. Rendez à César !

⌧ *Guy CHATY préconise pour résoudre le problème de construire le graphe de la relation « a le bonnet de ».*

	a le bonnet de	a la planche de
Aline	Domitien	Basile
Basile	Aline	Coralie
Coralie	Basile	Domitien
Domitien	Coralie	Aline

60. Huit nombres à placer

Il y a quatre solutions, symétriques les unes des autres.

L'idée pour y parvenir consiste à remarquer que les deux cases centrales sont voisines de toutes les cases sauf une. On ne peut donc y placer que 1 et 8, les seuls nombres qui ne possèdent qu'un « voisin ».

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

	4	6	
7	1	8	2
	3	5	

	5	3	
2	8	1	7
	6	4	

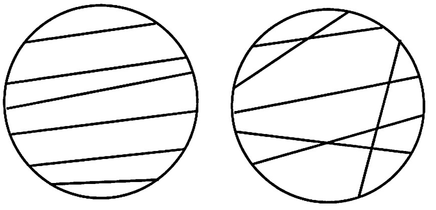
	6	4	
2	8	1	7
	5	3	

Figures libres

Chapitre 2

61. Le partage du gâteau

Problème n°4 du 11-02-97



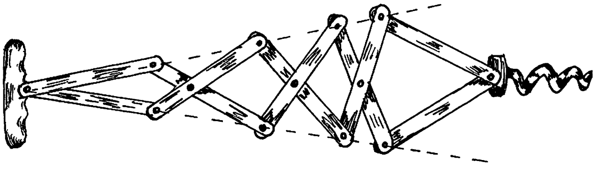
Avec six coupes rectilignes verticales dans une tarte circulaire, on peut, sans considération d'équité, faire 7 parts, 12 parts…

Mais toujours avec six coups de couteau, sauriez-vous découper exactement 20 parts ?
Quel nombre maximum de portions peut-on obtenir en six coupes rectilignes dans cette tarte ?

Il n'est pas permis de déplacer les parts entre les découpes.

62. Le tire-bouchon

Problème n°9 du 18-03-97

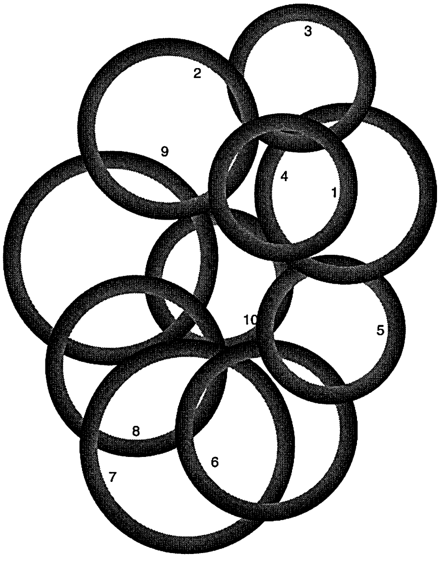


Un tire-bouchon est constitué de dix tiges métalliques de même longueur, articulées comme sur le dessin, en respectant les alignements indiqués.

Quel est l'angle que forment les tiges partant de la poignée, lorsque celles arrivant à la vrille font entre elles 60° ?

63. Mik'anneaux

Problème n°14 du 22-04-97



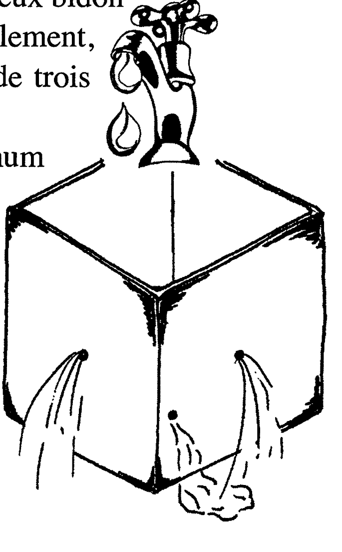
Tous ces anneaux peuvent être enlevés l'un après l'autre, sans toucher aux autres.

Dans quel ordre ?

64. Un problème de robinet !

Problème n°19 du 27-05-97

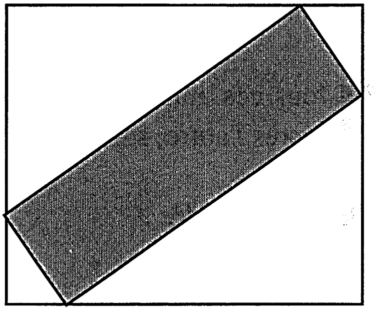
Le robinet fuit, à raison d'un litre et demi par 24 heures. En attendant le plombier, vous placez sous la fuite ce vieux bidon en métal, cube de 30 cm d'arête, ouvert sur le dessus. Seulement, voilà, la rouille y a fait exactement trois trous, au centre de trois faces, le fond et deux parois contigües.
Vous inclinez le récipient de manière à recueillir le maximum d'eau et oubliez l'incident (vous oubliez de vider la boîte).



Dans quel délai le plombier doit-il arriver pour vous éviter l'inondation ?

65. Mise en boîte

Problème n°24 du 01-07-97

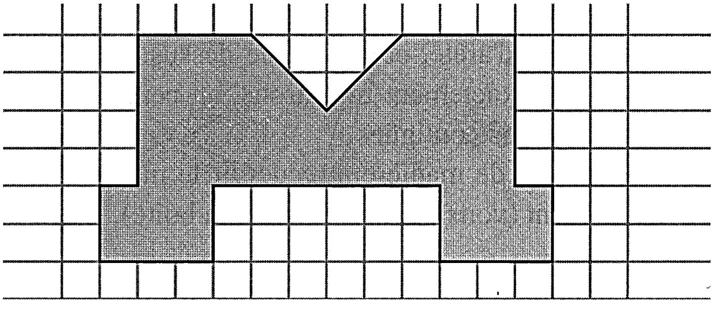


Un objet en forme de pavé droit (parallélépipède rectangle) ayant pour base un carré de 68 cm de côté est vendu conditionné dans une boîte dont il épouse la forme (la base est également un carré de 68 cm de côté), l'espace restant en haut étant rempli de copeaux synthétiques.
En l'insérant dans sa boîte, un manutentionnaire maladroit coïnce l'objet en position inclinée entre les parois de la boîte. Fort heureusement, la boîte ferme quand même, l'arête supérieure affleurant le couvercle.

Quelle est la hauteur de l'objet dans le cas où la boîte est cubique (68 cm de haut) ? Pour ceux qui aiment les calculs, même question quand la boîte n'a que 47 cm de haut.

66. Id'M

Problème n°29 du 105-08-97



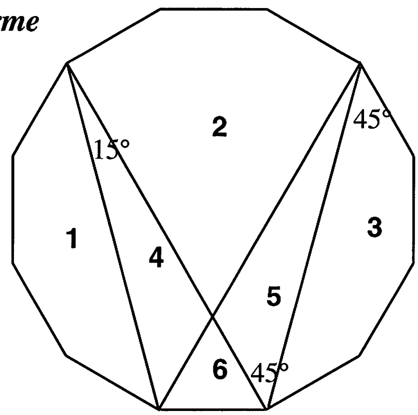
Comment découper cet « M » en six morceaux, tous identiques, à un retournement près ?

67. Dodécagone ou carré ?

Problème n°34 du 09-09-97

Réarrangez les six morceaux de ce puzzle en forme de dodécagone régulier pour en faire un carré .

Pour vous aider, les valeurs de trois des angles vous sont indiquées.

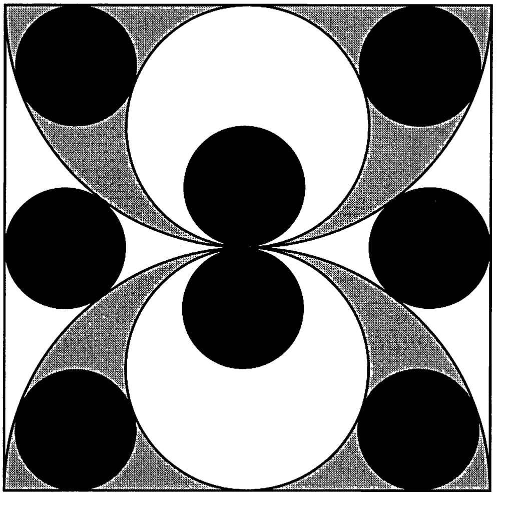


68. Le tapis brodé

Problème n°39 du 14-10-97

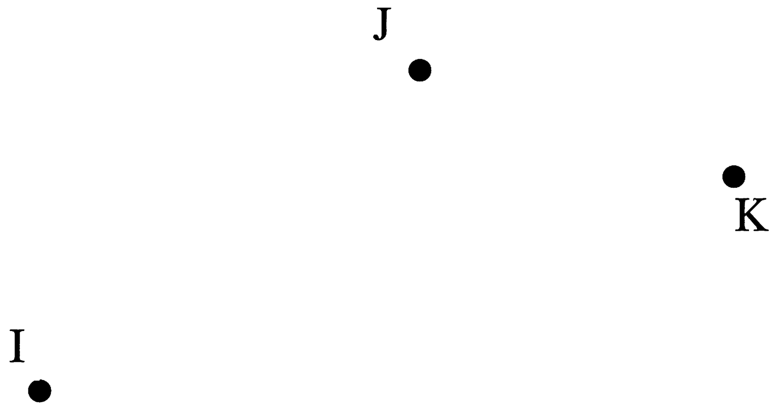
Vous avez rapporté de voyage ce tapis brodé de forme carrée. Les petits cercles noirs semblent avoir à peu près la même taille.

Sont-ils rigoureusement identiques ?



69. Les survivants du milieu

Problème n°44 du 18-11-97



De ce triangle ABC, seuls ont survécu I, milieu de AB, J, milieu de BC, et K, milieu de CA.

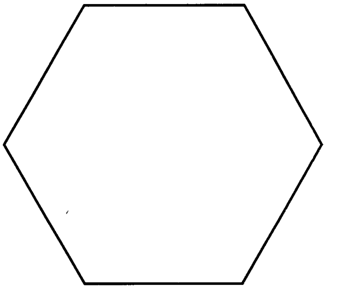
Reconstituez le triangle ABC.

Plus délicat : ***sauriez-vous reconstituer un pentagone ABCDE à partir des milieux I, J, K, L et M de ses côtés ?***
Question piège : ***et un quadrilatère ABCD à partir des milieux I, J, K, L de ses côtés ?***

70. Les partages de l'hexagone

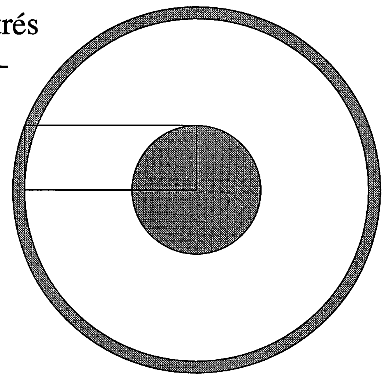
Problème n°49 du 23-12-97

De combien de façons peut-on partager cet hexagone en triangles par des diagonales qui ne se coupent pas ? Généralisez au partage en triangles d'un polygone convexe de 7 côtés.



71. Les anneaux concentriques

Problème n°53 du 20-01-98



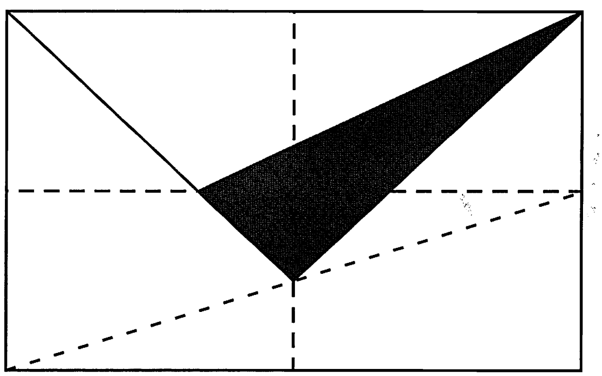
Partez d'un rectangle. Tracez les trois cercles centrés en un des sommets du rectangle et passant par chacun des trois autres sommets.
Coloriez en gris l'anneau extérieur ainsi que le cercle intérieur.

Laquelle des deux zones grisées possède l'aire la plus grande ?

72. Art abstrait

Problème n°58 du 24-02-98

Cette œuvre d'art moderne n'est faite que d'une grande enveloppe rectangulaire divisée en quatre, complétée par quelques tracés géométriques rectilignes et par une plage sombre, construite comme indiqué sur le dessin.

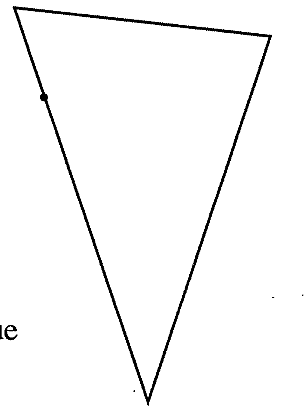


Sauriez-vous évaluer mentalement, en n'utilisant que des considérations simples, quelle fraction de l'aire de l'enveloppe la plage sombre représente ?

73. Le fanion du club

Problème n°63 du 31-03-98

Le club de *la Balance* est passionné de justice. Tout y est placé sous le signe de l'équilibre, jusqu'à la conception du fanion qui décore la tribune lors de chacun des rassemblements.
Ce fanion a la forme d'un triangle découpé en deux parties, évidemment de même aire, l'une noire et l'autre blanche, par une frontière rectiligne.
Le dessin vous indique l'un des points de cette frontière, situé sur le bord du triangle, mais plus près du sommet que de la pointe basse.



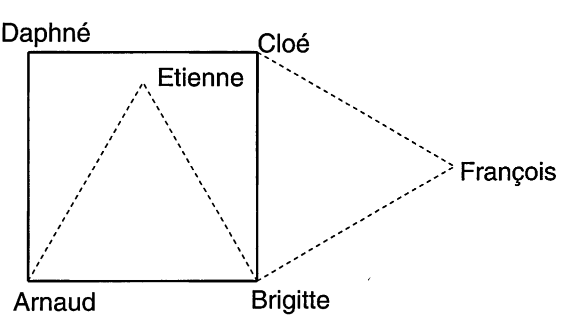
Sauriez-vous , avec des considérations simples de géométrie, reconstituer la décoration du fanion ?

74. Le champ de vision

Problème n°69 du 12-05-98

Arnaud, Brigitte, Cloé et Daphné sont aux sommets d'un carré du 20 mètres de côté. Le grand et gros Etienne se tient à 20 mètres d'Arnaud comme de Brigitte, tandis que François est à 20 mètres de Brigitte comme de Cloé, du côté indiqué par le dessin.

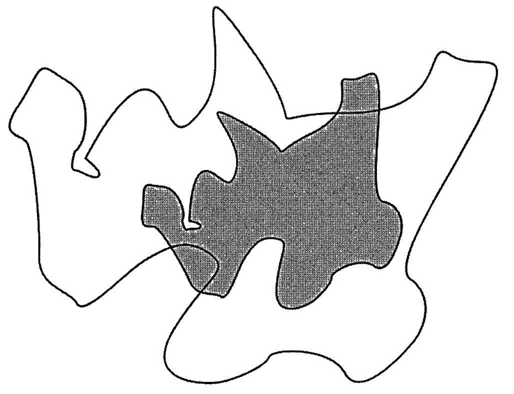
François voit-il Daphné ?



75. L'archipel des échelles

Problème n°74 du 16-06-98

L'île de la Réduction, dans l'Archipel des échelles, a une forme très découpée. Deux cartographes ont réussi à en établir des représentations exactes qu'ils ont reproduites sur du papier calque, mais à des échelles différentes.
Tandis qu'ils discutent des méthodes que chacun a utilisées pour obtenir sa carte, ils laissent traîner leurs calques qui se superposent comme sur le dessin.

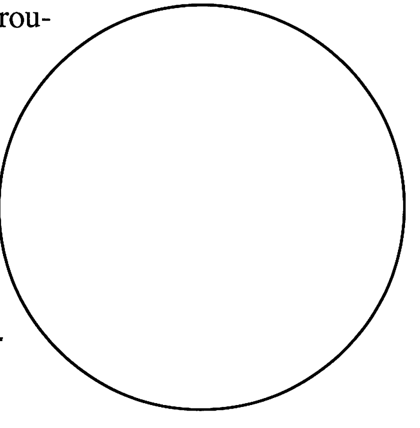


Existe-t-il un point de l'île dont les représentations sur les deux cartes coïncident ? Si oui, lequel ?

76. Le centre perdu

Problème n°79 du 21-07-98

Napoléon Bonaparte est censé avoir découvert comment, à l'aide exclusive d'un compas, on pouvait retrouver le centre perdu d'un cercle tracé sur un plan.



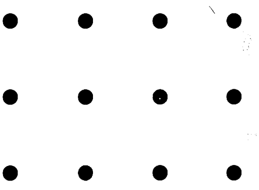
Sauriez-vous parvenir au même résultat avec, pour tout instrument, une règle non graduée dont les deux bords sont parallèles et dont la largeur est inférieure au diamètre du cercle ?

Et si la largeur de la règle est supérieure au diamètre ?

77. Les douze points

Problème n°84 du 25-08-98

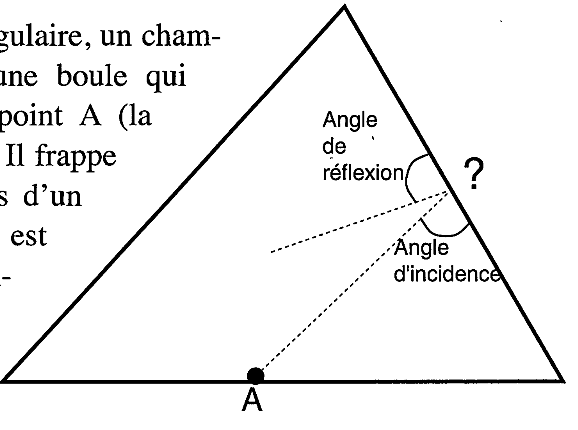
Construisez, sans lever le crayon de la feuille de papier, une ligne continue formée de cinq segments de droite, passant par les douze points de la figure, et fermée, c'est-à-dire qui se termine par le point de départ.



78. Le billard triangulaire

Problème n°89 du 29-09-98

Sur un billard de forme triangulaire, un champion s'apprête à frapper une boule qui «colle» à l'un des bords au point A (la boule est assimilée à un point). Il frappe sans effet, c'est-à-dire que lors d'un rebond, l'angle de réflexion est exactement égal à l'angle d'incidence (comme dans le cas du reflet d'un rayon lumineux sur un miroir).



Quel point le champion doit-il viser pour que la boule revienne exactement à son point de départ après deux «bandes» (deux rebonds) ?

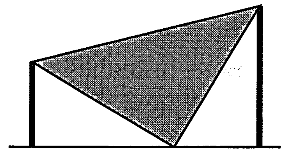
Pour les champions… de maths : ***comment choisir le point A pour que la boule repasse au point A après deux bandes, puis une autre fois au bout de cinq bandes après avoir suivi intégralement la même trajectoire ?***

79. La banderole

Problème n°94 du 03-11-98

Pour la fête annuelle du club, le comité d'organisation a décidé d'ériger à l'entrée une magnifique banderole de bienvenue.

Elle a la forme d'un triangle rectangle isocèle et les mâts qui la soutiennent mesurent 1,50 m et 2,50 m de haut. Une fois tendue, la banderole ne touche le sol qu'en sa pointe (comme sur le dessin).



De quelle distance les mâts sont-ils écartés ?

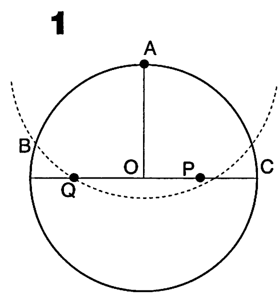
Si maintenant on voulait que la banderole ait la forme d'un triangle équilatéral, et, que tendue entre les deux mêmes mâts, elle ne touche toujours le sol qu'en sa pointe, ***quelle devraient être ses dimensions et l'écartement des mâts ?***

80. Le bon et le mauvais tracé

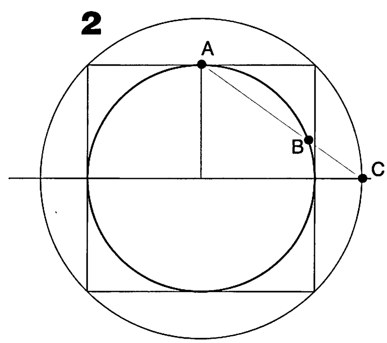
Problème n°99 du 8-12-98

Voici deux façons de tracer un côté de pentagone inscrit dans un cercle. Elles semblent toutes deux permettre la construction d'un pentagone régulier. Pourtant, une seule de ces deux constructions est exacte.

Laquelle ? Expliquez pourquoi l'autre n'est qu'une construction approchée du pentagone régulier.



P est le milieu du rayon horizontal OC. Q est tracé sur le diamètre horizontal tel que PQ = PA. B, sur le cercle, vérifie AB = AQ AB est le côté cherché

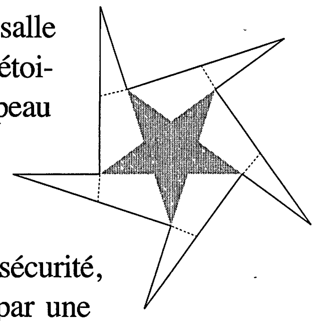


La figure parle d'elle-même. Le côté cherché est AB

81. Un musée bien gardé

Problème n°106 du 12/01/1999

Voici le projet de Musée Européen d'Art Moderne que vient de concevoir un architecte célèbre. Le sol de l'immense salle des pas perdus en forme de pentagone régulier est pavé d'une étoile à cinq branches qui n'est pas sans rappeler celles du drapeau européen. C'est sur les dix murs – dont cinq sont dans le prolongement des côtés de l'étoile et les cinq autres perpendiculaires à ces côtés – qu'on accrochera les tableaux de valeur qu'il est essentiel de surveiller. Le responsable de la sécurité, perturbé par la profondeur des ailes auxquelles on accède par une porte vitrée (en pointillé), est donc amené à se poser des questions.



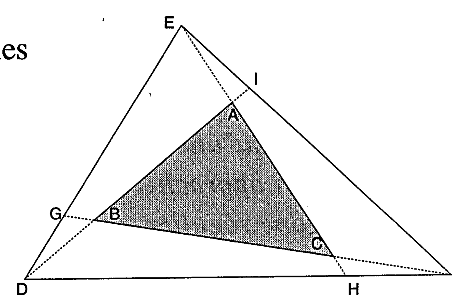
Quels sont les points d'où l'on ne peut surveiller aucun mur en entier ?
Combien de caméras au minimum faudra-t-il installer et où faudra-t-il les placer pour que pas un pouce carré de mur n'échappe à leurs champs de vision réunis ? (On supposera qu'elles sont munies d'un moteur leur permettant de pivoter sur un axe et de balayer toutes les directions)

82. Le grand triangle

Problème n°109 du 16/02/1999

On prolonge les trois côtés d'un triangle ABC d'une longueur égale à la moitié du côté prolongé (comme sur le dessin) pour former un grand triangle DEF.
Quel est le rapport de l'aire du grand triangle ainsi construit sur celle du petit ?

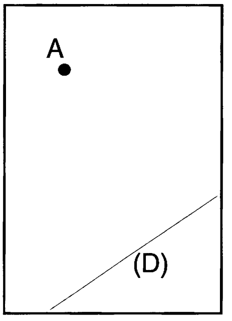
Les 3 côtés prolongés du petit triangle recoupent les côtés du grand triangle en 3 point G, H et I.
Dans quel rapport ces points divisent-ils le côté qu'ils coupent ? (par exemple, dans quel rapport G divise-t-il DE ?)



83. Pli parallèle

Problème n°114 du 30/03/1999

Sur cette feuille de papier, on a marqué un point A et une droite (D).



Comment, uniquement par pliage de cette feuille, créer une parallèle à la droite (D) passant par le point A ?

84. Retour dans l'archipel

Problème n°119 du 04/05/1999

Deux cartographes s'intéressent à l'Archipel des échelles. Après avoir étudié l'île de la Réduction, les voilà qui établissent la carte de l'île du Pentagone, beaucoup plus simple à représenter, puisqu'elle a la forme d'un pentagone convexe*.

Fidèle à une technique maintenant éprouvée; chacun des deux scientifiques reproduit une carte de l'île sur du papier calque. Ils laissent traîner leurs reproductions, qui ne sont pas à la même échelle (la petite est une réduction à 75% de l'autre), sur une table, l'une sur l'autre.

Chose extraordinaire, quatre des côtés de la plus petite des deux cartes sont placés exactement le long de quatre côtés de l'autre.

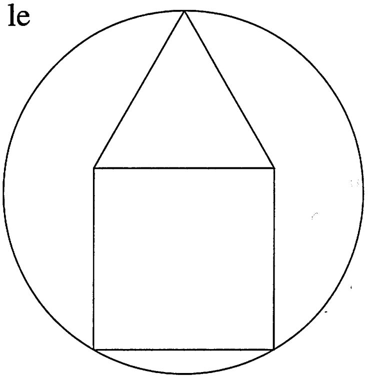
Trouvez une représentation possible de l'île du Pentagone.

* Si un polygone est convexe, on ne peut en sortir quand on joint deux de ses points.

85. Le cercle de la félicité

Problème n°124 du 08/06/1999

Lorsque vous descendez à l'hôtel Sangaku, dans le Japon profond, on vous donne un dépliant sur lequel l'hôtel est stylisé sous la forme d'un carré de 5 cm d'arête surmonté d'un triangle équilatéral. L'ensemble est entouré d'un cercle, qui symbolise la félicité.

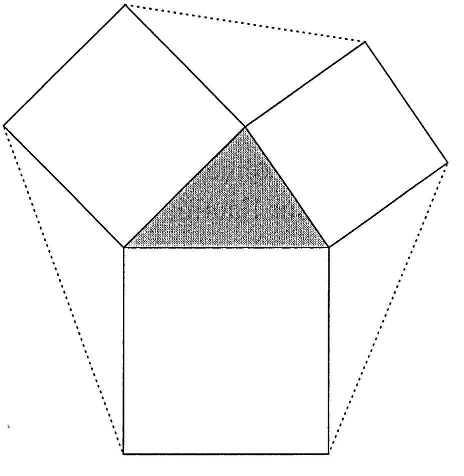


Quel est le rayon du cercle de la félicité ?

86. La coiffe alsacienne

Problème n°129 du 13/07/1999

Prenez un triangle quelconque (en gris) et tracez à l'extérieur les trois carrés construits à partir des trois côtés du triangle. Vous obtenez une coiffe alsacienne. En joignant les extrémités libres des carrés à l'aide de pointillés, vous matérialisez trois nouveaux triangles.

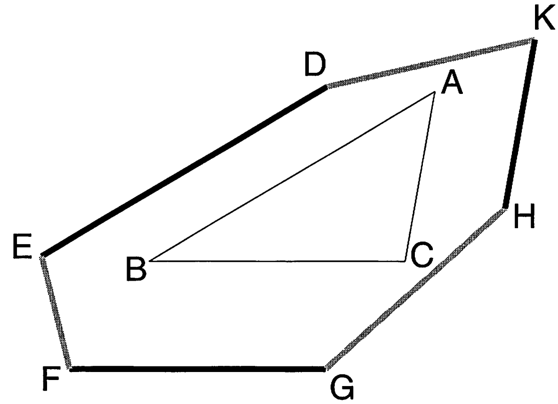


Comparez l'aire de chacun de ces trois triangles à celle du triangle gris.

87. Le deuxième triangle

Problème n°134 du 17/08/1999

Sur les côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC, on pose trois tiges rigides noires. On translate alors de manière indépendante chacune de ces trois tiges : les tiges restent parallèles à elles-mêmes et se placent en DE, FG et HK (figure).
On pose alors trois nouvelles tiges, grises celles-là, le long des côtés EF, GH et KD.



Peut-on toujours, en translatant convenablement les trois tiges grises (parallèlement à elles-mêmes), former un nouveau triangle ?

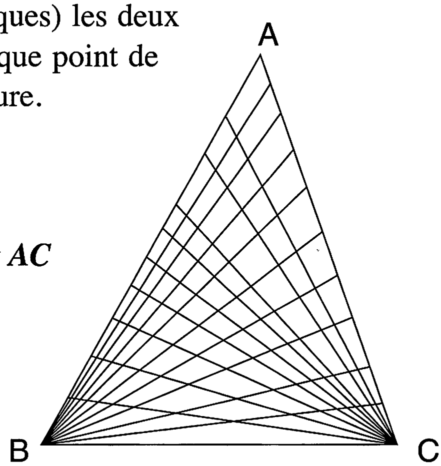
88. Les mailles du filet

Problème n°139 du 21/09/1999

On divise en 10 parties (pas forcément identiques) les deux côtés obliques de ce triangle et on joint chaque point de subdivision au sommet opposé, comme sur la figure.

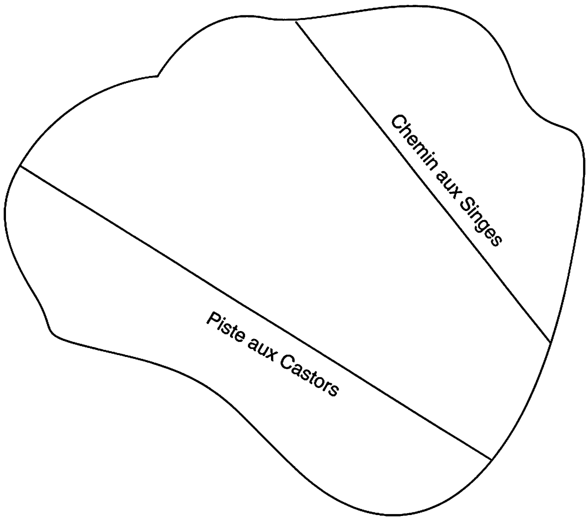
Combien de triangles sont tracés sur la figure ?

Généraliser lorsque AB est divisé en p parties et AC en n.



89. L'île au trésor

Problème n°148 du 30/11/1999



Lu dans un vieux parchemin retrouvé sur une île déserte : « Gontrand et moi-même sommes les seuls rescapés du naufrage. Nous avons pu sauver le trésor. Nous l'avons enterré exactement au milieu de la Trouée des Hérissons, un sentier rectiligne qui conduit de ma tente vers celle de Gontrand. Nous avons en effet établi nos bivouacs séparément, Gontrand sur le Chemin aux Singes, et moi sur la Piste aux Castors. »

Malheureusement, la seule carte qui subsiste aujourd'hui est celle représentée ci-dessus. On y voit le Chemin aux Singes et la Piste aux Castors. En revanche, la Trouée des Hérissons n'y figure pas, et la nature a envahi tous les chemins qui existaient à l'époque.

Représentez sur la carte la zone où vous chercheriez le trésor.

90. La truffe du père Igor

Problème n°152 du 28/12/1999

On accourt des quatre coins du monde pour goûter à la spécialité de l'auberge du Père Igor, la truffe blanche au caviar.
Ce qui fait l'originalité de cette truffe, c'est d'abord sa forme : elle constitue un cube parfait de 3 cm d'arête. C'est ensuite sa préparation : le chef découpe de très fines lamelles perpendiculairement à une diagonale, il les place artistement dans l'assiette, puis il borde ces lamelles d'un ruban continu de perles de caviar. Il peut ainsi servir. Les plus petites tranches, celles qui sont près des coins, sont servies dans le « menu du terroir ». Mais dès qu'on s'éloigne suffisamment des angles, les lamelles changent de forme. Celles-là sont servies « à la carte ».

Quelle est la forme des différentes tranches ?

Le père Igor est un homme d'affaire avisé. Il sait combien lui coûte un centimètre de ruban de caviar. Néanmoins, bien que les aires des lamelles servies « à la carte » ne soient pas égales, il a l'impression que la quantité de caviar nécessaire pour chaque tranche ne varie pas.

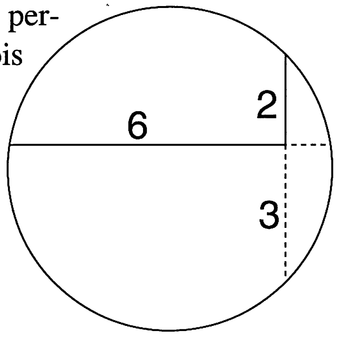
Est-ce vrai ?

91. Les deux cordes

Problème n°154 du 11/01/2000

La figure ci-dessus représente un cercle, deux cordes perpendiculaires et les longueurs, en centimètres, de trois des segments qu'elles forment en se coupant.

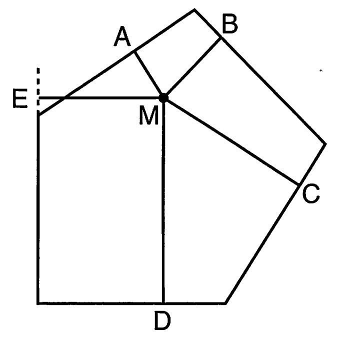
Quel est précisément le rayon du cercle ?



92. Invariant pentagonal

Problème n°159 du 15/02/2000

Le pentagone convexe ci-dessus a ses cinq côtés égaux (leur longueur est un même nombre a.
à un point M intérieur au pentagone, on associe :
MA + MB + MC + MD + ME,
somme des distances de M aux cinq côtés du pentagone (ou à leurs prolongements).



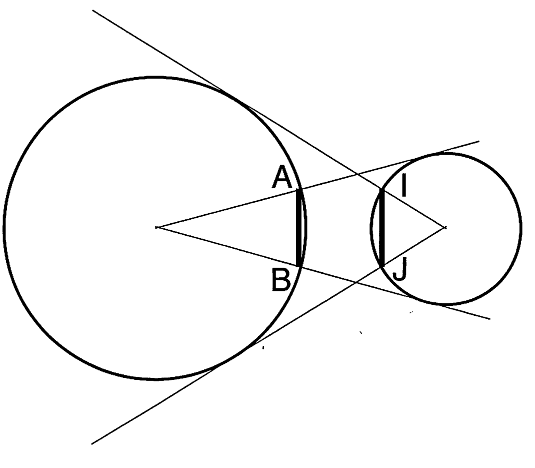
Sauriez-vous expliquer pourquoi cette valeur ne dépend pas du choix du point M ?

La propriété est-elle conservée si le pentagone a cinq angles égaux sans que les côtés le soient ?

93. Des sous ! Des sous !

Problème n°164 du 21/03/2000

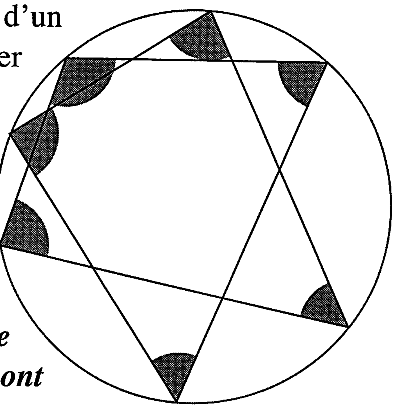
Placez sur un papier une pièce de 5 francs et, un peu plus loin, une pièce de 10 centimes.
Menez du centre de la grande pièce deux tangentes à la petite, et du centre de la petite deux tangentes à la grande, comme sur le dessin.



Il semblerait que les longueurs des segments verticaux AB et IJ soient égales. Est-ce vrai ?

94. Les polygones étoilés

Problème n°171 du 16/05/2000



On place sept points sur la circonférence d'un cercle. On les joint de deux en deux : le premier au troisième, le troisième au cinquième, ..., jusqu'à retomber sur le premier point.
On obtient un heptagone étoilé.

Quelle est la somme de ses angles (en grisé) ?

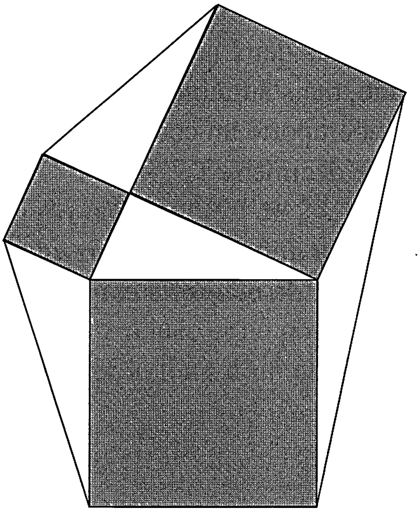
Plus généralement, sauriez-vous trouver la somme des angles d'un polygone étoilé de n sommets qui sont joints de p en p ?

95. Remembrement

Problème n°174 du 06/06/2000

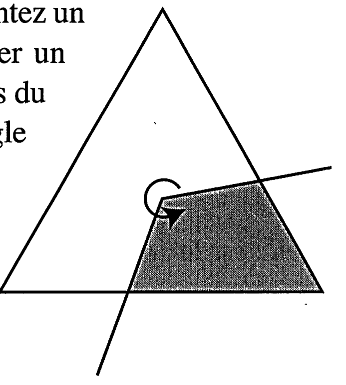
De combien de façons peut-on diviser ce terrain en deux terrains d'un seul tenant et d'aires égales en suivant les lignes tracées sur le plan ?

On précise que les trois quadrilatères en gris sont des carrés.



96. Bricolage

Problème n°179 du 11/07/2000



Découpez un triangle équilatéral de 10 cm de côté. Plantez un clou en son centre, autour duquel vous ferez pivoter un angle de 120° que vous aurez préalablement découpé dans du papier calque. L'angle recouvre une partie du triangle (représentée ci-dessus en grisé).

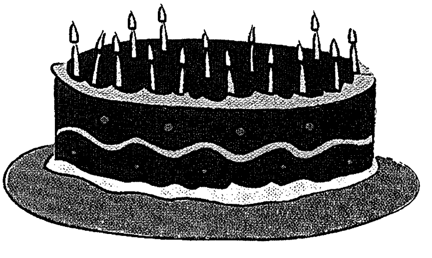
Quel est, quand le papier calque pivote, le maximum et le minimum de l'aire commune ainsi définie ?

97. Pique-nique d'anniversaire

Problème n°184 du 15/08/2000

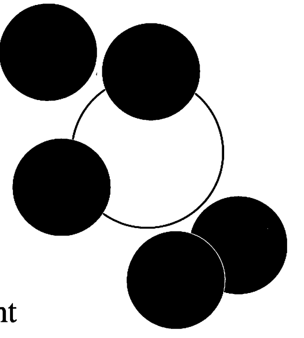
Antony et Fabien sont jumeaux.
Pour leur anniversaire, ils ont organisé un pique-nique au cours duquel ils se partageront un magnifique gâteau carré de 20 cm de côté.
Aucun des deux ne supporterait que l'autre s'approprie une part plus grande que la sienne, mais au moment d'effectuer le partage, catastrophe !
Ils ont emporté un couteau dont la lame ne mesure que 17 cm, et ne disposent pas de double décimètre !

Comment doivent-ils s'y prendre pour réaliser un partage équitable en un nombre minimum de coups de couteau ?



98. La fête foraine

Problème n°189 du 19/09/2000



Dans le jardin des Tuileries, la fête foraine bat son plein. Cette année, nous y avons découvert une bien curieuse attraction.
Sur une table, est dessiné un grand disque blanc de 50 cm de diamètre. À proximité, cinq disques noirs identiques en caoutchouc mince sont proposés aux badauds, moyennant la bagatelle de 10 francs. L'objectif consiste tout simplement à recouvrir complètement le disque blanc à l'aide des cinq disques noirs, en les plaçant successivement sur la table. La superposition de disque noirs est permise, et même conseillée !
Si la moindre parcelle de disque blanc reste visible, on a perdu 10 francs. Dans le cas contraire, on gagne un téléviseur. Pour montrer que l'opération est possible, le forain l'exécute devant vous. Pourtant, la plupart des candidats s'y cassent les dents. C'est que le diamètre des disques noirs a été choisi avec précision !

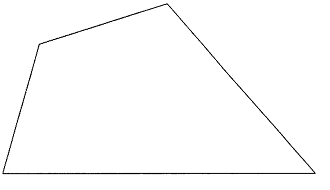
Quel est le diamètre minimum des disques noirs permettant de réaliser le recouvrement ?

99. Mise en plis réductrice

Problème n°194 du 24/10/2000

Un quadrilatère ne présentant a priori aucune symétrie notable a été découpé dans une feuille de papier. Vous ne disposez pas de règle graduée et ne pouvez donc mesurer de distance. Vous ne pouvez que plier ou déchirer le long d'un pli.

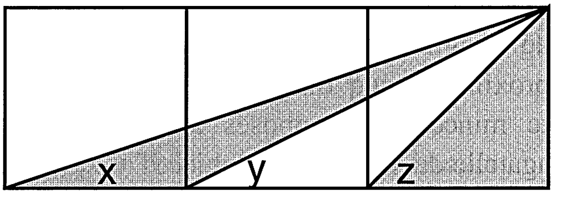
Sauriez-vous extraire du quadrilatère initial un autre quadrilatère, d'aire exactement moitié de celle du premier ?
Trouvez une deuxième méthode, différente de la première.



100. Une figure simple

Problème n°199 du 28/11/2000

On aligne comme sur la figure trois carrés égaux.

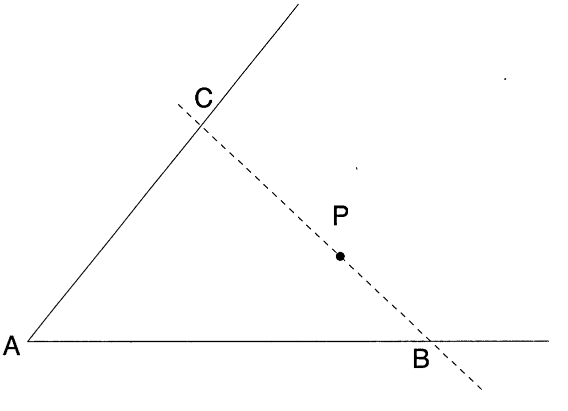


Quelle est la somme des trois angles marqués des lettres x, y et z ?

101. Le plus petit triangle

Problème n°204 du 02/01/2001

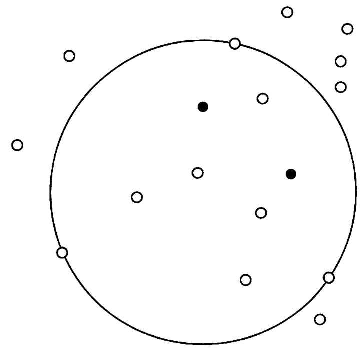
On fixe deux demi-droites formant un angle aigu en A, ainsi qu'un point P à l'intérieur du secteur angulaire qu'elles délimitent. Une droite variable passant par le point P coupe les deux demi-droites en B et C.



Comment choisir cette droite de façon à rendre minimale l'aire du triangle ABC ?

102. Ligne de partage circulaire

Problème n°210 du 13/02/2001



Alain et Alex Térieur s'adonnent sur un terrain plat au jeu géométrique suivant :

• Alain dispose 17 plots (2 noirs et 15 blancs) comme il l'entend sur l'aire de jeu, mais de sorte que 3 quelconques d'entre eux ne soient jamais situés sur une même droite, ni 4 d'entre eux sur un même cercle.

• Alex choisit alors trois des plots, et, à l'aide d'un immense compas, trace le cercle qui passe par ces trois plots (assimilés à des points).

Il gagne si le cercle emprisonne 7 des plots restants et laisse les 7 derniers à l'extérieur.

Alex peut toujours gagner. Pourquoi ? Et comment ?

La règle du jeu impose cette fois que parmi les trois plots choisis par Alex, figurent obligatoirement les deux noirs (qu'Alain peut placer préalablement où il le souhaite).

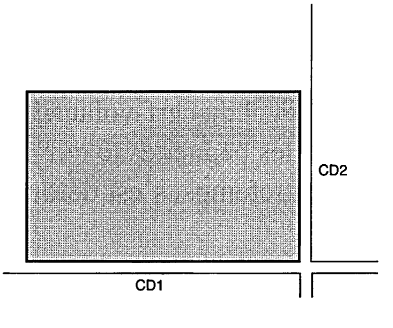
Alex peut-il encore gagner à tous les coups ?

103. La quadrature du rectangle

Problème n°214 du 13/03/2001

Sur le plan ci-contre, on distingue le champ rectangulaire de M. Ducoq (en gris), bordé par les chemins départementaux CD1 et CD2.

À l'occasion d'un remembrement, il est décidé que M. Ducoq possèdera dorénavant un champ de même aire, mais de forme carrée, toujours bordé par le CD1 et le CD2.



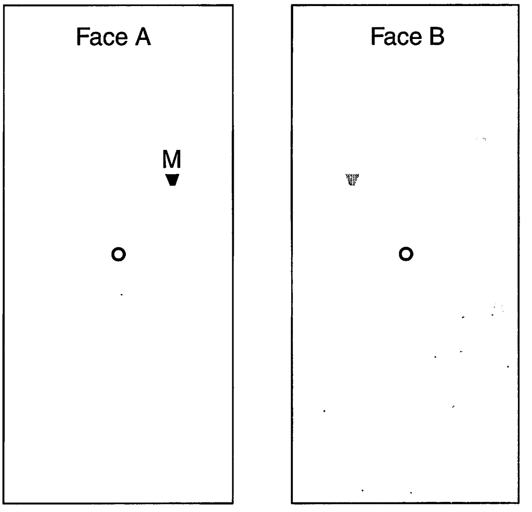
Pouvez-vous, à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, tracer les contours du nouveau champ Ducoq ?

104. La mouche du coche

Problème n°218 du 10/04/2001

Le «coche» est une œuvre d'art formée d'un ticket de métro percé en son centre par une épingle, elle-même plantée dans un bouchon de liège.
Une mouche se pose sur une face (A) du ticket (au point M). Très intelligente, elle sait comment se rendre en n'importe quel point de l'autre face (B) en minimisant le trajet parcouru.

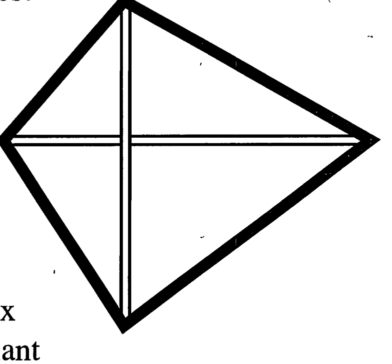
Quel est, pour la mouche, le point de la face B le plus éloigné? (D'après une suggestion de M. Marcel David).



105. Le cerf-volant articulé

Problème n°224 du 22/05/2001

Un gamin fabrique un cerf-volant. Son armature est constituée de quatre tiges de bambou de longueurs fixes, articulées l'une à l'autre à leurs extrémités.
Pour rigidifier le tout, le jeune garçon dispose deux bagettes «diagonales», qui se trouvent être perpendiculaires.
Mais elles sont mal fixées, et se perdent lors du premier envol du cerf-volant. Le gamin dispose alors deux nouvelles baguettes le long des diagonales du cerf-volant qui, entretemps, s'est déformé.

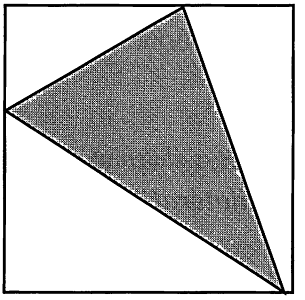


Les nouvelles baguettes sont-elles forcément perpendiculaires? (D'après une suggestion de M. Alain Noury).

106. Triangles inscrits

Problème n°230 du 03/07/2001

Quelle est l'aire du plus grand triangle que l'on puisse inscrire dans ce carré de côté 1 ? Et quelle est l'aire du plus grand triangle équilatéral que l'on puisse y inscrire ?

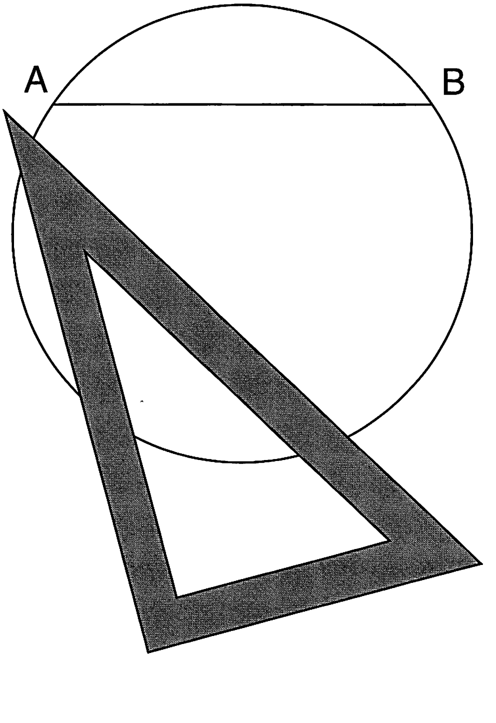


107. Construction à l'équerre

Problème n°234 du 07/08/2001

Un cercle et l'une de ses cordes [AB] sont tracés sur une feuille de papier. Vous ignorez où se trouve le centre du cercle, et ne disposez que d'une équerre non graduée, aux angles inconnus, mais suffisamment grande (l'un des côtés mesure au moins le diamètre du cercle).

Sauriez-vous, à l'aide de cette seule équerre, construire le milieu de la corde ?



108. Équidistance

Problème n°239 du 11/09/2001

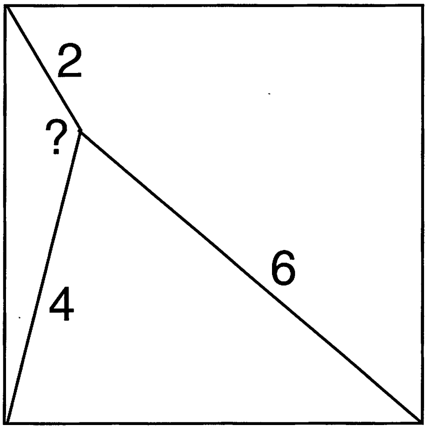
On donne un point A et deux droites (D) et (Δ).

Existe-t-il un point B sur (D) et un point C sur (Δ) tels que le triangle ABC soit équilatéral ?

109. Un carré à la six-quatre-deux

Problème n°244 du 16/10/2001

Sur ce parchemin ne figurent qu'un carré, trois segments, et trois indications de longueurs : 6, 4, 2…



Sauriez-vous déterminer par le raisonnement l'angle marqué d'un point d'interrogation ?

110. Plan de coupe

Problème n°249 du 20/11/2001

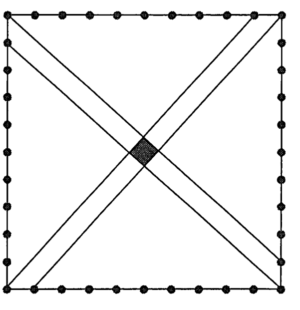
On trace les vingt-et-un segments reliant entre eux sept points de l'espace.

Combien d'entre eux, au maximum, peuvent traverser un même plan (ne passant par aucun des sept points) ?

Généralisation :
Combien, au maximum, des segments joignant N points de l'espace, peuvent traverser un même plan ne passant par aucun des N points ?

111. Et M. Levôtre créa son jardin

Problème n°254 du 25/12/2001



Dans ce grand parc carré, M. Levôtre a mis un an pour créer un jardin d'une extraordinaire beauté.
Il a d'abord fait planter un arbre aux quatre sommets du parc, puis, sur le périmètre, des arbres régulièrement espacés entre les sommets (le même nombre sur chaque côté, mais ne vous fiez pas au dessin pour savoir combien).
Il a ensuite fait tracer deux allées en joignant chaque sommet du carré à l'arbre le plus proche du sommet opposé, comme sur le dessin. Il a alors fait planter des massifs de fleurs plus magnifiques les unes que les autres. Enfin, le dernier jour de l'année, à l'intersection des deux allées, il a fait construire un bassin.

Sauriez-vous montrer que le bassin est carré ?

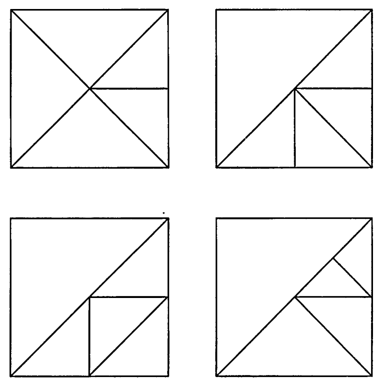
Il se trouve que l'aire du bassin vaut justement $\frac{1}{365}$ de l'aire totale du jardin.

Combien M. Levôtre a-t-il fait planter d'arbres ?

112. Découpe harmonieuse

Problème n°257 du 15/01/2002

Et les cinq comparses se partagèrent le gâteau, un beau gâteau carré. Oh, ils n'étaient pas exigeants : il leur suffisait d'avoir chacun une part en forme de triangle rectangle, pas forcément de même taille, mais en tout cas de même forme. Leur première idée fut de découper le gâteau en cinq triangles rectangles isocèles. Voici les configurations qu'ils imaginèrent.



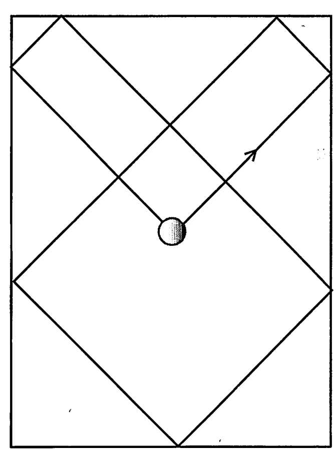
Mais après réflexion, ils décidèrent d'avoir toujours des parts en forme de triangles rectangles, mais dont l'un des côtés de l'angle droit mesurerait le double de l'autre.

Quels sont cette fois les découpages possibles ?

Existe-t-il d'autres découpages du gâteau en cinq triangles rectangles de même forme ?

113. Les sept bandes

Problème n°264 du 05/03/2002



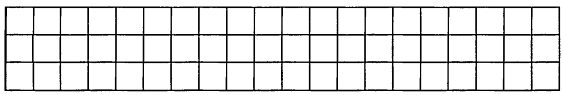
La bille était au centre du billard. Le champion ajusta son coup, qui frappa, sans aucun effet, la bande sous un angle de 45°. Elle rebondit alors six autres fois avant de se retrouver, à l'issue des sept bandes, exactement à l'endroit d'où elle était partie, après avoir parcouru 8 mètres.

Quelles sont les dimensions du billard ?

114. Le pavage de pentaminos

Problème n°269 du 09/04/2002

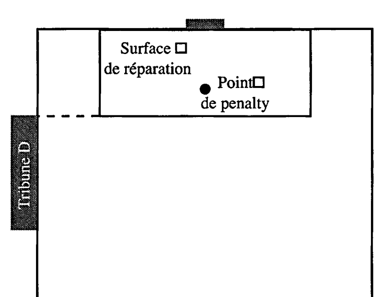
Les dominos sont constitués de deux carrés accolés. De même, les triminos, quadriminos, pentaminos et autres polyminos sont obtenus en accolant par un ou plusieurs de leurs côtés trois, quatre, cinq carrés ou davantage.
Il existe douze formes possibles de pentaminos (à une symétrie près).
Trouvez-les toutes ! Avec ces douze pentaminos différents, sauriez-vous paver entièrement un rectangle de 3 cases sur vingt ?



115. Malchance au Mondial

Problème n°274 du 14/05/2002

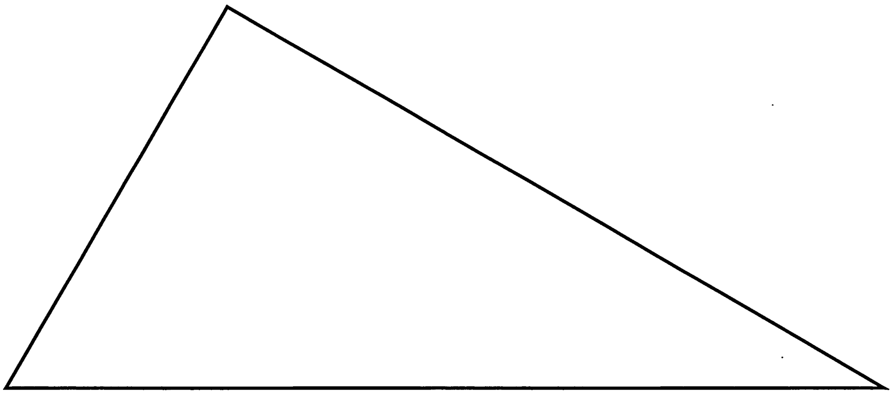
Action 1 : L'ailier file parallèlement à la touche, légèrement décalé à gauche par rapport à l'axe du terrain. Arrivé au niveau de l'entrée de la tribune D, il décoche un de ces tirs puissants, parfaitement rectilignes, dont il a le secret, et qui semble devoir s'écraser sur le coin du poteau gauche du gardien et de la transversale. Mais l'avant-centre, situé au point de penalty, effectue une reprise de vollée acrobatique qui est magnifiquement stoppée par le gardien de but.
Action 2 : L'ailier gauche file parallèlement à la touche, sur la même ligne que lors de la première action. Il dépasse son point de tir précédent et, parvenu à l'entrée de la surface de réparation qui est située au niveau de la fin de la tribune D, décoche un de ces tirs puissants, parfaitement rectilignes, dont il a le secret, exactement parallèle au tir de l'action 1. Cette fois, le tir s'écrase sur le poteau droit du gardien.
Quelle est la largeur de la tribune D ?
À quelle hauteur le deuxième tir s'est-il écrasé ?



On rappelle qu'au football, le but a une largeur de 7,32 m et une hauteur de 2,44 m. La surface de réparation est située à 16,50 m de la ligne de but, le point de penalty à 11 m de cette ligne.

116. Image miroir

Problème n°279 du 25/06/2002



Comment découper un triangle semi-équilatéral selon une ligne brisée en deux pièces de telle sorte qu'en assemblant les deux pièces du puzzle d'une autre façon (sans les retourner), on obtienne l'image « miroir » du triangle de départ *?*

117. Le rayon d'une sphère

Problème n°284 du 31/07/2002

Vous disposez d'une boule sphérique en bois, d'un compas, d'un crayon, d'une feuille de papier et d'une règle.
Le crayon et le compas peuvent marquer la boule.

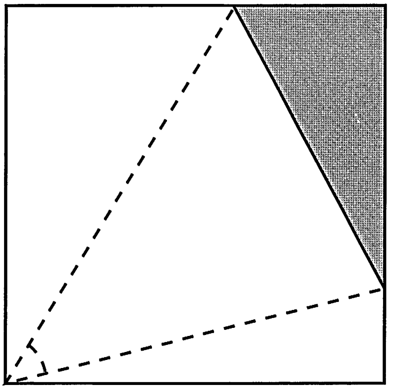
Comment déterminer le rayon de la boule ?

(D'après une idée de Francis Casiro).

118. La chèvre et son chevreau

Problème n°289 du 03/09/2002

Blanchette est dans son enclos carré, dont elle faisait auparavant le tour en 48 sauts. Mais aujourd'hui, elle ne peut accéder à tout le pré. Elle regarde avec tendresse son chevreau, enfermé dans un enclos triangulaire à l'un des angles du pré carré (en gris sur la figure), et dont elle pourrait faire le tour en 24 sauts ! L'endroit où Blanchette préfère se tenir, c'est le sommet opposé du carré. De ce point, en effet, elle peut, d'un regard, embrasser l'ensemble du pré triangulaire où se tient le chevreau.

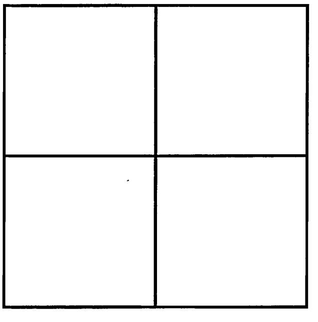


Quelle est l'angle de vision de la chèvre ?

119. Les pentagones

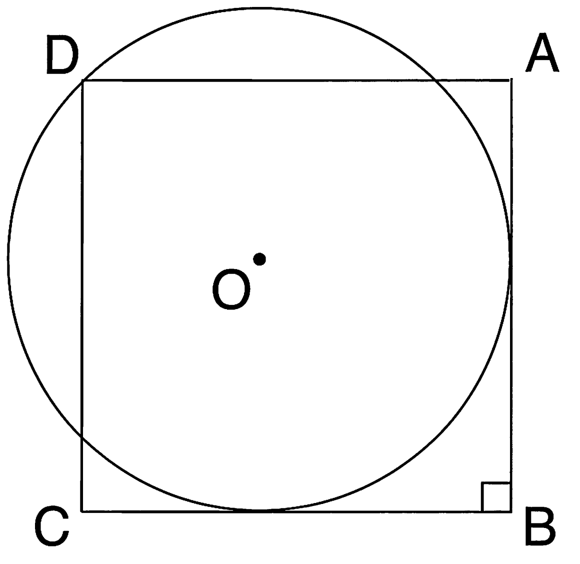
Problème n°294 du 08/10/2002

Combien de (vrais) pentagones différents, ayant leurs cinq sommets parmi les neuf nœuds du réseau ci-contre, non croisés et non superposables même en les retournant, peut-on dessiner ?



120. La quadrature du cercle

Problème n°299 du 12/11/2002



Cette fois, le jeune Anaxagore est sûr de son coup. Il va enfin résoudre le problème de la quadrature du cercle sur lequel des générations de mathématiciens s'échinaient depuis des siècles : tracer, à la règle et au compas, un carré de même aire qu'un cercle donné.
Voici sa méthode : prolonger deux tangentes perpendiculaires au cercle pour qu'elles forment les côtés d'un carré dont le quatrième sommet D est sur le cercle.

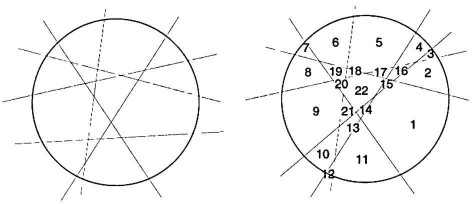
Un tel carré peut-il effectivement se construire à la règle et au compas ?

A-t-il vraiment pour aire celle du cercle ?

Figures libres SOLUTIONS

61. Le partage du gâteau

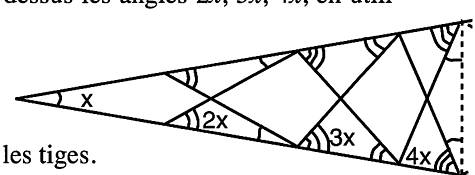
Voici une configuration de 20 parts, et la configuration maximale avec 6 coups de couteau, 22 parts.



Plus généralement, chaque droite supplémentaire crée une région de plus que de droites qu'elle coupe.
Pour n droites, le nombre maximum de régions est donc : $1 + 1 + 2 + \ldots + n = 1 + n(n + 1)/2$.

62. Le tire-bouchon

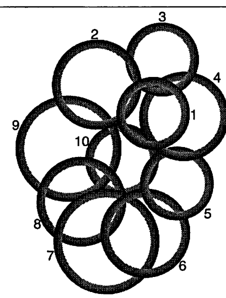
En appelant x l'angle cherché, on repère sur la figure ci-dessus les angles $2x$, $3x$, $4x$, en utilisant uniquement les trois remarques simples suivantes :



- dans un triangle isocèle deux angles sont égaux ;
- la somme des angles d'un triangle vaut 180° ;
- le dernier triangle (près de la vrille) étant équilatéral,

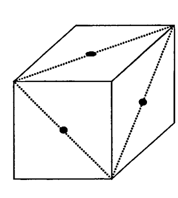
le côté vertical en pointillé a donc la même longueur que les tiges.
La somme des angles du triangle grisé vaut 9x, ce qui permet de conclure.
L'angle *x* cherché vaut 20°.

63. Mik'anneaux



Les anneaux peuvent être enlevés dans l'ordre :
E, A, B, D, G, I, J, H, C, F.

64. Un problème de robinet



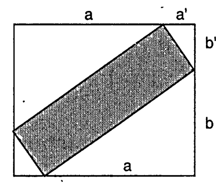
Lorsqu'on pose le cube le long d'une arête, on peut le remplir jusqu'ou centre d'une face percée. Le volume d'eau qui peut séjourner dans le bidon est celui d'un prisme de base un triangle rectangle de côtés 30 × 15 cm et de hauteur 30 cm. Il vaut le produit de l'aire de base (225 cm²) par la hauteur (30 cm), soit 6750 cm³, ou encore **6,75 litres**. On évitera l'inondation si le plombier arrive avant **4 jours et demi**.

Si l'arête (de longueur a), axe de rotation du récipient, repose sur un plan horizontal, l'angle α d'inclinaison se calcule à l'aide de sa tangente : $\tan \alpha = (a/2)/a = 0{,}5$ d'où $\alpha \approx 26° 33' 54''$.

⊠ *Les nombreuses lettres reçues au sujet de ce problème sont toutes destinées à améliorer la solution parue dans «Le Monde» du 03/06/97 : P. BOUDRIOT (Paris), C. BROERE (B-Audergham), M. BURET (Bures/Yvette), D. CIMETIERE (St-Jean de la Ruelle), P. DEBART et ses élèves (le Caire), F. de FRESCHEVILLE (Fontainebleau), A. GENSAC (Montpellier)F. HAYEM-PALUD (Montmorency), G. JULIAND (Venon), L. KLEINBORT (Larchant), P. MIQUEL (Le Péage de Roussillon), E. PARDIEU (D-Koblenz), J. PIGETVIEUX (Grenoble), P. PILET (Paris), J. POUYET (Vichy), C. PRADEL (Peymier), J. REMILLIEUX (Versailles), M. STOLL (Boulogne), C. TURBEL (Carrières/Seine), J. VUILLEMIN (St-Cloud), N.WALLE (D-Königsee). Nous retiendrons plus particulièrement celle de la jeune Marie-Chanel, élève de 3^e^ au Lycée français du Caire, et celle, plus complète, de Jean POUYET, qui donne en plus l'inclinaison du récipient pour un solution optimale.*

65. Mise en boîte

En utilisant les notations de la figure en coupe (x est la hauteur de l'objet, h la hauteur de la boîte), on doit avoir les relations :



$$\begin{cases} \dfrac{a'}{b} = \dfrac{b'}{a} = \dfrac{x}{68} = k \text{ (1)} \\ a + a' = 68 \text{ (2)} \\ b + b' = h \text{ (3)} \\ a^2 + b^2 = 68^2 \text{ (4) (théorème de Pythagore)} \end{cases}$$

(k est le rapport de similitude des deux triangles rectangles de côtés a', b', x et b, a, 68, ayant l'angle α en commun.)

• Dans le cas d'un cube, $h = 68$. La figure est symétrique par rapport aux diagonales de la coupe, et donc : $a = b$, $a' = b'$. Ainsi, $a = 34\sqrt{2}$, $a' = 68 - 34\sqrt{2}$, et $\boldsymbol{x = 68(\sqrt{2} - 1)}$.

• Si $h = 47$, comme $a' = kb$ et $b' = ka$, de (2) et (3) on tire, par addition, $(a + b)(1 + k) = 115$, d'où $(a + b)^2(1 + k)^2 = 115^2$, et ainsi,
$115^2 - 68^2(1 + k)^2 = 2ab(1 + k)^2$, ou encore $(47 - 68k)(183 + 68k) = 2\,ab\,(1 + k)^2$.

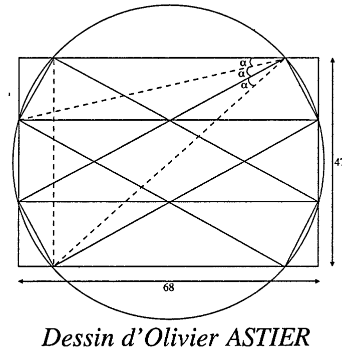
Or, (2) et (3) donnent aussi, par multiplication, $ab = \dfrac{68\,(47 - 68k)}{1 + k^2}$

d'où $(47 - 68k)\,(183 + 68k) = \dfrac{136\,(47 - 68k)\,(1 + k)2}{1 + k^2}$,

soit $\dfrac{(47 - 68k)\,(4k - 1)\,(17k^2 + 16k - 47)}{1 + k^2} = 0$,

dont les solutions sont $k_1 = 47/68$, $k_2 = 1/4$, $k_3 > 1$, $k_4 < 0$. k_3 et k_4 sont à proscrire, k_1 correspond au cas limite où le paquet remplit toute la boîte. L'unique solution convenable est donc $k = 1/4$, qui correspond à $\boldsymbol{x = 17}$ **cm**, et comme $a + b = 92$ et $ab = 1920$, $\boldsymbol{a = 60, b = 32, b' = 15}$ **et** $\boldsymbol{a' = 8}$.

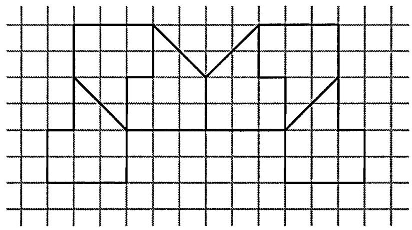
⊠ *René TOURNADRE (Angers) indique même que $x = 68 \tan(A/2)$ ne dépend pas de la hauteur h, et retrouve, si $h = 68$, $x = 68 \tan(\pi/8)$. Si $h = 47$, il donne l'équation du 3^e^ degré en t ($= \tan(A/2)$), qui fournira $t = 1/4$, donc $x = 17$.*



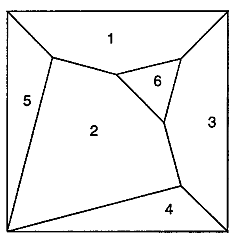
Dessin d'Olivier ASTIER

⊠ *Deux autres lecteurs ont donné une jolie solution : elle tient en un dessin pour Olivier ASTIER (Paris) et en un calcul pour Jean LIGEOUR (Rennes) :*
Calcul de Jean LIGEOUR : Si d est la diagonale de la boîte en coupe, et x la hauteur cherchée, $\sin\alpha = x/d$, $d^2 = 68^2 + x^2$ *et* $d \sin 3\alpha = 47$. *Le problème se ramène ainsi à la résolution de l'équation que donne la relation* $\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$ *(…qu'il fallait connaître !…). Alors,* $d \sin 3\alpha = 3d \sin\alpha - 4\,(d^3 \sin^3\alpha\,)/d2$, *ou encore :* $47 = 3x - \dfrac{4(17^3)}{68^2 + x^2}$, *dont l'unique solution convenable est* $x = 17$.

66. ID'M

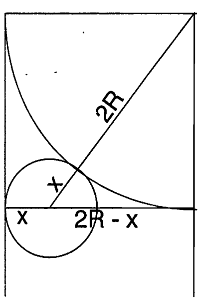


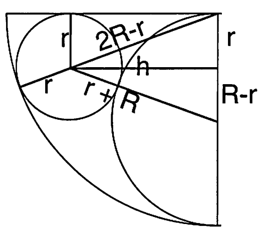
67. Dodécagone ou carré ?



68. Le tapis brodé

Les huit petits cercles noirs sont en effet rigoureusement identiques. Ils ont tous un diamètre égal au **quart du côté du carré.**





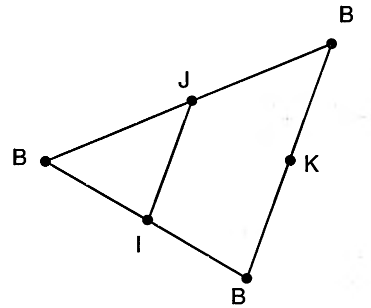
• C'est évident pour les deux cercles centraux.
• Pour les quatre cercles les plus proches des coins, il suffit d'appliquer deux fois le théorème de Pythagore avec les hypothèses de la figure de droite :
$(2R - r)^2 = r^2 + h^2$ et $(R + r)^2 = (R - r)^2 + h^2$
d'où on tire $\mathbf{R = 2r}$.
• Pour les deux cercles restants, il suffit encore d'appliquer Pythagore avec les hypothèses de la figure de gauche : $(2R - x)^2 = (2R + x)^2 - (2R)^2$
Il vient encore $\mathbf{R = 2x}$.

⊠ *Christian Schwinn, Paris.*

69. Les survivants du milieu

• *Le triangle :* il suffit de construire de part et d'autre d'un des milieux un segment parallèle à celui déterminé par les deux autres milieux et de même longueur. On complète en joignant les deux sommets ainsi déterminés aux deux milieux.

⊠ *A. PLANTIN, de Vic-le-Comte, donne une autre construction à l'aide de cercles.*



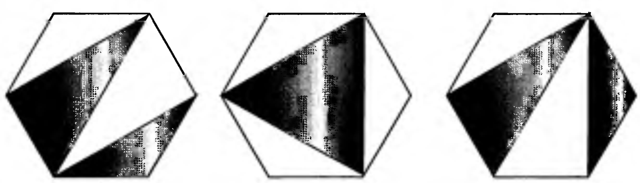
• *Le pentagone :* si MNPQR est le pentagone des milieux, on accroche en N un segment NS de même direction, même sens et même longueur que PQ. On est alors assuré que le quatrième sommet A du parallélogramme MSRA est un des sommets du pentagone cherché, qu'on reconstitue par symétries successives par rapport aux cinq milieux R, Q, P, N et M.

• *Le quadrilatère :* la reconstitution n'est pas toujours possible à partir de quatre points quelconques. Il faut que le polygone formé par les milieux soit un parallélogramme. Dans ce cas, une infinité de quadrilatères répondent à la question. On les trouve en choisissant arbitrairement l'un des sommets, et en construisant les autres de proche en proche.

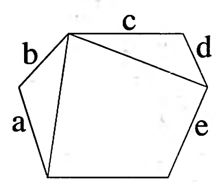
> ✉ *Plusieurs lecteurs généralisent : la solution est unique pour reconstituer un polygone à un nombre impair de côtés ; elle n'est pas toujours possible pour un nombre pair, mais s'il en existe une, il y en a une infinité.*

70. Les partages de l'hexagone

Il y a **14 façons** de découper l'hexagone :



6 selon ce modèle 2 selon ce modèle 6 encore selon ce modèle

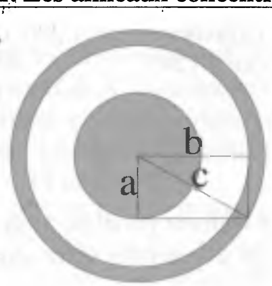


Pour la généralisation au partage en $(n-2)$ triangles d'un polygone convexe à n côtés par $(n-1)$ diagonales qui ne se coupent pas, on peut imaginer le codage suivant : $z = (a + b) + (c + d) + e$.

Il y a ainsi autant de partages que de formules parenthésées de $(n-2)$ signes + et $(n-1)$ lettres rangées dans l'ordre a, b, c,... : $\frac{1}{2n-3}C_{2n-3}^{n-1}$, qui est un « nombre de Catalan ».

Pour l'heptagone (sept côtés), on trouve **42 partages** ($\frac{1}{11}C_{11}^{6}=42$).

71. Les anneaux concentriques



Aussi étonnant que cela puisse paraître, **les deux zones ont même aire**. En appelant a, b et c les longueurs (par ordre croissant) des deux côtés du rectangles et de la diagonale, on voit que l'aire du cercle est $\pi\, a^2$, tandis que l'aire de la couronne extérieure est $\pi\,(c^2 - b^2)$. Or, le théorème de Pythagore indique que $c^2 - b^2 = a^2$. Une véritable illusion d'optique !

72. Art abstrait

La zone sombre a pour aire le huitième de l'aire du rectangle.

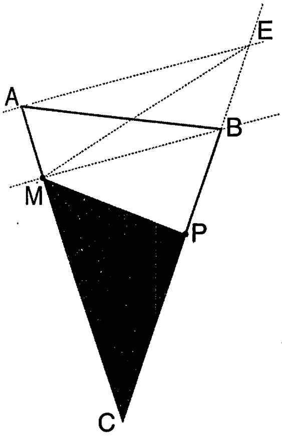
Cela résulte des constatations suivantes :

• Le triangle du « rabat » de l'enveloppe, ayant un sommet situé aux trois quarts de la hauteur, a pour aire les trois huitième de celle du rectangle.

• Le triangle coloré a une base trois fois plus petite que le rabat. Son aire est dans le même rapport, et représente donc le huitième de l'aire totale.

⌧ *Henri HELOT, de Munich, propose une autre façon d'y parvenir.*

73. Le fanion du club



• Menez par A la parallèle à (BM) qui coupe (BC) en E.

• Joignez M au point P, milieu de [EC].

La droite MP partage le triangle en deux parties d'aires égales.

En effet, l'aire de MPBA est égale à la somme de celle de MPB et de celle de MBA, elle-même égale à celle de MBE (les deux triangles ont même base, et même hauteur puisque AE et BM sont parallèles). Donc l'aire MPBA est aussi celle du triangle MPE.

Comme P est le milieu de EC, les aires de MPE et MPC sont égales.

⌧ *Plusieurs lecteurs, dont René MOTTET, de Versailles ou M. GRILLET-AUBERT, de Moreil, proposent une autre construction : faire passer par le milieu de AC la parallèle à MB. Elle coupe BC en P.*

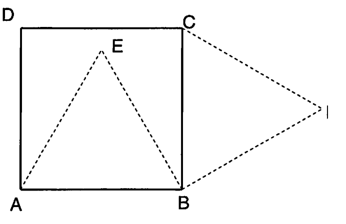
⌧ *Raymond LE BIHAN, de St Herblain, ainsi que Michel MENGUAL et Jean SUARD, de Paris, font remarquer que la droite MP passe, pour des raisons de mécanique, par le centre de gravité du triangle.*

74. Le champ de vision

On procède par calculs d'angles :

$\angle DEF = \angle DEA + \angle AEB + \angle BEF$

$= 75° + 60° + 45° = 180°$



Les points D, E, F sont alignés.

Etienne masque Daphné à François.

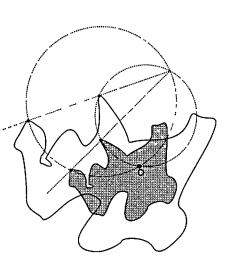
Justification :

- Les angles du triangle équilatéral AEB valent 60°, en particulier $\angle AEB$.
- L'angle $\angle A$ du triangle isocèle DAE vaut 30°, et donc les deux autres, en particulier $\angle DEA$, 75°.
- Le triangle EBF est rectangle isocèle en B, et $\angle BEF = 45°$

⌧ *J-P LAFILLE, de Bergerac, propose une deuxième solution utilisant une rotation du plan.*

75. L'archipel des échelles

Il y a bien un point de coïncidence.



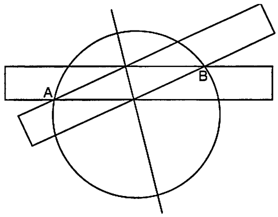
On passe d'une carte à une autre par similitude (composition d'une rotation et d'une homothétie).

Or, toute similitude admet un unique centre (point invariant). La configuration des cartes laisse penser que ce centre est bien situé à l'intérieur des îles.

Pour construire précisément le point invariant O, on sélectionne deux points caractéristiques sur une carte (A et B) et leurs homologues sur l'autre carte (A'

et B'). Si I est l'intersection des deux droites qui les joignent, les deux cercles circonscrits à AIA' et à BIB' se coupent en I et... O.
Ces cercles contiennent en effet tous les points qui «regardent» AA' (respectivement BB') selon l'angle de la similitude, donc les deux contiennent O.

76. Le centre perdu



La construction ci-contre permet de tracer un diamètre si la largeur de la règle est inférieure au diamètre du cercle.

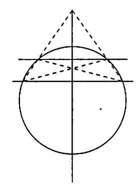
- On place la règle sur le cercle et on trace les deux parallèles le long de ses deux bords.

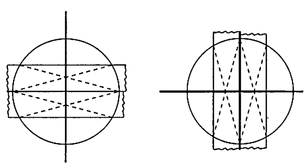
La première rencontre le cercle en B, la deuxième en A.

- On déplace la règle et on fait pivoter son bord supérieur autour de A jusqu'à ce que le bord inférieur rencontre B. On trace les deux parallèles le long des bords de la règle.
- Les points d'intersection ainsi déterminés sont sur un diamètre du cercle.

Il suffit d'un deuxième diamètre pour obtenir le centre.

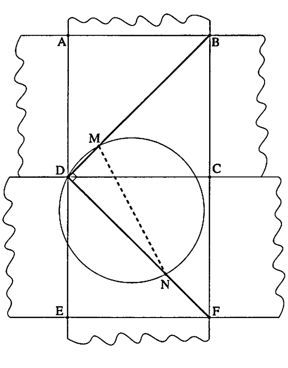
⊠ *Des lecteurs nous ont envoyé d'autres solutions, toutes destinées à construire deux diamètres.*
Ci-contre, une première construction, résumée en un dessin :





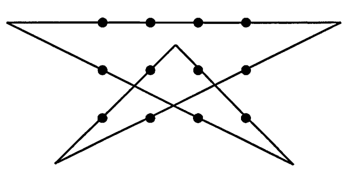
⊠ *Une seconde, de Robert Buvat, de Saint-Jean-de-Luz ou D. LIMAT, de Besançon.*

⊠ *Citons également les solutions de Jean RIPOCHE, de Carnac, Alain LUGINBUHL, de Boudevilliers (Suisse).*

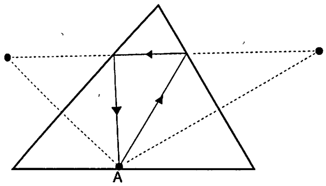


⊠ *Enfin une astucieuse solution de Georges Glaeser, de Strasbourg, dans le cas où la règle aurait une largeur supérieure au diamètre du cercle.*
ABCD et CDEF, intersections de deux bandes de même largeur, sont des losanges, (DB) et (DF) étant les bissectrices respectives de ∠ADC et ∠CDE, supplémentaires. Elles sont donc perpendiculaires, et [MN] est un diamètre. Il ne reste qu'à en construire un deuxième !
⊠ *René TATRY, de Castanet Tolosan, et Pascal SAUMON, de Lille, ont également proposé une solution dans ce cas.*

77. Les douze points



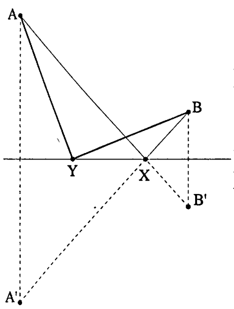
78. Le billard triangulaire



• On construit les symétriques de A par rapport aux deux autres côtés du billard triangulaire, et on joint ces deux symétriques. Les intersections avec les côtés du billard déterminent les deux points à viser (au choix) pour que la boule se retrouve en A. Les propriétés de la symétrie garantissent l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

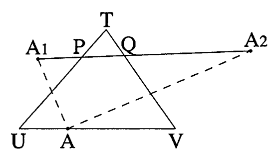
• Pour que la boule suive indéfiniment la même trajectoire, il faut partir d'un point A bien particulier, le pied de la hauteur du triangle. La trajectoire est alors le **triangle «orthique» formé des pieds des trois hauteurs**

- Remarquons tout d'abord que l'égalité des angles d'incidence et de réflexion rend minimum le trajet de la boule, et vice-versa.



En effet, si la boule, au lieu d'effectuer le trajet AXB, avait éffectué AYB, la longueur de la trajectoire aurait été :
AY + YB = A'Y + YB,
plus longue que A'X + XB = AX + XB.

- Il faut donc rechercher la trajectoire APQ qui rende minimum le trajet APQA

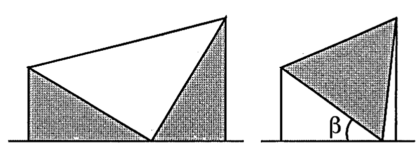


- Pour une position donnée de A, le trajet minimum est égal, à cause des symétries, à :
$A_1 A_2 = 2$ TA sin $\angle$UTV
Il est minimum pour TA minimum, c'est-à-dire pour A pied de la hauteur issue de T du triangle TUV.
- On peut ensuite (en utilisant des homothéties ou en faisant jouer successivement à P et Q le rôle de A) démontrer que (UQ) et (VP) sont alors les deux autres hauteurs du triangle TUV, d'où la solution.

☒ *Plusieurs lecteurs, comme Pierre Faessel, de Meudon la forêt, proposent des solutions reposant sur le fait que dans la figure de la page précédente, les droites TU et TV sont bissectrices extérieures du triangle APQ, et donc que TA est bissectrice intérieure. Le mouvement sera perpétuel si TA est perpendiculaire à UV, donc hauteur.*
Edouard Sauvadet, de Longeville les Metz, ajoute que la construction est en défaut si le triangle a un angle obtus.
☒ *P. Cahuzac, de Paris, donne quant à lui une démonstration par l'absurde.*

79. La banderole

• Dans le cas du triangle rectangle isocèle, les deux triangles en gris sur la figure sont égaux puisqu'ils ont mêmes angles (les côtés sont deux à deux perpendiculaires) et un côté commun.
L'écartement des mâts est donc de 4 m.



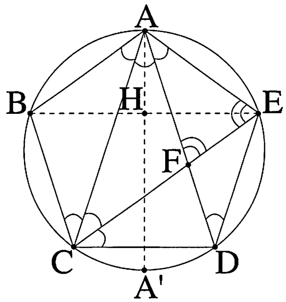
• Dans le cas du triangle équilatéral de côté a, la trigonométrie permet de venir à bout du problème.
On trouve successivement : a cos (ß – 30) = 2,5 ;

a sin ß = 1,5 ; on en tire a cos ß = 3,5 / $\sqrt{3}$;
enfin **a^2 = 19 / 3, soit $a \approx$ 2,52 m**. La distance des mâts est **4 / $\sqrt{3} \approx$ 2,31 m**.

⊠ *Plusieurs lecteurs, dont A. CAROUGE, de St Martin de Ré, M. PATRON, de Bondues, Yves DEBARD, de Marly le Roi, et Jean SCHILLING, de Nancy, ont trouvé une solution géométrique, plus élégante, obtenue en remarquant que le triangle formé par le milieu du côté supérieur de la banderole et les deux pieds des poteaux, est équilatéral.*

80. Le bon et le mauvais tracé

La première construction est exacte, la deuxième n'est qu'approchée.



• Le calcul du côté a = AB du pentagone régulier se fait de la manière suivante :

- On commence par marquer les angles égaux de la figure : 36° 72°

- Le triangle AFE est isocèle et les droites (AC) et (ED) parallèles. D'où

$\frac{FA}{FD} = \frac{CA}{ED}$, ou encore, si d = AD (diagonale),

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d}{a} = \frac{1}{\frac{d}{a}-1} \text{ et si on pose } \phi = \frac{d}{a}, \phi = \frac{1}{\phi - 1}, \text{ ou } \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

- L'unique solution positive de cette équation est le **nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$**

- Par ailleurs, dans le triangle rectangle AEA', 2 × AH = a^2, et $AH^2 = a^2\left(1 - \frac{\Phi^2}{4}\right)$ (triangle AEH),

ce qui donne finalement $a^2 = R^2(4 - \Phi^2)$, et comme $\Phi^2 = \Phi + 1$, **$a^2 = R^2(3 - \Phi)$**.

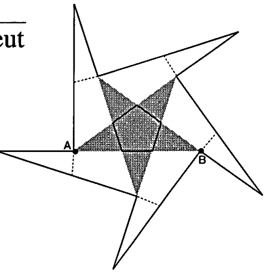
- Une simple utilisation du théorème de Pythagore permet de trouver AB dans la première construction :
$PQ^2 = PA^2 = \frac{5R^2}{4}$, d'où $PQ = \frac{R\sqrt{5}}{2}$, et $OQ = R\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} = R(\Phi - 1)$

- Ainsi, $a^2 = AQ^2 = OQ^2 + R^2 = R^2[(\Phi - 1)^2 + 1] = R^2(\Phi^2 - 2\Phi + 2)$, et comme $\Phi^2 = \Phi + 1$, on retrouve bien **$a^2 = R^2(3 - \Phi)$**.
- Le côté AB a en fait comme longueur $a = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

⊠ *Christian ROMON, de Carrières, propose une variante géométrique plus simple de cette démonstration.*

• Dans la deuxième construction, une étude trigonométrique montre que l'angle OAC est légèrement supérieur aux 54° attendus (sa tangente vaut $\sqrt{2}$, ce qui correspond à un angle d'environ 54,8°).

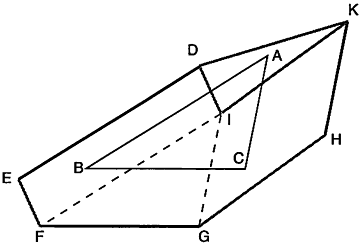
81. Un musée bien gardé



• De l'intérieur du pentagone situé au cœur du pavage étoilé, on ne peut surveiller aucun des murs du musée en entier.

• Deux caméras suffiront pour surveiller tous les murs du bâtiments. Sur le dessin, A et B désignent deux positions possibles de ces caméras. Leurs champs de vision couvrent pour chacune trois des ailes.

82. Le grand triangle



• L'aire du grand triangle vaut treize quarts de l'aire du petit.

Tous les raisonnements portent sur une propriété simple du calcul d'aire :

si on ne change pas le sommet d'un triangle, mais qu'on réduit la base dans un rapport k, l'aire est réduite dans le même rapport.

En appelant s l'aire du petit triangle, on divise alors le grand triangle en portions triangulaires dont l'aire est indiquée sur le dessin. Il s'ensuit que l'aire S du grand triangle est égale à :

$$S = s + \frac{3s}{2} + \frac{3s}{4} = \frac{13s}{4}$$

• Les côtés du grand triangle sont divisés au quart de leur longueur.

En appelant x le rapport (cherché) dans lequel G divise DE, on calcule l'aire du triangle GDF de deux façons :

- C'est x S, produit de l'aire du grand triangle par le rapport x.
- C'est l'aire de GBD à laquellent s'ajoutent les aires connues de DBC ($= \frac{s}{2}$) et DCF ($= \frac{s}{4}$).

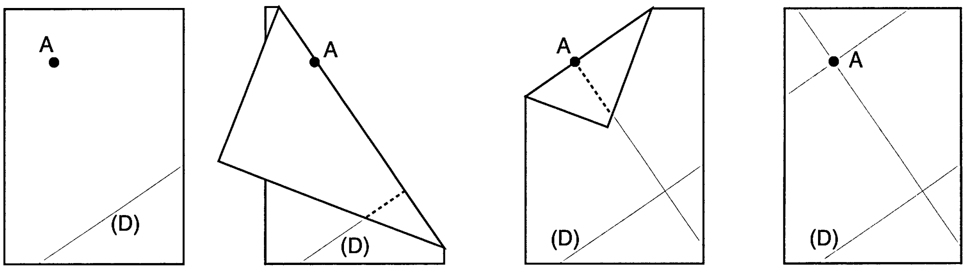
Or, l'aire de GBD est égale à x fois l'aire de DBE, soit $\frac{xs}{4}$.

Il ne reste plus qu'à résoudre : $\frac{13xs}{4} = \frac{xs}{4} + \frac{s}{2} + \frac{s}{4}$ d'où l'on tire $x = \frac{1}{4}$.

⊠ *Marcel David, de Thonon les bains, nous propose, en traçant la parallèle à (BC) en A, qui coupe (DE) en P, une solution très rapide à la seconde question : PG = 2GD = 2PE, d'où DG = (1/4)DE.*

⊠ *Robert Munnich, de (92) Boulogne, donne une idée similaire, et deux autres lecteurs que nous n'avons pas identifiés fournissent d'autres idées intéressantes de solutions. L'une utilise les vecteurs, l'autre un quadrillage du plan.*

83. Pli parallèle



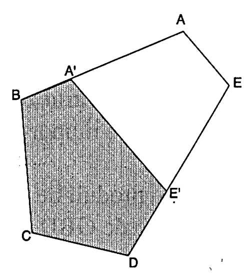
1. On trace par pliage la perpendiculaire à (D) passant par A. Le pli est perpendiculaire à (D) si la partie repliée de (D) coïncide avec (D).

2. On plie perpendiculairement à la perpendiculaire…

… et le tour est joué !

84. Retour dans l'archipel

Il y a de nombreuses constructions possibles d'une solution. Voici l'une d'entre elles.

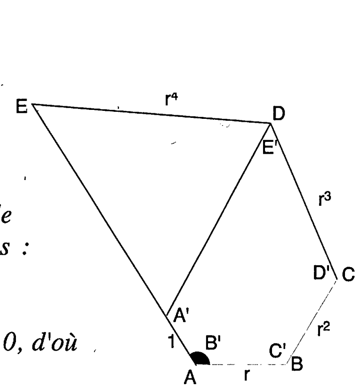


On appelle «pentagone spécial» (terminologie imaginée par Peter Taylor) un pentagone dont les côtés sont parallèles à ceux d'un pentagone régulier (les côtés font deux à deux un angle de 108°).

– La «grande» carte est un pentagone spécial ABCDE dont trois côtés consécutifs mesurent respectivement 64 cm (AB), 48 cm (BC) et 36 cm (CD) ou tout autre ensemble de mesures dont chacune vaut 75% de la précédente. Les deux autres côtés sont automatiquement déterminés pour des raisons d'angle.

– Pour la «petite» carte (grise), on utilise le pentagone spécial BCDE'A' tel que DE' = 27 cm (75 % de la mesure de CD). On vérifie facilement que la petite carte est une réduction à l'échelle 3/4 de la grande.

✉ *Plusieurs lecteurs ont reconnu que quatre des angles du pentagone devaient être égaux, le cinquième pouvant être quelconque. Patrick Gordon, de Paris, évoque le cas de figure très particulier ci-contre.*

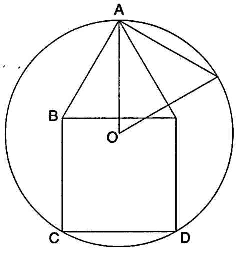


Dans cette configuration quatre des côtés du pentagone sont en progression géométrique de raison $r = 4/3$. En appelant θ l'angle noirci, on obtient alors, par des calculs d'angles élémentaires : $EDA' = 5\theta - 3\pi$ et $DEA' = 3\pi - 4\theta$, d'où, dans le triangle EDA' : $DA' = (r^4 \sin 4\theta)/\sin\theta$ et $EA' = (r^4 \sin 5\theta)/\sin\theta$.
$EA/E'A' = r$ donne la relation $r^5 \sin 4\theta + r^4 \sin 5\theta - \sin\theta = 0$, d'où $\theta \sim 119°$.

☒ *Christian Romon donne une solution avec retournement du calque, où quatre côtés du nouveau pentagone sont colinéaires à ceux du pentagone initial.*
☒ *Alain Balès (29, Landudec), Henri Charrière (92, Boulogne), M. Lemasurier (94, Choisy le Roi) et Jacques Marty (92,* Ville d'Avray).

85. Le cercle de la félicité

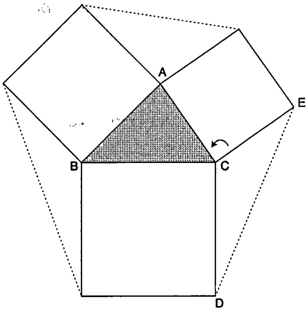
Le rayon du cercle est 5 cm.



Il suffit d'opérer une rotation de 30° du triangle équilatéral autour de son sommet A. Le côté AB se transforme en un segment vertical AO.
AOCB est un losange, ce qui explique que O, situé à la distance 5 cm de A et C (et par symétrie de D), est le centre du cercle de la félicité.
☒ *Robert Basiuk (92, Boulogne) et M. Gave (74, Annecy le Vieux) proposent d'utiliser un autre déplacement : la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, qui amène le triangle équilatéral en OCD.*
Comme OA = OB = OC, O est le centre du cercle de la félicité.

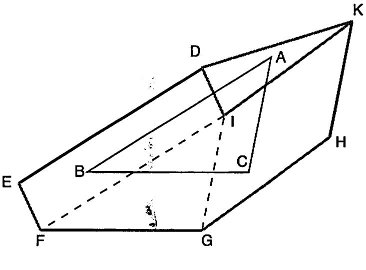
86. La coiffe alsacienne

Chacun des trois triangles a la même aire que le triangle gris.



Pour le montrer sur le triangle CDE, par exemple, il suffit d'opérer une rotation de 90° du triangle autour de son sommet C. La base CD vient dans le prolongement de BC, avec la même longueur.
Le point E vient coïncider avec A, ce qui entraîne que la hauteur issue de E dans le triangle CDE a la même longueur que celle issue de A dans le triangle ABC.
Les triangles ABC et CDE, ayant même base et même hauteur, ont même aire.

87. Le deuxième triangle



La translation t qui amène E en D est aussi la translation qui amène B en A. Elle amène F en un point qu'on appelle I.
Mais on peut considérer que t est la composée de deux translations successives :
- u qui amène B en C et F en G,
- v qui amène C en A, et donc G en I ; v amène aussi H en K.

En résumé, le triangle DIK est formé :
- du côté DK,
- du côté DI translaté par t de EF,
- du côté IK translaté par v de GH.

☒ *Christian Romon a eu l'idée de rebâtir en EDP le triangle ABC sur l'un des côtés déplacés. Le triangle formé par translation des trois tiges grises est PGH.*
☒ *D'autre lecteurs font des propositions utilisant le calcul vectoriel :*
Georges Finot (84, Pernes les Fontaine), René Tournadre (49, Angers), Alain Blanchard (93, Noisy le Sec).

88. Les mailles du filet

Il y a 1000 triangles sur la figure.

• Pour les dénombrer, on les classe en trois catégories :

– *Type 1* : ceux qui ont B (et pas C) comme sommet. Pour leur base, on a le choix entre 10 demi-droites, et sur chacune de ces demi-droites, on doit choisir 2 parmi les 10 points autres que C (2 éléments parmi 10 : 45 choix). Au total, il y a 450 triangles de ce type.

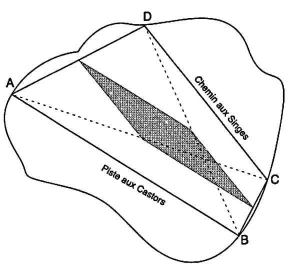
– *Type 2* : ceux qui ont C (et pas B) comme sommet. Il y en a aussi 450.

– *Type 3* : ceux qui admettent B et C comme sommets. Le troisième sommet est l'un des 100 autres points de la figure. Il y a donc 100 triangles de type 3.

• Plus généralement, avec le même raisonnement, on voit qu'en divisant AB en p et AC en n, on obtient un nombre de triangles égal au **demi produit de n, p et $(n + p)$.**

> ⌧ *On peut, comme Christian Romon, détailler ainsi ce dénombrement :*
>
> *– Il reste np points d'intersection Q entre les n segments issus de B et les p segments issus de C.*
>
> *– Pour un point Q donné, on compte n triangles BQQ' où Q' est l'un des n points restants sur le segment [QC] (C compris), et p triangles CQQ" où Q" est sur [QB] (B compris). Soit un total de np(n + p) triangles.*
>
> *– Comme chacun de ces triangles est compté deux fois, il y a np(n + p)/2 triangles.*
>
> *- D'autres lecteurs comme J. Heidet (Paris) et Antoine Wehenkel (Luxembourg) retrouvent la même formule soit par un dénombrement direct, soit en utilisant des « combinaisons ».*

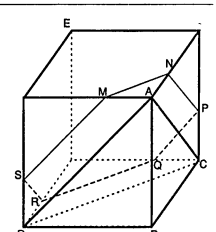
89. L'île au trésor



Il faut chercher le trésor dans le parallélogramme ci-contre (en gris).

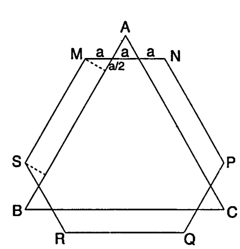
Ses quatre sommets sont les milieux de AC, AD, BC et BD. Ses côtés sont parallèles aux deux chemins et sont deux fois moins longs.

90. La truffe du père Igor



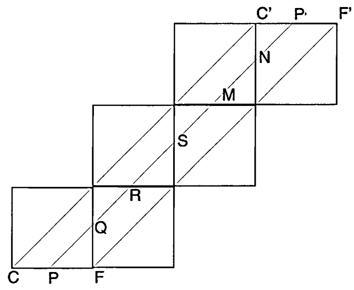
• **Les tranches ont une forme de triangles équilatéraux** (si la coupe se fait à une distance, comptée sur la diagonale DE, de moins de $\sqrt{3}$ cm de l'un des coins) **et une forme d'hexagones** si cette distance est comprise entre $\sqrt{3}$ cm et $2\sqrt{3}$ cm (la longueur de la diagonale est $3\sqrt{3}$ cm).

La section hexagonale MNPQRS n'est pas forcément régulière (ce n'est un hexagone régulier que lorsque l'aire est maximale, c'est-à-dire lorsque le plan de coupe passe par le centre du cube), mais les côtés de l'hexagone restent parallèles deux à deux.



• **Le périmètre des sections hexagonales est constant**, égal à $9\sqrt{2}$ cm. Le père Igor ne se trompait pas. En effet, ces hexagones sont en fait des triangles équilatéraux dont on a coupé aux coins trois petits triangles équilatéraux identiques.

Voici, en superposition, le plus grand des triangles équilatéraux de la coupe triangulaire (ABC), et, projetée sur son plan parallèlement à DE, l'une des coupes hexagonales. On voit bien que les périmètres des deux sections sont égaux à $3(A + 3a)$. C'est trois fois la diagonale d'une face du cube ($9\sqrt{2}$ cm).

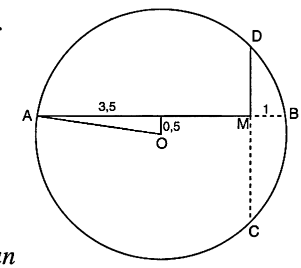


⊠ *Christian Romon donne de ce problème une solution « visuelle » (ci-contre) en développant le cube : le périmètre des sections hexagonales est matérialisé par des segments parallèles à [PP'], compris entre [CC'] et [FF'].*
⊠ *J Carltian (69, Lyon), René Tournadre (49, Angers).*

91. Les deux cordes

Le rayon mesure $\sqrt{12,5}$ cm, soit environ 3,535... cm.

Pour le montrer, la première chose à faire est de remarquer que le quatrième segment de la figure mesure 1 cm.

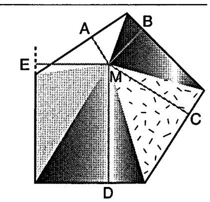


En effet, MA × MB = MC × MD = 6, ce produit étant le même pour toute sécante au cercle passant par M. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Pythagore en considérant que le centre O est l'intersection des médiatrices des deux cordes, ce qui donne immédiatement AH et OH.

⊠ *René Moinard (63, Clermont Ferrand), Daniel Poussevin (33, Libourne) et Gérard Simon (69, Lyon) ont remarqué que le triangle COD est rectangle isocèle en O. On le démontre en utilisant un peu de trigonométrie (par exemple le sinus de l'angle CAD).*

⊠ *Les méthodes suggérées par les lecteurs sont très variées : trigonométrie souvent, géométrie analytique parfois. Guy Chaty (75, Paris), Charles Madezo (56, Ploermeur), Alain Ménard (75, Paris), Michel Mengual (Paris), André Serre (17, La Rochelle).*

92. Invariant pentagonal



• L'aire du pentagone est la somme des aires des cinq triangles de sommet M. Or ces triangles ont tous pour base un côté du pentagone (dont la longueur est a) et pour hauteur les distances de M aux côtés du pentagone.

L'aire S du pentagone est égale à :

$$\frac{1}{2}\, a \times (MA + MB + MC + MD + ME).$$

La somme MA + MB + MC + MD + ME vaut donc $\dfrac{2S}{a}$, grandeur indépendante de M.

• Pour un pentagone qui possède cinq angles égaux, la propriété reste vraie.

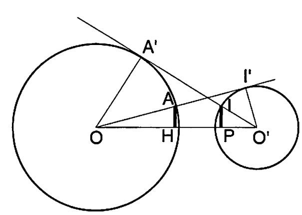
– En effet, elle est vraie pour le pentagone régulier puisque ses cinq côtés sont égaux.

– Lorsqu'on le déforme en faisant varier un côté parallèlement à lui-même sans toucher aux autres, la propriété reste vraie.

– Or, il est toujours possible de parvenir par de telles déformations d'un pentagone régulier à un pentagone donné dont les cinq angles sont égaux et réciproquement.

⊠ *J. Kremser (84, Peypin d'Aigues)*

93. Des sous ! Des sous !



Oui, les longueurs sont égales.

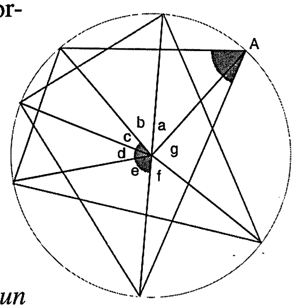
On peut réduire le problème au calcul des moitiés AH de AB et IP de IJ, puisque la figure est symétrique par rapport à la ligne des centres. Les triangles IPO' et OA'O', tous deux rectangles, l'angle

en O' étant commun, sont semblables. Leurs côtés sont donc proportionnels et, avec les notations de la figure, en appelant r et R les deux rayons, IP × OO' = r × R.
Il en est de même des triangles OAH et OO' I'. Ainsi, AH × OO' = r × R.
Ces deux égalités établissent que les longueurs AH et IP sont égales.

⊠ *Michel Vilkas, M. Carrière (84, L'Isle sur Sorgue).*

94. Les polygones étoilés

La somme des sept angles vaut 540°.



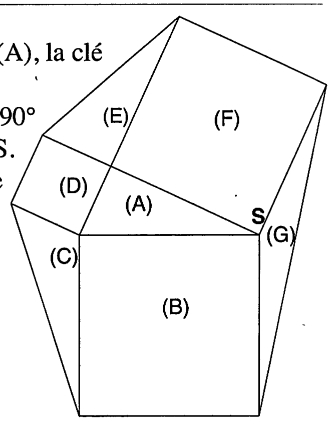
On se place au centre du cercle, et on regarde les angles « au centre » correspondant aux angles « inscrits » (ayant leur sommet sur la circonférence) du polygone étoilé. Par exemple, l'angle inscrit A correspond à l'angle au centre $c + d + e$. Le total des sept angles au centre, pour des raisons de symétrie (chaque petit angle au centre apparaît trois fois) vaut 3 angles pleins. Les angles inscrits étant deux fois plus petits, on trouve ainsi le total de 540°.
Pour n sommets, décrits de p en p (où $2p < n$), un calcul semblable mène au résultat : $\boldsymbol{(n - 2p) \times 180°}$.

⊠ *J. Carlhian (69, Lyon), René Tournadre (49, Angers), proposent un calcul direct de la somme des angles.*

⊠ *Bernard Nayroles (27, Le Tronquay) généralise le problème à un polygone étoilé quelconque, pas nécessairement inscriptible.*

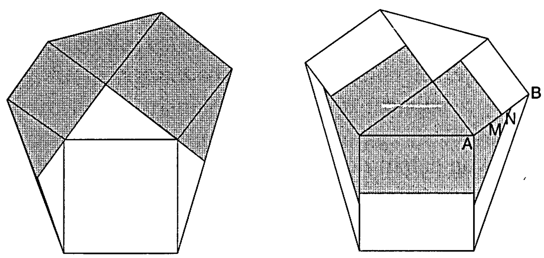
95. Remembrement

Il y a trois façons d'opérer le remembrement.



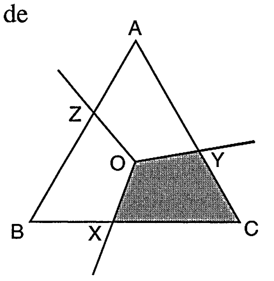
Si p et q désignent les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle (A), la clé consiste à remarquer que les quatre triangles ont même aire $pq/2$.
Pour vous en persuader, faites pivoter par exemple le triangle (G) de 90° (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) autour du point S. Vous constaterez qu'on obtient un triangle de même base (décalée le long de la même droite) et de même sommet que (A). Quant aux carrés, ils ont pour aires p^2, q^2, et $p^2 + q^2$ (ce bon vieux Pythagore).
Le problème revient donc à obtenir deux terrains d'aires $p^2 + q^2 + pq$.
Le terrain contenant (B) peut être composé, au choix de :
- (B), (A), (C)
- (B), (A), (G)
- (B), (C), (G).

⊠ *Une idée originale de Michel Mengual (75, Paris) : il découpe la figure en deux parties d'aires égales en « suivant » certaines lignes déjà tracées (ci-dessous). Sur la figure de droite, M est milieu de [AB] et AB/AN =* $\sqrt{2}$



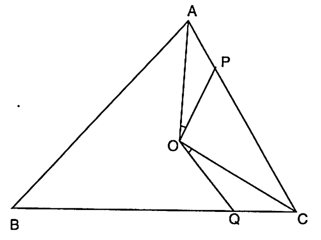
96. Bricolage

Quelle que soit la position du calque, l'aire est la même, égale au tiers de celle du triangle (valeur exacte en cm^2 : $\frac{25\sqrt{3}}{3}$).



Pour le montrer, il suffit de considérer la rotation de centre O et d'angle 120°. Elle transforme :
- A en B, B en C, C en A et donc les droites (BC) en (CA), (CA) en (AB), (AB) en (BC).
- la droite (OX) en (OY), et de même ((OY) en (OZ) et (OZ) en (OX).
- par intersection, X en Y, Y en Z et Z en X.
- finalement, le quadrilatère OXCY en OYAZ, et OYAZ en OZBX.

Les trois quadrilatères OXCY, OYAZ et OZBX sont égaux et ont même aire.

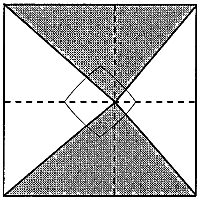


⊠ *Christian Romon et J. Carlhian (69, Lyon), ont remarqué qu'une rotation de centre O, d'angle θ, amenant (OA) sur (OP) et (OC) sur (OQ) permet d'affirmer que les triangles AOP et QOC ont même aire, et donc que l'aire OACQ est celle de AOC, soit un tiers de l'aire du triangle ABC.*

97. Pique-nique d'anniversaire

Quatre coups de couteau (en traits pleins) suffiront.

Quel que soit le choix du point à l'intérieur du gâteau, l'aire blanche sera égale à l'aire grisée. En effet :

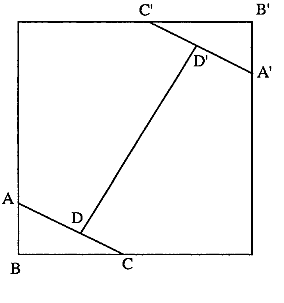


- à chaque triangle blanc délimité par des traits pleins ou des pointillés, on fait correspondre un triangle gris isométrique ;
- il est toujours possible de trouver des points dont la distance à chacun des quatre sommets est inférieure à 17 cm (ces points sont situés à l'intérieur d'une zone délimitée par les quatre arcs de cercle en traits fins).

L'énoncé ne précisait pas de quelles façons on pouvait utiliser le couteau, nous font remarquer plusieurs lecteurs.

⊠ *On peut utiliser cet instrument pour mesurer des distances et les reporter, comme l'indique astucieusement notre jeune lecteur Adrien Hoarau (75, Paris), de 11 ans. En traçant sur le gâteau des repères successifs permettant de mesurer 17 cm (20-3), puis 14 (17-3), 11 (14-3), 8 (11-3), 5 (8-3), il peut découper le gâteau en 4 coups de couteau puisqu'il sait trouver les milieux des bords.*

⊠ *On peut aussi utiliser la lame pour marquer les sommets de deux triangles isocèles, remarque J. Maynard (82, Gramont), et alors trois coups de couteau suffisent.*



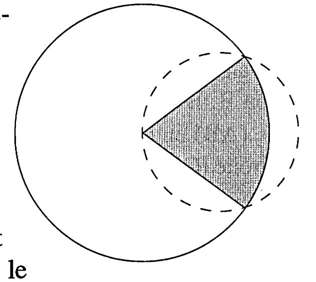
⊠ *On peut enfin, selon Jean-Jacques Werling (Palma de Majorque), utiliser le couteau pour découper un morceau triangulaire ABC qui va servir de « patron », le reporter en A'B'C', et couper le long de [DD'] tel que CD = C'D' = AB = A'B', et que DD' < 17 cm. Sur le même principe, si le triangle ABC est rectangle isocèle, on peut faire la découpe en 4 coups de couteau.*

⊠ *D'autres coupes, pleines de fantaisie, sont proposées par Michel Mengual (75, Paris)*

98. La fête foraine

• Si on exige que les disques jouent un rôle symétrique, leur diamètre, au dixième de millimètre près, doit excéder 30,90 cm.

En divisant le disque blanc en cinq secteurs de 72° d'angle au centre, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que le recouvrement puisse avoir lieu est que chaque secteur puisse être totalement recouvert par un disque noir.



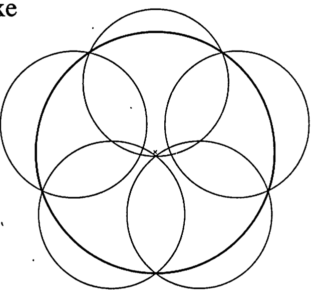
Il suffit ensuite de disposer les autres disques en opérant des rotations d'angle 72° autour du centre du disque blanc.

La position limite correspond donc au cas où le disque noir est positionné de sorte qu'un point de sa circonférence soit au centre du disque blanc et que les deux points d'intersection des disques correspondent aux extrémités d'un secteur de 72°. Un calcul trigonométrique donne le diamètre en cm du disque minimum, représenté en pointillés : 25 / cos 36°, soit environ 30,9017 cm.

⊠ *Jean Paldacci (13, Marseille) remarque que le rayon des petits disques dans cette configuration est obtenu en divisant celui du grand par le nombre d'or.*

• La solution « symétrique » n'est pas optimale.

Voici la construction du meilleur recouvrement, qui ne possède qu'un axe de symétrie : les disques ont un diamètre d'environ 30,45 cm. Trois d'entre eux passent par un point situé légèrement au-dessous du centre du grand disque de sorte que les deux autres coupent les premiers sur le grand disque.



⊠ *Jean-Pierre André (92, Issy-les-Moulineaux) et Emile Julien (92, Clamart) ont trouvé ce résultat.*

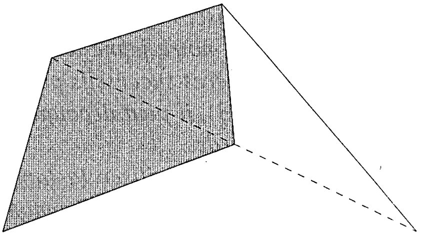
⊠ *Marc Lassalle (13, Aix-en-Provence) signale que cette solution est donnée par Martin Gardner dans « problèmes et divertissements mathématiques ».*

99. Mise en plis réductrice

Méthode 1 :

Pliez selon une diagonale. Pliez en deux pour déterminer le milieu de cette diagonale. Joignez ce milieu aux deux autres sommets et découpez selon ces plis.

Les deux quadrilatères restants (en gris et en blanc) sont d'aires moitiés de celle du quadrilatère d'origine.

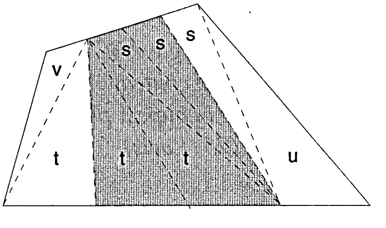


Méthode 2 :

Divisez deux côtés opposés en quatre (on plie chaque côté en deux, puis chaque moitié en deux).

Joignez les points situés au quart et aux trois quarts en pliant puis en coupant.

Le quadrilatère restant (en gris) est d'aire moitié de celle du quadrilatère d'origine.



En effet, son aire A est égale à $2s + 2t$.

Or, l'aire totale vaut $S = 3s + 3t + u + v$

Il est assez clair par ailleurs que $S = 4u + 4v$.

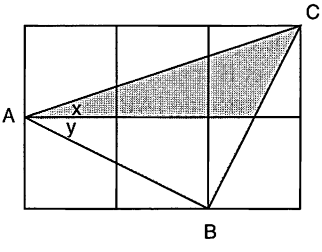
Il en résulte $u + v = s + t$, et donc S = 2A.

☒ *Bravo à nos lecteurs qui n'ont pas trouvé moins de sept solutions à notre problème ! Roger Boudet (94, Bassan), Pierre Cahuzac (75, Paris), J. Carlhian (Lyon), J-M. Gadat (60 Rosoy), M. Gave (74, Annecy le Vieux), Jean-Daniel Le Franc (92, Fontenay aux Roses), L. Le Fort (75, Paris), Michel Mengual (Paris), Robert Munnich (75, Paris), Christian Romon, Stéphane Sarkissian, Bernard Walliser (75, Paris), Antoine Wehenkel (Luxembourg).*

100. Une figure simple

La somme des trois angles vaut 90°.

En voici une démonstration géométrique. Le triangle ABC est rectangle isocèle, c'est la réciproque du théorème de Pythagore qui permet de le vérifier, les côtés du triangle ayant pour longueurs $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$. La somme $x + y$ vaut donc 45°, et comme $z = 45°$, on peut conclure.



Pour les amateurs de trigonométrie, voici une autre démonstration :

on sait que $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

Il reste à remarquer que $\tan x = 1/3$ et $\tan y = 1/2$.

Il vient : $\tan(x + y) = 1$, et donc $x + y = 45°$.

☒ *J. Carlhian (69, Lyon), J-M. Gadat (60, Rosoy), Philippe Lallouet (72, Conneré), G. Rens, C. Romon.*

De nombreuses démonstrations géométriques menant à la solution nous sont parvenues. Elles reposent soit sur l'ajout d'un ou plusieurs carrés permettant la construction de triangles rectangles parfois isocèles, soit sur un calcul direct d'angles.

☒ *Michel Delleville (33, Cenon) signale que ce problème permet de retrouver la formule Arc tan (1/3) + Arc tan (1/2) + Arc tan (1) = $\pi/2$.*

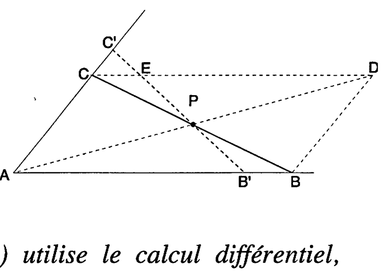
101. Le plus petit triangle

Le triangle minimal est obtenu quand P est le milieu de BC.

Il est construit pratiquement en prolongeant AP d'une longueur égale pour obtenir le point D, puis en menant les parallèles issues de D aux deux demi-droites.

En effet, avec une autre sécante B'C' passant par P selon la configuration du dessin ci-contre, la comparaison du triangle AB'C' et du triangle ABC donnerait :

- en plus, le triangle PCC'
- en moins, le triangle PBB'.



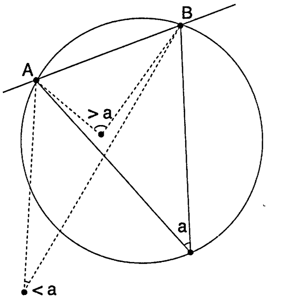
Or, les triangles PBB' et PCE sont égaux. PCE est contenu dans PCC'.

On a donc plus ajouté qu'enlevé. ABC est donc le triangle minimum.

☒ *René BRONGNIART (06100 Saint-Bernard) nous propose une solution analytique, J.M. GADAT (60140 Rosoy) utilise le calcul différentiel, Christian ROMON emploie ces deux méthodes et J. CARLHIAN (Lyon) donne un argument purement géométrique.*

Tous s'accordent à mettre en évidence l'idée qui conduit à envisager le cas où P est milieu de [BC]. Géométriquement simple, elle exprime que la variation de l'aire, lorsqu'on passe de la sécante (BC) à (B'C'), est la différence entre les aires des triangles PBB' et PCC'. Le gain ne compense la perte que si ces deux aires sont égales, c'est-à-dire si PB = PC.

102. Ligne de partage circulaire



• Alex peut construire une solution en remarquant que tous les points qui «regardent» un segment AB suivant un angle donné sont situés sur un même arc de cercle.

Pour tracer un cercle gagnant, Alex peut choisir deux plots A et B de sorte que les 15 autres points soient du même côté de la droite (AB). Il «classe» alors les 15 angles du plus petit au plus grand (les angles sont tous différents car 4 points ne sont jamais cocycliques): $AM_1B < AM_2B < \ldots < AM_{15}B$.

Il ne lui reste plus qu'à tracer le cercle AM_8B.

Les points $M_1, M_2, \ldots, M_7$ seront à l'extérieur, les points $M_9, \ldots, M_{15}$ à l'intérieur.

• **Alex peut encore gagner avec la deuxième règle du jeu.**

Si A et B sont les deux plots noirs, imaginons un point C qui se déplace continûment le long de la médiatrice de [AB].

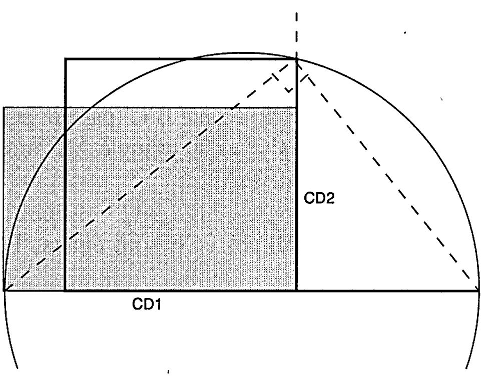
À chaque position de C, on associe le cercle (G) de centre C passsant par AB.

La droite (AB) laisse de part et d'autre un nombre différent de plots, par exemple 5 et 10 plots. Lorsque C est très loin d'un côté, (G) emprisonne donc 5 plots, lorsque C est très loin de l'autre, (G) emprisonne 10 plots. Lors des 15 positions où (G) rencontre un troisième plot, le nombre de plots emprisonnés varie unité par unité (car aucun cercle ne contient quatre plots) entre un nombre supérieur (ou égal) à 7 et un nombre inférieur (ou égal) à 7.

Il existe entre les deux une position où (G) emprisonne 7 plots.

⊠ *Christian ROMON propose deux solutions, construisant toutes deux le cercle-solution de proche en proche. Il signale aussi que les hypothèses choisies sont «trop fortes»: il suffit en effet, nous dit-il, qu'il n'y ait pas de point aligné avec A et B pour établir la propriété.*

103. La quadrature du rectangle

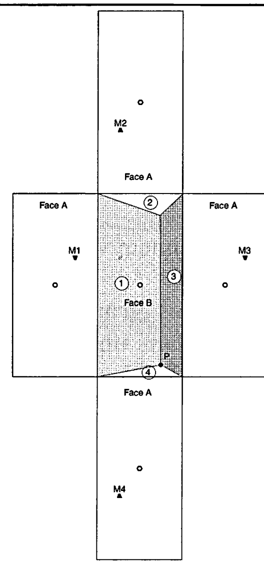


Le long du CD1, on prolonge la longueur du rectangle d'un segment égal à sa largeur, et on trace le cercle qui admet ce côté prolongé pour diamètre. L'intersection du prolongement de la largeur (le long du CD2) avec ce cercle définit l'un des côtés du champ carré.

Explication: le carré de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal au produit des segments découpés sur l'hypoténuse.

⊠ *Michel MENGUAL (Paris) et Christian ROMON suggèrent chacun une construction utilisant la puissance d'un point par rapport à un cercle (si on mène par A une tangente, de point de contact T, et une sécante en B et C à un cercle, AT2 = AB AC). Guy Philibert (83500 La Seyne sur Mer) propose une construction presque identique à celle proposée, et Antoine WEHENKEL (Luxembourg) donne une solution originale mais plus facile à réaliser à l'équerre et au compas qu'à la règle et au compas.*

104. La mouche du coche

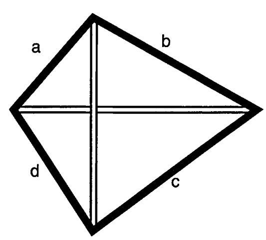


Il y a quatre façons de se rendre en ligne droite (pour minimiser le trajet) de la face A à la face B, autant que de côtés de la face A par lequel on sort. Le dessin ci-contre représente la face B (au centre), et autour, 4 versions de la face A «dépliée», selon le côté d'entrée de la mouche sur la face B. Quatre points (M1 à M4) représentent alors la position initiale de la mouche. En traçant les médiatrices de ces points joints 2 à 2, on partage la face B en quatre «zones d'influence», la zone 1 étant par exemple constituée des points de la face B les plus proches de M1.
Le point cherché P est parmi les points de contact de trois de ces zones.
C'est le(s) centre(s) qui se trouve sur la face B du(des) plus grand(s) des cercles circonscrits à trois des points M1, M2, M3, M4.

⊠ *Marcel DAVID, à qui revient l'idée de ce problème, nous en donne une solution très détaillée, précisant en particulier les cas où la solution n'est pas unique.*
Patrick GORDON précise qu'effectivement le centre trouvé doit rester à l'intérieur de la face B, Michel MENGUAL donne à la solution une introduction élégamment exprimée en termes de «rayons de lumière dans les glaces imaginaires qui bordent le ticket». Christian ROMON donne, lui, une solution générale très complète incluant la recherche du bord qui minimise la distance.

105. Le cerf-volant articulé

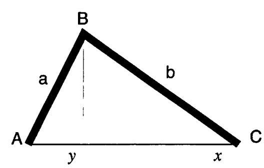
Les diagonales resteront perpendiculaires.



• On commence par constater, à l'aide du théorème de Pythagore, que la somme des carrés des longueurs des tiges opposées est constante : $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
• On considère alors la nouvelle configuration du cerf-volant. On appelle x la nouvelle longueur de AC et y la longueur de la projection de AB sur AC. Le théorème de Pythagore (encore lui) permet d'écrire :

$$a^2 - y^2 = b^2 - (x - y)^2$$

$$\text{d'où l'on tire : } y = \frac{a^2 - b^2 + x^2}{2x}$$



• Pour des raisons de symétrie, la même étude sur le bas du cerf-volant permet de déterminer la longueur z de la projection du dernier sommet D sur AB :

$$z = \frac{d^2 - c^2 + x^2}{2x}$$

Comme $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$, $z = y$ et (DB) est perpendiculaire à (AC).
N.B. Le résultat reste le même si le cerf-volant prend la forme d'une aile delta.

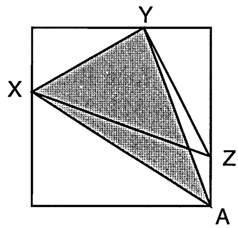
⊠ *Pierre CAHUSAC (Paris) met en avant l'idée que le quadrilatère ABCD est parfaitement défini par une de ses diagonales pour faire une démonstration purement géométrique. On en retiendra qu'on peut retrouver le quadrilatère déformé AB'C'D' en laissant A fixe en faisant coulisser C jusqu'en C' le long de (AC), (B'D') restant perpendiculaire à (AC). J. CARLHIAN (Lyon) quant à lui fait une démonstration par l'absurde, et Philippe JULLIAN (Paris), comme Michel MENGUAL (Paris) et Christian ROMON utilisent tous un peu différemment le théorème de Pythagore.*

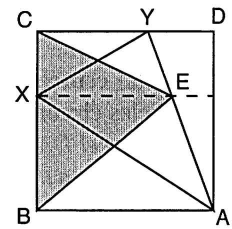
106. Triangles inscrits

• Le plus grand triangle inscrit dans un carré de côté 1 a pour aire $\frac{1}{2}$.

Commençons par remarquer que, quelque soit le triangle XYZ inscrit dans le carré, on peut toujours trouver un triangle XYA d'aire supérieure.
L'aire du triangle XYA, égale à celle du triangle CDE, est maximale lorsque E est sur [BA].

Son maximum vaut $\frac{1}{2}$.





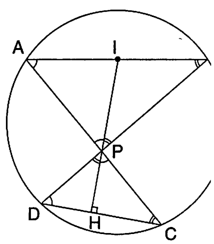
• Le plus grand triangle équilatéral inscrit dans un carré de côté 1*a* pour aire $2\sqrt{3} - 3$.
D'après la remarque précédente, on cherchera ce triangle parmi les triangles dont un des sommets est par exemple en A. Par ailleurs, on sait construire un triangle équilatéral AXY inscrit dans le carré : Y est l'intersection de [CD] et de l'image de la droite (BC) dans la rotation de 60° autour de A. C'est aussi le triangle de plus grande aire.
Comme AX = AY, CX = CY, et si on pose BX = DY = x,
x vérifie $1 + x^2 = 2(1 - x)^2$, donc $(x - 2)^2 = 3$, d'où $x = 2 - \sqrt{3}$.

L'aire du triangle, égale à $AX^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, vaut $2\sqrt{3} - 3$, soit un peu moins de $\frac{1}{2}$.

☒ *La plupart des lecteurs qui se sont signalés ont préféré des démonstrations purement géométriques, ne faisant intervenir que le théorème de Pythagore :*
P. CAHUZAC (Paris), Jean LEMARIE (92400 COURBEVOIE), Michel MENGUAL (Paris) Christian ROMON. Seuls un lecteur anonyme et Antoine WEHENKEL (Luxembourg) préfèrent la trigonométrie.

107. Construction à l'équerre

Une construction possible :
1. Tracez deux cordes perpendiculaires [AC] et [BD]. Elles se coupent en P.
2. Tracez la perpendiculaire à (CD) passant par P : elle coupe [AB] en son milieu I.



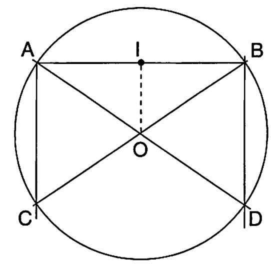
Démonstration :
Les angles A et D sont égaux (angles inscrits au même arc). D est aussi égal à HPC (ils ont un complémentaire commun à 90°, HPD) et à API (opposé par le sommet au précédent).

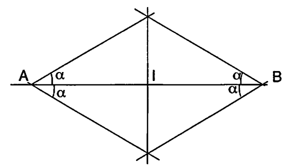
Il en résulte que dans le triangle isocèle API, AI = IP.
En faisant le même raisonnement, on prouve l'égalité angulaire
B = C = DPH = IPB.

Il en résulte que dans le triangle isocèle BPI, BI = IP. **I est bien le milieu de [AB].**

☒ *Marcel BETTAN (Versailles), Pierre DECREUSEFOND (Paris), Maurice GRENIER (72610 ROUSSE-FONTAINE), Jean LARCEBEAU (64990 MOUGUERRE), Jean RIPOCHE (56340 CARNAC), Robert MUNNICH (Paris), Robert PIERRE (67206 MITTELHAUSBER-*

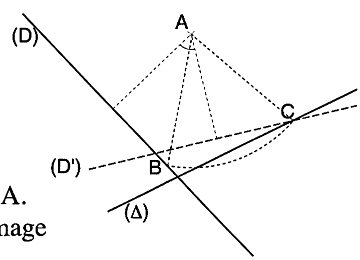
GEN), André SERRE (PUTEAUX) nous ont tous proposé une autre solution, très rapide :
En menant par A et par B les perpendiculaires à (AB), on obtient les triangles rectangles ABC et ABD dont les hypoténuses sont des diamètres du cercle, qui se coupent en O, son centre. Il suffit ensuite de mener, à l'équerre, la perpendiculaire en O à [AB], qui est la médiatrice de ce segment et obtenir ainsi son milieu I.
André LAMOTTE (06220 VALLAURIS) et Guy ROLLAND (76530 GRAND COURONNE) ont, eux, choisi un usage original de l'équerre, utilisant ses angles non droits pour construire deux triangles isocèles de base [AB], symétriques l'un de l'autre par rapport à (AB). Cela permet de tracer la médiatrice de [AB] et d'obtenir le milieu cherché.





108. Équidistance

Si le triangle équilatéral ABC existe, le point C est obtenu à partir du point B par rotation de 60° (ou - 60°) autour de A. Cela nous donne une méthode de construction des deux triangles qui, en général, répondent à la question.



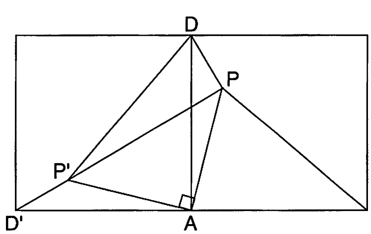
• Premier triangle : on fait pivoter la droite (D) de 60° autour de A. La transformée (D') coupe (Δ) en C. Le point de (D) dont C est l'image est le point B.
• Deuxième triangle : on fait pivoter la droite (D) de - 60° autour de A. La transformée (D') coupe (Δ) en C. Le point de (D) dont C est l'image est le point B.

Dans le cas où (D) et (Δ) font entre elles un angle de 60°, l'une des deux constructions reste valable. Quant à l'autre, elle ne produit aucun triangle ou au contraire en génère une infinité selon que la distance de A aux deux droites (D) et (Δ) soit la même ou pas.

109. Un carré à la six-quatre-deux

L'angle cherché mesure 135°.

Une rotation de 90° de la figure autour du point A ne modifie ni les angles ni les longueurs. Le théorème de Pythagore dans le triangle PAP', rectangle isocèle en A, permet de calculer la longueur PP' = $4\sqrt{2}$. La réciproque de ce même théorème de Pythagore permet de montrer que le triangle P'PD est rectangle en P.



L'angle APD a pour mesure : 90° + 45° = 135°.

NB. Les points P, P' et D' sont, de plus, alignés.

⌧ *Michel MENGUAL (Paris) propose une jolie solution faisant intervenir le quart de tour de centre le centre du carré initial, dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans cette transformation, P a pour image un certain point N et si (DN) coupe (AP) en Q, il prouve que le triangle APQ est rectangle isocèle en Q. Philippe KAHN (92100 Boulogne) et Christian Romon utilisent, eux, le quart de tour de même sens, mais de centre A. Christian ROMON signale de plus que les données 2, 4, 6 peuvent être remplacées par 7, 6 et 11 ou 7, 4, 9 tout en gardant le même angle APD.*

110. Plan de coupe

Un même plan peut traverser au maximum 12 segments.

Si un plan ne passe par aucun des sept points, il divise l'espace en deux parties :
A contenant p points et B contenant $(7 - p)$ points.
Un segment traversera le plan s'il joint un point de A à un point de B.
Le nombre de tels segments est $p \times (7 - p)$.
Il sera maximal pour $p = 3$ ou $p = 4$.

• Pour un nombre quelconque N de points, un raisonnement analogue s'applique.
– Si $N = 2n$ est pair, le maximum de $p \times (N - p)$ est $\boldsymbol{n^2}$, obtenu pour $p = n$.
– Si $N = 2n + 1$ est impair, le maximum de $p \times (N - p)$ est $\boldsymbol{n \times (n + 1)}$, obtenu pour $p = n$ ou $(n + 1)$.

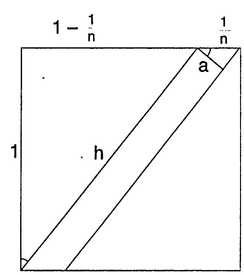
⌧ *Christian ROMON.*

111. Et M. Levôtre créa son jardin

• **Le bassin est carré** car les deux allées se correspondent par une rotation de 90° autour du centre du jardin.

• **Le jardinier a fait planter 56 arbres.**

Appelons n le nombre de subdivisions d'un côté.
Une fois remarquée l'égalité des angles repérés sur le dessin (leurs supports sont perpendiculaires), on déduit la proportion : $h = \dfrac{1}{na}$ (où a est le côté du bassin et h la longueur d'une allée).



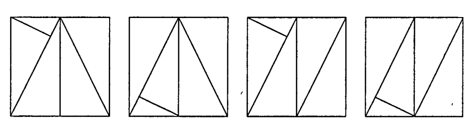
La relation de Pythagore et l'indication sur l'aire du bassin donnent alors :
$1 + (1 - \dfrac{1}{n})^2 = \dfrac{365}{n^2}$. Soit $n^2 + (n - 1)^2 = 365$. Il en résulte $n = 14$.

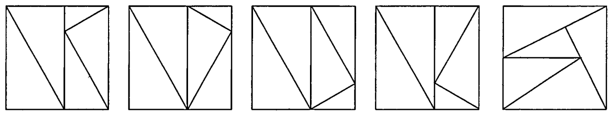
⌧ *Philippe KAHN généralise le problème en recherchant les valeurs de n pour lesquelles le rapport des aires du parc et du bassin est un nombre entier k et trouve $k = 2n^2 - 2n + 1$, ce qui donne :*
On aurait donc pu poser le même problème en remplaçant par exemple 1/365 par 1/265, et trouver 48 arbres, ce que signale P. CAHUSAC (Paris).
Autres propositions de solution : J. LIRAND (86360 Chasseneuil du Poitou), C. ROMON.

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
x	*1*	*5*	*13*	*25*	*41*	*61*	*85*	*113*	*145*	*181*	*221*	*265*	*313*	*365*	*421*	*481*
nombres d'arbres	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*242*	*28*	*32*	*36*	*40*	*44*	*48*	*52*	*56*	*60*	*64*

112. Découpe harmonieuse

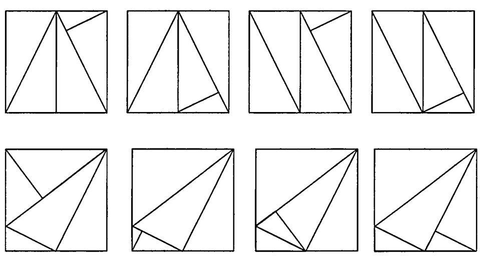
Aux symétries et rotations près, on trouve quatre découpages selon la première configuration.

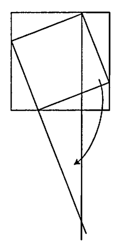




Ci-dessus, sont représentés les cinq découpages d'une deuxième configuration dans laquelle l'un des côtés de l'angle droit mesure un peu plus de la moitié de l'autre, environ 0,57 fois, ce rapport étant solution de l'équation $x^3 = (x-1)^2$.

⊠ *François ADRIEN (78000 Versailles) donne une justification par un calcul d'angles de la construction des quatre triangles de la première question. Jean BOURLES (Ixelles, Belgique) et Michel MENGUAL (Paris) donnent le calcul du plus petit angle des parts triangulaires : ≈ 29°40'. Christian ROMON propose de découper avec la même règle un rectangle de côtés 1 et $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Le rapport des côtés des triangles obtenus est alors $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Il existe ainsi huit découpages différents.*





Antoine Wehenkel (Luxembourg) propose un partage original où les parts du gâteau ne sont pas d'un seul tenant.

113. Les sept bandes

La longueur en mètres du billard est $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (environ 1,886 m).

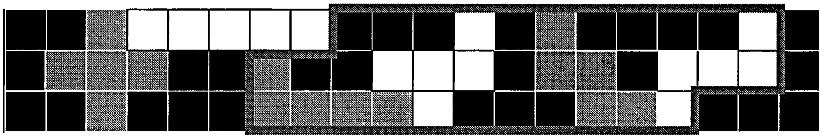
La largeur en mètres est $\sqrt{2}$ (environ 1,414 m) .

La projection horizontale de la trajectoire de la bille décrit quatre fois la largeur du billard.
La projectoire verticale décrit trois fois la hauteur.
Les angles d'incidence étant de 45°, ces deux distances sont égales à la distance parcourue par la bille (8 mètres) divisée par $\sqrt{2}$. D'où le résultat.

⊠ *Christian ROMON donne une solution classique dans le problème de billard : « déplier » la trajectoire par des symétries successives ayant pour axe le bord du rebond.*

114. Le pavage de pentaminos

Voici les douze pentaminos pavant le rectangle.
Le pavage est unique aux symétries près et au retournement près de la zone cernée d'un trait plus épais.

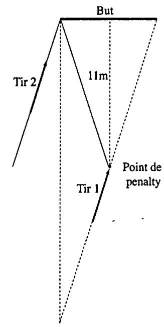


⌧ *Christian ROMON , Jérôme TOUZEAU.*

115. Malchance au «mondial»

La tribune D a 22 mètres de large.

Le ballon a frappé le poteau à environ 1,05 m de hauteur.



Une vue «du dessus» montre que le segment vertical situé entre les deux lignes de tir a pour longueur le double de la distance du point de penalty à la ligne de but, soit 22 mètres.

Par ailleurs, lors du premier tir, pour une profondeur de tir de 38,50 m (16,50 m + 22 m), le ballon se serait élevé de 2,44 m.

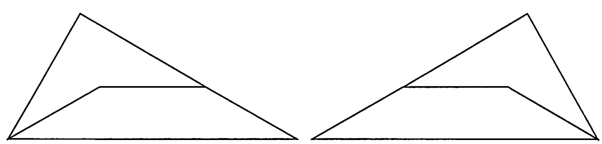
Pour une profondeur de tir de 16,50 m correspondant au deuxième tir, il s'élève donc proportionnellement, donc des 3/7 de cette hauteur.

À noter que la reprise de volée de l'avant-centre était très spectaculaire, puisque le ballon a été détourné à 1,74 m du sol !

⌧ *Christian ROMON signale que la largeur du but était une donnée superflue...*

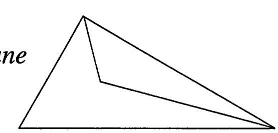
116. Image miroir

On découpe selon le dessin un trapèze isocèle (les angles à la base sont 30°) dont les trois côtés ont même longueur. C'est toujours possible, imaginez que vous faites glisser parallèlement à la grande base une règle jusqu'à ce que la petite base mesure autant que les arêtes latérales. La deuxième pièce du puzzle, en pivotant de 30° dans le sens des aiguilles d'une montre, engendre le triangle rectangle semi-équilatéral miroir.

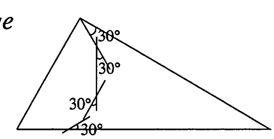


⌧ *De nombreux lecteurs signalent des solutions avec une découpe rectiligne. Certains découpent selon la médiane relative à l'hypoténuse : J-M. CARDOT (60140 Rosoy), Robert MUNNICH (Paris), Alain M. RONDET (92210 Saint-Cloud), d'autres séparent un triangle isocèle d'angles à la base de 30° dont le complémentaire est un quadrilatère possédant un axe de symétrie : André GRAMAIN (37000 Tours), Christian ROMON.*

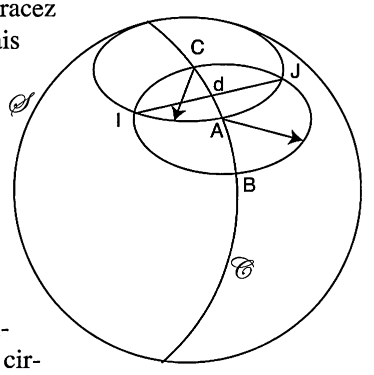
Antoine WEHENKEL (Luxembourg) donne une découpe selon une autre ligne brisée que celle proposée :



Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble) propose une solution astucieuse, où il suffit de faire pivoter la pièce convexe pour obtenir l'image miroir du triangle initial. Les segments constituant la ligne de partage ont tous la même longueur : la différence entre l'hypoténuse et le plus grand côté de l'angle droit, et sont inclinés l'un sur l'autre d'un angle de 30°.



117. Le rayon d'une sphère

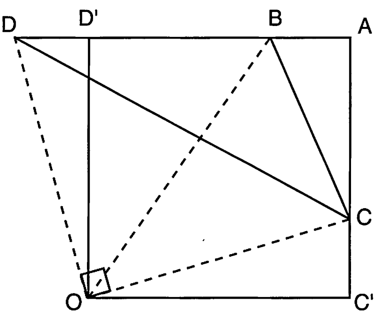


- Tracez un cercle sur la boule, et marquez son centre C.
- Prenez deux points quelconques distincts A et B sur le cercle et tracez deux nouveaux cercles de centres A et B et de rayons égaux (mais différents de celui du premier cercle), suffisamment grands pour que les nouveaux cercles se coupent en deux points I et J.
- Les points C, I et J sont à égale distance de A et de B. Ils sont donc dans le plan médiateur du segment AB, plan auquel appartient aussi le centre O de la sphère.
- O étant dans ce plan, à égale distance de C, I et J, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle CIJ. Sur la feuille de papier, on reconstitue au compas un triangle isométrique au triangle CIJ. À la règle et au compas, on construit le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Le rayon de ce cercle est le rayon de la sphère.

⌧ *Merci à Alain GENSAC (34 000 MONTPELLIER) pour sa solution astucieuse économisant au maximum les reports. Michel COURTAULT (91 140 Villebon sur Yvette) et Christian ROMON présentent deux solutions très proches : on trace un premier cercle sur la sphère, de centre C, sur lequel on marque un point A, puis un second cercle de centre A et de même rayon. Les deux cercles se coupent en I et J dont on peut, au compas, connaître la distance. On peut alors sur papier reconstituer le triangle CIJ puis placer, sur son cercle circonscrit, le point B diamétralement opposé à C. On reconstitue ensuite le triangle ABC dont le centre du cercle circonscrit est celui de la sphère.*

118. La chèvre et son chevreau

Blanchette voit l'enclos triangulaire sous un angle de 45°.



On construit sur le prolongement de (AB) le point D tel que BC = BD.

Le périmètre de ABC étant la moitié de celui du carré, on a : DD' = CC'.

Il en résulte que le triangle COD est non seulement isocèle, mais rectangle, la même rotation transformant [OC'] en [OD]', [C'C] en [D'D] et donc [OC] en [OD].

Mais le triangle CBD est aussi isocèle.

(OB) est un axe de symétrie pour la figure OCBD, ce qui établit que l'angle BOC est la moitié d'un angle droit.

Des remarques intéressantes et variées de la part de nombreux lecteurs :

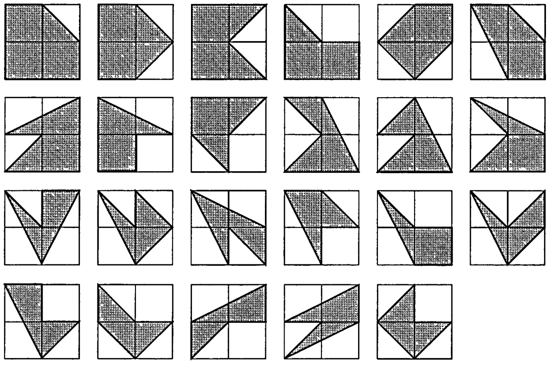
- Il existe une infinité de triangles ABC, qu'on peut construire en utilisant la tangente en B, quelconque sur [AD'], au cercle de centre O et de rayon OD'. Cette construction même donne une valeur fixe de 45° à l'angle BOC.

⌧ *Pierre ANDRE (54560 Mercy le Haut), Mme BENOIT (67000 Strasbourg), P. CAHUSAC (Paris), Marcel DAVID (74200 Thonon les Bains), J. DREVET (13012 MARSEILLE), Michel MENGUAL (Paris), M. PATRON (59910 Bondues), Jacques VERGE (Paris).*

- On peut trouver dans ce problème de nombreux invariants : aussi bien l'angle BOC que le périmètre du triangle ABC. Quelques lecteurs « initiés » signalent même la propriété selon laquelle la tangente à un cercle découpe sur un quadrant un triangle à périmètre constant égal

au diamètre du cercle.
- Jean BERRY (92260 Fontenay aux Roses), Alain MARUANI (92330 SCEAUX), Christian ROMON (78420 Carrières sur Seine).
- Le problème devant trouver une solution en nombres entiers de sauts, nos lecteurs ont parfois fait valoir que les seules valeurs possibles pour les côtés du triangle ABC étaient 6, 8 et 10, ce que les mathématiciens appellent un triplet de Pythagore, et ont fait appel à des relations métriques connues dans les triangles pour conclure.
- Sébastien BIOULAC (Paris), Christian GUYARD (01700 Neyron), Alexei KHARLAMOV (Paris), Joël LIBRAND (86360 Chasseneuil du Poitou).
- Le problème peut aussi se résoudre de manière très élémentaire, en utilisant simplement le théorème de Pythagore et quelques calculs trigonométriques.
- Jacques CHAUPIN (51300 Vitry le François), R. COELHO (92420 Vaucresson), Théo SPIELMANN (L-9080 Ettelbruck).
- Contributions diverses de Philippe JULLIAN (75013 Paris), René CORI (Paris).

119. Les pentagones



Nous avons dénombré les 23 pentagones ci-dessous, classés par aires décroissantes.
- Les lecteurs ont ici rivalisé d'astuce pour trouver une classification des 23 pentagones ayant leurs sommets sur les nœuds d'une grille carrée 3 × 3, soient

• un pentagone utilisant les quatre sommets du carré,
• quatre utilisant trois sommets et le centre,
• un seul avec trois sommets sans le centre,
• deux avec deux sommets sans le centre,
• neuf avec deux sommets et le centre,
• un avec un seul sommet sans le centre,
• quatre avec un seul sommet et le centre et
• un seul sans aucun sommet.

⊠ *Christian ROMON, Antoine WEHENKEL (Luxembourg), Jean BOURLIES.*

120. La quadrature du cercle

Un tel carré peut effcctivement se construire à la règle et au compas, mais n'a pas la même aire que le cercle.

La construction des tangentes perpendiculaires ne pose pas de problème, sachant que le rayon est perpendiculaire à la tangente au cercle.

Il suffit alors de prolonger la droite BO jusqu'au cercle qu'elle rencontre en D. En appelant a le côté du carré et r le rayon, le théorème de Thalès dans le triangle BAD nous donne alors l'égalité:

$\frac{r}{a\sqrt{2}} = \frac{a-r}{a}$. On en déduit que le rapport de l'aire du cercle à celle du carré est de l'ordre de 1,08.

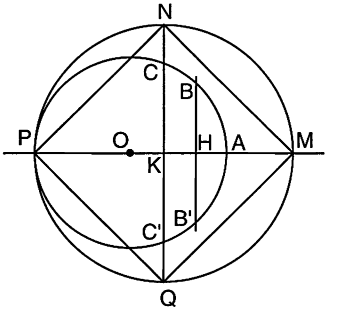
Bien approximatif, le jeune Anaxagore !

Quelques lecteurs ont cru bon de faire appel à l'histoire pour réhabiliter Anaxagore et excuser son erreur.

⊠ *Michel COURTAULT (91140 Villebon sur Yvette) détaille géométriquement une « quasi-*

quadrature » du cercle qui aboutit à prendre pour valeur approchée de p celle des Babyloniens de 2000 avant J-C., H est milieu de [OA] et K de [OH], et KN = KP = KQ. L'aire du carré MNPQ est celle du cercle de rayon OA à 0,5% près.
Vladimir GABAS (17317 Esnandes) donne lui aussi une construction fort détaillée du carré d'aire égale à celle du cercle, correspondant à u peu différent de

$(1 + F) \times \dfrac{12}{10}$ *qui serait, selon lui, la valeur fournie par Henri*



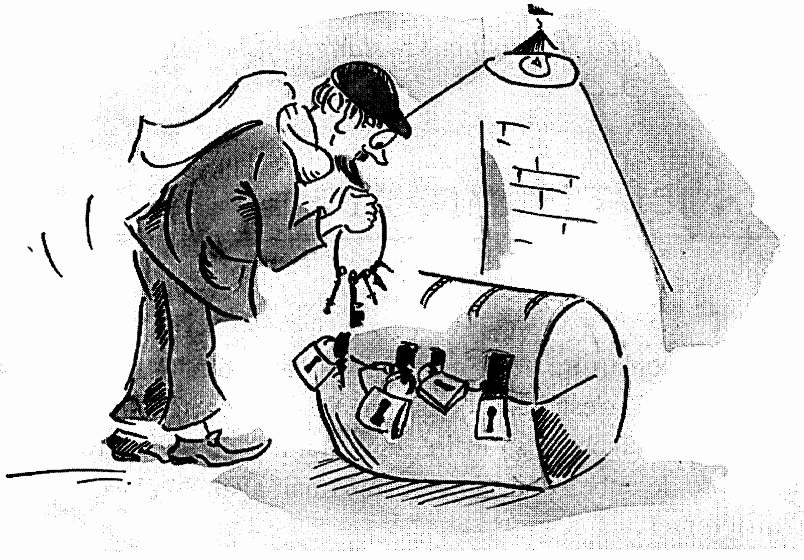
Vincenot dans « Le pape des escargots », mais qui est en réalité l'une de celles de Ramanujan (1887-1920). Michel HEBRAUD (31000 Toulouse) nous adresse également de nombreux détails historiques et cite en particulier la valeur de u des Egyptiens

(2000 avant J-C.) $\dfrac{256}{81}$ *obtenue en assimilant le cercle au*

carré dont le côté est les huit neuvièmes du diamètre.
Une autre contribution intéressante de Jean RIPOCHE (56340 Carnac).

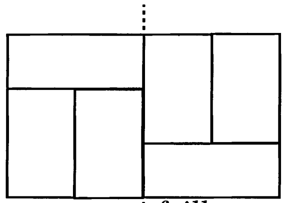
Curiosités & paradoxes

Chapitre 3

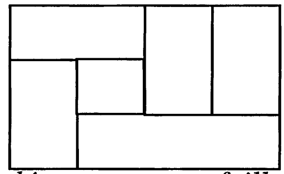


121. Rectangles sans faille

Problème n°6 du 25-02-97



faille



découpage sans faille

Lorsqu'on découpe un rectangle en plusieurs rectangles de plus petite taille, il peut se produire une « faille », ligne de section traversant le rectangle de part en part, horizontalement ou verticalement.
On peut montrer que dans un découpage comportant 3, 4 ou 6 morceaux rectangulaires, il y a toujours une faille.

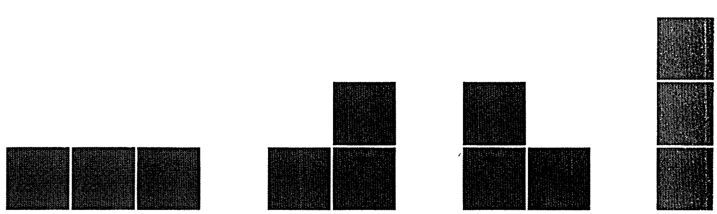
Mais sauriez-vous découper sans faille un rectangle de 8 × 5 en 20 rectangles de 2 × 1 ?
Quelle est (en superficie) le plus petit rectangle qu'on puisse découper sans faille en rectangles de 2 × 1 ?

122. Pierre sur pierre

Problème n°10 du 25-03-97

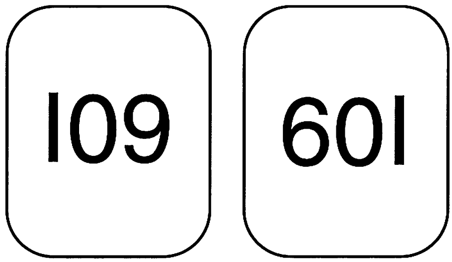
Un enfant veut construire des « maisons » à l'aide de cubes identiques. Faire une maison, pour lui, c'est juste construire le mur de façade, en juxtaposant des "tours" de 1, 2, 3... étages, c'est-à-dire des colonnes qui ne sont limitées en hauteur que par le nombre de cubes dont il dispose. Ainsi, avec 3 cubes, il peut construire 4 "maisons" différentes.

Et avec 4 cubes ? Sans les construire toutes, sauriez-vous trouver combien de maisons il peut construire avec 10 cubes ?



123. Économie de cartes

Problème n°15 du 29-04-97



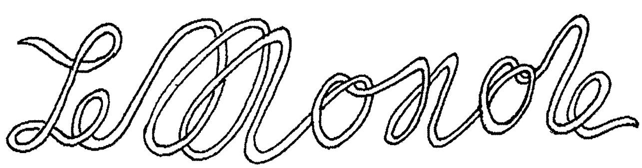
Pour les besoins d'un jeu, un éditeur fait imprimer des cartes portant tous les nombres de 100 à 999. Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux nombres, selon qu'on les oriente dans un sens ou l'autre. Par exemple, **1 0 9** se lira **6 0 1** en retournant la carte.
Dans un tel cas, par mesure d'économie, il n'imprime qu'une carte au lieu de deux.

Combien de cartes doit-il imprimer en tout ?

124. La fête à nœuds nœuds

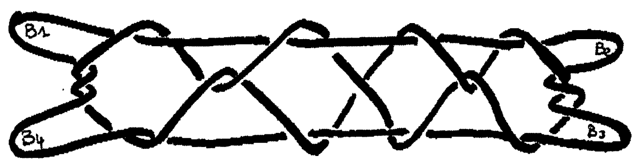
Problème n°20 du 03-06-97

On tire sur les deux extrémités de la cordelette.



Combien de nœuds se forment ?

Plus difficile : deux enfants ont réalisé cette "échelle de Jacob" avec un anneau de ficelle passé autour de leurs doigts.



Sauriez-vous, en un minimum d'étapes, dénouer cette construction pour retrouver l'anneau initial ?

125. L'armée des uns

Problème n°25 du 08-07-97

Vous pouvez le vérifier, à la main ou sur une calculatrice :
$6^2 - 5^2 = 11$
$56^2 - 45^2 = 1111$
$556^2 - 445^2 = 111111$

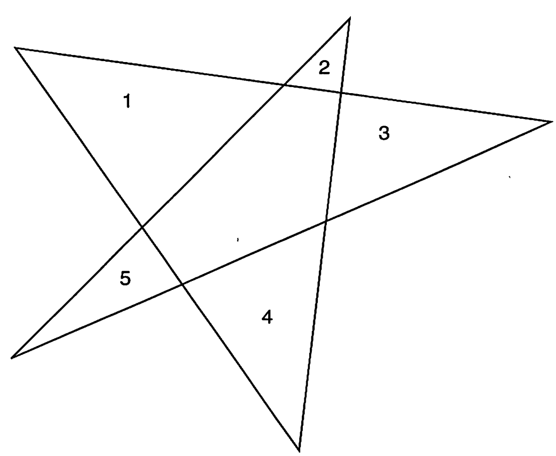
Mais si vous lui demandez de calculer ***$5555556^2 - 4444445^2$*** , la plupart des calculatrices auront du mal à vous répondre, car vous dépassez leur capacité. Prouvez que l'homme est plus fort que la machine et ***donnez le résultat de cette opération.***
Il faudra, naturellement, justifier votre affirmation !

126. Triangles « autonomes »

Problème n°30 du 12-08-97

Dans une figure, nous appellerons triangle "autonome" un triangle qui n'est traversé par aucune ligne. La figure ci-dessus montre qu'avec 5 segments, on peut former 5 triangles "autonomes".

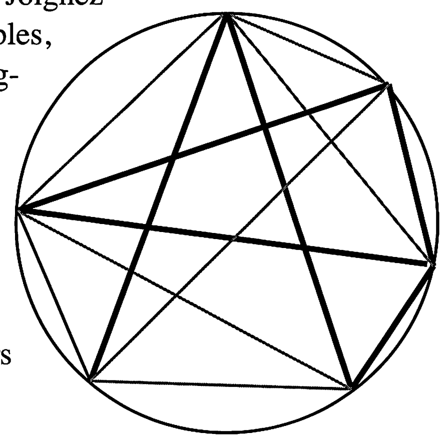
Peut-on faire mieux ?
Combien de triangles « autonomes », au plus, peut-on former avec 6 segments ? Avec 7 segments ?



127. Triangles unicolores

Problème n°35 du 16-09-97

Prenez six points sur un cercle, et deux crayons de couleurs différentes : gris ou noir, comme sur cette figure, par exemple. Joignez les points deux à deux de toutes les façons possibles, en utilisant à votre choix pour chacun des segments obtenus l'une des deux couleurs.



Tiens, sur notre dessin, l'un des triangles a ses trois côtés de la même couleur (noire, en l'occurrence).

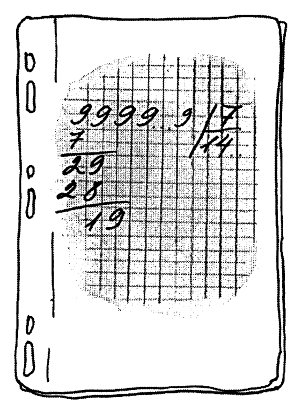
Le résultat se généralise : quelle que soit la manière de colorier les segments, il existe toujours un triangle unicolore.

Pouvez- vous le prouver ?

128. L'armée des neufs

Problème n°40 du 21-10-97

Existe-t-il des multiples de 7 dont l'écriture décimale est formée exclusivement de chiffres « 9 » ?
En particulier, le nombre formé de 1997 fois le chiffre « 9 » est-il divisible par 7 ? Et 1998 fois le chiffre « 9 » ?



129. Le casino miraculeux

Problème n°45 du 25-11-97

Dans ce jeu de casino, vous disposez en début de soirée de 40 jetons et d'1 franc de capital.
Chaque fois que vous gagnez, vous multipliez votre capital par le nombre de jetons misés, mais vous abandonnez votre mise.
Chaque fois que vous perdez, vous abandonnez les jetons misés et votre capital reste inchangé.

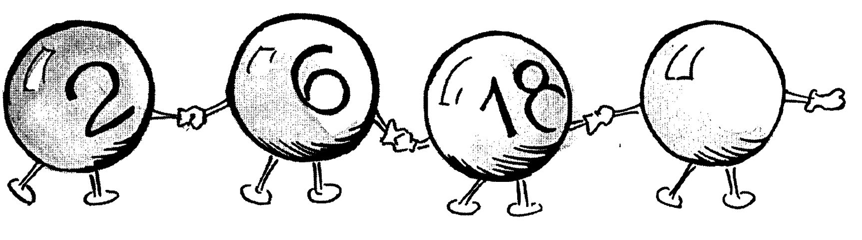
Quel est le capital maximum avec lequel vous pouvez quitter le casino ?

130. La suite de nombres composés

Problème n°50 du 30-12-97

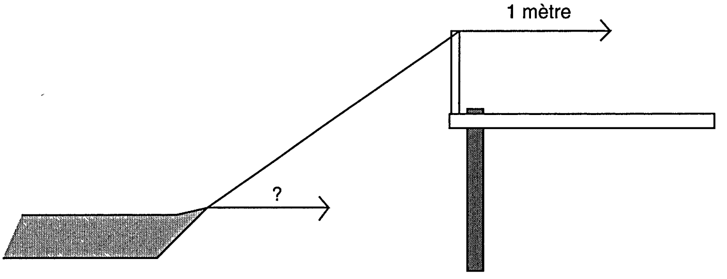
Trouvez une suite de 1997 nombres entiers consécutifs dont aucun n'est premier.

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre n'admettant aucun diviseur hormis 1 et lui-même. Un nombre qui n'est pas premier est appelé un nombre composé.



131. Le halage du bateau

Problème n°54 du 27-01-98



Pour amarrer un bateau, on fixe une corde à l'avant et on l'enroule à un poteau situé sur un ponton, devant lui et au-dessus (voir dessin). Le courant maintient la corde tendue.

Depuis le ponton, on tire la corde d'un mètre.

De combien avance le bateau ? D'un mètre ? De plus ? Ou de moins ?

132. Le pirate et l'aventurier

Problème n°59 du 03-03-98

Dans une île déserte, un pirate enterre à quelques mètres de distance les deux sacs d'un trésor :
le sac en jute contient 20 pièces d'or et 30 pièces d'argent,
le sac en cuir contient 20 pièces d'or et 20 pièces d'argent.
Malheureusement pour lui, il finit sa vie au bagne sans avoir pu récupérer son magot. De nombreuses années plus tard, un aventurier débarque sur cette île et creuse le sol au hasard. La fortune lui sourit, puisqu'il trouve un des deux sacs. Il y plonge la main et en sort une pièce d'or.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du sac en cuir ?

133. Le jeu des doublets

Problème n°64 du 07-04-98

Vous connaissez sans doute le jeu que Lewis Carroll appelait le jeu des doublets.

Le but est de relier deux mots de même longueur (par exemple aller de **mal** en **pis**) grâce à une chaîne de mots ayant un sens dont chacun ne diffère du précédent que par une lettre : **mal**, mas, mis, **pis**.

Nous vous proposons de jouer au même jeu, mais avec des nombres. Seuls sont admis les nombres premiers (ceux qui n'ont aucun autre diviseur que 1 et eux-mêmes, comme 1999 et 2003), et chacun ne doit différer du précédent que par un chiffre.

Quelle est la chaîne la plus courte de nombres premiers qui permette de passer de 1999 à 2003 ?

134. En noir et blanc

Problème n°70 du 19-05-98

On veut noircir certaines cases d'une grille carrée 5 × 5, de manière que chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale et chaque parallèle aux diagonales contienne au plus deux cases noires.

Quel est le nombre maximum de cases noires d'une telle grille ?

Donnez un exemple de solution maximale.

135. La ligne infernale

Problème n°75 du 23-06-98

Une nouvelle ligne du RAR (Réseau Automatique Régional) vient d'être implantée.

Pour optimiser son efficacité, les ingénieurs ont décidé d'imposer les contraintes suivantes à la longueur des sections (intervalles entre deux gares) :

- La longueur de trois sections consécutives ne doit jamais être supérieure à 16 km
- La longueur de cinq sections consécutives ne doit jamais être inférieure à 27 km

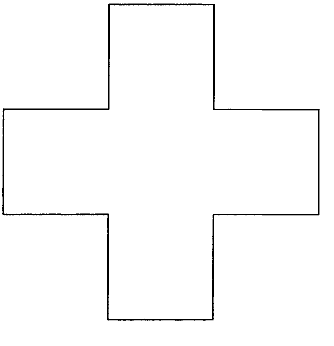
Quel est le nombre maximum de sections de cette ligne ?

136. L'enseigne

Problème n°80 du 28-07-98

Un commerçant vient de racheter une pharmacie pour en faire un magasin d'une célèbre chaîne à l'enseigne carrée. Il récupère la croix en bois vert qui servait d'enseigne, et en deux coups de scie, la découpe en quatre morceaux qu'il réarrange pour former un carré.

Reconstituez le découpage et l'assemblage.



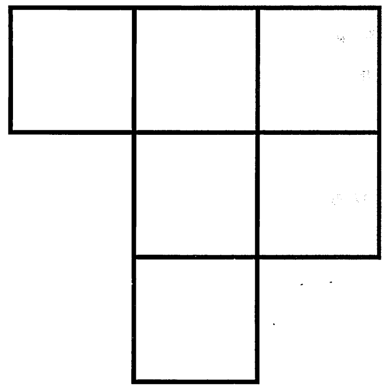
137. Les hexaminos «H»

Problème n°85 du 01-09-98

En assemblant deux carrés de même taille accolés par un côté, on forme un domino. En en assemblant trois, on forme un trimino.

...

En en assemblant six, on forme un hexamino. Deux hexaminos qui se déduisent par symétrie sont considérés comme égaux.

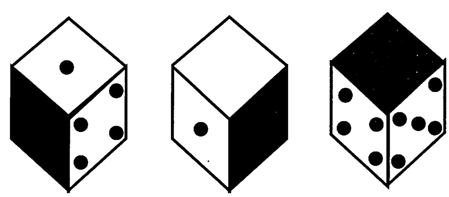


Combien y a-t-il d'hexaminos différents ? Sauriez-vous paver un rectangle de dimensions 9×12 avec 18 hexaminos «H» de la forme ci-dessus ?

138. Le dé insolite

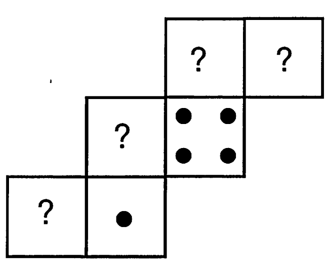
Problème n°90 du 06-10-98

Voici trois vues d'un même dé.



Qu'y a-t-il sur la face inférieure de la troisième vue ?
(la face opposée à la face noire) ?

Complétez son «patron».



139. Gardons nos distances

Problème n°95 du 10-11-98

Quel est le plus grand nombre de points que l'on peut placer dans un disque de rayon 100 m, de telle sorte que deux d'entre eux soient éloignés d'au moins 100 m ?

Même question en exigeant, cette fois, que deux d'entre eux soient éloignés de plus de 100 m !

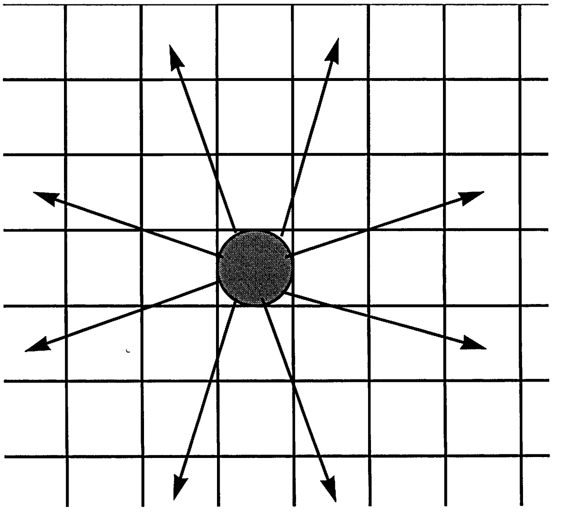
140. Le « supercavalier »

Problème n°100 du 15-12-98

Un nouveau jeu ressemblant aux échecs, le « succès », vient d'être inventé. Il se déroule lui aussi sur un quadrillage, le succès-damier, dont certaines cases sont blanches et les autres noires.

Parmi les pièces de ce jeu, figurent les supercavaliers dont la case cible est obtenue en comptant un pas selon l'une des directions, puis trois pas selon l'autre direction, comme sur le dessin ci-dessus.

Un supercavalier passe toujours d'une case blanche à une case noire ou d'une case noire à une case blanche.

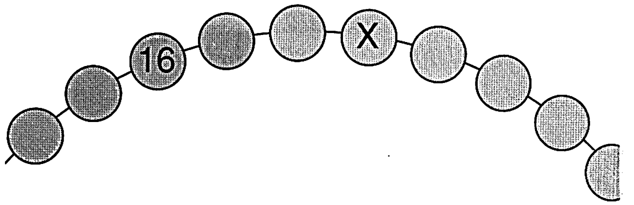


Pouvez-vous indiquer comment les cases du succès-damier sont colorées ?

Si on remplaçait la marche du supercavalier par une autre progression du même genre (tant de pas dans une direction puis tant de pas dans l'autre direction), existerait-il toujours un coloriage du succès-damier permettant à la case du supercavalier de changer systématiquement de couleur ?

141. La ronde des nombres

Problème n°110 du 23/02/1999



250 cases rondes sont réparties sur la circonférence d'un cercle.
On a inscrit dans chacune d'entre elles un nombre, de telle sorte que la somme des nombres contenus dans 4 cases consécutives valent toujours 100.

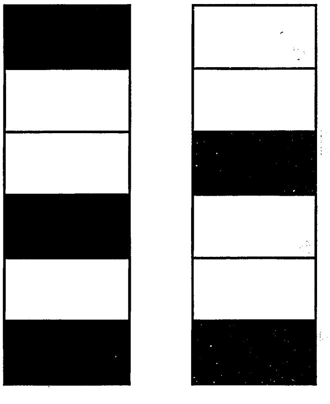
L'une des cases, représentée sur le schéma, contient 16.

Quel nombre est inscrit dans la case marquée d'une croix ?

142. Le jeu de construction

Problème n°111 du 02/03/1999

Ce jeu de construction comporte des briques blanches et des briques noires.
Le but du jeu est de superposer des briques pour construire une tour. Mais deux briques noires n'ont pas le droit de se toucher. Voici deux exemples de tours de hauteur 6.



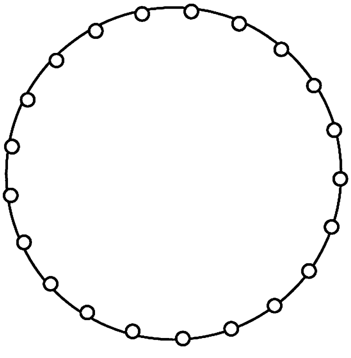
Combien peut-on construire de tours différentes de hauteur 6 ?

Sauriez-vous trouver une règle qui donne le nombre de tours différentes admettant pour hauteur un nombre n quelconque de briques ?

143. Les pions noirs

Problème n°115 du 06/04/1999

21 points sont espacés régulièrement sur un cercle.

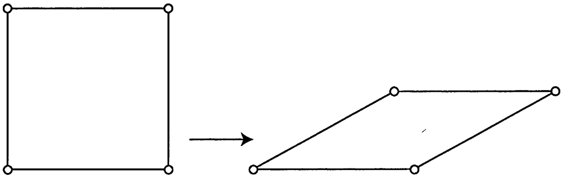


Combien de pions noirs, au maximum, peut-on placer sur ces points de façon que les distances qui les séparent soient toutes différentes ?
(il s'agit de la distance entre leurs centres)

144. Treillis

Problème n°120 du 11/05/1999

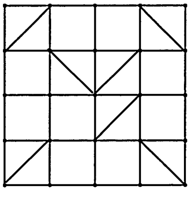
Un treillis est un assemblage de barres articulées à leurs points de jonction. Lorsque ses mailles sont carrées ou rectangulaires, il n'est en général pas rigide sans adjonction de barres diagonales.

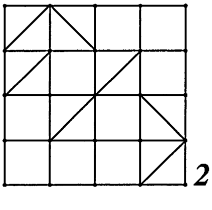


Les treillis suivants sont-ils rigides ?

Combien de barres diagonales au minimum doit-on ajouter à un treillis 4 × 4 à mailles carrées, qui n'en comporte aucune, pour le rigidifier ?

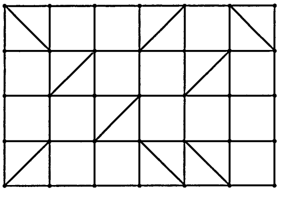
1





2

3



145. Le bois dont on fait les flûtes

Problème n°125 du 15/06/1999

Dans une plantation de bambous, les plants sont alignés en 100 rangées de chacune 100 bambous. Chose étonnante, les 10 000 bambous sont de tailles toutes différentes.
Dans chaque rangée Est-Ouest, on choisit le bambou le plus grand, qu'on peint en bleu. On donne le numéro 1 au plus petit des bambous bleus.
Dans chaque rangée Nord-Sud, on choisit alors le bambou le plus petit, qu'on peint en rouge. On donne cette fois le numéro 2 au plus grand des bambous rouges, qui s'avère différent du numéro 1.

Lequel est le plus grand, le bambou numéro 1 ou le numéro 2 ? Choisissez entre ces quatre réponses :

❒ Le bambou numéro 1.
❒ Le bambou numéro 2.
❒ Ce peut être l'un ou l'autre, selon la configuration.
❒ Les hypothèses sont fausses car le bambou numéro 1 et le numéro 2 ne font qu'un, quelle que soit la configuration.

146. Les neuf alignements

Problème n°130 du 20/07/1999

Disposez ces neuf jetons sur une table de façon à obtenir neuf alignements de trois jetons.

Combien de configurations différentes permettent-elles de répondre à la question ?

147. Vendredi 13

Problème n°135 du 24/08/1999

En 1999, il n'y avait qu'un vendredi 13 et c'était le 13 août.
Mais certaines années en comptent jusqu'à trois.

Quelle est la première année du 21ème siècle qui comptera trois vendredis 13 ?

Et la première année du 22ème siècle ?

148. Le pirate égyptologue

Problème n°140 du 28/09/1999

Le capitaine d'un vaisseau pirate, qui s'est entiché de la civilisation égyptienne antique, a découvert que chez les anciens Égyptiens, on n'utilisait que des fractions dont le numérateur valait 1.

Depuis, il exige que le partage du butin après un pillage attribue toujours aux membres de l'équipage une fraction de butin différente et de numérateur 1, décroissante selon l'ordre hiérarchique.
Ainsi, lui-même s'attribue la part la plus importante, son second une part inférieure, et ainsi de suite... Si la répartition s'avère impossible selon ce principe, le butin est restitué aux malheureuses victimes.

Comment s'opère le partage si les pirates sont 3 ? S'ils sont 4 ? S'ils sont 5 ?
Le partage du butin selon cette règle est-il possible quel que soit le nombre de pirates ?

149. Le jardinier vantard

Problème n°144 du 02/11/1999

C'est l'automne. Le jardinier vient de planter les bulbes de tulipes et de jonquilles dont les fleurs orneront votre jardin au printemps. Il vient vous en rendre compte : « Ce sera très joli, parce que pas du tout régulier. Je me suis cependant arrangé pour mettre les oignons en terre de telle sorte qu'à 20 centimètres de chaque tulipe, il y ait cinq jonquilles et qu'à 20 centimètres de chaque jonquille, il y ait 5 tulipes ».

Est-ce possible ? Si oui, comment ?

150. L'architecte négligent

Problème n°147 du 23/11/1999

Un architecte négligent a laissé traîner sous la pluie sa règle graduée de 17 cm de long. Les trois premières graduations (marquées 1, 2 et 3 cm) sont restées intactes, mais la plupart des autres ont été effacées. Pourtant, l'architecte remarque qu'en lisant convenablement sa règle entre deux des graduations restantes, entre une graduation et l'un des bords ou entre les deux bords, il peut mesurer toute longueur entière comprise entre 1 et 17 cm.

Combien y a-t-il au minimum de marques non effacées et où sont-elles situées ?

Intrigué par ce phénomène, notre architecte remarque que si pareille mésaventure lui arrivait avec sa règle de 36 cm, 8 marques seulement lui suffiraient à mesurer toute longueur entière comprise entre 1 et 36 cm.

Où devraient-elles être placées ?

151. La rame de la compagnie FIBO

Problème n°155 du 18/01/2000

La compagnie FIBO (Ferrovière Internationale du Bassin Ouest), installée à Pise, a un penchant très net pour la rigueur dans l'exploitation de ses lignes de chemin de fer. Toute rame d'une même liaison comporte en effet une motrice suivie d'un nombre invariable de voitures, qui peuvent être de seconde classe ou de première classe. Le nombre de voitures de première classe est variable, mais deux voitures de première ne se suivent jamais.

La ligne Pise - Turin, peu fréquentée, comporte des rames de cinq voitures.

Combien y a-t-il de dispositions possibles des voitures de première ?

En revanche, la ligne Pise - Bruxelles Maxi en comporte quinze.

Combien, cette fois, y a-t-il de dispositions possibles des voitures de première ?

152. Préfixes pour puissances

Problème n°160 du 22/02/2000

En multipliant 2 par lui-même un certain nombre de fois, on obtient une puissance de 2, qui s'écrit avec un « 2 », suivi, en exposant, de ce nombre de fois. Ainsi, les premières puissances de 2 sont :

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, \ldots$$

Une puissance de 2 peut-elle commencer par le chiffre 7 ?

Et par les quatre chiffres 2 0 0 0 ?

153. Le carré inscrit

Problème n°165 du 28/03/2000

Il n'y a qu'une façon d'inscrire un carré dans un triangle ABC de telle sorte que deux des sommets soient sur AB, un troisième sur AC et le quatrième sur BC.

Sauriez-vous tracer un tel carré à l'aide d'une construction géométrique simple ?

154. Zigzag numérique

Problème n°166 du 04/04/2000

Avec les chiffres de 1 à 6, on peut fabriquer des nombres « zigzag ». Ces nombres, que nous appellerons des « 6-zigzags », ont 6 chiffres qui vont d'abord croissant, puis décroissant, puis croissant....
Par exemple, 231546 est un « 6-zigzag ».

Combien existe-t-il de « 6-zigzag » ?

Pour les spécialistes. On peut étendre le problème aux suites « zigzag » des n premiers nombres entiers : les nombres vont d'abord croissant, puis décroissant, puis croissant.....

Sauriez-vous construire un algorithme permettant de les dénombrer ?

155. Le partage de l'hexagone

Problème n°172 du 23/05/2000

Avant de mourir, un viticulteur légua à ses huit enfants un domaine en forme d'hexagone régulier. Mais il assortit son testament d'une étrange condition : que les huit parts soient non seulement égales en superficie, mais de formes parfaitement identiques.

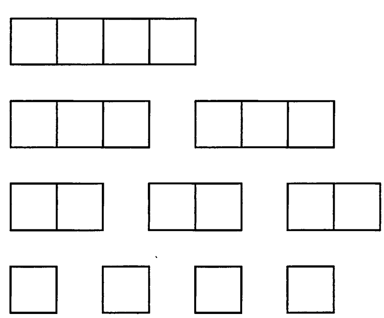
Fut-il possible de satisfaire sa dernière volonté ?

156. Touché - coulé

Problème n°175 du 13/06/2000

Le jeu de bataille navale se joue sur un damier.
Une flotte comporte un porte-avions (4 cases), deux cuirassés (3 cases), trois croiseurs (2 cases) et quatre sous-marins (1 case).
Deux navires distincts ne peuvent se toucher, même par un coin.

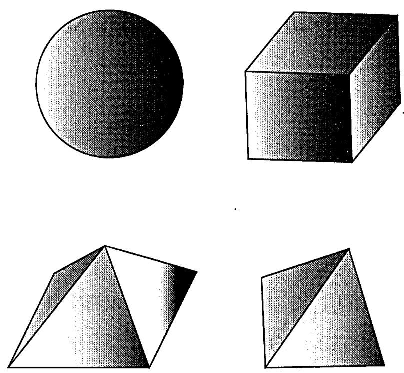
Pouvez-vous, en respectant ces règles, placer deux flottes complètes dans un quadrillage de 10 cases sur 10 ?



157. Pate à modeler

Problème n°181 du 23/07/2000

Par un après-midi pluvieux d'été, quatre enfants remplacent leurs constructions de sable par des réalisation en pâte à modeler. Chacun a utilisé intégralement un bâton de pâte à modeler (les bâtons sont identiques) pour réaliser, le premier une boule, le deuxième un tétraèdre régulier, le troisième une pyramide à base carrée (dont les faces triangulaires sont équilatérales), le quatrième un cube.
Voici les quatre œuvres d'art posées à plat sur une table, la pyramide reposant sur sa base carrée.

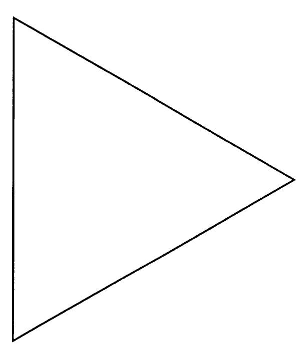


Classez ces solides par ordre croissant de hauteur.

158. Le partage du triangle

Problème n°185 du 22/08/2000

Quelle est la ligne droite la plus courte qui partage un triangle équilatéral en deux parties d'aires égales ?

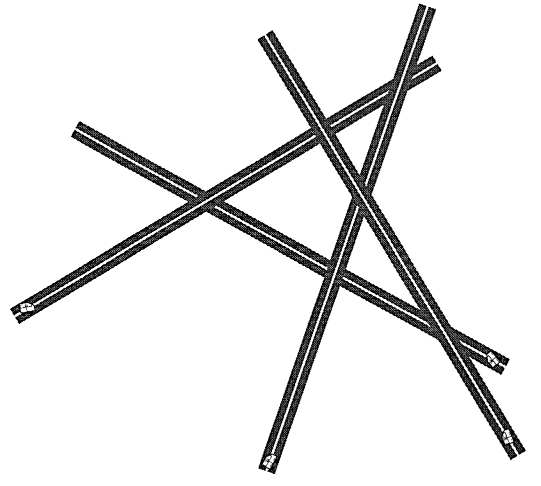


La réponse reste-t-elle la même si on n'exige plus que la ligne de partage soit rectiligne ?

159. L'échangeur

Problème n°190 du 26/09/2000

Quatre autoroutes rectilignes (A1, A2, A3, A4) se croisent, à des hauteurs différentes, sur l'échangeur représenté ci-contre.



Quatre voitures roulent à des vitesses constantes, une sur chacune de ces autoroutes.

Chose extraordinaire, la voiture 1, qui roule sur l'A1, passe à la verticale des voitures 2, 3 et 4 lorsqu'elle atteint les points de croisement avec les autres autoroutes.
De même, la voiture 2, qui roule sur l'A2, passe à la verticale de la voiture 1 (on le savait), et des voitures 3 et 4.

La voiture 3 passe-t-elle forcément à la verticale de la voiture 4 ?

160. La queue du dragon

Problème n°195 du 31/10/2000

2345678910 est un « dragon » de 9 écailles (la tête à droite, la queue à gauche).
- Les 9 nombres contenus dans les écailles sont consécutifs
- La queue, formée des 2/3 inférieurs des écailles (en l'occurrence 6 d'entre elles), admet le même total, 27, que la tête, formée du tiers supérieur (trois écailles).

Sauriez-vous trouver un dragon de 21 écailles ? Et un dragon de 24 écailles ? A quelle condition un dragon de longueur donnée existe-t-il ?

161. Les 2001 points

Problème n°205 du 09/01/2000

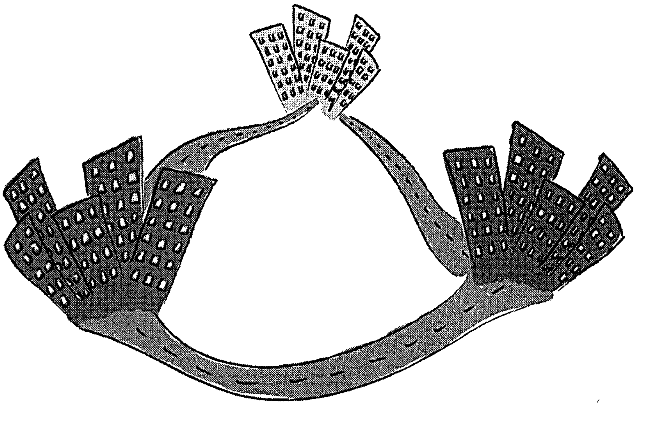
2001 points sont placés sur un plan.
Chose curieuse, chaque fois que vous joignez deux quelconques d'entre eux par une droite, cette droite rencontre un troisième (au moins) des points que vous avez placés.

Est-ce possible sans que les 2001 points soient alignés ?

162. Croisement interdit

Problème n°209 du 06/02/2001

Combien de villes, au maximum, est-il possible de relier directement deux à deux sans que deux des route ainsi construites ne se croisent ?
Peut-on construire six villes, trois de brique rouge et trois de pierre grise, et neuf routes, reliant directement chacune des villes rouges à chacune des villes grises sans que deux de ces routes ne se croisent ?

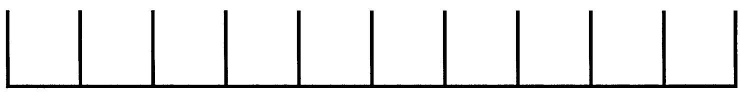


163. Minimax

Problème n°215 du 22/01/2001

Max et Minnie, deux redoutables bretteurs de nombres, s'affrontent crayon en main.
Leur objectif commun est de construire un nombre de dix chiffres différents (les chiffres de 0 à 9).
Mais Max a pour but que ce nombre soit le plus grand possible, Minnie qu'il soit le plus petit.
Chacun, à tour de rôle, écrit un chiffre à l'un des dix emplacements ci-dessous.
Max n'utilise que les chiffres impairs, Minnie les chiffres pairs (0 est pair).

Max commence. Chacun joue au mieux de ses intérêts.
Quel sera le nombre final ?

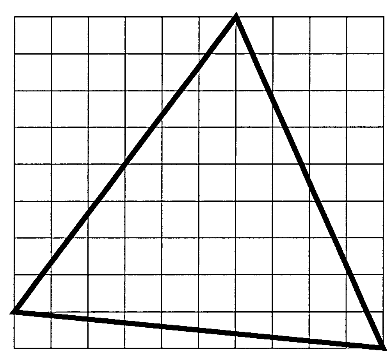


164. Triangles à carreaux

Problème n°220 du 24/04/2001

Sur du papier régulièrement quadrillé, un mathématicien en herbe s'efforce de tracer un triangle équilatéral dont les trois sommets sont situés sur les nœuds du quadrillage.
Sur ce dessin, il est proche du but, mais les longueurs des côtés ne sont pas tout à fait égales.

Le jeune homme parviendra-t-il à atteindre son objectif ?



165. Grand-père Euro

Problème n°225 du 29/05/2001

Un grand-père dispose de cinq pièces d'un euro. Il souhaite les répartir entre ses trois petits-enfants Xavier, Yvette et Zinedine de sorte que chacun ait quelque chose.

De combien de façons peut-il le faire ?
Même question avec onze pièces à répartir entre quatre petits-enfants ?

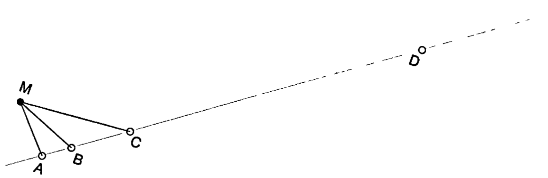
Les amateurs pourront généraliser à n pièces à répartir entre p gamins.

166. L'entraîneur géomètre

Problème n°229 du 26/06/2001

Pour entraîner ses buteurs et ses gardiens de but (titulaire et remplaçants), l'entraîneur a installé un étrange dispositif : les poteaux, plantés en A, B, C, D délimitent 3 buts de largeurs AB = 2 m, BC = 4 m, CD = 20 m dans lesquels sont placés les trois gardiens.
Dans un premier temps, les buteurs doivent s'installer en un point M d'où ils « voient » les deux buts AB et BC selon un même angle (non nul).

Quel est le rapport des longueurs MA et MC ?



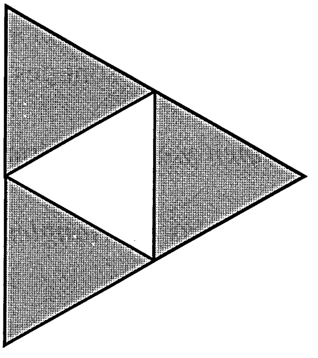
Dans un deuxième temps, le buteur vedette reçoit l'ordre de se placer en un point du terrain d'où il « voit » les trois buts sous le même angle.

Existe-t-il de tels points ? Si oui, où sont-ils ?

(D'après les olympiades académiques pour élèves de Première).

167. Puzzles triangulaires

Problème n°235 du 14/08/2001



Un fabricant voudrait éditer des puzzles dont le but est de reconstituer un triangle équilatéral à l'aide de pièces qui sont elles-mêmes toutes des triangles équilatéraux (pas forcément égaux).

Voici une reconstitution du modèle à 4 pièces, le 4-puzzle.

Existe-t-il des 5-puzzles ? Des 6-puzzles ?

Pour certains nombres n de pièces, il ne peut exister de n-puzzles. Quels sont ces nombres ?

168. Le plus court chemin

Problème n°240 du 18/09/2001

Pour traverser un lac, le plus court chemin n'est pas exactement ce que l'on imagine, nous dit un lecteur, Jacques Hennebert. C'est qu'on peut admettre que la surface du lac a la rotondité de la terre. Par exemple, si on tendait une corde entre ces deux villes, que nous nommerons A et B, situées au bord du lac L, la corde s'enfoncerait dans l'eau, pour atteindre en son centre la profondeur d'un mètre !

De combien, approximativement, s'enfoncerait la corde tendue entre deux villes C et D situées au bord du même lac mais distantes de trois fois plus que A et B ?

169. Les triangles entiers

Problème n°245 du 23/10/2001

Un «triangle entier» est un «vrai» triangle (non aplati) dont les longueurs des trois côtés sont des nombres entiers de cm.

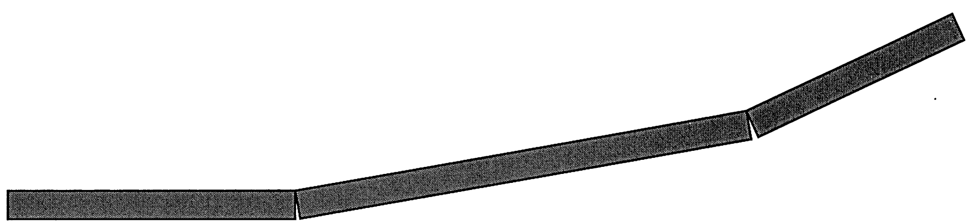
Combien y -a-t-il de triangles entiers de périmètre 14 ? Et de périmètre 11 ?

Y a-t-il plus de triangles entiers de périmètre 2004 ou de périmètre 2001 ?

170. La baguette cassée

Problème n°250 du 27/11/2001

On casse une baguette en trois morceaux. On suppose que les deux points de rupture sont totalement aléatoires, c'est-à-dire que toutes les configurations possibles de ces deux points sont équiprobables.

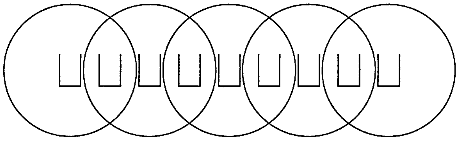


Quelle est la probabilité que les trois morceaux puissent être les trois côtés d'un même triangle ?

171. Les cercles magiques

Problème n°255 du 01/01/2002

Remplir les cercles magiques consiste à placer les nombres entiers de 1 à 9 dans les 9 alvéoles de façon que le total des nombres inscrits dans chaque cercle soit le même. Ce total sera appelé la « somme magique ». Sauriez-vous...



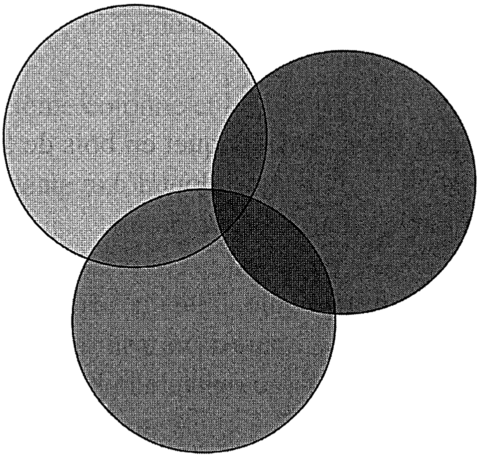
Remplir les cercles magiques avec la plus petite somme magique possible ?

Remplir les cercles magiques avec la plus grande somme magique possible ?

172. Régionalisation

Problème n°260 du 05/02/2002

Un cercle définit deux régions du plan (l'intérieur et l'extérieur).
Deux cercles définissent au maximum quatre régions.
Trois cercles définissent au maximum huit régions.



Combien de régions, au maximum, sont définies par quatre cercles ?

Et par 100 cercles ?

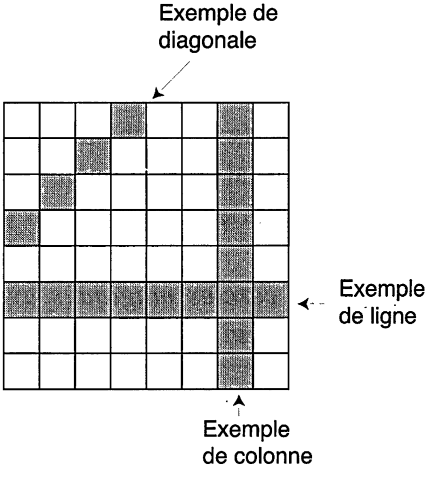
173. La diagonale des fous

Problème n°265 du 12/03/2002

On veut placer des fous sur cet échiquier sans que l'on trouve plus de deux fous sur une même ligne ou sur une même colonne.

Combien de fous, au maximum, peut-on placer sans qu'il y en ait plus de deux sur une même diagonale ?

Combien de fous, au maximum, peut-on placer sans que deux d'entre eux soient en prise, c'est-à-dire sans qu'il y en ait plus d'un sur une même diagonale ?



174. Le bilboquet

Problème n°270 du 06/04/2002

Une boule de bilboquet en bois de 5 cm de rayon est percée de part en part d'un trou cylindrique dont l'axe passe par le centre de la boule. La hauteur du cylindre est elle aussi de 5 cm.

Une deuxième boule, faite du même bois, n'a que 3 cm de rayon. Elle est percée, elle aussi, de part en part d'un trou cylindrique dont l'axe passe aussi par le centre. Ce trou est moins large puisque la hauteur du cylindre est encore de 5 cm.

Quelle est la boule (évidée) la plus lourde ?

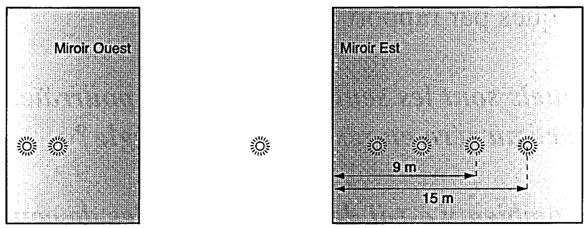
175. De l'autre côté du miroir

Problème n°275 du 22/05/2002

Dans une salle obscure dont les murs Est et Ouest sont des miroirs, on allume une lampe. Instantanément, de chaque côté de la pièce, s'illumine une ligne infinie d'images virtuelles de cette lampe. Sur le miroir Est, un observateur pourrait ainsi estimer la troisième image virtuelle à 9 mètres et la quatrième à 15 mètres du miroir.

Quelle est la largeur de la pièce ? A quelle distance de chacun des miroirs se trouve la lampe ?

NB. Ne vous fiez pas au dessin, volontairement faux !

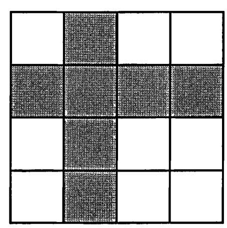


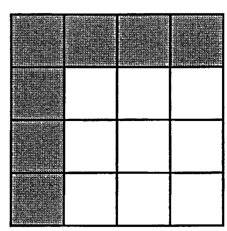
176. Les carrés d'argent

Problème n°280 du 02/07/2002

Un tableau carré 4 × 4 dont les cases contiennent des nombres est appelé « carré d'argent » d'ordre 4 si
- les 7 nombres obtenus en réunissant la première colonne et la première ligne sont les entiers de 1 à 7
- les 7 nombres obtenus en réunissant la deuxième colonne et la deuxième ligne sont les entiers de 1 à 7
- les 7 nombres obtenus en réunissant la troisième colonne et la troisième ligne sont les entiers de 1 à 7
- les 7 nombres obtenus en réunissant la quatrième colonne et la quatrième ligne sont les entiers de 1 à 7

De même, un carré d'argent d'ordre 5 vérifiera les mêmes propriétés à la différence que ce sont les entiers de 1 à 9 qui devront figurer en réunissant la ligne et la colonne de même rang (entre 1 et 5).



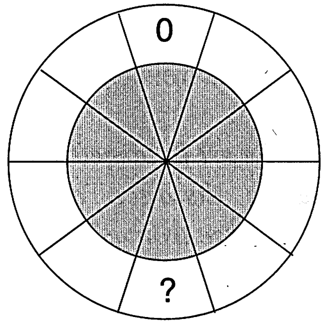


Trouver, s'ils existent, un carré d'argent d'ordre 4 et un carré d'argent d'ordre 5.

177. Algèbre de boule

Problème n°285 du 06/08/2002

Dans ce cylindre d'un nouveau jeu apparenté à la «boule», les nombres entiers de 0 à 9 se trouvent dans chacun des 10 secteurs. Ils sont placés de telle sorte que la somme des deux nombres inscrits dans deux secteurs consécutifs quelconques soit égale à celle des nombres inscrits dans les secteurs symétriques par rapport au centre.



Quels sont les seuls numéros qui pourraient être placés face au zéro en respectant cette règle ?

Combien y a-t-il de façons possibles de compléter le cylindre ?

178. Texto

Problème n°290 du 10/09/2002

Anaïs et Chloë, deux chipies, ont pris l'habitude de communiquer par «texto» sur leurs téléphones portables pendant les cours de mathématiques. Elles se transmettent ainsi des additions selon un code très simple : elles remplacent chaque chiffre et chaque signe opératoire par une lettre, deux symboles différents étant codés différemment, deux mêmes symboles étant toujours codés de la même façon (et aucun nombre ne commençant par 0).
Ainsi, l'addition 46 + 87 = 133 pourra être codée «SURMONTEE», avec S pour 4, U pour 6, R pour +, M pour 8, O pour 7, N pour =, etc.

Anaïs vient de transmettre le texto «LABYRINTHES».

Quel est le résultat de cette addition, sachant qu'il est le plus petit nombre à quatre chiffres possible ?

179. Open space

Problème n°295 du 15/10/2002

Le siège de cette multinationale occupe sur un niveau un vaste espace en forme d'hexagone régulier entouré de hauts murs. Il n'y a pas de bureaux fermés à proprement parler, mais pour séparer les employés, on a installé des cloisons basses de même longueur (munies d'une porte) qui forment ainsi un maillage de losanges identiques (chacun accueille exactement un employé) dont chaque côté correspond à une cloison. On a utilisé 1488 cloisons.

Combien le siège compte-t-il d'employés ?

180. Armistice sur l'échiquier

Problème n°300 du 19/11/2002

Huit tours occupent pacifiquement huit cases de cet échiquier (numéroté comme sur le dessin). Aucune tour ne menace donc aucune autre, ou, si vous préférez, deux quelconques d'entre elles ne sont jamais situées sur une même ligne ou une même colonne.

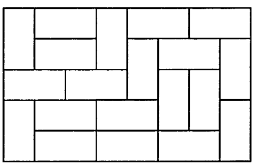
On fait la somme des numéros des cases sur lesquelles elles se trouvent.

Quelles sont les valeurs possibles de cette somme ?

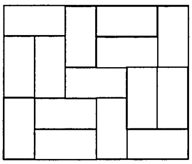
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Curiosités & paradoxes SOLUTIONS

121. Rectangles sans faille



Voici le découpage sans faille d'un rectangle 8 × 5 en rectangles 2 × 1.



Le plus petit rectangle qui puisse se découper sans faille en rectangles 2 × 1 est **le rectangle 6 × 5.**

122. Pierre sur pierre

Le problème se modélise en représentant les n cubes par un ruban de longueur n.
Chaque «tour» équivaut à une coupe dans ce ruban pour prendre juste les carrés nécessaires, et les empiler pour former la tour.
Pour chacune des $(n - 1)$ subdivisions, il y aura deux possibilités : opérer une coupe ou non. Pour la première subdivision, 2 cas, pour la deuxième, deux cas, ce qui double le nombre de cas, ..., pour la $(n - 1)$ème, 2 cas. Au total, on dénombrera donc 2^{n-1} façons de découper le ruban. Redressons les tours, en les assemblant côte à côte pour construire les maisons. Nous obtenons 2^{n-1} maisons. Soit, avec 4 cubes, 8 maisons, et **avec 10 cubes, 512 maisons.**

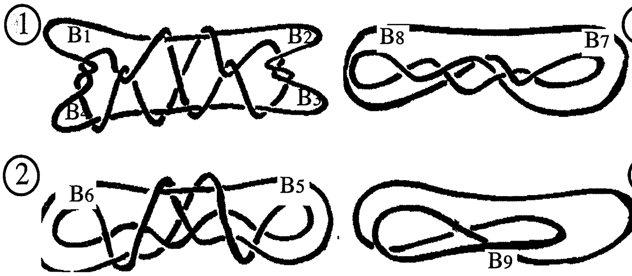
123. Économie de cartes

Les chiffres à «double lecture» sont **0, 1, 6, 8 et 9**.
Pour chaque centaine commençant par 6 ou 9, il y a 20 cartes à double lecture, et pour chaque centaine commençant par 1 ou 8 il y en a 17, puisque 101, 111, 181 et 808, 888, 818 se lisent de la même façon quand on les retourne.
Seule la moitié de ces 74 cartes sera imprimée : le jeu comprendra donc 900 - 37 = **863 cartes.**

✉ *Maurice LOUY (Montluçon) et à Charles MILLET (Évian)*

124. La fête à nœuds nœuds

• Nœud «Le Monde» : il se forme **deux nœuds**, sur le M et le O, pas sur le D.
• Échelle de Jacob :



③ 1. Faire passer B1 et B2 au-dessus de l'échelle.
2. Faire passer B3 et B4 au-dessous.

④ 3. Faire passer B5 et B6 au-dessus.
4. Détordre B7 et B8. Il suffit alors de tirer sur B9.

125. L'armée des uns

La réponse, vous vous y attendiez, est 11111111111111 (**quatorze fois le chiffre 1**).
Pourquoi ? La reconnaissance d'un « produit remarquable » permet la première étape, le reste vient seul :

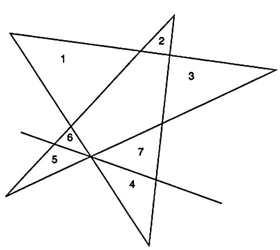
$$\begin{aligned} 5555\,556^2 - 4444\,445^2 &= (5555\,556 - 4444\,445) \times (5555\,556 + 4444\,445) \\ &= 1111111 \times 10000001 \\ &= 1111111 \times (10000000 + 1) \\ &= 1111111 \times 10000000 + 1111111 \\ &= 11111110000000 + 1111111 \end{aligned}$$

🖂 *B. BARBÉ (Versailles), A. DENIS (Esvres), M. SCHEFFER (Mende)...*

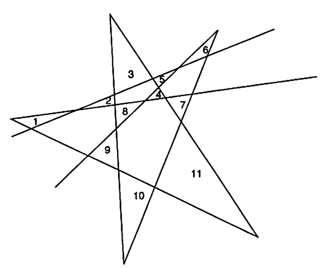
🖂 *J. REYNAUD (Saint-Jean-en-Royans) signale une généralisation à :*
$66667^2 - 33334^2$, etc., qui donne un résultat composé uniquement de 3, et $77778^2 - 22223^2$, dont le résultat n'est composé que de 5. On obtiendra de même un résultat composé uniquement de 7 avec $8889^2 - 1112^2$.

126. Des triangles autonomes

A notre connaissance, le nombre maximum de triangles « autonomes » qu'on peut former avec 5 segments est 5. Avec **6 segments**, on peut former **7 triangles autonomes**. Avec **7 segments**, on peut en former **11**. Si des lecteurs trouvent mieux, qu'ils nous écrivent.
Apparemment, les lecteurs n'ont pas trouvé mieux, puisqu'aucun ne nous a écrit à ce sujet.



Avec 6 segments



Avec 7 segments

127. Triangles unicolores

Numérotons les points 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cinq segments partent du point 1, dont trois au moins, par exemple 12,13 et 14 sont de la même couleur, que nous supposerons noire.
* Si le segment 23 est noir, le triangle 123 est unicolore noir.
* Si le segment 23 est gris :

• si 34 est noir, alors le triangle 134 est unicolore noir.

• si 34 est gris, et si 24 est gris, c'est le triangle 234 qui est unicolore gris, et si 24 est noir, c'est le triangle 124 qui est unicolore noir.

Il y a **de toute façon un triangle unicolore**.

128. L'armée des neufs

On peut essayer de trouver « à la main » les multiples de 7 exclusivement formés de 9. Le premier qui convient est 999999 = 142857 × 7.
On voit qu'alors 999999 999999 = 142857 142857 × 7 et ainsi de suite...
Or, 1998 = 333 × 6. Le nombre formé de 333 groupements de 9 est divisible par 7, le quotient étant formé de 333 groupements de 142857. Ce n'est pas le cas, en revanche, pour le nombre formé de 1997 chiffres 9.

129. Le casino miraculeux

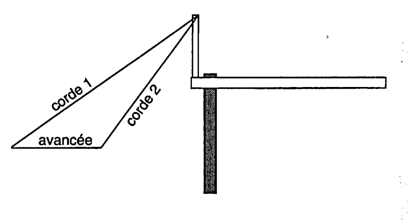
On suppose que, bénéficiant d'une chance insolente, vous gagniez à tous les coups jusqu'à épuisement de vos jetons.
• Il est facile de voir qu'il ne sert à rien de miser 1 jeton, mais aussi plus de 4 jetons, car en remplaçant une mise de N jetons ($N > 4$) par deux mises, l'une de 2 jetons et l'autre de N–2 jetons, on multiplie plus avantageusement son capital.
• Une mise de 4 jetons, ou deux mises de 2 jetons donnent le même résultat.
• Des mises de 2 ou 3 jetons sont donc optimales. Mais avec 6 jetons, il est plus avantageux de miser deux fois trois jetons que trois fois deux.
La meilleure stratégie est donc : 12 mises de 3 jetons et 2 mises de 2 jetons, soit un capital final de $3^{12} \times 2^{2}$ francs, soit **2 125 764 francs**. Belle soirée !
✉ *Daniel POUSSEVIN, de Libourne.*

130. La suite de nombres composés

Nous écrirons que (1998 !) est le nombre s'écrivant comme produit des entiers de 1 à 1998. (1998 !) = 1 × 2 × 3 × 4... × 1997 × 1998. (1998 !) est donc divisible par tous les entiers de 1 à 1998.
Alors aucun des 1997 nombres consécutifs : (1998 !) +2, (1998 !) +3,...
(1998 !) + 1998 n'est premier.
Le premier est divisible par 2, le deuxième par 3, ..., le 1997^e par 1998.
✍ Jacques VERGER, de Paris, fait remarquer qu'en appelant A le produit 2 × 3 × 5... × 1997 des nombres premiers inférieurs à 1998, la suite A–2, A–3, A–4, ..., A–1998 répond à la question (et c'est la plus « petite »).

131. Le halage du bateau

Le bateau avance de plus d'un mètre.
Dans un triangle, un côté est toujours compris entre la somme et la différence des deux autres.
L'avancée du bateau est donc supérieure à la différence de longueur des deux positions de la corde, 1 mètre.



132. Le pirate et l'aventurier

• S'il y en avait six ou plus, en enlevant 18 ou plus, on trouverait un effectif de 94 ou moins : plus de cinq paresseux ne partiraient pas.
• Il y a donc 5 *acharnés*, pour un effectif de 97 partants et **3 sédentaires**.
Rejouons la scène 200 fois en imaginant que les 200 expériences respectent parfaitement les proba-

bilités. Ayant creusé au hasard, l'aventurier déterrera autant de fois le sac en jute que le sac en cuir.
• Sur les 100 découvertes du sac en jute, il sortira 40 fois une pièce d'or (le sac contient 40% de pièces d'or).
• Sur les 100 découvertes du sac en cuir, il sortira 50 fois une pièce d'or. (le sac contient 50% de pièces d'or).
Il tirera donc 90 fois une pièce d'or : 40 proviennent du sac en jute, 50 du sac en cuir.
Il y a 5 chances sur 9 que l'aventurier ait déterré le sac en cuir.

⊠ *Les amateurs ont reconnu un problème de probabilités conditionnelles : quelle est la probabilité que la pièce provienne du sac en cuir, sachant qu'elle est en or ? Le résultat est le quotient de deux probabilités : celle de tirer une pièce d'or du sac de cuir, et celle de tirer une pièce d'or en général.*

Ce quotient vaut : $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}=\dfrac{5}{9}$

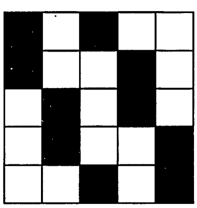
⊠ *Les probabilités sont décidément déroutantes et peu intuitives. De nombreux lecteurs s'y sont laissé prendre, y compris un «professeur émérite d'épistémologie des mathématiques».*

133. Le jeu des doublets

On ne peut pas, bien sûr, faire plus court que 4 étapes.
Il n'existe qu'une chaîne permettant de passer de 1999 à 2003 en 4 étapes.
1999 - 2999 - 2909 - 2903 - **2003**

134. En noir et blanc

Il y a au maximum 10 cases noires (2 par ligne). Or, il existe des configurations qui utilisent dix cases noires tout en respectant les hypothèses.
En voici une :



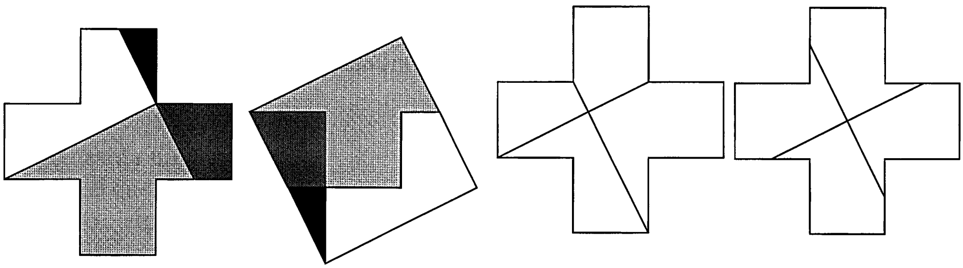
135. La ligne infernale

La ligne de RER a au plus six sections.
- On montre d'abord qu'elle ne peut en avoir sept. En effet, six sections consécutives ont une longueur maximale de 32 km (2 groupes de 3 sections).
Mais comme les cinq dernières sections totalisent au moins 27 km, la longueur de la première section ne peut excéder 5 km.
Si la ligne avait 7 sections, on ferait ce raisonnement pour les six premières sections, puis pour les sections de 2 à 7. On en déduirait que les sections 1 et 2 ont au plus 5 km. En ajoutant le maximum possible (16 km) pour les trois suivantes, on n'atteindrait pas le minimum de 27 km, d'où l'impossibilité.
- On trouve ensuite une configuration de 6 sections qui convient :
5 km - 6 km - 5 km - 5 km - 6 km - 5 km.

136. L'enseigne

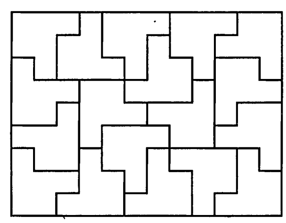
C'est Harry Lindgren qui, en 1961, a inventé le découpage de gauche de la croix dite «de Saint-André» pour reconstituer un carré.

⊠ *L'un des deux découpages de droite a été proposé par Pierre PATOU, de Paris, Alfred CORNET, de Bruxelles, Henri LAPORTE, de Genève, Jean-Claude CAZAUX, de Balma, et Yoana TERLISKA, de Boissy le Chatel.*



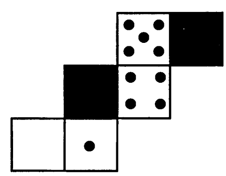
137. Les hexaminos «H»

Il existe 35 hexaminos différents.
Voici un pavage du rectangle 9 × 12 avec les hexaminos H.
Il en existe probablement d'autres (qui ne se déduisent pas de celui-ci par symétrie). Envoyez-les nous.



138. Le dé insolite

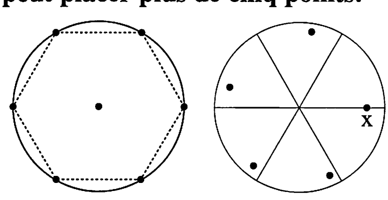
La face opposée à la face noire est également **noire**.
Voici le "patron" complété du dé



139. Gardons nos distances

• **On peut placer sept points** si la distance 100 mètres est permise. Il suffit de prendre le centre et les six points de la circonférence situés aux sommets d'un hexagone régulier.

• En revanche, si la distance entre deux points doit être strictement supérieure à 100 mètres, **on ne peut placer plus de cinq points.**

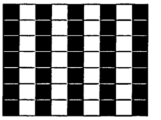
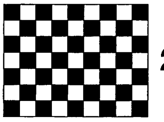
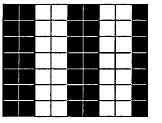


Pour le prouver, on montre d'abord que dans un secteur d'angle 60°, deux points quelconques sont à une distance inférieure ou égale à 100 mètres. On prend alors un point X, et on divise le disque en six secteurs, X étant à la frontière de deux d'entre eux. Ces deux-là sont interdits pour les autres points. Dans les quatre secteurs restants, on ne peut placer plus de 4 points sous peine d'en compter deux dans le même secteur.

Le coloriage **1** permet à un supercavalier qui franchit un pas dans une direction et trois pas dans l'autre de changer systématiquement de couleur de case.

Plus généralement, si le supercavalier progresse de n pas dans une direction et de m pas dans l'autre direction, le coloriage **1** conviendra si n et m sont tous deux impairs, le coloriage **2** s'ils sont de parités différentes.

S'ils sont de même parité, on divise les deux nombres par la plus grande puissance de 2 qui divise à la fois m et n. On se ramène alors au cas **1** ou **2**, mais avec des bandes ou des carreaux ayant pour taille cette puissance de 2. Le coloriage **3** répond, par exemple, au cas 6 et 2.

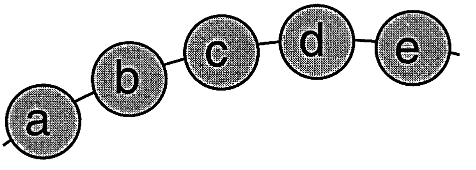

1

2

3

141. La ronde des nombres

La case marquée d'une croix contient le nombre 34.

• On commence par montrer que les nombres contenus dans les petits cercles forment une suite périodique de période 4.

En effet, si on prend 5 cases consécutives contenant les nombres a, b, c, d et e, en remarquant que $a + b + c + d = b + c + d + e$, on en déduit que $a = e$.



• On montre ensuite que la période est en fait 2 : Si a est inscrit dans la case numéro N, a sera aussi dans les cases N+4, N+8, N+12, N+16, N+20… N+240, N+244, N+248, et… N+252 = N+2 !

• Il n'y a donc que deux valeurs inscrites dans les cercles : 16 qui intervient toutes les deux cases, et une autre valeur, x, qui intervient de manière alternée, en particulier dans la case marquée d'une croix. En sommant quatre cases consécutives, il vient : $16 + x + 16 + x = 100$, ce qui impose $x = 34$.

⊠ *J. PAVY (14, Lieury)*

142. Le jeu de construction

On peut construire 21 tours différentes de hauteur 6.

Appelons $T(n)$ le nombre de tours possibles de hauteur n.

On va les comptabiliser en distinguant deux cas.

• Celles qui se terminent par une brique blanche sont obtenues en ajoutant une brique blanche à toutes les tours de hauteur (n–1). Il y en a donc $T(n–1)$.

• Celles qui se terminent par une brique noire sont obtenues en ajoutant une brique noire à toutes les tours de hauteur (n–1) se terminant par une brique blanche. Or, on vient d'expliquer qu'il y en a autant que de tours de hauteur (n–2), soit $T(n–2)$.

Au total, il vient donc : $T(n) = T(n–1) + T(n–2)$.

On part du début : $T(1) = 2$; $T(2) = 3$;

On continue de proche en proche : $T(3) = 2 + 3 = 5$; $T(4) = 3 + 5 = 8$;

$T(5) = 5 + 8 = 13$; $\mathbf{T(6) = 8 + 13 = 21}$.

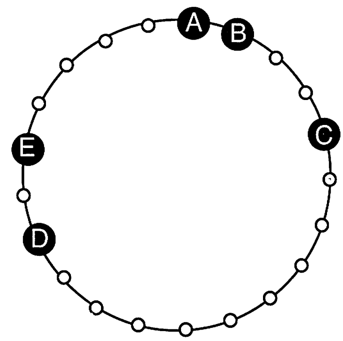
Les spécialistes auront reconnu la suite de Fibonacci.

143. Les pions noirs

On peut placer au plus 5 pions noirs à des distances toutes différentes sur le cercle.

• En partant d'un point, et en tenant compte de la symétrie, on voit qu'il n'existe que 10 distances

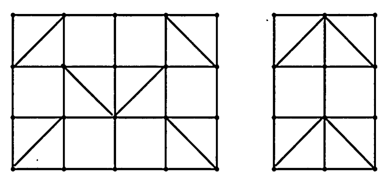
différentes entre deux points du cercle.
Or, si les distances entre les pions noirs sont différentes, il existera 1 distance pour 2 pions, 3 pour 3 pions, 6 pour 4 pions, 10 pour 5 pions, plus de 10 au-delà. Le nombre maximum de pions noirs est donc 5.



• La configuration ci-contre de 5 pions comporte 10 distances différentes.
En comptant en arcs d'1/21 de circonférence,
le pion A est éloigné de B, C, D et E de 1, 4, 7 et 5 arcs.
B est éloigné de C, D et E de 3, 8 et 6 arcs.
C est éloigné de D et E de 10 et 9 arcs.
D est éloigné de E de 2 arcs.
Remarquez que c'est le nombre d'arcs le plus petit qui a été pris en compte : ainsi, entre A et E, on compte 5 arcs et non 16.

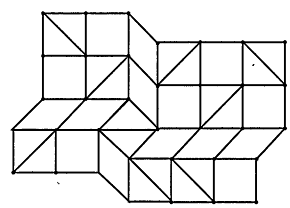
144. Treillis

Un carré (ou un rectangle) n'est jamais rigide, alors qu'un triangle l'est.
• On peut, par étapes successives, transformer chaque treillis en un treillis plus simple, en supprimant les lignes et les colonnes comportant une seule barre diagonale, ce qui ne change rien au caractère rigide ou non du treillis. Ainsi, le treillis n°1 devient, par simplifications successives, le treillis ci-contre de droite, qui n'est pas rigide, puisqu'il comporte une ligne sans barre diagonale.



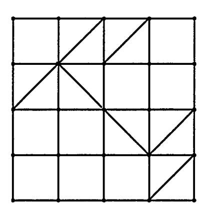
Le treillis 1 ne l'est donc pas. On montre de la même façon que le treillis numéro 2 est rigide et que le numéro 3 ne l'est pas.

⌧ *Robert GALERNE (92, Antony) et Alain PAQUERUSE (91, Palaiseau) fournissent un dessin (ci-contre) du treillis numéro 3 après déformation.*



⌧ *Des lecteurs nous signalent que la simplification ne conduit pas forcément à une configuration facile à interpréter.*

• Pour rigidifier un treillis 4 × 4, il faut lui ajouter 7 barres diagonales correctement placées. Voici un schéma qui convient.



⌧ *Michel BERTHAUD (14, Caen) donne une formule connue des constructeurs : si N est le nombre de nœuds d'un treillis, et b le nombre de barres, une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que le treillis soit rigide est : $B \geq 2N - 3$.*

⌧ *Christian ROMON (78, Carrières sur Seine) explique que $n + m - 1$ barres diagonales sont nécessaires en plus des mailles d'un quadrillage rectangulaire pour rigidifier un treillis $n \times m$, ce qui corrobore la condition précédente où*
$B = 2(n + 1)(m + 1) - 3$ et $N = (n + 1)(m + 1)$

145. Le bois dont on fait les flutes

Le plus grand bambou est le numéro 1.

Appelons bambou numéro 3 celui qui est situé à l'intersection de la ligne (Est-Ouest) du bambou numéro 1 et de la colonne (Nord-Sud) du bambou numéro 2. Le numéro 3 est forcément plus petit (ou de même taille) que le numéro 1, forcément plus grand (ou de même taille) que le numéro 2. On en déduit que le numéro 2 est plus petit ou de même taille que le numéro 1. Mais comme l'hypothèse précise que tous les bambous sont de tailles différentes et que le numéro 1 est différent du numéro 2, il s'ensuit que le plus grand est le numéro 1.

NB : On peut vérifier que cette dernière hypothèse est plausible.

⊠ *Christian ROMON précise qu'il existe cependant une disposition où le bambou numéro 1 est confondu avec le numéro 2 : celle où tous les bambous de sa ligne sont plus petits que lui, et où tous les bambous de sa colonne sont plus grands que lui.*

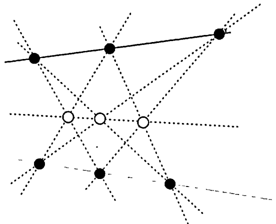
146. Les neuf alignements

Voici trois configurations qui répondent à la question.

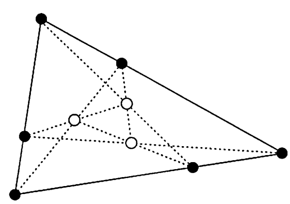
Dans chacune des trois figures, les jetons noirs sont choisis dans une position quelconque respectant les alignements indiqués en traits pleins. Il existe alors une position unique des jetons blancs respectant les alignements en pointillés. Ainsi,

• Pour la première configuration, qui se construit aisément (voir figure), les jetons blancs sont alignés en vertu d'un résultat connu sous le nom de théorème de Pappus.

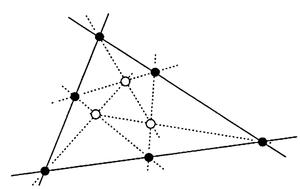
• Pour la deuxième configuration, nous avons choisi (arbitrairement) de placer les jetons noirs au tiers des côtés des triangles. Les jetons blancs doivent alors être placés aux 4/7 des « tiéranes » pour obéir à tous les alignements.



Configuration 1

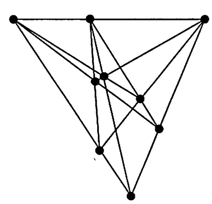


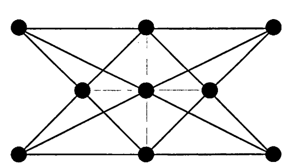
Configuration 2



Configuration 3

⊠ *Dans ces trois configurations, les neuf points sont triples (intersection de trois droites). Michel MENGUAL (75, Paris) et Antoine WEHENKEL (Luxembourg) signalent d'autres possibilités, selon le nombre q de points quadruples, t de points triples et d de points doubles. (q, t, d) peut prendre les valeurs (4, 1, 4), (3, 3, 3), (2, 5, 2), (1, 7, 1), (0, 9, 0).*





⊠ *Paul CAMION (78, Plaisir), Christian ROMON et Jean SCHILLING (54, Nancy) signalent des positions à 10 alignements (voir page ci-dessus).*

147. Vendredi 13

La première année du 21ème siècle comportant trois vendredis 13 est l'année 2009.

On commence par remarquer que seules comportent trois vendredis 13 :

– les années « normales » commençant un jeudi
– les années bissextiles commençant un dimanche.
Il reste à dire que le premier jour de l'année est décalé d'une unité, sauf après une année bissextile où il est décalé de deux unités.
On a ainsi le tableau suivant (les années bissextiles sont en gras) donnant le premier janvier de chaque année :

1999	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	2004	2005	2006	2007	**2008**	2009
ven	sam	lun	mar	mer	jeu	sam	dim	lun	mar	jeu

Pour le 22e siècle, il faut poursuivre le cycle (on retombe sur une situation identique tous les 28 ans) en faisant attention à l'année « bizarre » 2100, fin de siècle mais pas multiple de 400, qui n'est pas bissextile. On obtient le tableau :

2008	**2036**	**2064**	**2092**	**2096**	2100	2101	2102	2103	**2104**	2105
mar	mar	mar	mar	dim	ven	sam	dim	lun	mar	jeu

La première année du 22ème siècle comportant trois vendredis 13 est 2105.

⊠ Frédéric MARSAL (83, La Garde) précise que les vendredis 13 des années « normales » tombent toujours en février, mai et novembre, tandis que ceux des années bissextiles tombent en janvier, avril et juillet.

148. Le pirate égyptologue

• 1 ne s'exprime que d'une façon comme somme de trois fractions égyptiennes différentes : $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

• Pour quatre pirates, on a plusieurs possibilités, telles : $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$
ou encore : $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$

• Pour cinq pirates, on a plusieurs possibilités, telles : $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$
ou encore : $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$

• Plus généralement, le partage est possible pour tout nombre de pirates à partir de trois. On passe en effet d'une répartition en X pirates à une répartition en X+2 pirates en remplaçant la part 1/P du moins bien loti des X pirates par les trois parts 1/2P, 1/3P et 1/6P.

• Pour deux pirates, le partage est impossible.

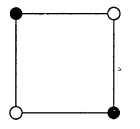
⊠ Philippe CAPET (75, Paris) passe de la répartition r_X pour X pirates ($X \geq 3$) à la répartition r_{X+1} pour X+1 pirates à l'aide de la formule : $r_{X+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_X$

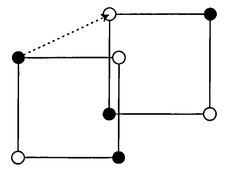
⊠ Christian ROMON passe de X à X+1 (toujours pour $X \geq 3$) en remplaçant le plus petit terme $\frac{1}{k}$ *par la somme* $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}$

⊠ Antoine WEHENKEL quant à lui remplace pour passer de X à X+1 le plus petit terme $\frac{1}{k}$ *(où k est pair de façon récurrente) par la somme* $\frac{2}{3k} + \frac{1}{3k}$.

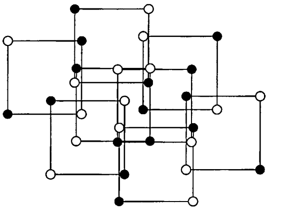
149. Le jardinier vantard

Il existe une façon évidente de construire un massif de 2 jonquilles et 2 tulipes tels qu'à une distance de 20 cm de chaque jonquille, il y ait 2 tulipes, et à 20 cm de chaque tulipe, il y ait 2 jonquilles.





Ajoutons alors au schéma une figure translatée de 20 cm dans n'importe quelle direction où chaque tulipe est remplacée par une jonquille et chaque jonquille par une tulipe. On obtient un massif de 4 jonquilles et 4 tulipes tels qu'à une distance de 20 cm de chaque jonquille, il y ait 3 tulipes, et à 20 cm de chaque tulipe, il y ait 3 jonquilles.
On continue ainsi en ajoutant chaque fois une figure translatée de 20 cm dans une nouvelle direction (on s'assure juste qu'il n'y a pas superposition de fleurs) selon la même méthode (interversion des rôles) : voici le massif (de 32 fleurs) promis par le jardinier !
Cette méthode, suggérée par Marc Bachmakov, n'est pas la seule.



☒ *J. HEIDET (75, Paris).*

150. L'architecte négligent

• **5 marques sur la règle de 17 cm suffisent pour mesurer toute longueur entière** : les trois marques indiquées (à 1, 2 et 3 cm) et deux autres marques à 8 et 13 cm.

• Pour la règle de 36 cm, les 8 marques doivent être situées aux centimètres **1, 3, 6, 13, 20, 27, 31 et 35**. Les marques symétriques conviennent également : 1, 5, 9, 16, 23, 30, 33 et 35 cm.

☒ *Ce problème nous a été inspiré par les travaux des mathématiciens Dudeney et Golomb ainsi que par une étude d'un lecteur, M. Olivier de COMBRUGGHE.*

151. La rame de la compagnie FIBO

Il y a 13 façons de former des rames de 5 voitures, et 1597 façons de former des rames de 15 voitures.

En effet, une rame de N voitures commence par :
• soit une voiture de seconde suivie par n'importe quelle rame de $(N-1)$ voitures
• soit une voiture de première suivie d'une voiture de seconde et de n'importe quelle rame de $(N-2)$ voitures.
Le nombre R de rames de N voitures est donc la somme du nombre de rames de $(N-1)$ voitures et du nombre de rames de $(N-2)$ voitures. Cela permet de construire, de proche en proche, le nombre de rames de 3, 4, 5, ..., 15 voitures. Les amateurs auront reconnu ici encore la suite de Fibonacci.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

152. Préfixes pour puissances

• **2^{46} et bien d'autres puissances de 2 commencent par 7.** C'est assez facile à trouver, même sans calculatrice, en partant de $2^6 = 64$ et en remarquant que $2^{10} = 1024$.
Il s'agit de multiplier 64 autant de fois qu'il le faut par 1024 pour arriver à un nombre commençant par 7.
Cela revient à multiplier suffisamment de fois 1,024 par lui-même pour dépasser de peu le rapport $\frac{7}{6{,}4} = 1{,}093\ldots$

4 fois suffisent. 2^{46} est la première puissance de 2 à commencer par 7.

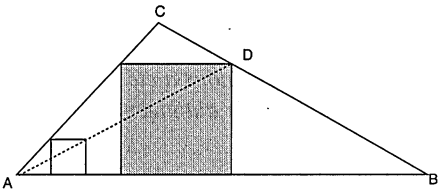
• Pour une puissance commençant par 2000, la réponse est encore « oui », mais la justification n'est pas simple ; elle fait appel à un « passage » aux logarithmes décimaux : on montre qu'il existe deux entiers K et n tels que :
$K \leq n \log(2) < K + \log(1{,}0005)$. C'est parce que log(2) n'est pas un nombre fractionnaire que c'est toujours le cas.
On en déduit que $2.\ 10^K \leq 2^{n+1} < 2001\ .\ 10^{K-3}$, c'est-à-dire que 2^{n+1} commence par 2000…

⊠ *Dominique PASTRE (92, Issy-les-Moulineaux) et Christian ROMON, faisant preuve de beaucoup d'ingéniosité dans l'utilisation d'une simple calculatrice, ont découvert que la première puissance de 2 à commencer par 2000 est* 2^{2137}.

⊠ *Paul PERBOST (06, Nice) est parvenu en outre à calculer les suivantes :* 2^{4273}, 2^{6409}, 2^{13438}…

153. Le carré inscrit

Tracez un carré quelconque dont deux sommets sont sur [AB] et un sur [AC].
Joignez A au quatrième sommet de ce carré et prolongez le trait jusqu'à ce qu'il rencontre [BC].
Le point de rencontre D sera un sommet du carré cherché.
Il suffit de tracer à partir de D la parallèle et la perpendiculaire à AB pour compléter le tracé du carré.



⊠ *Daniel LIMAT (25, Besançon), Michel MENGUAL (75, Paris), Jean PATILLON (25, Besançon) et Christian ROMON ont adressé plusieurs constructions utilisant toutes la hauteur issue de C dans le triangle ABC.*
Deux des correspondants donnent le calcul du côté du carré : c'est la demi moyenne harmonique de la hauteur issue de C et du côté AB.

154. Zigzag numérique

Il y a 61 nombres zigzag de 6 chiffres.

• On construit le triangle suivant : sur la ligne n, on inscrit successivement le nombre de « n-zigzags » se terminant par 1, par 2, par 3,…, par n.

Pour $n = 1$						1						
Pour $n = 2$					0		1					
Pour $n = 3$				1		1		0				
Pour $n = 4$			0		1		2		2			

On obtient chaque nombre de la ligne 5 en ajoutant tous les nombres de la ligne 4 qui se trouvent à sa droite :

Pour $n = 5$: 5 5 4 2 0

En effet, il y a autant de 5-zigzags se terminant par 1 que de 4-zigzags (en décalant les chiffres d'une unité). Il y a autant de 5-zigzags se terminant par 2 que de 4-zigzags se terminant par 2, 3 ou 4 (en décalant les chiffres à partir de 2 d'une unité), etc. De même, on obtient chaque nombre de la ligne 6 en ajoutant tous les nombres de la ligne 5 qui se trouvent cette fois à sa gauche :

Pour $n = 6$ 0 5 10 14 16 16

Le total de la sixième ligne vaut bien 61.

• Plus généralement, si n est impair, la ligne se termine par 0, et si n est pair, elle commence par 0.

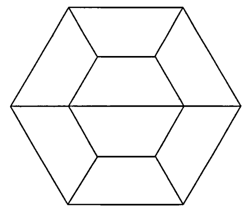
On obtient les nombres de la ligne $n+1$ en ajoutant successivement et alternativement de droite à gauche, puis de gauche à droite, les nombres de la ligne n.

⊠ *Christian ROMON raisonne de manière symétrique en appelant* $Z_{n,i}$ *le nombre de zigzags à n nombres commençant par i.*

155. Le partage de l'hexagone

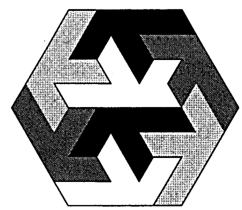
Le partage est possible.

Il tient dans le dessin ci-contre.

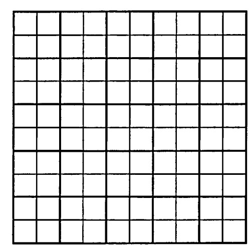


⊠ *La plupart des lecteurs, parmi lesquels André BELARD (75, Paris), Jean BOURLèS (Ixelles, Belgique), Daniel CRETON (75, Paris), Bernard LEMAIRE (75, Paris), Philippe SCHULER (78, Croissy)... ont trouvé des solutions sous forme d'un partage en huit trapèzes de même forme que la solution ci-dessus, mais disposés différemment.*

⊠ *André CABANNES et Jean-Daniel LE FRANC (92, Fontenay-aux-Roses) ont proposé des solutions plus imaginatives où ces trapèzes subissaient quelques transformations : entailles compensées par des excroissances, ou déformations, comme dans le dessin ci-contre.*



156. Touché - coulé



C'est impossible. Si on divise la grille en 25 carrés de deux cases sur deux, on remarque qu'aucun de ces carrés ne peut abriter d'éléments provenant de deux navires différents.

Les porte-avions et les cuirassés des deux flottes occupent chacun dans le meilleur des cas deux de ces carrés, ce qui en mobilise au moins 12.

Les 14 autres bateaux en mobilisent au moins 1 chacun.

D'où la nécessité de 26 carrés pour 25 disponibles.

157. Pâte à modeler

Dans l'ordre croissant des hauteurs : cube, pyramide, sphère, tétraèdre.

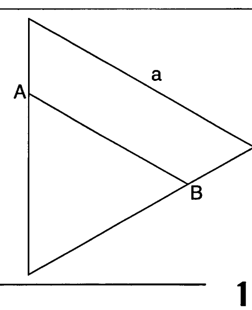
Il est aisé de comparer, non pas les hauteurs de chacun des solides remodelés, mais leurs cubes, qu'on peut exprimer en fonction du volume V commun (qui est celui d'un bâton de pâte à modeler). Le cube de la hauteur du cube est V, celui de la hauteur de la pyramide, $\frac{3V}{2}$ celui de la hauteur de la sphère, $\frac{6V}{\pi}$ enfin celui de la hauteur du tétraèdre $\frac{8V}{\sqrt{3}}$

⊠ *Gérard TOURRET (13, Aix-en-Provence) précise que si la hauteur du cube est 1, celle de la pyramide est environ 1,145 ; celle de la sphère est environ 1,241 ; celle du tétraèdre environ 1,665.*

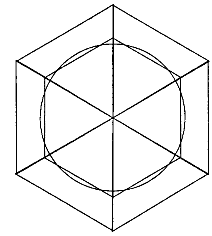
158. Le partage du triangle

La frontière rectiligne la plus courte permettant de partager un triangle équilatéral en deux parties d'aires égales est **un segment parallèle à l'une des bases.**

Si a est le côté du triangle, on montre aisément que le segment AB (de longueur $a\sqrt{2}/2$) est plus court qu'une bissectrice (de longueur $a\sqrt{3}/2$).



Si on n'exige plus que la ligne soit droite, on obtient la séparation la plus courte à l'aide d'un **arc de cercle**.



En utilisant la transformation de la figure par rotations d'angles 60°, on constate sans peine qu'à aires égales, c'est le cercle qui minimise le périmètre.

Le carré de la longueur de l'arc a pour mesure :
$\pi a^2 \sqrt{3}/12 \approx 0{,}453\ a^2$ contre $a^2/2$ pour le segment.

☒ *Yves PANZUTI (69, Amplepuis), M. CARLHIAN (69, Lyon).*

159. L'échangeur

Les voitures 3 et 4 se croisent à la verticale l'une de l'autre.

Imaginons la figure plongée dans une troisième dimension, celle du temps, la coordonnée dans la troisième dimension d'un point d'une autoroute étant l'instant où la voiture y passe. Les vitesses étant constantes, les autoroutes sont encore des droites dans cet espace E à trois dimensions.
Les droites A1 et A2, se coupant dans E, déterminent un plan P. La droite A3, coupant dans ce même espace les droites A1 et A2 appartient au plan P. La droite A4, coupant également dans cet espace les droites A1 et A2, appartient aussi au plan P. Elle coupe donc la droite A3.
D'où le résultat.

☒ *Georges LACROIX (13, Marseille) et Michel MENGUAL (75, Paris) signalent que les quatre véhicules sont constamment alignés sur une droite qui se déplace parallèlement à elle-même. En effet, en dimension 3, à l'instant t, les quatre points représentatifs de la position des véhicules sont à la fois dans le plan horizontal de cote t et dans le plan P des droites A1 et A2. Ils sont donc alignés sur l'intersection de ces deux plans.*

160. La queue du dragon

• 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17   18 19 20 21 22 23 24 est un dragon de 21 écailles.

• Il n'existe pas de dragon de 24 écailles. Plus généralement, un dragon de 3*n* écailles existe à condition que *n* soit impair.
Il commence alors par $\frac{(n+1)}{2}$.

En effet, en appelant $(a+1)\ (a+2)\ \ldots\ (a+2n)\ \ (a+2n+1)\ \ldots\ (a+3n)$ un tel dragon, on devrait avoir :
$2\,n\,a + 1 + 2 + 3 + \ldots + 2n = n\,a + (2n+1) + \ldots + 3n$.
Soit $n\,a = \frac{3\,n\,(3\,n+1)}{2} - 2\,n\,(2\,n+1)$, ou encore $a = \frac{n-1}{2}$.

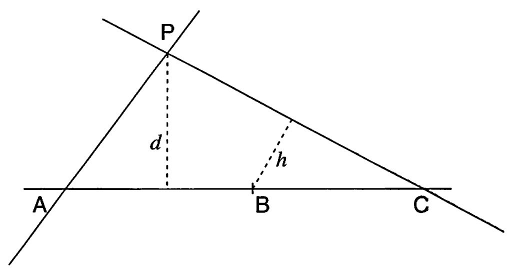
☒ *M. CARLHIAN (69, Lyon) s'est intéressé aux dragons dont la tête et la queue peuvent avoir un nombre quelconque d'écailles. Il trouve alors qu'un dragon existe toujours si son nombre d'écailles est impair.*
Il donne l'exemple d'un dragon de 23 écailles, qui seraient numérotées de 121 à 143 (la queue a 12 écailles, la tête en a 11).

161. Les 2001 points

Les 2001 points sont forcément alignés.

Supposons qu'ils ne le soient pas. On considère alors l'ensemble constitué des distances de chaque point à chaque droite ne le contenant pas et joignant deux au moins des autres points.
Cet ensemble de nombres strictement positifs, étant fini et non vide (on a supposé les 2001 points non tous alignés), admet un plus petit élément noté *d*, qui est la distance d'un certain point P à une

certaine droite D joignant deux autres points. Par hypothèse, D contient d'ailleurs au moins trois points A, B, C, dans cet ordre.
Mais alors, la distance h de B à l'une au moins des deux droites AP ou CP est strictement inférieure à d, ce qui contredit notre hypothèse.

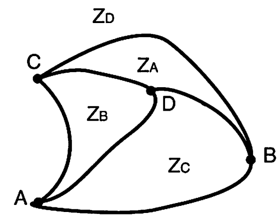


☒ *Christian ROMON donne un essai de classification des configurations et le met en œuvre sur des cas particuliers aboutissant bien sûr toujours à l'impossibilité d'une solution topologiquement acceptable.*

162. Croisement interdit

• On ne peut pas relier entre elles deux à deux plus de quatre villes.

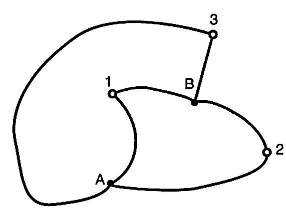
Il est en effet toujours possible de relier quatre villes. On se retrouve avec le schéma ci-contre, qui découpe le plan en 4 zones. Il est alors clair qu'une cinquième ville ne pourrait être reliée à A si elle se trouve dans la zone Z_A, à B si elle se trouve dans la zone Z_B, à C si elle se trouve dans la zone Z_C, à D si elle se trouve dans la zone Z_D.



• C'est à la demande de plusieurs lecteurs, dont M. François Moreau, que nous avons posé le deuxième problème (connu sous la forme de trois maisons reliées à l'eau, au gaz et à l'électricité).

La réponse est « NON ».

Pour s'en persuader, appelons d'un chiffre les villes rouges et d'une lettre les villes grises. Si le circuit de routes existait, on pourrait en extraire un circuit 1A2B1 à l'intérieur duquel ne figurerait aucune ville. La ville 3 peut encore être reliée, à l'extérieur de ce circuit, à A et B. Mais alors où placer la ville C ? Quelle que soit la zone choisie (à l'intérieur ou à l'extérieur du circuit 1A3B1), une des communication de C avec 1 ou avec 2 serait impossible.



☒ *Mis à part Marc BESANCENOT (70000 Vesoul) qui propose la solution fantaisiste de construire des pont ou des tunnels pour éviter les croisements, les lecteurs n'apportent aucune innovation.*

163. Minimax

9072543618

La stratégie optimale des deux joueurs consiste à occuper au mieux les cases les plus à gauche jusqu'à ce qu'il ne reste à Minnie que des chiffres supérieurs à tous ceux de Max. C'est alors dans les cases les plus à droite que chacun écrira à tour de rôle
(D'après une question du concours Kangourou).

☒ *Christian ROMON retrace l'historique du jeu en précisant dans quel ordre il se joue. Max joue dans l'ordre : le 9 puis le 7 puis le 5, le 1 et enfin le 3 alors que Minnie s'intercale en jouant en second le 0, puis le 2, ensuite le 8, puis le 6 et enfin le 4.*

164. Triangles à carreaux

On ne peut tracer un triangle équilatéral sur les nœuds d'un quadrillage.

L'aire d'un triangle tracé sur les nœuds d'un quadrillage, obtenue comme différence de l'aire d'un rectangle et de celle de trois triangles rectangles, vaut la moitié d'un nombre entier d'unités, soit

un nombre rationnel (le quotient de deux entiers).
Par ailleurs, les carrés longueurs des côtés d'un tel triangle sont entières (d'après le théorème de Pythagore).

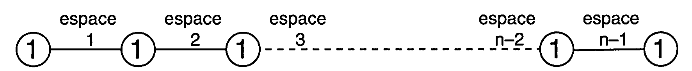
Or, l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ qui est irrationnel si a^2 est entier.

✉ Marcel DAVID (74200 Thonon les Bains) et Roger LASSIAILLE (33360 Latresne) démontrent tous deux l'impossibilité de la construction en signalant que tout angle du triangle cherché a une tangente rationnelle, ce qui n'est évidemment pas le cas de 60°. Didier MAILLARD (Paris) donne du résultat une solution savamment calculatoire et Christian ROMON une approche algébrique.

165. Grand-père euro

• Il y a six façons de répartir 5 euros entre trois gamins.
– trois configurations 3-1-1 (il y a trois façons de choisir celui qui aura 3 euros)
– trois configurations 2-2-1 (il y a trois façons de choisir celui qui aura 1 euro)

• Il y a cent-vingt façons de répartir 11 euros entre quatre gamins.
Plus généralement, si le grand-père dispose de n pièces, on les place côte à côte et on numérote les espaces de 1 à $n-1$ comme sur le dessin.



Il y aura autant de répartitions entre p petits-enfants que de façons de placer $(p-1)$ séparations sur ces $n-1$ espaces disponibles. A gauche de la première séparation, il y aura les pièces du premier gamin, puis celles du deuxième, ..., jusqu'aux pièces du dernier gamin à droite de la dernière séparation. Si on note $n!$ le produit de tous les entiers de 1 à n, le nombre de façons de choisir $(p-1)$ espaces parmi les $(n-1)$ possibles, connu depuis Blaise Pascal, vaut:

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

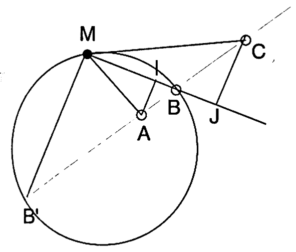
Pour $n = 11$ et $p = 4$, cela fait bien 120.

166. L'entraîneur géomètre

• Le rapport MA/MC vaut 1/2.
On projette A et C sur MB respectivement en I et J pour faire apparaître des triangles semblables (ayant les mêmes angles, donc à côtés proportionnels) AMI et CMJ.
En remarquant que AIB et CJB sont aussi semblables, on établit l'égalité des rapports : $\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC}$.

On peut remarquer de plus que M est situé sur un cercle de diamètre BB', où B' est le point de la ligne de but extérieur à AC tel que $\frac{MA}{MC} = \frac{B'A}{B'C} = \frac{1}{2}$

• Ainsi, un point d'où l'on voit les trois buts sous le même angle sera à la fois sur le cercle de diamètre BB' et sur le cercle de diamètre CC', C' vérifiant la relation

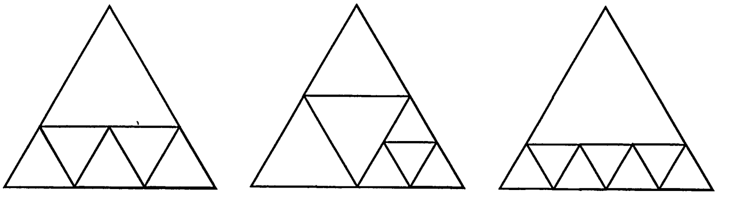


$$\frac{C'B}{C'D} = \frac{1}{5}.$$

Il existe deux solutions symétriques, dont une seule est sur le terrain.

167. Puzzles triangulaires

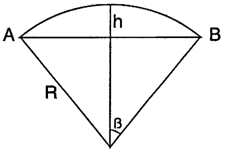
Il n'existe pas de modèle à 2, 3 ou 5 pièces.
Il existe des *n* - puzzles pour tout autre nombre *n* de pièces.
Le dessin de gauche montre la reconstitution d'un 6 - puzzle.
Le dessin du milieu montre à la fois la reconstitution d'un 7 - puzzle, mais aussi la façon de passer d'un n-puzzle à un (n + 3)- puzzle.
Le dessin de droite montre la reconstitution d'un 8 - puzzle.



La propriété qui permet le passage d'un n - puzzle à un (n + 3) - puzzle assure l'existence des valeurs supérieures.

168. Le plus court chemin

La corde s'enfoncerait d'environ 9 mètres en son centre.



La justification nécessite un peu de trigonométrie.
Le dessin ci-contre montre, en appelant R le rayon de la terre et β le demi-angle au centre (considérablement agrandi), que la corde s'enfonce d'une hauteur h égale à R (1 – cos β) alors que la distance AB vaut $d = 2\,R\,\sin\beta$.
Or, lorsque β est petit, (1 – cos β) est approximativement égal à $\frac{\beta^2}{2}$
et $\sin\beta \approx \beta$

On a donc : $h \approx \dfrac{d^2}{8\,R}$.

La corde s'enfonce donc d'une hauteur à peu près proportionnelle au carré de la distance des deux villes.
Si elle s'enfonce d'un mètre entre A et B, elle s'enfoncera donc 9 fois plus entre deux villes trois fois plus éloignées.

☒ *J. RENUCCI (20000 Ajaccio) retrouve le résultat en confondant, en première approximation, la longueur de la corde et celle de l'arc. Autres contributions plutôt trigonométriques de Pierre CAHUSAC (Paris) et de Christian ROMON.*

169. Les triangles entiers

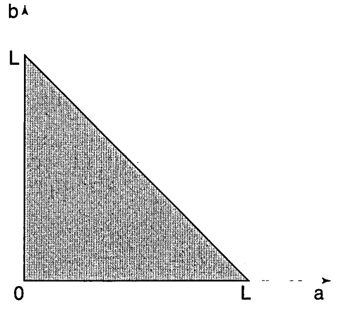
Il y a 4 triangles entiers de périmètre 11 : (1, 5, 5), (2, 4, 5), (3, 3, 5) et (3, 4, 4).
Il y a 4 triangles entiers de périmètre 14 : (2, 6, 6), (3, 5, 6), (4, 4, 6) et (4, 5, 5).
Il y a autant de triangles entiers de périmètre 2001 que de triangles entiers de périmètre 2004.
Plus généralement, il y a autant de triangles entiers de périmètre $2n - 3$ que de triangles entiers de périmètre $2n$. En effet, pour que les entiers strictement positifs $a \leq b \leq c$ soient les trois longueurs des côtés d'un triangle entier de périmètre $2n$, il faut et il suffit que $a + b > c$.
A chaque triplet $(a ; b ; c)$ représentant un triangle entier de périmètre $2n - 3$, il est clair qu'on peut associer $(a + 1 ; b + 1 ; c + 1)$ représentant un triangle entier de périmètre $2n$.
Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autre.
Si $(a' ; b' ; c')$ représente un triangle entier de périmètre $2n$ (avec $a' \leq b' \leq c'$),
– on montre d'abord que $a' > 1$; en effet, si $a' = 1$, $1 + b' > c'$ et $b' \leq c'$ entraîne $b' = c'$ et donc $2b' + 1 = 2n$, ce qui est impossible.
– on montre ensuite que $(a = a' - 1 ; b = b' - 1 ; c = c' - 1)$ représente un triangle entier de périmètre $2n - 3$; en effet, $a' + b' > c'$ s'écrit $a + b \geq c$, mais on peut écarter le cas d'égalité puisque $a + b + c$ serait pair, et ne pourrait être égal à $2n - 3$.

☒ *Selon une remarque de Christian ROMON, le problème revient à décomposer le périmètre en somme de trois entiers non nuls dont le plus grand est strictement inférieur au demi-périmètre.*

170. La baguette cassée

La probabilité que les trois morceaux puissent former un triangle est 1/4.

On représente chaque configuration *possible* de la rupture de la baguette de longueur L par le couple (a, b) formé des longueurs des deux premiers morceaux. Naturellement, a et b peuvent prendre toute valeur comprise entre 0 et L, mais leur somme doit être inférieure à L, ce qui permet de représenter l'ensemble des situations possibles par les points d'un triangle.

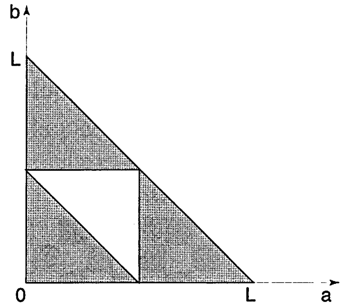


Reste à représenter les configurations *favorables*.
Les longueurs a, b et c des trois morceaux $(a + b + c = \text{L})$ seront les côtés d'un triangle si elles vérifient les « inégalités triangulaires » :
- $a \leq b + c$, soit $a \leq \text{L} - a$, c'est-à-dire $a \leq \text{L} / 2$.
- $b \leq a + c$, soit $b \leq \text{L} - b$, c'est-à-dire $b \leq \text{L} / 2$.
- $c \leq b + a$, soit $\text{L} - a - b \leq a + b$, c'est-à-dire $a + b \geq \text{L} / 2$.

Les couples (a, b) représentant les configurations favorables sont aussi les points d'un triangle (en blanc).

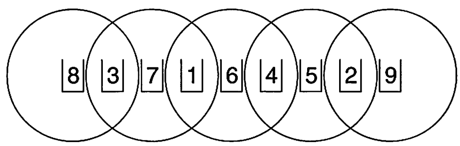
La probabilité cherchée, $\dfrac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$ est le rapport des deux aires.

☒ *Les lecteurs ont ici rivalisé d'ingéniosité. Philippe COMPOINT (Paris) (qui souhaite qu'on* *l'appelle seulement Ph C) imagine une baguette courbe d'origine A, coupée en B et C, qu'il enroule autour d'un cercle et transforme la condition sur les côtés du triangle en condition sur le centre du cercle : il doit se trouver à l'intérieur du triangle ABC. Claude GEORGE (Paris) donne quelques compléments théoriques et Alain VALLON (78000 Versailles) imagine une représentation dans l'espace de l'ensemble des longueurs acceptables des côtés (voir figure ci-contre).*

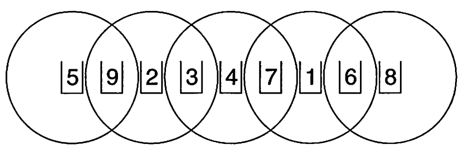


171. Les cercles magiques

• Une seule disposition (à une symétrie près) permet d'obtenir la plus petite somme magique possible, 11.

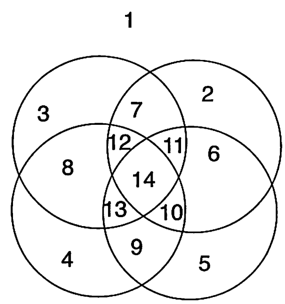


• Une seule disposition (à une symétrie près) permet d'obtenir la plus grande somme magique possible, 14.



172. Régionalisation

• **14 régions pour quatre cercles** (voir figure), et non pas de 16 comme on aurait pu s'y attendre.



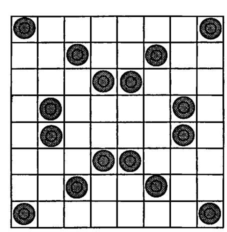
• **9902 régions pour 100 cercles.**

Si on connaît le nombre de régions définies par n cercles, l'ajout d'un cercle supplémentaire crée au maximum $2n$ régions de plus. En effet, ce cercle coupera chacun des autres en au plus deux points, et on peut toujours trouver un cercle qui coupe chacun des n autres cercles en $2n$ points exactement. Les $2n$ points ainsi placés sur le nouveau cercle définiront $2n$ arcs, chacun d'entre eux découpant en deux la région qu'il traverse. Il ne reste plus qu'à totaliser.

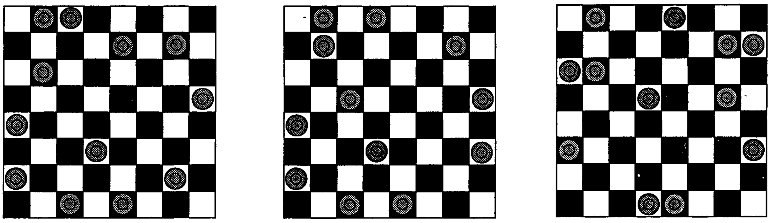
Pour n cercles : $2 + 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2(n-1) = n \times (n-1) + 2$.

173. La diagonale des fous

• **On peut placer 16 fous sans que trois d'entre eux ne soient situés sur une même ligne, colonne ou diagonale.** En voici une configuration. Il est clair qu'on ne peut pas faire mieux.



• Si on souhaite que deux fous ne puissent être sur la même diagonale (ni trois sur une même ligne ou une même colonne), on ne peut placer plus de 12 fous. Le maximum est en effet de 6 par diagonale de même couleur.

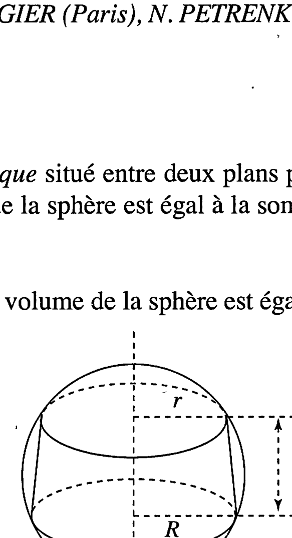


✉ *Parmi les lecteurs, il y a les « théoriciens », qui justifient le nombre maximum de 12 et donnent une ou plusieurs dispositions possibles :*
Serge BAUDUIN (38700 CORENC), Pierre FRAISSE (Paris), Guy PAILLOTIN (91600 Savigny sur Orge), Christian ROMON, Bernard TRUFFAULT (44980 Sainte-Luce-sur-Loire), Antoine WEHENKEL (Luxembourg).
Il y a aussi les « praticiens », qui s'adonnent à une recherche exhaustive des solutions : 2270 solutions pour 11 pièces, 10 pour 12, aux 8 rotations et symétries près, nous précise Pierre CARRE (Paris), qui dessine les 80 possibilités. André LAMOTHE et Julien de PRADERE font de même.
Autres solutions : G. CHATOUX (93140 Bondy), Paul-Henri FARGIER (Paris), N. PETRENKO (84410 Bedoin).

174. Le bilboquet

Les deux boules évidées ont même volume, donc pèsent autant.

Les bons dictionnaires vous le diront : le volume du *segment sphérique* situé entre deux plans parallèles séparés par la distance h et symétriques par rapport au centre de la sphère est égal à la somme
• du volume A(h) de la sphère qui aurait h pour diamètre et
• du volume C du cylindre de même hauteur.
En ajoutant le volume V des *calottes sphériques*, cela signifie que le volume de la sphère est égal à A + C + V. Or le « trou » a pour volume C + V. C'est qu'il reste un volume A qui ne dépend que de la hauteur h.
C'est en l'occurrence $\frac{125\,\pi}{6}$ cm^2.



Plus généralement, le volume d'un *segment sphérique* quelconque est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h\,(r^2 + R^2)}{2}$$

✉ *J. DREVET(Marseille), P. GENDROT(78600 Maisons Laffite), A.LUGINBUHL (CH- Neuchatel), Christian ROMON.*

175. De l'autre côté du miroir

La pièce a 4 mètres de large, et la lampe se trouve à un mètre du miroir Est.

Si d désigne la distance de la lampe au miroir Est, et l la largeur de la pièce, on peut construire de proche en proche les images virtuelles. Sur la colonne de gauche, on indique ci-dessous la distance de l'image Ouest au miroir Ouest, sur la colonne de droite la distance de l'image Est au miroir Est.

	Ouest	Est
Première image		
	$l - d$	d
Deuxième image (miroir des précédentes)		
	$l + d$	$2l - d$
Troisième image	$3l - d$	$2l + d$
Quatrième image	$3l + d$	$4l - d$
…		

On a donc $2l + d = 9$ et $4l - d = 15$, d'où $d = 4$ et $l = 1$.

176. Les carrés d'argent

Voici un exemple de carré d'argent d'ordre 4.

4	3	2	1
5	4	1	2
6	7	4	3
7	6	5	4

Il n'existe pas de carré d'argent d'ordre 5.

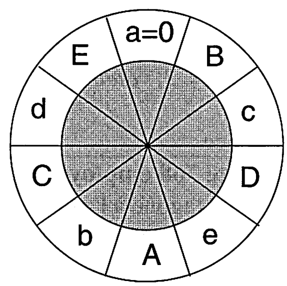
En effet, au moins quatre nombres ne figurent pas sur la diagonale.
Soit l'un de ces nombres. S'il n'apparaît que deux fois dans le tableau, il sera absent sur l'une des cinq réunions de ligne et de colonne de même rang, s'il apparaît trois fois, il sera en double sur l'une de ces réunions.

⊠ *C. ROMON, Antoine WEHENKEL (Luxembourg).*

177. Algèbre de boule

Seuls, le 1 et le 5 peuvent faire face au zéro.

En désignant les numéros inscrits dans les alvéoles par des lettres comme sur le dessin, on parvient à la condition :
$A - a = B - b = C - c = D - d = E - e$.
Cette différence commune vaut A puisque $a = 0$.
En faisant la somme des 10 nombres, on parvient à :
$2(b + c + d + e) + 5A = 45$.

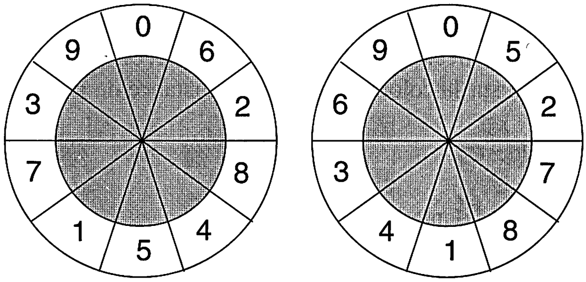


A est donc un nombre impair. Par ailleurs, $b, c, d, e, A, b + A, c + A, d + A, e + A$ doivent décrire les nombres de 1 à 9, ce qui ne laisse plus que deux possibilités : $A = 1$ ou $A = 5$.

Si $A = 1$, les nombres b, c, d, e prennent, dans le désordre, les valeurs paires.
Il y a donc 24 façons de compléter les cylindres, autant que de permutations de ces 4 nombres.
Si $A = 5$, les nombres b, c, d, e prennent, dans le désordre, les valeurs 1, 2, 3, 4, ce qui donne encore 24 nouvelles solutions. Voici, ci-dessous, à titre d'exemple, une solution correspondant à chacun des cas.

⊠ *Merci à Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses) pour sa généralisation du problème : il nous apprend que, le nombre des alvéoles devant être de la forme $4r + 2$, le nombre de valeurs possibles en face du zéro est le nombre de diviseurs de $2r + 1$. Ainsi, pour*

210 alvéoles on peut en face du zéro mettre 8 nombres différents, les diviseurs de 105 : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Joël LIRAND et Michel MENGUAL donnent pratiquement les 48 solutions.



178. Texto

Le plus petit résultat possible de l'addition est 356.

Il est obtenu (en codant l'opération LAB + RIN = HES) pour les opérations 107 + 249 = 356 et 249 + 107 = 356, ou encore celles obtenues en intervertissant le 7 et le 9 dans les unités ou le 0 et le 4 dans les dizaines ou le 1 et le 2 dans les centaines.

En codant l'opération LA + YRI = THES ou LAB + RI = THES, le plus petit résultat peut être 1023.

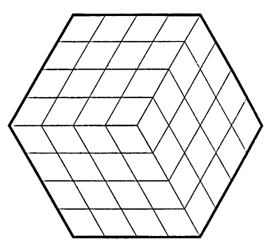
⊠ *De nombreux lecteurs donnent la solution 356, avec ou sans explications : Yves ARCHAMBAULT (Paris), Henri ATGER (Versailles), François BETOUT (93600 Aulnay sous Bois), Paul BETOUT (Paris), D. BLONDEAU (Toulon), Jean BOSSOT, Guy CENEVET (92200 Neuilly sur Seine), A. CAROUGE (17740 Sainte Marie de Ré), Jacques DEMOULIN (78150 Le Chesnay), Jean-Louis FOULLEY (92160 Antony), Claude GEORGE (84240 Ansouis), J. HAVERLAND (59350 Saint-André), J. LE FCOUR (Paris), M. LE GALLIC (78730 Ponthévrard), Joël LIBRAND (86360 Chasseneuil du Poitou), Claude MAUGE (46100 Figeac), Jean-Pierre MICHEL (95880 Enghien les Bains), Jean-Claude MORIN (78700 Conflans Sainte Honorine), Robert MUNNICH (Paris), Michel RABAUD (72009 Paris), E. RENAUD (La Rochelle), Pierre REVEL–MOUROZ (Paris), Christiant ROMON, Alfred SICHEL (Paris), André TRIGAUX (51140 Jonchery sur Vesle), René WALDMANN.*

Alain MENARD(Paris), fantaisiste, imagine d'autres opérations comme 76 + 32 - 98 = 10 ou 136 - 84 - 50 = 2, valeur minimum.

179. Open space

Le siège compte 768 employés.

Pour paver un hexagone à l'aide de losanges, il est nécessaire que ces derniers soient obtenus en accolant deux triangles équilatéraux. Un côté de l'hexagone devra être un multiple entier de la longueur d'un côté de losange, donc d'une cloison : la longueur d'une cloison sera notre unité de mesure. Si un côté de l'hexagone a pour longueur n, c'est qu'on pourra paver l'hexagone à l'aide de $3n^2$ losanges. On s'en persuade en utilisant le pavage de l'hexagone que l'on utilise habituellement pour représenter un cube en perspective.



Mais combien faut-il alors de cloisons ? Chaque losange a 4 côtés, ce qui signifie qu'il y a $12n^2$ côtés. Enlevons les $6n$ côtés correspondant au mur d'enceinte. Il reste $12n^2 - 6n$ côtés. Or chaque cloison sert à deux côtés, ce qui signifie qu'il y a $6n^2 - 3n$ cloisons. Il ne reste plus qu'à déterminer n tel que $6n^2 - 3n = 1488$.

Il est simple de trouver $n = 16$, et donc $3n^2 = 768$.

☒ *Bonnes solutions de Philippe KAHN (92100 Boulogne), Michel MENGUAL (Paris), Christian ROMON, Jean TOCHE (30700 UZES).*

180. Armistice sur échiquier

Quelle que soit la position des tours, la somme des numéros des cases est 260.

En effet, à l'intersection de la ligne L et de la colonne C, le numéro de la case est $8 \times (L - 1) + C$. Pour que les huit tours ne se menacent pas, il est nécessaire que L et C prennent toutes les valeurs de 1 à 8. Le total des numéros de cases sera donc :

$8 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$,

soit $8 \times 28 + 36 = 260$.

☒ *J. CARLHIAN (Lyon) va au-delà de la solution qu'il donne exacte : il dénombre toutes les dispositions possibles de ces tours et en trouve 24^2 soit 576.*

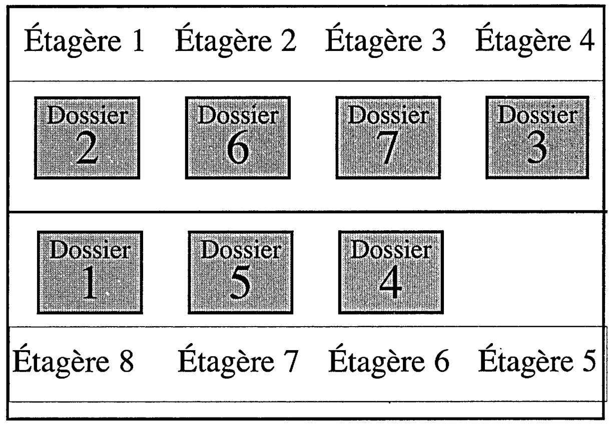
Graphes & algorithmes

Chapitre 4

181. Désordre chez Maya

Problème n°1 du 19-01-97

Maya, la secrétaire, a dérangé tous les dossiers. Le numéro de chaque dossier aurait dû correspondre au numéro de l'étagère sur laquelle il se trouve. Il faut vite les remettre en place avant que M. Boss n'arrive ! Mais attention ! Les dossiers sont très lourds, et Maya ne peut en déplacer qu'un à la fois, en le poussant vers une étagère voisine (vers la gauche, la droite, l'avant ou l'arrière) à condition que cette dernière soit vide.



Maya a trouvé la solution la plus économique puisqu'elle y est parvenue en un nombre minimal de déplacements. Faites aussi bien qu'elle !
Sauriez-vous prouver que le nombre de déplacements est minimal ?

182. L'ascenseur capricieux

Problème n°5 du 18-02-97

Dans cet immeuble de onze étages, l'ascenseur est bien capricieux. Il ne peut monter que de 2, 3 ou 5 étages à la fois et ne peut descendre que de 4 ou 11 étages. Le concierge, dont la loge est située au rez-de-chaussé, doit procéder à la distribution du courrier.

Comment doit-il opérer pour partir de sa loge, s'arrêter une fois et une seule à chaque étage, et revenir chez lui ? Sauriez-vous déterminer le nombre de cheminements différents possibles ?

183. L'ascension fabuleuse

Problème n°11 du 01-04-97

Un alpiniste s'apprête à tenter en solitaire une escalade fabuleuse, si difficile qu'elle doit durer 15 jours. La descente est aussi délicate que la montée et nécessite le même temps. Seulement, voilà, chargé de tout le matériel d'ascension, un homme ne peut transporter que 18 rations journalières (nourriture et eau). Dans cette montagne, aucun refuge n'a été construit, pas question d'espérer retrouver le moindre paquet abandonné. Heureusement, l'alpiniste peut compter, s'il le souhaite, sur un « sherpa », pour l'accompagner sur une partie de l'ascension. Celui-ci peut porter des provisions ou aller en chercher. Comme lui, son assistant peut se charger de 18 rations, comme lui, il en consomme une par jour.

Comment les deux hommes devront-ils procéder pour que l'alpiniste réussisse son exploit dans les temps prévus tout en faisant en sorte que chacun mange à sa faim ?

184. Brutalité sur le terrain

Problème n°16 du 06-05-97

Quatre équipes de rugby participent à un tournoi de sélection destiné à former l'équipe nationale. Malheureusement, si le jeu est de qualité, les esprits s'échauffent, au point que chacun des soixante joueurs en présence a volontairement envoyé un coup de pied à exactement l'un des autres joueurs.
Au moment d'établir la liste des vingt joueurs retenus (quinze titulaires et cinq remplaçants), le sélectionneur manifeste le désir qu'aucun des vingt membres de la sélection n'ait frappé un autre membre de cette sélection.

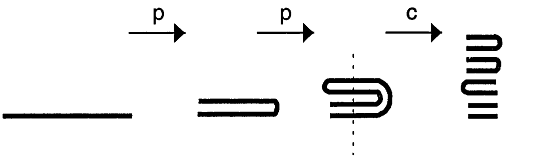
Est-il toujours possible de respecter son vœu ?

Même question si la sélection comporte 21 joueurs.

185. Les petits papiers

Problème n°21 du 10-06-97

Sur un ruban de papier, vous avez la possibilité de réaliser les deux opérations suivantes :



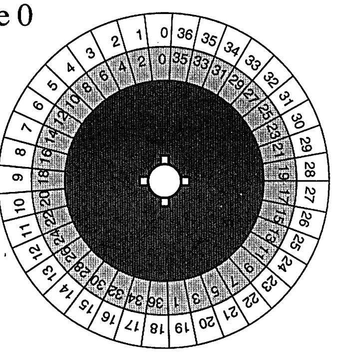
• Le «pli» (**p**) : vous pliez en deux en amenant la moitié droite sur la moitié gauche.
• La coupe (**c**) : vous coupez au milieu et superposez les morceaux (les morceaux de droite sur les morceaux de gauche).
Par exemple, à partir d'un morceau initial, on obtient 5 morceaux avec la suite d'opérations **p p c**.
On alterne **c p c p** ...

Au bout de combien de coupes dépassera-t-on les mille morceaux ?
Combien aura-t-on alors de morceaux ?

186. La roulette sans boule

Problème n°26 du 15-07-97

Dans ce casino, on peut jouer à une roulette inhabituelle. La base fixe contient 37 alvéoles blanches numérotées de 0 à 36, disposées en cercle dans cet ordre. Le cylindre, quant à lui, contient 37 alvéoles grises, numérotées de 2 en 2, comme le montre le dessin (35 est suivi par 0, 36 par 1). Les joueurs misent sur des numéros, puis le croupier lance le cylindre qui tourne jusqu'à s'immobiliser. Des crans imposent qu'il ne s'arrête que lorsque ses alvéoles sont en regard des alvéoles fixes. Un numéro est réputé sortir lorsqu'il figure sur deux alvéoles en regard.



Quelle est la probabilité qu'aucun numéro ne sorte lors d'un lancer ?
Que plus d'un numéro sorte ?

187. Les deux touches de la calculatrice

Problème n°31 du 19-08-97

Cette calculatrice est bizarre. Elle ne possède que deux touches, A et B. L'écran, lui, n'affiche que des nombres entiers. Lorsqu'on l'allume, 0 s'affiche.

• En pressant sur la touche A, le nombre affiché est multiplié par 2, puis 1 est ajouté. Ainsi, 0 devient 1, 5 devient 11…

• En pressant sur la touche B, il ne se produit quelque chose que si le nombre affiché est impair : la calculatrice ajoute alors 5 et divise le résultat par 2.

Ainsi, 2 reste inchangé, mais 7 devient 6 …

Vous allumez. Comment obtenir l'affichage du nombre 100 avec un minimum de pressions ?

188. Les nombres « chanceux »

Problème n°36 du 23-09-97

On écrit la liste des entiers de 1 à 1997.

– On en raye un sur deux (pour ne conserver que les nombres impairs).

– De la liste restante, on raye un nombre sur 3 (le troisième, le sixième, …). Restent 1, 3, 7, 9, …

– De cette liste, on raye un nombre sur 4. Il reste : 1, 3, 7, 13, 15, 19…

– On recommence : on raye un nombre sur 2, un nombre sur 3, un nombre sur 4, et ainsi de suite…

Si lors d'une opération, on n'a pas rayé de nombre, on s'arrête.

Les nombres « chanceux », s'ils existent, sont ceux qui restent alors (en dehors de 1).

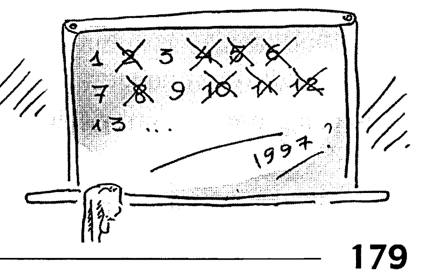
Le dernier nombre à être rayé de la liste est le nombre « malchanceux ».

Montrez que 1997 n'est ni « chanceux », ni « malchanceux ».

Plus difficile :

Y a-t-il un ou plusieurs nombres chanceux ?

Quel est le nombre malchanceux ?



189. Le plein, s'il vous plait !

Problème n°41 du 28-10-97

Pour débiter son essence en l'absence de sa pompe, hors d'usage, un garagiste utilise trois récipients de contenances respectives : 6 litres, 11 litres et 13 litres. Ce jour-là, un client contrariant lui demande 4 litres du précieux liquide.
On admettra que le pompiste peut réaliser les opérations suivantes :
• remplir un récipient à l'aide de la citerne ou d'un autre récipient
• vider un récipient dans un autre ou dans la citerne.

Comment va-t-il mesurer cette quantité en un minimum d'opérations ?

Plus généralement, ***certains de ces récipients permettent-ils au garagiste de servir, avec cette méthode, tout nombre entier de litres ?***

190. Pour rester premier

Problème n°46 du 02-12-97

Vous jouez avec un ami au jeu suivant : chacun à son tour coche un nombre entier sur cette grille en respectant les deux règles ci-dessous :
• Le nombre coché doit être «premier»
(les nombres premiers sont en gras sur la grille).
• Le nombre coché doit être égal à l'entier coché par le joueur précédent augmenté d'un nombre compris entre 1 et 10.
Celui qui ne peut plus jouer en respectant ces règles a perdu.
C'est à vous de commencer. Vous devez cocher un nombre premier compris entre 1 et 10.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110
111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130

Quelle est votre stratégie ?

191. Au cœur d'un ordinateur

Problème n°51 du 06-01-98

Cet ordinateur (primaire, il faut bien le reconnaître) ne sait faire que deux opérations :

• Les calculs de sommes et de différences de nombres (puisés dans ses zones mémoire).

• Les « affectations », qui consistent à mettre dans l'une de ses zones mémoire le résultat d'un calcul ou le contenu d'une mémoire.

Et comble de nullité, il ne possède que deux zones mémoire !

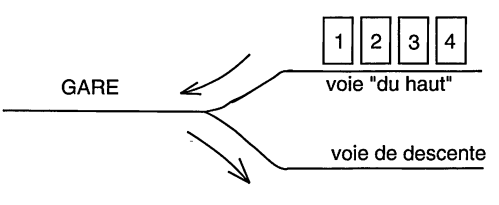
à cet instant, chacune de ces deux zones contient un nombre.

Comment, néanmoins, en un minimum d'opérations, peut-on échanger le contenu de ses deux zones mémoire ?

192. Vacances de neige

Problème n°55 du 03-02-98

Le soir, après la fermeture des pistes, les cabines de téléphérique sont rangées au garage, comme dans la disposition ci-dessus (elles sont placées dans l'ordre 1, 2, 3, 4 sur la voie du haut).



On les prépare alors au départ du lendemain (elles partent de la voie du bas) par une série de manœuvres, selon une règle simple : chaque cabine se déplace en sens unique (ce n'est pas comme dans un aiguillage), soit de la voie du haut vers la gare, soit de la gare vers la voie de descente.

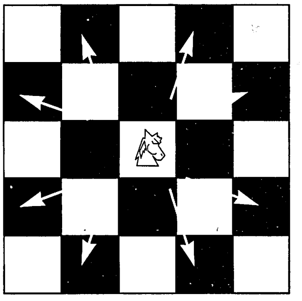
• Quelles manœuvres successives opérer pour que les cabines se retrouvent sur la voie de descente dans l'ordre, de gauche à droite : 1432 (la « 2 » en premier, puis la « 3 », la « 4 » et la « 1 ») ?

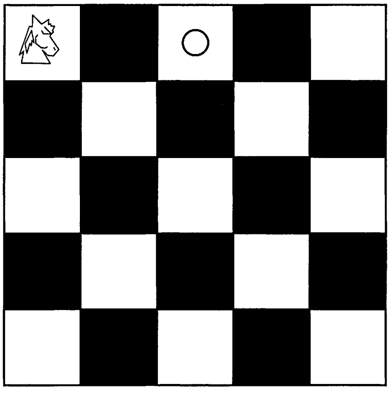
• Dans combien d'ordres différents peuvent-elles repartir le lendemain matin ?

193. Le défi du cavalier

Problème n°60 du 10-03-98

Vous connaissez tous la marche d'un cavalier sur un échiquier.



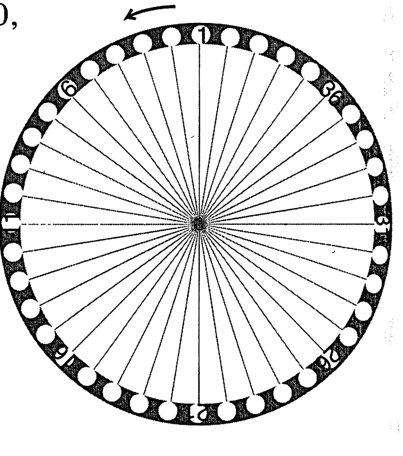


En respectant ce mouvement, ***faites décrire au cavalier situé en haut à gauche toutes les cases de cet échiquier 5 × 5 une fois et une seule, en terminant à la case marquée d'un rond.***
Montrez qu'il lui est impossible, après avoir décrit toutes les cases, de retrouver au coup suivant sa position initiale.

194. Les balles de ping pong

Problème n°65 du 14-04-98

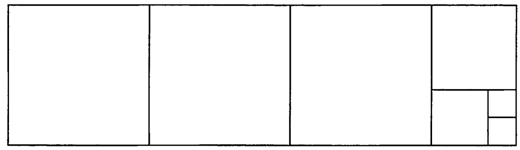
Quarante balles de ping pong, numérotées de 1 à 40, sont posées en cercle, dans cet ordre (nous n'avons pas numéroté toutes les balles pour ne pas alourdir le dessin). On enlève la balle 1, puis la balle 3, la balle 5, et ainsi de suite, on retire une balle sur deux et l'on fait autant de tours que nécessaire jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une balle.



Quel est le numéro de la dernière balle ?
Pour les amateurs de sensations fortes :
généraliser à un nombre initial N de balles.

195. Le dernier carré

Problème n°71 du 26-05-98

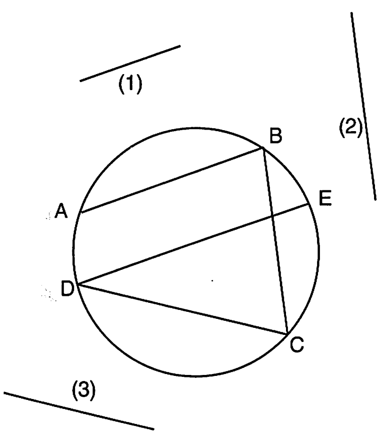


On dispose d'une feuille de papier. On découpe le plus grand carré possible dans cette feuille. Dans le morceau restant, on découpe à nouveau le plus grand carré possible. Et ainsi de suite…
On continue ainsi à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morceau restant soit lui-même un carré.

Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm ?
Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions initiales sont deux nombres entiers quelconques ?

196. Les trois directions

Problème n°76 du 30-06-98



On se donne 3 directions (1), (2) et (3) sur une surface plane. On part d'un point A situé sur un cercle pour tracer la corde AB selon la première direction. La corde BC sera parallèle à la deuxième direction, la corde CD à la troisième, la corde DE à la première et ainsi de suite… les cordes tracées ayant successivement les directions (1), (2), (3), (1), (2), (3), (1) …
Si par hasard la direction à prendre est tangente au cercle au point considéré, on admet que la corde est réduite à un point.

La ligne ainsi tracée peut-elle être infinie, ou retombe-t-on forcément sur le point de départ ?

197. Le « Monde » éparpillé

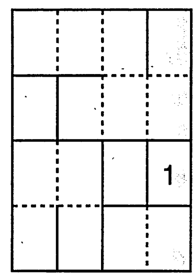
Problème n°76 du 30-06-98

Emportées par le vent, les feuilles de votre quotidien favori s'envolent et s'éparpillent sur le trottoir. Vous ne parvenez à retenir qu'une double feuille. Sur la double page ouverte, vous pouvez lire les numéros 15 et 40.

Combien le journal, qui ne comportait qu'un seul cahier, possédait-il de pages ?

Moins simple :

À l'imprimerie, un journal de 32 pages est obtenu par pliage d'une feuille complète, comme sur le dessin ci-dessus, où les plis « en vallée » (en creux) sont repérés en pointillés, les plis « en montagne » (en relief) sont repérés en traits pleins. Après pliage, les bords sont découpés de façon que la page 1 occupe la place indiquée.

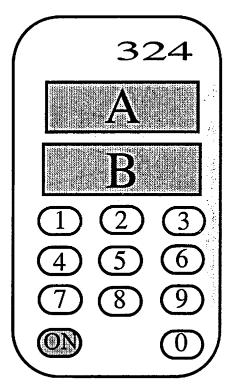


Sauriez-vous, mentalement, retrouver la numérotation de toutes les autres pages de cette face ?

198. Encore une calculatrice bizarre !

Problème n°86 du 08-09-98

Cette calculatrice est bizarre. Outre les touches numériques, elle possède deux touches insolites, A et B. Lorsqu'un nombre N est affiché sur l'écran :



• En pressant sur la touche A, on obtient la somme de N et du nombre qui a les mêmes chiffres, mais dans l'ordre inverse. Ainsi, 324 devient 324 + 423 = 747.

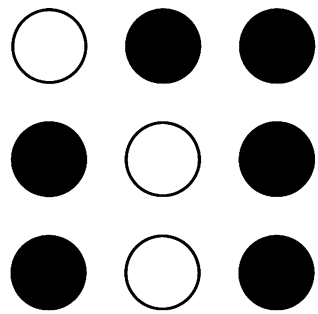
• En pressant sur la touche B, on obtient un nombre de même longueur que N, égal à la différence (absolue) entre N et le nombre qui a les mêmes chiffres, mais dans l'ordre inverse. Ainsi, 324 devient 423 – 324 = 099.

• Vous introduisez un nombre de trois chiffres, et appuyez successivement sur B puis sur A. ***Quel nombre s'affiche alors ? Et avec quatre chiffres ?***

199. Le revers de la médaille

Problème n°91 du 13-10-98

Neuf médailles, dorées sur une face et noires sur l'autre, sont disposées en carré comme sur la figure. Un «coup» consiste à choisir une ligne, une colonne ou une diagonale et à retourner les trois médailles de cette rangée.



Est-il possible de faire en sorte que toutes les médailles soient dorées , et si oui, en combien de coups, au minimum ?

200. L'œuf à la coque

Problème n°96 du 17-11-98

Cette cuisinière veut faire cuire un œuf à la coque selon les règles de l'art : 3 minutes exactement dans l'eau bouillante. Mais pour tout chronomètre, elle possède deux sabliers, l'un qui s'écoule en six minutes, l'autre en onze minutes. Elle met l'eau à bouillir et fait partir en même temps ses deux sabliers, les retournant chaque fois qu'ils se vident. Elle finit par réussir à mesurer les trois minutes nécessaires à la cuisson de son œuf.

Comment ?

En s'octroyant le droit de retourner des sabliers encore en partie remplis, elle aurait pu décompter ses trois minutes en patientant beaucoup moins longtemps. Combien, au minimum ?

201. La fédération économe

Problème n°101 du 21/12/1998

Tous les arbitres professionnels de rugby vont être convoqués par la fédération. Il s'agit de leur transmettre de vive voix les règles en vigueur lors des prochaines saisons et d'éviter certains abus ou certaines interprétations divergentes du règlement.
Ces arbitres résident essentiellement en région parisienne et dans le Sud-Ouest de la France. Les frais de déplacement étant proportionnels au kilométrage parcouru, on décide que la réunion aura lieu dans la ville permettant de minimiser le total des distances.

• La ligue parisienne préconise Paris, arguant du fait que plus d'un arbitre sur deux y habite.
• La ligue du Sud-Ouest reconnaît ce fait, mais propose une ville comme Tours ou Poitiers, plus proche du centre de gravité des localisations des arbitres.

Laquelle a raison ?

202. La chaîne la plus longue

Problème n° 104 du 12/01/1999

On part d'un nombre entier. On effectue le produit de ses chiffres. On effectue le produit des chiffres du résultat trouvé. Et ainsi de suite...On écrit la chaîne obtenue jusqu'à trouver un nombre d'un seul chiffre. La longueur de la chaîne est appelée le potentiel du nombre.
Exemple de chaîne de 4 nombres : 49 est de potentiel 4.

49 36 18 8

Quelle est le nombre inférieur à 100 de plus fort potentiel ?

Quels sont les nombres inférieurs à 1000 de plus fort potentiel ?

203. La livraison de carburant

Problème n°105 du 19/01/1999

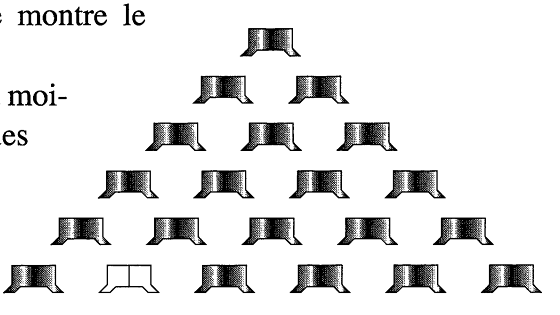
Dans une contrée désertique, un dépôt de carburant qui détient 29400 litres de combustible souhaite en transporter la plus grande quantité possible à une station service située à 5320 km de là.
Pour ce faire, il ne dispose que d'un vieux camion-citerne de contenance 7000 litres (en plus de son réservoir de 350 litres).
Le camion-citerne consomme la bagatelle de 100 litres aux 100 km. Il peut constituer sans risque des dépots intermédiaires, mais ne peut se ravitailler qu'à l'aide du carburant qu'il transporte.

Combien de litres de carburant, au maximum, est-il possible de faire parvenir à la station-service ?

204. La fontaine romaine

Problème n°116 du 13/04/1999

Une fontaine est construite comme le montre le dessin ci-contre, sur six niveaux.
À chaque niveau, chaque vasque déverse la moitié de son eau dans chacune des deux vasques situées juste au-dessous d'elle.
La vasque blanche (la deuxième en partant de la gauche au niveau inférieur) a recueilli 1 litre.

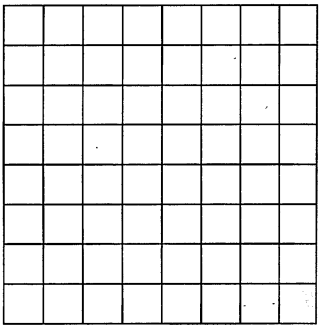


Quelle quantité d'eau a-t-on versé dans la vasque supérieure ?

Et s'il y a un nombre quelconque n d'étages ?

205. Le théorème de Victor

Problème n°121 du 18/05/1999



Victor est peintre. Il connaît le théorème des quatre couleurs (qui affirme que 4 couleurs suffisent pour peindre n'importe quelle carte de sorte que deux régions adjacentes soient de couleurs différentes) et vient de peindre les cases de cet échiquier 8 × 8 en utilisant exactement quatre couleurs. Artiste, il a ajouté à son œuvre une pointe de raffinement : les cases ayant un sommet commun sont également toutes de couleurs différentes.

Sauriez-vous peindre cet échiquier à la manière de Victor ?

Victor remarque alors que les quatre coins de l'échiquier sont eux aussi de couleurs toutes différentes. Il ferait bien de son résultat un théorème – on l'appellerait le théorème de Victor – et se pose des questions :

Les quatre coins sont-ils de couleurs différentes quel que soit le coloriage respectant la règle imposée ? La propriété reste-t-elle vraie sur un échiquier 10 × 10 ?

206. Le partage du gruyère

Problème n°126 du 22/06/1999

Deux armées de souris viennent de découvrir un gisement de 1999 morceaux de gruyère. Plutôt que de se faire la guerre, elles conviennent de se répartir le butin en deux stocks de même poids. Mais elles n'y parviennent pas. Elles décident alors de découper l'un des morceaux et de laisser les autres intacts de façon à obtenir un partage équitable.

Est-ce toujours possible ?

Mais voilà qu'intervient une troisième armée de souris.

Est-il toujours possible de répartir le butin en trois lots de masses identiques en ne découpant (éventuellement en trois) que l'un des morceaux ?

207. La loi de la jungle

Problème n°131 du 27/07/1999

La lune de la planète Fantastica tourne autour de l'astre en quatre jours. Cette période rythme la vie de la planète, peuplée de bestioles plus ou moins sympathiques qui s'entre-dévorent selon des cycles immuables de quatre jours.
• Le premier jour du cycle, chaque dragon engloutit un monstre,
• Le deuxième jour, chaque vampire anéantit un dragon,
• Le troisième jour, chaque monstre avale un vampire,
• Le quatrième jour, les bêtes digèrent,
... et on recommence !
La population décroît, il faut bien le dire, très rapidement. Ainsi, six lunes et un jour après le passage de l'agent de recensement (toujours, par prudence, un jour de digestion), les deux derniers dragons engloutirent les deux derniers monstres et se proclamèrent les maîtres de la planète.

Combien le recensement faisait-il état de dragons, de monstres et de vampires ?

208. L'arme secrète

Problème n°136 du 31/08/1999

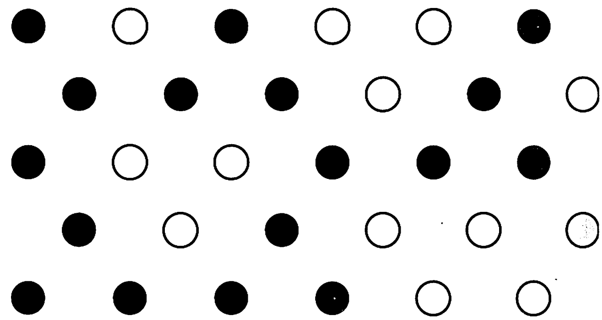
Pour acheminer une arme très sophistiquée vers un maquis, des guerilleros décident d'envoyer cinq camions, chacun par une route différente. Ils savent en effet que deux d'entre eux peuvent être interceptés, car deux patrouilles sont postées chaque nuit aléatoirement sur les routes de la région. Mais les révolutionnaires sont prêts à sacrifier des armes pour faire parvenir intacte au moins l'une d'entre elles. Seule condition : qu'une arme entière ne tombe pas aux mains des patrouilles.
Ils divisent donc chaque arme en un certain nombre de pièces détachées (les mêmes pour chacune) et répartissent ces pièces dans les camions de manière à être sûrs de pouvoir reconstituer au moins une arme dans le maquis sans que l'interception de deux camions ne permettent au pouvoir de disposer de l'arme secrète.

Comment s'y sont-ils pris pour parvenir à leurs fins tout en minimisant le nombre de pièces détachées et le nombre d'armes perdues ?

209. Noir ou blanc ?

Problème n°141 du 12/10/1999

Chacune des lignes de ce diagramme se déduit de la précédente selon une règle immuable de filiation.



Sauriez-vous trouver cette règle et en déduire la cinquième ligne ?
Retrouvera-t-on la première ligne au bout d'un certain nombre d'étapes ?

210. Opérations à risques

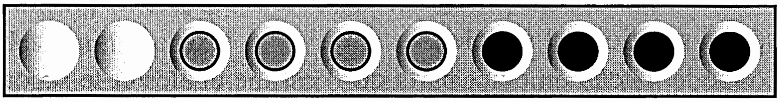
Problème n°145 du 9/11/1999

Un chirurgien doit opérer 5 malades. Mais il ne dispose que de trois paires de gants de caoutchouc, stériles et réversibles : une blanche, une jaune et une verte. Chaque gant est muni d'un collier, lui-même stérile au départ, qui permet d'enfiler ou d'enlever les gants sans toucher aux faces en contact avec les organes.

Le chirurgien peut-il accomplir sa tâche sans risquer la contamination de l'un de ses malades, ou la sienne ?

211. Alternance souhaitée

Problème n°151 du 21/12/1999



Dans les dix alvéoles ci-dessus, sont placées quatre boules noires et 4 boules grises, deux alvéoles restant vides.
Les seuls mouvements auxquels vous avez droit consistent à déplacer deux boules à la fois, à condition qu'elles se touchent, et seulement si vous les déposez dans les alvéoles vides sans changer leur disposition (par exemple, si une boule noire est à gauche, elle sera posée dans l'alvéole de gauche).

Comment, en un minimum de mouvements, alterner les deux couleurs en commençant (à gauche) par une boule noire ?

212. La fausse piece

Problème n°156 du 25/01/2000

Vous disposez d'une balance à deux plateaux et de douze pièces d'aspect identique. Onze sont d'authentiques pièces de collection, la dernière n'est qu'une imitation, si bien faite qu'elle a même aspect que les autres. Heureusement, sa masse diffère légèrement de celle des vraies pièces, mais vous ignorez si elle est plus lourde ou plus légère.

Comment, en un minimum de pesées, démasquer à coup sûr la fausse pièce et dire si elle est plus lourde ou plus légère?

213. Les garnements et le gâteau

Problème n°161 du 29/02/2000

Deux garnements doivent se partager un gâteau sans qu'aucun des deux ne s'estime lésé. La solution est simple :
Le premier coupe le gâteau en deux parts qu'il estime égales et le second choisit sa part.

Comment trois garnements peuvent-ils se partager un gâteau en trois sans qu'aucun des trois ne s'estime lésé ?

Et dix garnements ?

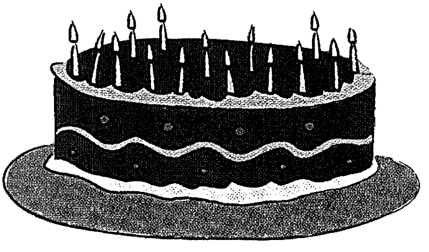
214. Les confettis qu'on fait ici

Problème n°169 du 25/04/2000

Ici, c'est une classe primaire, durant la dernière décennie du XX^{e} siècle. Le professeur d'école donne à chacun des 34 élèves une feuille de papier.
Il demande alors à certains des élèves de découper leur feuille en dix morceaux. Certains des dixièmes de feuilles sont encore, sur instruction de l'instituteur, divisés eux aussi en dix bouts de papier.

Tous les morceaux de papier, quelle que soit leur taille, sont alors rassemblés ; on les compte : le nombre total est exactement le millésime de l'année en cours.

En quelle année la scène se déroule-t-elle ?

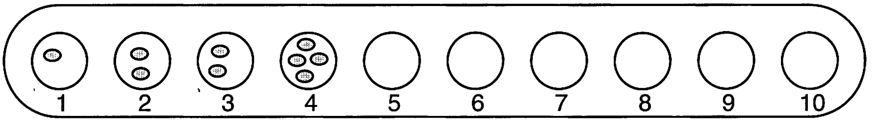


215. Les grains de riz

Problème n°176 du 20/06/2000

Sur une planche, on dispose d'alvéoles numérotés de 1 à 10, et d'un réservoir. On y place des grains de riz.
Un « coup » consiste à vider un des alvéoles de ses grains en respectant les règles suivantes :
• l'alvéole numéro N ne peut être vidé que s'il contient N grains ;
• on répartit ces N grains à raison d'un dans chacun des alvéoles 1 à (N – 1), et on verse le dernier dans le réservoir.
La partie est gagnée si tous les grains ont pu être déversés dans le réservoir.

Comment gagner la partie avec la disposition suivante ?



Quel est le plus petit nombre de grains (et la disposition correspondante des grains) permettant de gagner la partie sans que l'alvéole numéro 10 soit vide ?

216. La piste infernale

Problème n°180 du 18/07/2000

Une tortue s'élance sur une piste de dix mètres de long. Le jour, elle parcourt un mètre, la nuit, elle se repose. Seulement, voilà, la piste, en caoutchouc, s'étire toutes les nuits de dix mètres.
Ainsi, au deuxième matin, la tortue se retrouve à deux mètres du début de la piste, mais à dix-huit mètres de son extrémité. Elle s'endort alors qu'il reste encore dix-sept mètres à parcourir.
Et lorsqu'elle se réveille, la piste a trente mètres de long, dont plus de vingt-cinq mètres sont devant elle !

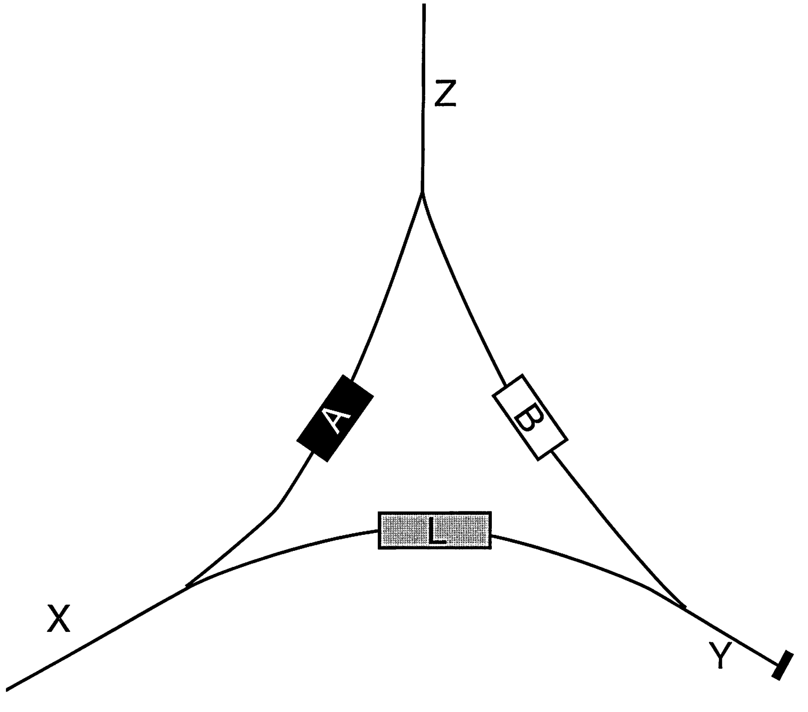
La tortue arrivera-t-elle au bout de la piste ? Si oui, en combien de temps ?

217. Erreur d'aiguillage

Problème n°186 du 29/08/2000

À la suite d'une erreur d'aiguillage, le wagon A est entreposé sur la voie de gauche et le wagon B sur celle de droite.
La locomotive L, placée sur la voie du bas, peut, indifféremment, pousser ou tirer un ou plusieurs wagons. Mais elle ne peut pénétrer sur la voie Y qui a juste la longueur d'un wagon.

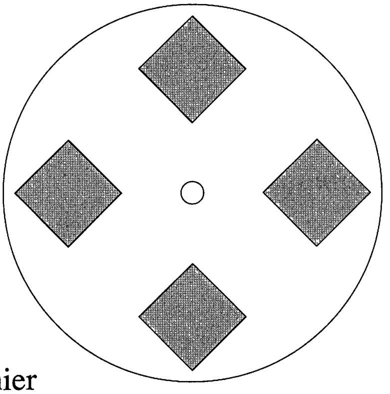
Comment échanger les deux wagons A et B en un minimum de manœuvres ?



218. Dans la peau d'un cambrioleur

Problème n°191 du 3/10/2000

Le coffre-fort de cette banque admet un double système de sécurité.



• D'abord, à l'aide d'une clé qu'il est seul à posséder, le directeur ouvre une première et lourde porte. Il se trouve alors devant une deuxième porte commandée par un plateau pivotant sur lequel sont disposées quatre touches sensitives carrées indiscernables. Le plateau est dans la position dans laquelle le comptable l'a laissé lors de la dernière fermeture.

• Le directeur cède la place au comptable. Ce dernier doit alors (en secret) exercer une pression sur celles des touches (connues de lui-seul) qui sont connectées au circuit d'alarme, de manière à couper ces circuits, et sur elles seulement car une pression sur une touche déconnectée rétablit la connexion.

• Le directeur ouvre enfin la porte en actionnant la manivelle d'ouverture. S'il pèse sur cette dernière alors que les circuits ne sont pas tous coupés, la deuxième porte ne s'ouvre pas et le plateau se met à tourner à grande vitesse avant de s'immobiliser à nouveau dans une position imprévisible. Même si elles ne sont plus dans la même position, les touches restent cependant connectées ou déconnectées. L'alarme se déclenche après 16 essais infructueux de la manivelle d'ouverture.
En l'absence du comptable, le directeur vient d'ouvrir la première porte.

Parviendra-t-il à ouvrir la deuxième porte avant que l'alarme ne se déclenche ?

219. Quelle cruche !

Problème n°196 du 7/11/2000

Je dois tirer un litre d'essence d'une grande cuve. Je suis « cruche », j'ai oublié de me munir d'un récipient adéquat et ne dispose que de deux bidons : l'un de dix litres, l'autre de sept litres.

Pourrai-je me servir exactement un litre, et si oui, en combien de mouvements au minimum ?

On appelle mouvement l'action de remplir ou de vider un récipient.

Quels nombres entiers de litres entre 1 et 17 demandent le plus de mouvements ?

220. Le moulin à nombres

Problème n°200 du 5/12/2000

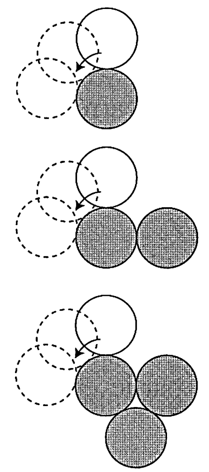
Prenez un nombre et entrez-le dans le moulin à nombres. Cet appareil va « mouliner » votre nombre de la façon suivante : il le multipliera par 2, retranchera 7, divisera le résultat par le nombre initial augmenté de 1 et recrachera le quotient obtenu.
Si vous n'avez pas coupé l'alimentation, le moulin recommencera la même suite d'opérations à partir du nombre précédemment restitué.

Vous entrez le nombre 2001 et le moulinez 2001 fois. Quel résultat s'affichera ?

Et en partant d'un autre nombre ?

221. Les satellites d'argent

Problème n°201 du 12/12/2000



On fait rouler (sans glisser) une pièce d'un Euro (en clair) autour d'une autre pièce d'un Euro (en gris) qu'on a préalablement fixée, jusqu'à ce que la pièce claire retrouve sa position initiale.
Combien de tours la pièce claire a-t-elle fait sur elle-même ?
On fixe maintenant deux pièces d'un Euro grises côte à côte, et on fait rouler (sans glisser) une pièce d'un Euro (en clair) autour d'elles, jusqu'à ce qu'elle retrouve sa position initiale.
Cette fois, combien de tours la pièce claire a-t-elle fait sur elle-même ?
Même question pour finir avec trois pièces fixes tangentes entre elles deux à deux.

222. Les racines emboîtées

Problème n°206 du 16/01/2001

Chacun sait que $\sqrt{A}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut A. Cette écriture n'a de sens que si A est positif. Pourtant, on peut donner un sens au nombre B qui s'écrit :

$$B = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \dots}}}$$

Lequel et que vaut B ?

Pour le nombre $C = \sqrt{-\frac{3}{16} + \sqrt{-\frac{3}{16} + \sqrt{-\frac{3}{16} + \dots}}}$, les avis divergent. Certains expliquent qu'il peut prendre deux valeurs, et n'est donc pas défini. D'autres, parmi lesquels M. Jacques Serre, dont le courrier nous a suggéré ce problème, affirment que parmi ces deux valeurs, une seule est acceptable.
Laquelle et pour quelle raison ?

223. Le premier carré

Problème n°211 du 20/02/2001

On prend un nombre entier positif. On lui ajoute la partie entière* de sa racine carrée. On recommence avec le nombre obtenu, ... et ainsi de suite jusqu'à tomber sur un carré parfait.
Ainsi, en partant de 38, on obtient successivement 44 (38 + 6), 50 (44 + 6), 57 (50 + 7), 64 (57 + 7, qui est le carré de 8).

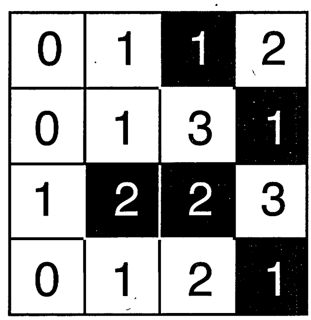
Quel est le premier carré obtenu en partant de 78 ? En partant de 2001 ?
Pourrait-on ne jamais obtenir un carré ?

* La « partie entière » d'un nombre est le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre.
Ainsi, la partie entière de π est 3, celle de $\sqrt{38}$ est 6.

224. Les carrés impairs

Problème n°216 du 03/04/2001

Dans un carré quadrillé, certaines cases sont blanches, d'autres noires. Dans chacune des cases, on inscrit le nombre des cases noires en contact avec elle par au moins un côté (si la case est noire, elle est comptée elle aussi).

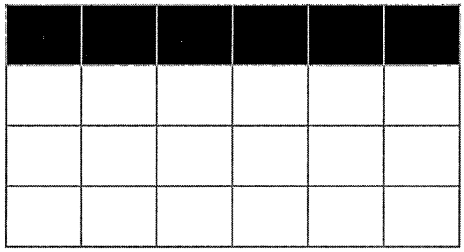


Le carré est qualifié d' « impair » si tous les nombres inscrits dans ses cases sont impairs.

Quels sont tous les carrés impairs de dimensions 2×2 ? 3×3 ? 4×4 ?
Sauriez-vous construire un carré impair de dimensions 5×5 ?

225. Échangisme version chocolat

Problème n°221 du 30/04/2001



Cette tablette de chocolat, dont vous devez poursuivre le coloriage, contient 12 carrés noirs et 12 carrés blancs (en guise de carrés, ce sont plutôt des rectangles).

• Les carrés de chocolat noir sont tous solidaires : on peut passer de n'importe lequel d'entre eux à un autre par une chaîne de carrés noirs ayant un côté commun.

• Les carrés de chocolat blanc constituent une forme parfaitement superposable (une fois découpée) à la forme constituée par les carrés noirs.

Combien de façons y a-t-il de compléter ce dessin ?

226. Lynx et lapins

Problème n°226 du 05/06/2001

Dans la forêt enchantée, 5000 lapins vivaient heureux jusqu'au jour où arriva un couple de lynx.

Or, chaque lynx mange un lapin par jour !

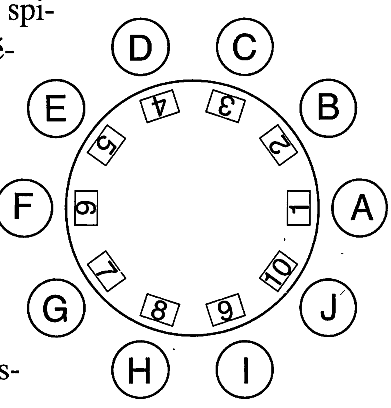
Croyant bien faire, Merlin dota ces animaux d'un pouvoir de reproduction magique : chaque jour, après le repas des « fauves », chaque lapin donnerait naissance à deux nouveaux lapins, tandis que chaque lynx ne donnerait naissance qu'à un seul lynx.

Les lapins réussirent-ils à survivre ?
Que se passe-t-il si, au lieu d'un seul couple de lynx il en arrive 1000 couples ?

227. La table tournante

Problème n°231 du 10/07/2001

Les dossiers disposés sur la table tournante sont numérotés de 1 à 9, dans cet ordre. Les dix membres du club de spiritisme, qui ont revêtu un maillot numéroté (les numéros vont de 1 à 9), prennent place autour de la table. Vous pouvez lire leurs initiales sur le schéma.



Ainsi Aline, qui porte le dossard numéro 1, est assise devant le dossier numéro 1, mais c'est la seule de l'assistance à porter le numéro du dossier devant lequel elle se trouve. D'ailleurs, chose curieuse, quand la table tourne, quelle que soit sa position, un seul des convives est placé devant le dossier corespondant à son numéro.
Béatrice porte un numéro plus grand que Charles.

Retrouvez le numéro porté par chacun des membres du club.
Que se passe-t-il si ce club comporte 10 membres ?

228. Par ici la monnaie !

Problème n°236 du 21/08/2001

On s'intéresse à toutes les façons de payer la somme d'1 Euro à l'aide de pièces de 5 centimes, de 10 centimes, et de 20 centimes d'Euro.

Combien y a-t-il de façons de le faire ?

Vous aurez remarqué, comme Ilan Vardi, mathématicien et lecteur du « Monde », qui nous a proposé ce problème, que ce nombre est un carré parfait.

Le nombre de façons de parvenir à n'importe quel nombre entier d'Euros avec des pièces de 5, de 10 et de 20 centimes est-il toujours un carré parfait ?

229. Les bandelettes de papier

Problème n°241 du 25/09/2001

Une addition (juste) a été réduite en bandelettes par des coups de ciseaux malintentionnés avant d'être jetée dans la corbeille à papier. Sept des huit bandelettes ont été récupérées. Les voici (ci-contre, en haut).

	1	5	4	6	8	2
+		6	3	2	9	1
+		4	2	3	9	0
+	2	4	3	4	7	5
=	6	1	2	6	5	9

Quant à la huitième bandelette, c'est l'une des six ci-contre.

5	4	3	6	2	5
7	7	4	3	1	7
6	8	8	7	1	1
7	2	4	3	2	0
6	1	1	9	8	4

Reconstituez entièrement l'addition.
(D'après une idée de Bernard Myers).

230. Brûler le temps

Problème n°246 du 30/10/2001

Imaginez-vous seul(e) dans un canot de sauvetage, perdu(e) en mer, sans montre ni sablier. Vous possédez juste une fusée de détresse, un briquet et deux cordelettes. Votre seul moyen de mesurer le temps est de consumer ces cordelettes.
Vous savez en effet que chacune d'entre elles brûle en exactement une heure d'une extrémité à l'autre. Mais irrégulièrement, sans aucune proportionalité entre le temps écoulé et la longueur de mèche consumée. Il se trouve que vous devez lancer votre signal de détresse exactement 45 minutes après le coucher du soleil pour avoir la meilleure chance d'être repéré(e).

Quel moyen avez-vous de savoir quand les quarante-cinq minutes se seront écoulées ?

Ce problème a été inspiré par deux textes du calendrier mathématique de Rinus Roelofs et Zsofia Ruttkay (Pays-Bas), repris dans la brochure « Mathématiques buissonnières en Europe », diffusée en 2000 à l'occasion de l'Année mondiale des mathématiques.

231. Jack-pot

Problème n°251 du 04/12/2001

Dans les casinos du groupe Pique-Tout, les machines à sous sont programmées pour déverser leur jack-pot une fois par jour, après une mise d'au moins une pièce, à une heure totalement aléatoire. En revanche, le nombre de pièces crachées est une fonction très précisément calculée du nombre N de pièces engrangées depuis le dernier jack-pot.

– Si N = 1, la machine ne donne rien.

– Si N est impair, la machine crache une pièce de moins que pour N – 1.

– Si N est pair, la machine crache une pièce de plus que le double de ce qu'elle cracherait pour la moitié de N.

Est-il possible que la machine crache plus de pièces qu'elle n'a engrangées? Donnez une valeur de N pour laquelle le jack-pot se monte à 2001 pièces.

232. Les caméléons

Problème n°256 du 08/01/2002

Dans ce zoo, vit une colonie de 99 caméléons qui peuvent prendre trois couleurs différentes : jaune, brune ou grise. Lorsque deux caméléons se rencontrent, s'ils sont de la même couleur, ils n'en varient pas. Mais s'ils sont de couleurs différentes, ils prennent tous deux la troisième couleur.

Les caméléons ne changent de couleur que dans ces circonstances de rencontres.

Un recensement effectué à l'arrivée des caméléons montre qu'il y avait 22 caméléons jaunes, 36 bruns et 41 gris.

Est-il possible qu'après un certain nombre de rencontres, il y ait 33 caméléons de chaque couleur? Si oui, comment?

233. Tiens, un carré !

Problème n°261 du 12/02/2002

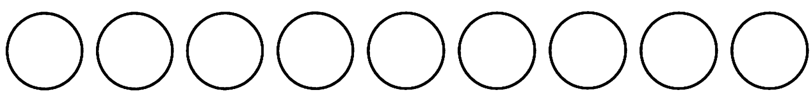
En multipliant 1 par 2 par 3 par 4 et en ajoutant 1, on trouve 25, le carré de 5.

En multipliant 2 par 3 par 4 par 5 et en ajoutant 1, on trouve 121, le carré de 11.
En multipliant 3 par 4 par 5 par 6 et en ajoutant 1, on trouve 361, le carré de 19.

Et en multipliant 1999 par 2000 par 2001 par 2002 et en ajoutant 1 ?

234. Neuf jetons

Problème n°266 du 19/03/2002



Neuf jetons, présentant tous une face blanche et une face noire, sont placés côte à côte. Au départ, toutes les faces sont blanches.

Lors de chaque « coup », vous avez le droit de retourner deux jetons à la fois, à condition qu'ils soient placés côte à côte.

Au bout de combien de coups au minimum est-il possible de parvenir à une configuration qui ne comporte que des faces noires ?

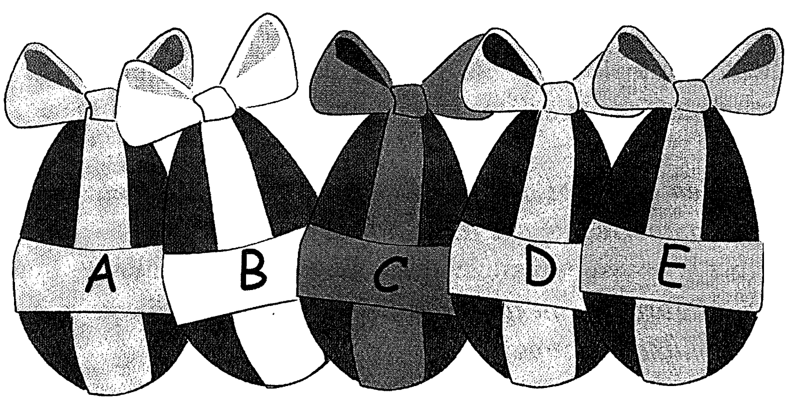
Quelle est la configuration qu'il est possible d'obtenir, mais qui nécessite, pour y parvenir, le maximum de coups ?

235. Les œufs en chocolat

Problème n°271 du 23/04/2002

Cinq gros œufs industriels en chocolat sont emballés dans des papiers de couleurs différentes marqués des lettres A, B, C, D et E. Certains sont fourrés à la crème et pèsent davantage que ceux qui contiennent de la liqueur.
On dispose d'une balance électrique qui indique les poids avec une très grande précision. Ainsi :
Les œufs A et E pèsent à eux deux 252 grammes.
Les œufs A, B et C pèsent à eux trois 420 grammes.
Les œufs B, C, D et E pèsent à eux quatre 569 grammes

Peut-on de manière certaine déterminer à quoi est fourré chacun des cinq œufs ?
Si oui, combien pèse un œuf liqueur et combien pèse un œuf crème ?
Sinon, quelle(s) pesée(s) supplémentaire(s) faudrait-il effectuer ?



236. Le tableau des nombres

Problème n°276 du 28/05/2002

0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	2	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

On remplit les cases d'un grand tableau rectangulaire à l'aide de nombres entiers positifs de la manière suivante :

• en haut, à gauche, on met un zéro. On ne pourra plus mettre de zéro sur la première ligne ni sur la première colonne ;

• dans la case suivante, à sa droite, on met donc 1, plus petit nombre autorisé, ce qui interdit de placer un autre 1 sur cette ligne ;

• et ainsi de suite... La première ligne contiendra donc tous les nombres entiers dans leur ordre naturel.

Pour la deuxième ligne :

• on place 1 à gauche (0 est interdit, car il figure sur la colonne) ;

• on place ensuite 0, plus petit nombre ne figurant pas sur la ligne ni sur la colonne ;

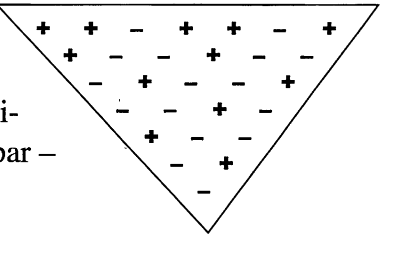
• puis 3 (0 et 1 figurent déjà sur la ligne, 2 figure sur la colonne) ; etc.

On remplit ainsi le tableau, ligne par ligne, en inscrivant dans chaque case le plus petit nombre qui n'apparaît pas encore sur la ligne ni sur la colonne.

Quel nombre figure en ligne 1001 et en colonne 2002 ?

237. La règle des signes

Problème n°281 du 09/07/2002



On fabrique des tableaux triangulaires de signes « + » et « − » en écrivant sous chaque couple de signes celui qui est le résultat d'une multiplication respectant la règle des signes. + par + ou − par − donnent +, + par − ou − par + donnent −.

On s'intéresse ici aux tableaux de sept lignes.

Quels signes doivent figurer sur la première ligne pour que le tableau complété contienne autant de signes + que de signes − ?

238. Les caramels

Problème n°286 du 13/08/2002

Grand'mère vient de confectionner ses ineffables caramels ! Elles les répartit amoureusement dans 15 sachets, destinés à ses 15 petits-enfants (huit garçons et sept filles). Edgar, le plus gourmand de tous, a déjà mis son nez dans le placard dans l'intention de se servir le premier. Aussi calculateur que gourmand, il constate alors que, quel que soit le sachet prélevé, la grand-mère pourra respecter avec les sachets restants le principe de parité : le reste peut être toujours réparti en deux groupes de 7 sachets contenant au total le même nombre de friandises.

Tous les paquets contiennent-ils forcément le même nombre de caramels ?

239. Jouer avec les allumettes

Problème n°291 du 17/09/2002

Amélie et Brice ont inventé un nouveau jeu.
Ils renversent une boîte de cent allumettes que Brice avait à peine entamée pour faire du feu dans la cheminée. Puis, chacun, à tour de rôle, enlève une ou deux allumettes. Celui qui parvient à prendre la dernière allumette gagne la partie.
« À toi l'honneur, je suis galant », annonce fourbement Brice.
Amélie joue, mais sans y croire. Elle a compté les allumettes et elle sait qu'elle va perdre.

Combien Brice avait-il craqué d'allumettes avant de se prêter au jeu ?

Amélie n'a pas dit son dernier mot. Elle propose une autre règle : on divise les allumettes en deux tas. Chacun, à son tour, doit encore prendre une ou deux allumettes, mais dans un seul des deux tas.
« Je commence encore ! », annonce-t-elle. Cette fois, elle est certaine de gagner.

Comment a-t-elle constitué les deux tas et quelle est sa stratégie pour gagner ?

240. Qui veut gagner des euros ?

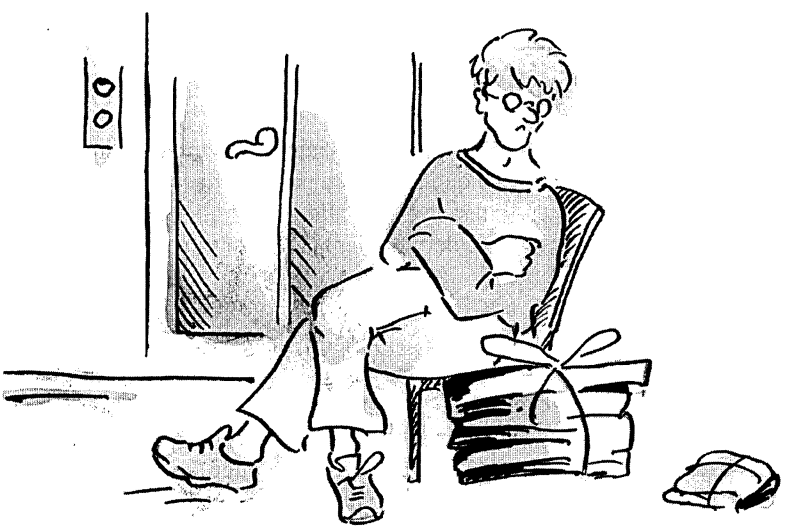
Problème n°296 du 22/10/2002

Dans ce jeu télévisé, l'animateur pose à toute vitesse des questions simples auxquelles le candidat doit répondre « oui » ou « non ». Si la réponse est fausse, le jeu s'arrête. Si elle est juste, la cagnotte grossit et on passe à la question suivante. La somme versée à la cagnotte correspond au numéro de la question résolue : 1 euro pour la première question, 2 euros pour la deuxième, ... 15 euros pour la quinzième, etc.

Chaque fois, seuls sont utilisés pour remplir la cagnotte des billets de 10 euros et des pièces d'un euro (jamais plus de 9 par question).

Richard, un très fort joueur, a gagné à ce jeu une grosse somme, et, chose curieuse, s'est aperçu qu'il y avait dans la cagnotte autant de pièces d'un euro que de billets de 10 euros. Par extraordinaire, Sophie, qui a gagné plus que Richard, a hérité une cagnotte ayant la même particularité : autant de pièces que de billets.

À combien de questions Richard a-t-il su répondre ? Et Sophie ?



Graphes & algorithmes SOLUTIONS

181. Désordre chez Maya

Voici la solution de Maya en 11 déplacements : **1.** D4E5 (dossier 4 en étagère 5)- **2.** D5E6 - **3.** D6E7 - 4. D7E2 - **5.** D3E3 - **6.** D4E4 - **7.** D5E5 - **8.** D6E6 - **9.** D7E7 - **10.** D2E2 - **11.** D1E1 .
Pour montrer que la solution est minimale, il suffit de calculer la distance entre chaque dossier et son étagère au début de la manutention : d1=1 (à 1 longueur de E1), d2 =1, d3 = 1, d4 = 2, d5 = 2, d6 = 2, d7 = 2, soit un total de 11 longueurs. C'est le nombre incompressible de déplacements nécessaires pour que les dossiers soient rangés.

⌧ *M. Lemaire, de Paris*

182. L'ascenseur capricieux

Il y a six solutions possibles :
- 0 - 2 - 4 - 7 - 9 - 5 - 1 - 3 - 8 - 10 - 6 - 11 - 0.
- 0 - 2 - 4 - 7 - 10 - 6 - 9 - 5 - 1 - 3 - 8 - 11 - 0.
- 0 - 2 - 5 - 1 - 3 - 8 - 4 - 7 - 10 - 6 - 9 - 11 - 0.
- 0 - 2 - 5 - 1 - 4 - 7 - 3 - 8 - 10 - 6 - 9 - 11 - 0.
- 0 - 3 - 8 - 10 - 6 - 2 - 5 - 1 - 4 - 7 - 9 - 11 - 0.
- 0 - 5 - 1 - 3 - 8 - 10 - 6 - 2 - 4 - 7 - 9 - 11 - 0.

On fait un arbre des possibilités, et on procède par élimination.

183. L'ascension fabuleuse

Ils partent avec 36 rations. L'assistant accompagnera l'alpiniste durant six jours, puis redescendra en gardant les six rations nécessaires tandis que l'alpiniste poursuivra son ascension avec 18 rations. Le sherpa se reposera six jours, puis remontera avec 18 rations pour aller à la rencontre de l'alpiniste qu'il rejoindra au bout de six jours, alors que ce dernier vient d'épuiser sa cantine. Ils descendront ensemble avec les 12 rations restantes.

184. Brutalité sur le terrain

La sélection de 20 joueurs dans les conditions fixées par le sélectionneur **est toujours possible**.
Groupons en effet les joueurs par chaînes : A frappe B qui frappe C ... et ainsi de suite jusqu'à X qui frappe un joueur figurant déjà dans la chaîne. On donne à A un maillot bleu, à B un blanc, un bleu au troisième, et ainsi de suite, alternativement, et enfin à X un rouge.
S'il reste des joueurs, on construit de nouvelle chaîne de maillots alternés bleus et blancs jusqu'au joueur frappant un joueur figurant déjà dans l'une des chaînes, à qui on affecte un maillot rouge.
On est alors en mesure de former trois équipes de joueurs dont aucun n'a frappé l'autre : les bleus, les blancs et les rouges. Le total étant 60, l'une des équipes (au moins) a 20 joueurs ou plus.

Pour 21, le problème peut ne pas avoir de solution. C'est le cas avec 20 chaînes de 3 joueurs A, B, C, où A frappe B, B frappe C et C frappe A.

185. Les petits papiers

On montre que :
- un pli n'augmente pas le nombre de morceaux ;
- une coupe placée en k-ième position accroît le nombre de morceaux de 2^{k-1}.

Ainsi, dans la suite d'opérations considérée, on ajoute au morceau initial, 1 (= 2^0) morceau pour la première coupe, 4 (= 2^2) morceaux pour la deuxième coupe placée en troisième position, 16 morceaux pour la troisième coupe, puis 64, 256, 1024 morceaux (**pour la sixième coupe**), soit un total de **1366 morceaux**.

186. La roulette sans boule

Lors de chaque lancer, **un numéro et un seul sortira**. Il n'y a aucune chance qu'il n'en sorte aucun ou au contraire plus d'un.

Preuve : lorsque le 0 du cylindre est face au 0 fixe (comme sur le dessin accompagnant le problème), vous pouvez constater que face à chaque nombre n fixe, il y a $2n$ ou $2n - 37$ si n dépasse 18. Par translation, lorsque 0 gris est en face du nombre p blanc, il y aura, face au nombre $x = (n + p)$ ou $(n + p - 37)$ blanc, le nombre $2n$ gris (ou $2n - 37$).

Un nombre « sortira » s'il vérifie : $x = 2(x - p)$ ou $x = 2(x - p) + 37$, soit $x = 2p$ ou $x = 2p - 37$.

Or, une de ces valeurs et une seule est comprise entre 0 et 36.

187. Les deux touches de la calculatrice

La séquence la plus rapide utilise **13 touches** :

A - A - B - A - A - A - B - A - A - B - A - A - B

Elle permet d'afficher successivement, après le 0 :

1 - 3 - 4 - 9 - 19 - 39 - 22 - 45 - 91 - 48 - 97 - 195 - 100

Pour le trouver, il suffit de... commencer par la fin !

188. Les nombres « chanceux »

1997 n'est ni « chanceux », ni « malchanceux », car il est rayé au deuxième tour, avec les nombres de la forme $6p + 5$ ($1997 = 6 \times 332 + 5$).

Plus généralement, on montre que les listes successives de nombres restants observent des variations qui reparaissent régulièrement au terme de « périodes ». On obtient une liste complète en ajoutant aux premiers nombres de la liste les multiples de la « période ». Voici leur description :

• 1, ... (période 2)	• 1, 3, ... (période 6)	• 1, 3, 7 ... (période 12)
• 1, 7, 15,... (période 24)	• 1, 7, ... (période 24)	• 1, 7, 25,... (période 48)
• 1, 25, 55 ... (période 96)	• 1, 25, ... (période 96)	• 1, 25, 97... (période 192)
• 1, 97, 217... (période 384)	• 1, 97, ... (période 384)	• 1, 97, 385,... (période 768)
• 1, 385, 865, 1537, 1921	• 1, 385, 1537, 1921	• 1, 385, 1537
• 1, 1537	• FIN	

Il y a donc un nombre chanceux, **1537**, le nombre malchanceux étant **385**.

189. Le plein s'il vous plaît !

Le garagiste peut servir 4 litres **en seulement 4 étapes** :

1. Il remplit le récipient de 6 litres.

2. Il le vide dans le récipient de 13 litres

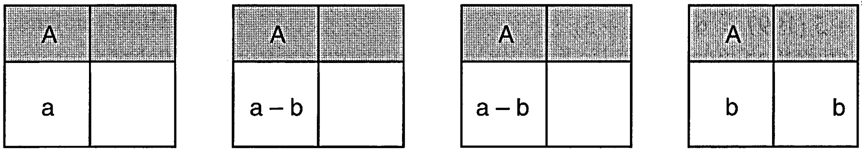
3. Il remplit le récipient de 11 litres
4. Avec son contenu, il complète le récipient de 13 litres.
Il reste 4 litres qu'il peut servir, puis il vide dans la citerne les 13 litres excédentaires.
• **Toute quantité entière de litres peut être mesurée avec deux quelconques de ces trois récipients.** Il suffit de le montrer pour 1 litre et de réitérer l'opération. Voici la méthode avec les récipients A (de 11 litres) et B (de 13 litres) : – On applique 5 fois la procédure suivante : on remplit B, on transvase le maximum dans A, on vide A, on transvase le résidu de B dans A.
– Il reste maintenant 10 litres dans A, on remplit B, on transvase un litre dans A pour le remplir, on vide A, on le remplit avec B, il reste 1 litre dans B.
⊠ *Merci à René Mignard, de Maisons-Alfort, qui a enrichi le problème.*

190. Pour rester premier

L'écart entre deux nombres premiers consécutifs reste au plus égal à 10, jusqu'au nombre 113, qui est suivi de 127. Votre objectif sera donc d'atteindre le nombre stratégique 113.
Pour cela, vous devrez obliger l'adversaire à cocher l'un des nombres 103, 107 ou 109.
Facile, si vous occupez le nombre stratégique 101.
En remontant de proche en proche, vous voyez que vous devez rayer les nombres stratégiques 89, 73, 61, 47, 31, 19, et 7.
Pour gagner, il faut commencer par jouer 7.
⊠ *Patrick GORDON, de Paris.*

191. Au cœur d'un ordinateur

Appelons A et B les deux zones mémoires, a et b les nombres qu'elles contiennent. Voici une suite d'opérations qui échange leur contenu :
1 : A ← A – B : on affecte dans A la différence entre le contenu de A et le contenu de B ; A contient maintenant $a - b$, B contient toujours b.
2 : B ← B + A : on affecte dans B la somme du contenu de A, $a - b$, et du contenu de B, b ; A contient toujours $a - b$, B contient a, car $(a - b) + b = a$.
3 : A ← B – A : on affecte dans A la différence entre le contenu de B, a, et le contenu de A, $a - b$; A contient maintenant b, car $a - (a - b) = b$, B contient toujours a.



Au départ après 1 après 2 après 3
Contenu des mémoires

192. Vacances de neige

Pour traiter ce problème de benne, nous adopterons les deux codes suivants :
« + 1 » désigne le mouvement de la première cabine disponible (la plus à gauche) de la voie du haut vers la gare.
« –1 » désigne le mouvement de la première cabine disponible (la plus à droite) de la gare vers la voie de descente.
• Ainsi, on obtient la configuration demandée (1432) par la suite de codes : **+1+1–1+1–1+1–1–1**
• Une configuration « possible » sur la voie de descente correspond à une suite de huit « codes » (quatre

« +1 » et quatre « –1 ») disposés de telle sorte que toute somme intermédiaire des codes soit toujours positive ou nulle (on ne peut pas faire descendre plus de bennes qu'il n'en est parvenu à la gare). En particulier, elle commence toujours par « +1 » et se termine toujours par « –1 ».
On en dénombre 14.

193. Le défi du cavalier

Voici une des rondes possibles (les positions successives sont numérotées).

1	14	25	20	7
24	19	8	15	12
9	2	13	6	21
18	23	4	11	16
3	10	17	22	5

Évidemment, quelle que soit la ronde, la position 25 ne peut être qu'une case blanche, puisqu'à chaque mouvement, la case du cavalier change de couleur. Il est donc impossible de repasser de la position 25 à la position 1.

⌧ *Christian ROMON, de Carrières-sur-Seine, a dénombré 14 rondes possibles. Y en a-t-il d'autres ?*

194. Les balles de ping pong

Il reste la balle numéro 16.
Le premier tour ne laisse que les nombres pairs.
Deuxième tour : après avoir enlevé la balle 39, on laisse la 40, on enlève la balle 2, la 6,..., ne laissant que les multiples de 4.
Après la 38, on saute la 40, et on enlève la 4, la 12,..., ne laissant que les multiples de 8 à l'issue du troisième tour.
Le quatrième tour laisse les multiples de 16, et enlève donc 40. 32 est alors enlevé, **16 laissé**.
• Dans le cas de N balles au départ, le numéro X restant est obtenu en ôtant de N la plus grande puissance de 2 strictement plus petite que N (32 dans le cas de 40), puis en multipliant par 2 (40 – 32 = 8, 8 x 2 = **16**).
Ce résultat se démontre en utilisant l'écriture en base 2 des nombres restants après chaque tour en fonction de celle de N.
Soit $a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0$ cette écriture binaire (où $a_p = 1$) :
Au premier tour, il ne reste que les nombres se terminant par 0.
Au deuxième tour, il reste les nombres se terminant par 10 si N est impair, par 00 si N est pair, autrement dit les nombres se terminant par $a_0 0$.
Au troisième tour, il reste les nombres se terminant par $a_1 a_0 0$. Et ainsi de suite.
Finalement, le nombre obtenu a pour écriture binaire : $a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0 0$, ce qui correspond bien à « la formule ».

⌧ *Fernand BOYET, d'Angers.*

195. Le dernier carré

Les dimensions successives des carrés découpés sont : 84 cm, 84 cm, 24 cm, 24 cm, 24 cm, 12 cm. À ce moment précis, le morceau restant est un carré de **12 cm de côté**.
Dans le cas général d'un morceau initial de dimensions entières p et q, le carré restant a pour taille **le plus grand diviseur commun** (pgcd) **à p et à q**. Les étapes du processus sont calquées sur l'algorithme d'Euclide qui permet de parvenir à ce « pgcd ».
La disposition classiquement admise autrefois pour la recherche du plus grand diviseur commun à 192 et 84 est la suivante :

	2	3	2	← les quotients
192	84	24	12	
	24	12	0	← les restes

On retrouve bien 2 carrés de 84, 3 de 24, 2 de 12.

196. Les trois directions

Le point G est nécessairement confondu avec le point A.

En effet, la transformation permettant de passer de A à B (ou de D à E) est la symétrie orthogonale d'axe la droite (D1) perpendiculaire à (1) passant par le centre O du cercle. De même, on passe de B à C (ou de E à F) par la symétrie d'axe (D2) perpendiculaire à (2) contenant O et de C à D (ou de F à G) par la symétrie d'axe (D3) perpendiculaire à (3) contenant O.

La composée de deux symétries d'axes (D) et (Δ) se coupant en O est la rotation de centre O et d'angle le double de l'angle formé par (D) et (Δ). Ainsi, en groupant deux par deux les six symétries permettant de passer de A à G, on trouve la rotation de centre O dont l'angle est le double de la somme des trois angles formés par (D1) et (D2), (D3) et (D1), (D2) et (D3) : soit en tout une rotation de 360°, c'est-à-dire la transformation qui laisse chaque point à l'identique (transformation dite identique).

🖂 *Plusieurs lecteurs, dont Robert MUNNICH et Antoine CESARI, de Marseille, ont résolu la question en montrant que les cordes AF et DC sont parallèles et en concluant que A est confondu avec G.*

🖂 *Jean MOUSSA, de Paris, a généralisé le problème à une conique.*

197. Le «Monde» éparpillé

• **Le journal comportait 54 pages** (dont une simple feuille recto-verso au centre). Il suffit pour cela d'additionner les deux numéros des feuilles qui se trouvent en vis-à-vis et d'enlever 1. En effet, si le journal a n pages, la somme des numéros de deux pages en vis-à-vis est toujours $1 + n$.

• Ci-contre la numérotation complète des 16 pages de la face visible.

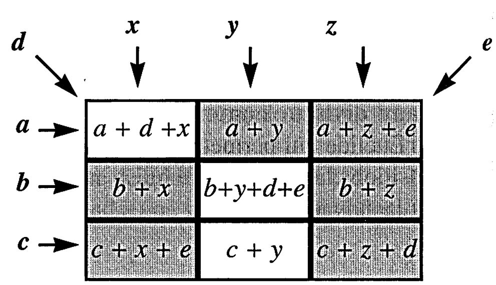
12	21	20	13
5	28	29	4
8	25	32	1
9	24	17	16

198. Encore une calculatrice bizarre !

• Avec trois chiffres, vous obtiendrez **toujours le résultat 1089** (ou 0 pour les nombres «palindromes»). Il suffit d'écrire le nombre cdu (c représente les centaines, d les dizaines, u les unités). Si on suppose que c est strictement plus grand que u, l'appui sur B donnera le résultat $99 \times (c - u)$ dont les trois chiffres sont $C = c - u - 1$, $D = 9$, $U = 10 + u - c$. En additionnant CDU et UDC, on trouve un nombre d'unités égal à $C + U = 9$, un nombre de dizaines égal à 8 (on retient une centaine) et donc un nombre de centaines égal à $1 + C + U = 10$, d'où le résultat.

• Avec quatre chiffres, on trouvera, selon le cas, une des cinq réponses :
0, 9999, 10989, 10890, 990.

199. Le revers de la médaille



Il n'est pas possible de faire en sorte que toutes les médailles soient de la même couleur.

En remarquant que l'ordre des coups importe peu, le problème consiste à affecter la valeur 1 aux colonnes x, y et z, aux lignes a, b et c ou aux dia-

gonales d et e si on les retourne, et la valeur 0 si on ne les retourne pas. On tombe alors sur un système de 9 équations résumées dans ce tableau, où le résultat est impair dans les cases grisées, pair dans les cases blanches.
On montre alors assez facilement l'incompatibilité, en tirant de la deuxième ligne $x = z$, puis de la troisième $d = e$, ce qui est contradictoire avec la parité des résultats de la première ligne.

⊠ *Pierre François donne une solution déconcertante de simplicité.*
La parité du nombre de coins noirs est un invariant! En effet, un « coup » agit toujours sur deux des médailles en coin, qu'il retourne simultanément, ce qui laisse invariante la parité du nombre de médailles de coin noires. Comme il y a un nombre impair (3) de médailles de coin noires au départ, il ne peut y en avoir 0 (un nombre pair) à l'arrivée.

200. L'œuf à la coque

• Le schéma de la page ci-contre explique la manœuvre de la cuisinière : elle dure **33 minutes**. Sur la première ligne, le sablier A (6 minutes), sur la deuxième, le sablier B (11 minutes).
• Voici comment elle aurait pu procéder : elle plonge son œuf dans l'eau à la onzième minute, elle retourne le sablier B au bout d'une minute (à la douzième minute), il se vide à la treizième après une minute d'écoulement du sablier A qu'elle retourne à cet instant pour qu'il se vide à la minute 14, moment auquel elle retire son œuf. Toute l'opération n'a duré que **14 minutes** !

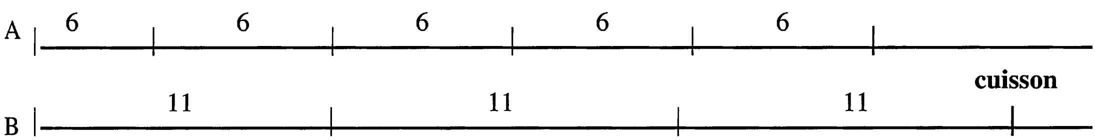


Schéma de cuisson des œufs à la coque dans le premier cas

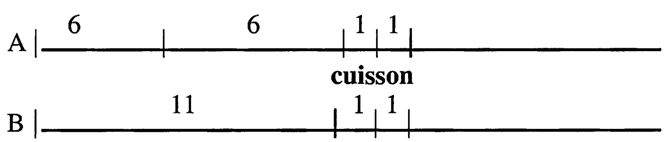
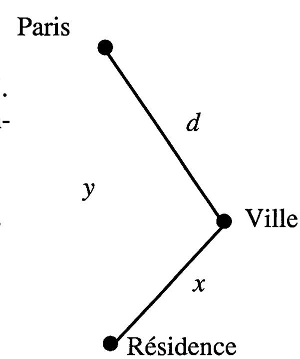


Schéma de cuisson des œufs à la coque dans le deuxième cas

201. La fédération économe

La rencontre doit avoir lieu à Paris.

C'est une application de « l'inégalité triangulaire ».
Supposons qu'on choisisse la ville « Ville ».
À chaque arbitre du Sud-Ouest M. S, associons un arbitre parisien M. P (c'est possible, puisqu'il y a plus d'arbitres parisiens que de provinciaux).
La distance y de la résidence de M. S à Paris est plus courte que le total de la distance x de R à V et de la distance d de V à Paris. Donc, s'il n'y avait que des paires comme M. S et M. P, on aurait intérêt à choisir Paris.
Mais une fois épuisés les arbitres provinciaux et leurs «associés» parisiens, que reste-t-il ? Des parisiens, qu'on a intérêt à ne pas déplacer !



⊠ *Philippe CONVERS remarque que même si $y = x + d$ (cas d'alignement des trois points), le lieu de réunion est indifférent si le nombre d'arbitres parisiens est égal au nombre d'arbitres du Sud-Ouest, mais qu'il gagne à être Paris dès que la majorité réside à Paris.*

202. La chaîne la plus longue

Le nombre de 2 chiffres de plus fort potentiel (5) est 77.
Les nombres de 3 chiffres de plus fort potentiel (6) sont 886, 868 ou 688.

Pour faire le moins d'essais possible, on divise l'ensemble des entiers inférieurs à 100 en classes de potentiel. Pour économiser l'écriture, on écrit une seule fois les nombres ayant les mêmes chiffres (par exemple par chiffres croissants), sachant que toutes leurs anagrammes seront dans la même classe.
• Les entiers de potentiel 1 : les entiers de 0 à 9.
• Les entiers de potentiel 2 : ce sont ceux dont le produit des chiffres est de potentiel 1.
Il y a les nombres qui contiennent 0 et 1, ainsi que 22, 23, 24, et 33 et leurs anagrammes.
• Les entiers de potentiel 3 : ce sont ceux dont le produit des chiffres est de potentiel 2.
Ce sont les entiers de 25 à 29, de 34 à 38, de 44 à 46, 56, 58, 67 et 99.
• Les entiers de potentiel 4 : ce sont ceux dont le produit des chiffres est de potentiel 3.
Ce sont les entiers 39, 47, 49, 55, 57, 59, 66, 68, 69, 78, 79, 88 et 89.
• Il ne reste plus qu'un entier de potentiel 5 : il s'agit de 77.

En partant des entiers de potentiel 4, on construit tous les entiers à 3 chiffres de potentiel 5.
Il s'agit de 177, 277, 268, 348 et 355 (et de leurs « anagrammes »). Un seul d'entre eux peut s'écrire comme le produit de trois chiffres : 384, produit de 8, 8 et 6. 688 et ses anagrammes sont donc les seuls nombres à trois chiffres de potentiel 6.

203. La livraison de carburant

Le camion-citerne livrera 7000 litres de carburant.
• Les 29400 litres représentent 4 chargements de 7350 litres. La première étape sera donc une distance a où il installe un dépôt intermédiaire après 3 allers-retours et un aller. Pour optimiser la rentabilité et avoir ensuite un chargement en moins à opérer, les $7a$ litres consommés devront être égaux à 7350 litres. Le camion se retrouve ainsi à 1050 km de son point de départ avec 22050 litres (29400 – 7350).
• La deuxième étape sera une distance b où il installe un dépôt intermédiaire après 2 allers-retours et un aller. Pour optimiser la rentabilité, les $5b$ litres consommés devront être égaux à 7350 litres. Le camion se retrouve ainsi à 1050 + 1470 km de son point de départ avec 14700 litres.
• La troisième étape sera une distance c où il installe un dépôt intermédiaire après 1 aller-retours et un aller. Pour optimiser la rentabilité, les $3c$ litres consommés devront être égaux à 7350 litres. Le camion se retrouve ainsi à 1050 + 1470 + 2450 = 4970 km de son point de départ avec 7350 litres.
Il consomme 350 litres pour parcourir les 350 km restants et livre 7000 litres.

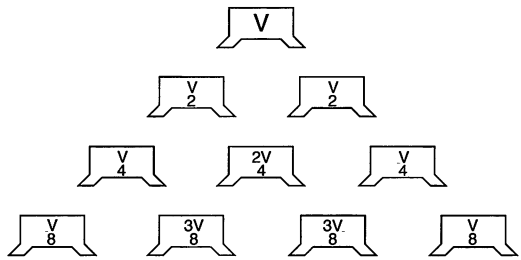
⊠ *Raymond DUSSER (84, Apt) propose une variante du problème. Combien le camion peut-il livrer, au maximum, s'il doit ensuite retourner à son point de départ ? En organisant convenablement ses dépôts au départ, il constate que la réponse est bien supérieure à ce qu'on pourrait penser.*

204. La fontaine romaine

6,4 litres ont été versées dans la vasque supérieure.

Dans le cas général, en appelant V le volume d'eau déversé dans la vasque supérieure, les quantités d'eau transitant dans les vasques du niveau n sont proportionnelles aux coefficients de la ligne (n–1) du triangle de Pascal : elles valent :

$$\frac{V}{2^{n-1}}, \frac{(n-1)V}{2^{n-1}}, \ldots$$



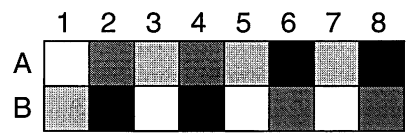
Si 1 litre transite par la vasque blanche, c'est que la quantité totale d'eau versée est :

$$V = \frac{2^{n-1}}{n-1} \textit{litres}$$

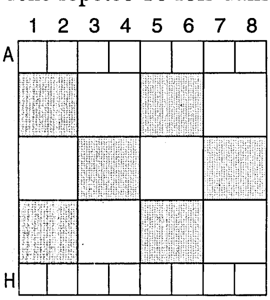
✉ *M. TOURNADRE (49, Angers).*

205. Le théorème de Victor

• Une des solutions possibles est obtenue en remplissant les deux premières lignes, par exemple comme ci-contre, puis en reproduisant trois fois ce motif décalé de deux lignes vers le bas.



• Dans chaque bloc 2 × 2, chacune des quatre couleurs est représentée une fois. L'échiquier est décomposable en 16 blocs. Une couleur, la blanche par exemple, sera donc répétée 16 fois dans un coloriage. Par différence avec le rectangle 8 × 6 représenté ci-contre, qui se décompose en 12 blocs, on en déduit que la couleur blanche est utilisée 4 fois au total des lignes A et H.



De même, la couleur blanche est utilisée 12 fois au total des colonnes 2 à 7, et 9 fois dans le carré 6 × 6 central. Elle est donc utilisée 3 fois au total des colonnes 2 à 7 des lignes A et H. On en conclut qu'elle n'est utilisée qu'une fois au total des cases A1, A8, H1 et H8.

• La solution est généralisable à tout rectangle comportant un nombre pair de lignes et un nombre pair de colonnes, donc au carré 10 × 10.

✉ *Christian ROMON parvient à la démonstration en commençant par montrer que si ce n'est pas le cas des lignes, chacune des colonnes ne comporte que deux couleurs.*

206. Le partage du gruyère

• **Les deux armées peuvent toujours se répartir également le gisement de fromage en coupant l'un des morceaux.** Voici une méthode qui permet de le faire : on trie les morceaux de gruyère par ordre décroissant et on réserve le plus gros morceau, qu'on appellera le « morceau de choix » pour le partager. Puis on fait deux tas de la manière suivante : on met le plus gros morceau (qui reste) dans le premier tas. On empile ensuite dans le deuxième tas les morceaux restants (par ordre décroissant de poids) jusqu'à dépasser le premier tas. On ajoute alors au premier tas les plus gros des morceaux restants jusqu'à dépasser à nouveau le deuxième tas et ainsi de suite... jusqu'à épuiser les 1998 morceaux. Il est très facile de montrer que la différence de poids entre les deux tas restera toujours inférieure au poids du morceau de choix. Il est alors possible de diviser le morceau de choix en deux morceaux qui ont pour écart cette différence.

• **Un partage en 3 n'est en revanche pas toujours possible.** Supposons par exemple qu'il y ait 1997 morceaux d'un kilo et 2 morceaux de 50 grammes. Il s'agit d'attribuer 665,7 kg à chaque armée. Par hypothèse, on ne peut couper qu'un des morceaux d'un kilo. Lors d'un partage, les 1996 autres seraient répartis entre les trois armées. Une des armées hériterait de 666 morceaux et serait avantagée. On ne peut éviter la guerre.

207. La loi de la jungle

1190 dragons, 1744 monstres et 812 vampires.
Une façon de le trouver consiste à remonter le temps.
Résultats intermédiaires (les jours de digestion) :

Monstres	*Dragons*	*Vampires*
2	2	0
6	4	2
18	12	8
56	38	26
176	120	82
554	378	258
1744	**1190**	**812**

✉ *Henri ATGER (78, Versailles) a imaginé d'autres solutions, où certaines bestioles ne trouvent pas de nourriture et survivent malgré le jeûne. Ainsi, la position suivante (jour après jour) :*

Monstres	*Dragons*	*Vampires*
15	3	1
12	2	0
10	2	0
8	2	0
6	2	0
4	2	0
2	2	0

208. L'arme secrète

Les guerilleros ont utilisé trois armes qu'ils ont divisées en 10 pièces.
Appelons ces pièces AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.
Le camion A sera alors équipé des six pièces qui ne comportent pas la lettre A, le camion B des six pièces qui ne comportent pas la lettre B, et ainsi de suite jusqu'au camion E équipé des six pièces qui ne comportent pas la lettre E.
Ainsi, si deux camions, par exemple B et D, sont interceptés, il manquera la pièce BD pour reconstituer l'arme secrète.
En revanche, il sera possible avec les trois autres camions de reconstituer une arme.
• La solution est minimale, car
– il faut que toutes les pièces figurent au moins en triple exemplaire au cas où deux d'entre elles seraient interceptées
– il doit exister au moins 10 pièces détachées : en effet, il existe dix couples possibles de deux camions ; pour chacun de ces couples, une pièce au moins ne doit figurer dans aucun des deux camions du couple (au cas où ils seraient interceptés tous les deux), et figurer donc dans chacun des trois autres camions.

✉ *Geoffroy BUFFETRILLE (86, Poitiers), Jacques TRAMU (bull.net)...*

209. Noir ou blanc ?

• Pour passer d'une ligne à sa « fille » (la ligne suivante), on pose un pion blanc entre deux pions de même couleur et un pion noir entre deux pions de couleurs différentes. La même règle s'applique entre le premier et le dernier pion de la ligne mère en rajoutant un pion sur la ligne suivante, tantôt à droite, tantôt à gauche. Voici alors la ligne 5.

● ○ ● ○ ○ ●
  ● ● ● ○ ● ○
● ○ ○ ● ● ●
  ● ○ ● ○ ○ ○
● ● ● ● ○ ○

• La troisième ligne se retrouve à nouveau en septième position. Il s'ensuit alors une configuration où réapparaissent de manière cyclique les quatre lignes 3, 4, 5 et 6. La première ligne ne se retrouve donc jamais. On peut d'ailleurs remarquer que, comme toutes les lignes comportant un nombre impair de pions noirs (ou blancs), elle n'est « fille » d'aucune ligne.

☒ *Christian ROMON précise qu'une ligne a soit deux prédécesseurs possibles, soit aucun. Il établit alors la classification de tous les schémas possibles, qu'il compare astucieusement à des points de tricot.*
Comme dans tout problème de «suite logique», on pouvait trouver d'autres solutions. Philippe ALADEL (75, Paris), P-A COULON (90, Bessoncourt), Michel et Martine NEGRIN (24, La Bugue), et Patrice SULMONT (44, Nantes) proposent par exemple la même règle de filiation où les extrémités décalées des lignes sont toujours noires à gauche et blanches à droite. On retrouve dans ce cas la première ligne en soixante-troisième position.
Michel MENGUAL trouve une autre solution de période 8 lignes en imaginant le défilement des lignes par deux sur un écran.

210. Opérations à risques

Le chirurgien enfile les gants blancs, puis enfile les gants jaunes par dessus. Il opère le premier malade, puis enlève les gants jaunes en prenant la précaution de les retourner.
Il enfile alors les gants verts par dessus les gants blancs et opère le deuxième malade. Il enlève les gants verts (toujours en les retournant). Il opère alors le troisième malade avec ses gants blancs.
Il enfile, à l'envers, la paire de gants jaunes sur la sienne : les faces contaminées sont en contact, mais il peut opérer le quatrième malade avec la face jaune inutilisée. Il ne lui reste plus qu'à enfiler le gant vert à l'envers (sur le blanc ou sur les deux) pour opérer le cinquième malade !

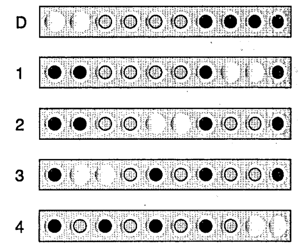
☒ *Ilan VARDI signale qu'il a publié dans «Computational Recreations in Mathematica» (Addison-Wesley, 1991) un algorithme donnant la solution générale pour N docteurs et M malades, quand ils sont plus nombreux que les docteurs (ici, N = 1, M = 5). Le nombre optimal G de gants est :*

- Si N = 1 et M impair, G = (M + 1) / 2
- Si N = M = 2, G = 2
- Dans tous les autres cas, G = [[M/2 + 2N/3]], où on appelle [[x]] le plus petit entier supérieur ou égal à x.

211. Alternance souhaitée

4 mouvements sont nécessaires et suffisants à partir de la position de départ D pour obtenir l'alternance : les voici.

✉ *M. SOKOLOWSKI (24, St-Barthélémy de Bellegarde).*



212. La fausse pièce

3 pesées sont suffisantes pour démasquer la fausse pièce. Numérotons les pièces de 1 à 12.

Première pesée : 1 2 3 4 ↑ 5 6 7 8

– En cas d'équilibre, la mauvaise est parmi 9, 10, 11, 12.

On compare alors : 1 2 3 ↑ 9 10 11

En cas d'égalité, la mauvaise est la 12 qu'on compare à la 1 pour savoir si elle est plus lourde ou plus légère.

Si la balance penche, on sait si la fausse pièce, qui se trouve parmi 9, 10 et 11, est plus lourde ou plus légère. On compare 9 à 10 pour terminer.

– En cas de déséquilibre, on sait par exemple que si la fausse pièce est plus lourde, elle est parmi 1, 2, 3 et 4, si elle est plus légère, elle est parmi 5, 6, 7 et 8.

On compare alors : 1 5 6 ↑ 3 7 8

En cas d'égalité, la mauvaise est la 2 ou la 4, elle est plus lourde. On compare 1 et 2 pour terminer.

Si la balance penche du côté gauche, la fausse pièce est la 1 (plus lourde) ou la 7 ou la 8 (plus légère). On compare 7 et 8 pour conclure à la plus légère des deux, ou à la 1 en cas d'égalité.

Si la balance penche du côté droit, la fausse pièce est la 3 (plus lourde) ou la 5 ou la 6 (plus légère). On compare 5 et 6 pour conclure à la plus légère des deux, ou à la 3 en cas d'égalité.

✉ *Plusieurs lecteurs ont expliqué comment on pouvait trouver la fausse pièce en deux pesées, à condition d'être «veinard». Ce n'était pas l'objet du problème, qui consistait à chercher un algorithme qui fonctionne à coup sûr en un minimum de pesées.*

Antonio VENIER (Milano) donne une solution complète.

Michel DUFOSSÉ (Paris) demande si avec 13 ou 14 pièces on peut encore trouver à coup sûr la fausse pièce en trois pesées. La réponse est NON.

– Avec 14, c'est sans aucun doute impossible, car il y a 28 possibilités (la 1 plus lourde, la 1 plus légère, la 2 plus lourde, ..., la 14 plus légère) alors que 3 expériences se soldant par 3 modalités ne peuvent discriminer que 27 cas au maximum (3^3).

– Avec 13, c'est aussi impossible. En effet, si la première pesée compare 4 pièces de chaque côté, l'égalité entraîne la nécessité de discriminer 10 cas en 2 pesées restantes. Et si on compare cinq pièces sur chaque plateau, c'est le déséquilibre qui conduit à décider en deux pesées parmi les dix situations encore possibles.

213. Les garnements et le gâteau

• Pour trois garnements, qu'on appellera A, B, et C, la solution «équitable» est la suivante :

– A découpe une part qu'il estime valoir un tiers

– Si B pense qu'elle est trop grande, il en enlève un morceau pour former une part qu'il estime

valoir un tiers, sinon il n'y touche pas. La part éventuellement réduite passe à l'appréciation de C.
– Si C pense qu'elle est trop grande, il en enlève un morceau pour former une part qu'il estime valoir un tiers, sinon il n'y touche pas.
– Le dernier des trois à avoir découpé un morceau mange la part (et donc A si B ni C n'y ont pas touché).
– Les deux derniers garnements se partagent le reste équitablement (l'un coupe, l'autre choisit).

• Pour un nombre N de garnements, on procède de la même manière pour la première portion (le premier découpe, puis, successivement, chacun des autres réduit la part s'il l'estime trop grande, le dernier à avoir coupé emportant le morceau). On recommence avec les (N–1) garnements restants, puis les (N–2) etc. jusqu'à ce qu'ils ne soient plus que trois à devoir se partager une portion de gâteau.

> ✉ *Voici la variante proposée par Christian ROMON (pour le partage en trois, qu'on peut ensuite généraliser) :*
> *– A découpe une part qu'il estime valoir un tiers*
> *– Si B et C la trouvent trop petite, on la donne à A. B et C se partagent «équitablement» le reste.*
> *– Si B ou C seul est intéressé, il la prend. Les deux autres se partagent le reste.*
> *– Si B et C sont tous deux intéressés, on duplique la part (comment, c'est tout le problème) et A prend le reste.*

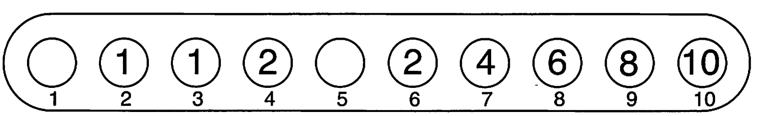
214. Les confettis qu'on fait ici

La scène se déroule en 1996.
Chaque fois que l'on divise une feuille de papier en 10 morceaux, on ajoute 9 morceaux.
Le reste de la division par 9 du nombre total de morceaux ne change pas à chaque découpe.
Au départ, il est de 7. Il faut donc trouver un nombre compris entre 1991 et 2000 dont le reste de la division par 9 est 7. On peut poser la division, ou encore remarquer que ce reste, c'est aussi celui de la somme des chiffres du nombre divisé. Seul 1996 répond à la question.

215. Les grains de riz

La disposition donnée permet de gagner la partie en vidant successivement les alvéoles 1, 2, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 1.

Les configurations où l'alvéole numéro 10 n'est pas vide qui permettent de gagner la partie nécessitent au moins 34 grains (dans la disposition ci-dessous).



On vide alors successivement les alvéoles 10, 1, 2, 1, 9, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 8, 1, 2, 1, 7, 1, 3, 1, 2, 1, 6, 1, 5, 1, 2, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 1.
On parvient à ce résultat en partant de la fin et en remontant.

216. La piste infernale

• La tortue parviendra au bout de la piste.
Compte tenu de l'étirement nocturne, il convient de raisonner sur la proportion de piste parcourue. Un dixième le premier jour, un vingtième le deuxième, un trentième le troisième, etc.

Or la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ est divergente, c'est-à-dire que sa somme attein des valeurs aussi grandes que l'on veut, à condition d'aller suffisamment loin. En particulier, elle dépassera 10 à partir d'un certain rang.

• Un calcul (sur ordinateur ou calculatrice munie d'un logiciel de calcul formel) montre que ce rang vaut 12367, c'est-à-dire que la tortue viendra à bout de la piste infernale **au bout de 12367 jours** ! **Près de 34 ans !**

⊠ *De nombreux lecteurs ont trouvé le résultat tellement «anti-intuitif» qu'ils nous ont dit être persuadés qu'il y avait une erreur !*

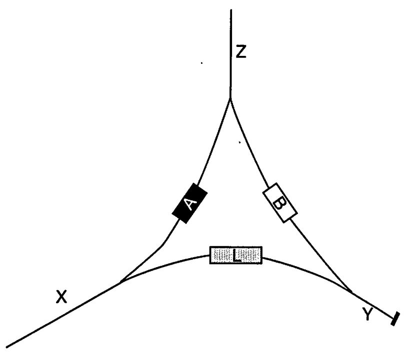
L GENTY (17, Saint-Augustin) regrette qu'il faille un ordinateur pour parvenir au résultat.

J-P BUGNARD (75, Paris) explique en écho qu'une simple calculatrice lui a suffi, en utilisant le fait que l'expression $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ *tend vers la «constante d'Euler».*

217. Erreur d'aiguillage

1. L va chercher A (en passant par X) et le pousse en Z.
2. L pousse B sur la voie Y
3. L va chercher B (en passant par Z puis X), le tire vers la voie X, puis le pousse sur la voie Z où B est accroché à A.
4. L tire les deux wagons B et A vers la voie X, puis les pousse vers la voie Y où A peut être détaché.
5. L tire B vers la voie X puis le pousse vers le voie Z.
6. La locomotive va chercher A, qu'elle laisse entre Z et Y.
7. Il ne lui reste plus qu'à aller chercher B qu'elle tire et laisse entre Z et X avant d'aller reprendre sa place.

⊠ *Christian ROMON signale que dans « échanger A et B » il y a l'hypothèse implicite que L doit revenir à sa place.*



218. Dans la peau d'un cambrioleur

Le directeur a le moyen d'ouvrir le coffre en actionnant au plus 16 fois la manivelle.
Pour cela, il va alterner,, dans un ordre précis détaillé plus bas, les mouvements suivants :
0. : Tourner la manivelle
1. Appuyer sur un unique bouton
2C. Appuyer sur deux boutons situés côte à côte
2D. Appuyer sur deux boutons diagonalement opposés
4. Appuyer sur les quatre boutons.

Ordre des mouvements (il s'arrête, bien entendu si la porte s'ouvre) :

0.		**4**	**0.**	Si aucun ou les quatre boutons étaient connectés, la porte s'ouvre.
2D.	**0.**	**4.**	**0.**	Si deux sur quatre des boutons (en diagonale) étaient connectés, a porte s'ouvre.
2C.	**0.**	**4.**	**0.**	Si deux sur 4 (côte à côte) étaient connectés, ou bien la porte s'ouvre, ou bien on se ramène à deux boutons connectés en diagonale.
2D.	**0.**	**4.**	**0.**	A ce stade, si la porte ne s'ouvre pas, c'est qu'il y avait un nombre impair de boutons connectés.
1.	**0.**	**4.**	**0.**	On se ramène à nouveau à un nombre pair de boutons connectés.

2D. 0. 4. 0. Ouverture pour deux boutons connectés en diagonale
2C. 0. 4. 0. Ouverture ou passage à la position diagonale
2D. 0. 4. 0. Fin des opérations en au plus 16 tours de manivelle.

219. Quelle cruche !

• On peut se servir 1 litre en 9 mouvements.

	A	B
1. A^+ : Je remplis le bidon A (7 litres)	7	0
2. $A^- \rightarrow B$: Je le vide dans le bidon B (10 litres)	0	7
3. A^+ : Je remplis le bidon A	7	7
4. $A \rightarrow B^+$: Je verse son contenu dans le bidon B jusqu'à le remplir	4	10
5. B^- : Je vide le bidon B dans la cuve.	4	0
6/7. $A^- \rightarrow B$ / A^+ /	7	4
8/9. $A \rightarrow B^+$ / B^-	**1**	**0**

• Le versement de 5 litres et de 12 litres demandent les manipulations les plus longues : 15 mouvements.

En effet, selon que l'on commence par remplir le bidon A et le vider dans le B (méthode 1) ou le contraire (méthode 2), on obtiendra les nombres entiers dans un ordre inverse.

Ainsi, avec la méthode 1, on obtient, dans l'ordre :

7 (1 mouvement), 14 (3 mvts), 4 (5 mvts), 11 (7 mvts), 1 (9 mvts), 8 (11 mvts), 15 (13 mvts), **5** (15 mvts)...

Avec la méthode 2, on obtiendra, dans l'ordre :

10 (1 mouvement), 3 (3 mvts), 13 (5 mvts), 6 (7 mvts), 16 (9 mvts), 9 (11 mvts), 2 (13 mvts), **12** (15 mvts)...

Quant à 17 litres, ils s'obtiennent de manière évidente en deux mouvements.

☒ *Antoine WEHENKEL (Luxembourg) estime que l'obtention d'un litre peut être considérée comme réalisée en huit coups, l'énoncé ne précisant pas que l'autre récipient doit être vide.*

220. Le moulin à nombres

On retrouve toujours le nombre initial au bout de 2001 opérations.

En réalité, en partant d'un nombre x, on retrouve le nombre x au bout de trois «moulinettes». Il en est de même à l'issue de 2001 opérations, car 2001 est un multiple de 3.

La suite des nombres obtenus en partant du nombre x est :

$$x, \frac{2x-7}{x+1}, \frac{7+x}{2-x}, x, \frac{2x-7}{x+1}, \frac{7+x}{2-x}, x \ldots$$

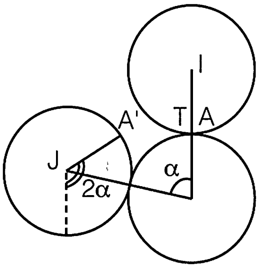
☒ *Alain FRAIROT (42, Saint-Vincent de Boisset) signale qu'il est arrivé au résultat à l'aide du logiciel Excel. Il ajoute que le procédé marche pour tout nombre, exceptés 2 et –1.*

221. Les satellites d'argent

La pièce claire fait deux tours sur elle-même pour rouler autour d'une pièce grise, huit tiers de tour pour rouler autour de deux pièces, et trois tours pour rouler autour de trois pièces.

Marquons un point A sur la pièce blanche. Initialement, A est en T. Il occupe ensuite une deuxième position, A'. On mesure la rotation de la pièce blanche sur elle-même par l'angle entre la verticale, symbolisée par le vecteur $\vec{u} = IA$ et la nouvelle position du point A symbolisée par le vecteur JA'.

Le calcul d'angles $(\vec{u}\ , \overrightarrow{JA'}) = (\vec{u}\ , \overrightarrow{JS}) + (\overrightarrow{JS}\ , \overrightarrow{JA'}) = 2\alpha$ montre que si le point de contact décrit sur la (ou les) pièce(s) grise(s) un angle α, la pièce claire fera sur elle-même une rotation de 2α.



222. Les racines emboîtées

B = $\frac{1}{2}$

En effet, en élevant au carré, on peut considérer que B obéit à la relation $B^2 = -\frac{1}{4} + B$. Or, seul le nombre $\frac{1}{2}$ vérifie cette condition.

• C, quand à lui, vérifie l'équation $C^2 = -\frac{3}{16} + C$, qui admet *a priori* deux solutions: $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Mais, en y regardant de plus près, on peut dire qu'on obtient C de la manière suivante:
on part d'un premier nombre N. On lui applique la transformation T qui consiste à lui enlever $\frac{3}{16}$ et à en prendre la racine carrée ; on obtient un deuxième nombre à qui on applique la transformation T pour en obtenir un troisième, et ainsi de suite...
Le procédé n'aboutit pas si N est inférieur à $\frac{1}{4}$, car il mène au bout d'un certain nombre d'étapes à la racine carrée d'un nombre négatif. Dans le cas exceptionnel où N vaut $\frac{1}{4}$, tous les nombres valent $\frac{1}{4}$.

Dans tous les autres cas, la suite de nombres se rapproche de plus en plus de $\frac{3}{4}$, ce qui en fait (aux yeux de certains) la seule valeur acceptable pour C.

⊠ *Les lecteurs abordent chacun les choses à leur manière. Les uns parlent en termes mathématiques, précisant comme Christian LERUSTE (Paris) que, selon la valeur initiale, le processus converge ou non, et pas toujours vers la même limite, ou, comme Henri MONTIAS (Paris), que, pour p positif, si le nombre* $\sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p+\dots}}}$ *est toujours réel et unique, par contre le nombre* $\sqrt{-p+\sqrt{-p+\sqrt{-p+\dots}}}$ *n'est, lui, réel que si* $p \leq \frac{1}{4}$*. Jacques SERRE (30450 Le Chambon), l'initiateur du problème, lui donne toute sa généralité en introduisant les nombres complexes et précise son point de vue dans un langage très fleuri : « en se plaçant au voisinage de* $\frac{1}{4}$*, on ne peut que s'en éloigner. C'est le Capitole d'où on ne peut que tomber* *sans jamais y rester, sauf en équilibre au sommet. En sa plaçant au voisinage de $\frac{3}{4}$ on ne peut que s'en rapprocher. C'est la Roche Tarpéienne où l'on ne peut que tomber sans jamais en sortir ».*

Les autres, comme P. CAHUSAC (Paris) ou Didier MAIXANDEAU (92600 Asnières), comparent B et C et concluent avec l'inégalité C > B.

223. Le premier carré

• 78 - 86 - 95 - 104 - 114 - 124 - 135 - 146 - 158 - 170 - 183 - 196.
• Le premier carré suivant 2001 est **4225**.
• Plutôt que de détailler le cas 2001, montrons qu'**on tombe toujours sur un carré parfait, quel que soit le nombre de départ**.

Deux cas se présentent quand le nombre de départ N_1 n'est pas déjà un carré.

- Cas 1 :

Si $N_1 = n^2 + b$, avec n entier et $1 \leq b \leq n$, le deuxième nombre s'écrit $N_2 = n^2 + n + b$, et le suivant $N_3 = n^2 + 2n + b = (n + 1)^2 + (b - 1)$.
On se retrouve dans la position initiale où n a augmenté de 1 et où b a diminué de 1.
Au bout de 4 coups, n a augmenté de 2 et b diminué de 2.
Au bout de $2b$ coups, n a augmenté de b, et b est nul.
Le premier carré est donc $(n + b)^2$.

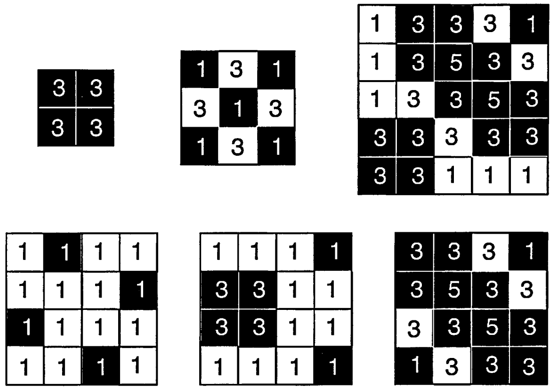
- Cas 2 :

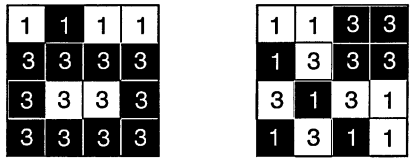
Si $N_1 = n^2 + c$, avec n entier et $n + 1 \leq c \leq 2n$,
le deuxième nombre s'écrit $N_2 = n^2 + n + c = (n + 1)^2 + (c - n - 1)$.
On se retrouve dans le cas 1 [du type $(n + 1)^2 + b$ avec $b = c - n - 1 \leq n+1$].
Le premier carré est donc le carré de $(n + 1) + (c - n - 1)$, soit c^2.
• $2001 = 44^2 + 65$.
65 > 44. On est dans le cas 2.
Le premier carré est $65^2 = 4225$.

✉ *Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses) précise que, même si le nombre de départ est déjà un carré, on peut encore retrouver un carré. Par exemple, en partant de $N_1 = 36$, $N_2 = 36 + 6 = 42$, ... $N_{14} = 36^2$.*

224. Les carrés impairs

Voici les carrés impairs de dimensions 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, 5 × 5 aux rotations ou symétries près.



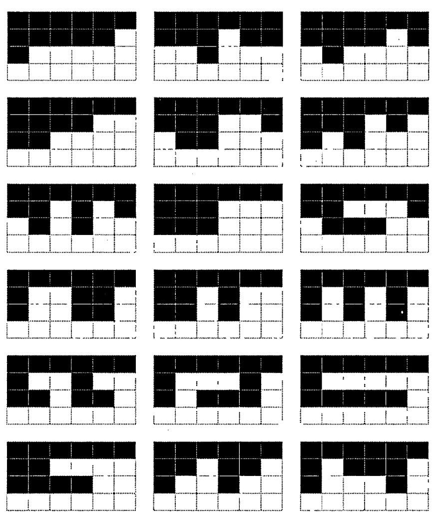


✉ *De nombreux lecteurs ont donné toutes les solutions pour le carré 454 : J. BOURLES, Eric DARDE (33000 Bordeaux), J-L FOULLEY, le club Mathématique du Lycée Claude Monet (Paris), René MOINARD (63000 Clermont), Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble), R. RIEDEL (Paris), qui dit avoir trouvé également des solutions pour les carrés 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8, 9 x 9, 10 x 10 et tout rectangle m x n, m et n compris entre 1 et 10, J. SCHILLING (54000 Nancy), Christian ROMON, Alain VALLON (78000 Versailles).*

225. Echangisme version chocolat

Il y a 37 façons de compléter le coloriage :

• les 18 ci-contre,



• les 18 dispositions symétriques par rapport à la verticale,

• la « barre » de deux lignes de chocolat noir (et deux lignes de chocolat blanc).

✉ *Bonnes solutions de Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses), Christian LERUSTE (Paris), Pierre REVEL-MOUROZ (Paris), Christian ROMON, qui envisage une recherche systématique des solutions par dénombrement des carrés noirs sur la troisième rangée, Jean SCHILLING (54000 NANCY), Antoine WEHENKEL (Luxembourg).*

226. Lynx et lapins

Dans le premier cas les lapins survivront, mais avec 2000 lynx au départ ils disparaîtront.
Si, à la fin d'un jour donné, le nombre des lapins est L et celui des lynx X, à la fin du jour suivant, il y aura 3(L - X) lapins et 2L lynx. Le rapport du nombre de lapins au nombre de lynx passe ainsi de

$\frac{L}{x}$ à $\frac{3(L-x)}{2x} = \frac{3}{2}\left(\frac{L}{x} - 1\right)$.

Ce rapport est donc, à chaque jour qui passe, diminué d'une unité puis multiplié par 1,5, si bien qu'à la fin du jour n il vaut $3 + 1{,}5^n \times (A - 3)$, A étant sa valeur de départ.
- Ainsi, dans le cas de l'arrivée d'un seul couple de lynx, A vaut 2500 et les lapins vont pulluler.
- Par contre, dans le cas où arrivent mille couples de lynx, A vaut 2,5 et la race des lapins sera éteinte au bout de 5 jours.

☒ *Les lecteurs ont bien vu la distinction entre les deux cas et nous l'ont signalée.*
Robert BASIUK (92100 Boulogne), A et C. BLANCHARD (Marseille), R et G. BOURDON (14800 Tourgeville), Robert BROUZET (30000 Nîmes), Francis CAGNAC (92400 Courbevoie), Patrick GORDON, Mervyn HINE (CH-Founex), Christophe JAUZE (33320 Eysines), Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses), Daniel LIMAT (25000 Besançon), Charles MADEZO (56270 Ploemeur), Joseph PEREZ (Paris), Emma PINON et Michel ERTLEN (83500 La seyne sur mer), Claude POMMIER (92200 Neuilly), Christian ROMÓN, Pierre ROBLIN (94430 Chennevières-sur-Marne).

227. La table tournante

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	8	7	6	5	4	3	2

Le problème n'a pas de solution pour 10 convives.
Il en est d'ailleurs de même pour tout nombre pair de convives. En revanche, pour tout nombre impair de personnes, il y a toujours une solution.

☒ *Un lecteur anonyme propose de ramener ce problème au suivant : Etant données les positions autour de la table, symbolisées par les nombres a_i, de 1 à 10, peut-on leur ajouter des nombres b_i de 0 à 9 (les écarts, tous différents), de manière que les nombres $c_i = a_i + b_i$ comptés de 1 à 10 soient tous différents ? En faisant figurer en colonnes ces trois sortes de nombres, notre lecteur arrive à la conclusion que le problème n'a pas de solution pour n pair, mais qu'il en a une évidente pour n impair, obtenue en prenant $b_i = a_i - 1$ pour tout i. Il obtient donc la solution :*

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	3	5	7	9	2	4	6	8

Marcel CHOQUET (Paris) donne des solutions pour divers nombres de convives. Une seule pour trois, trois pour cinq convives, 19 pour 7 dont la configuration :
Et même... 225 solutions pour 9 personnes autour de la table !

A	B	C	D	E	F	G
1	7	6	5	4	3	2

D'autres lecteurs justifient l'absence de solution pour un nombre pair de convives : A et C. BLANCHARD (Marseille), Claude HUYGHES-BEAUFOND (Paris) avec un argument de parité, Chantal LALLOUR (78170 La Celle Saint Cloud) utilisant les cycles de la permutation « n° de dossard - n° de place », Jean-françois MARIN (26260 Marges), Jean BOURLES, Christian ROMON. D'autres encore, et ils sont très nombreux, ont identifié cette absence de solution dans le cas pair sans toutefois la justifier.

228. Par ici la monnaie !

Il y a 36 façons de payer 1 Euro à l'aide de pièces de 5, 10 et 20 centimes.

1 façon avec 5 pièces de 20 centimes
3 façons avec 4 pièces de 20 centimes (0, 1 ou 2 pièces de 10 centimes)
5 façons avec 3 pièces de 20 centimes (0, 1, 2, 3 ou 4 pièces de 10 centimes)
7 façons avec 2 pièces de 20 centimes (0 à 6 pièces de 10 centimes)
9 façons avec 1 pièce de 20 centimes (0 à 8 pièces de 10 centimes)
11 façons avec 0 pièce de 20 centimes (0 à 10 pièces de 10 centimes)

Total: **36**

Cette méthode se généralise à un nombre quelconque N de francs.

1 façon avec 5N pièces de 20 centimes
3 façons avec (5N – 1) pièces de 20 centimes
5 façons avec (5N – 2) pièces de 20 centimes
...
(10N + 1) façons avec 0 pièce de 20 centimes

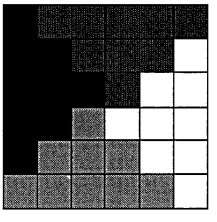
Total: $\mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + (10N + 1) = (5N + 1)^2}$

La somme des P premiers nombres impairs vaut en effet le carré de P. (Pour s'en persuader, grouper le premier et le dernier, le deuxième et l'avant dernier, ... : la moyenne des P nombres est P, donc leur somme P^2).

✉ *Des remarques fort intéressantes au courrier de ce jour :*

- François MAILLARD (54800 JARNY) ajoute que si on adjoint la possibilité d'utiliser des pièces de 50 centimes, le nombre de façons de payer 1€ est encore un carré . Essayez, vous trouverez 49 façons !

- Ilan VARDI, l'initiateur de ce problème, tient à nous rappeler pourquoi la somme des (n + 1) premiers entiers est exactement le carré de (n + 1). L'illustration ci-dessous parle d'elle même :



- Jacques VERGER (Paris) signale en plus que la formule (5N + 1)2 est également valable si N comporte une décimale paire, de sorte que 5N soit entier.

229. Les bandelettes de papier

$$
\begin{array}{rr}
 & 1854264 \\
+ & 967123 \\
+ & 948032 \\
+ & 2742543 \\
\hline
= & 6511962
\end{array}
$$

L'idée est d'associer à chaque colonne deux valeurs :
– l'écart **e** entre le chiffre sous la barre et le chiffre des unités du total des chiffres au-dessus de la barre.
– la retenue **r** à reporter sur la colonne suivante.
Le principe de la résolution consiste alors à former une chaine, de droite à gauche, commençant par un écart nul et finissant par une retenue nulle, telle que la retenue d'une colonne soit égale à l'écart de la colonne suivante.

230. Brûler le temps

Allumez la première cordelette par les deux bouts et la seconde à une seule extrémité.
Au bout de trente minutes exactement, la première cordelette sera entièrement consumée tandis qu'il restera trente minutes de vie à la deuxième. Allumez alors l'extrémité encore intacte de la deuxième cordelette. Cette dernière brûlera encore quinze minutes supplémentaires avant de s'éteindre. Vous pourrez alors lancer votre signal de détresse.

231. Jack-pot

• La machine ne peut cracher qu'un nombre de pièces X_N strictement inférieur à N.
Ce résultat se démontre « par récurrence ». C'est vrai pour 1 pièce engrangée.
Puis on montre que si c'est vrai pour tout nombre jusqu'à N – 1, c'est encore vrai pour N :
évident pour N impair, et si $N = 2n$ est pair, $X_N = 2\,X_n + 1 \leq 2\,(n - 1) + 1 = N - 1$.
• Pour N = 2094 (et pour beaucoup d'autres valeurs), le jack-pot se monte à 2001 pièces.
On peut le montrer en reconstituant (à l'envers) une suite possible d'étapes : la colonne de gauche est d'abord remplie de haut en bas, puis la colonne de droite de bas en haut.

X_N	N
2001	2094
1000	1047
1001	1046
500	523
501	522
250	261
251	260
125	130
62	65
63	64
31	32
15	16
7	8
3	4
1	2

Les spécialistes constateront qu'on obtient l'écriture binaire de X_N à partir de celle de N en enlevant le premier « 1 » et, pour les autres chiffres, en changeant 0 en 1 et vice versa.

⊠ *Un lecteur anonyme et Claude George (Paris) tombent d'accord pour dire (et le prouver) que le nombre de X_N pièces crachées par la machine se calcule assez simplement. Si N est le nombre de pièces encaissées, il existe un unique entier n permettant d'écrire $N = 2^n + r$ avec $0 \leq r < 2^n$. Dans ce cas, $X_N = 2^n - (r + 1)$, donc $N = 2^{n+1} - (N + 1)$, et en particulier pour $X_N = 2001$, $N = 2^{n+1} - 2002$ avec $n \geq 11$.*

232. Les caméléons

Les caméléons ne seront jamais en nombre égal de chaque couleur.

En effet, lors de chaque rencontre l'effectif de deux couleurs diminue d'une unité tandis que l'effectif de la troisième couleur augmente de deux unités. La différence d'effectif entre deux couleurs reste donc stable ou varie de 3.

Or au départ, il y avait 22 caméléons jaunes et 36 bruns. Cette différence de 14 ne peut pas se réduire à zéro par variations de 3 unités.

⊠ *Guy DADY (41160 Fréteval) suggère que si les caméléons avaient été respectivement au nombre de 22, 37 et 40, ils auraient finalement pu être en nombre égal au bout de 7 rencontres. Vous saurez facilement retrouver comment.*

233. Tiens un carré !

Le résultat obtenu est le carré de 4 001 999.

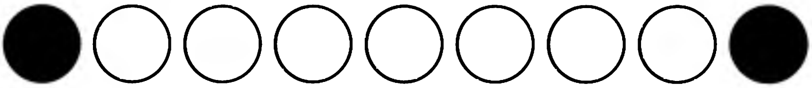
En effet, on applique avec $n = 2000$ la relation :

$$\begin{aligned}(n-1) \times n \times (n+1) \times (n+2) + 1 &= n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 \\ &= (n^2 + n - 1)^2.\end{aligned}$$

⊠ *Nos amis lecteurs, comme Philippe DESTOURS (Paris) ou André ROUVIER (Paris), ont instantanément obtenu une solution en écrivant $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n(n + 3)^2 + 1)^2$. Michel MENGUAL (Paris) a entrevu une généralisation du problème au produit $n(n + 1)(n + x)(n + x + 1)$, pour $x > 1$. Il prouve que le produit de ces quatre nombres augmenté de $\frac{x^2}{4}$ est encore un carré parfait. D'autres, comme Paul CADENNES (27150 Mesnil sous Vienne) ou Robert DORR (Paris) n'ont pas manqué de s'interroger sur le fait que notre fameux nombre, produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est très souvent le carré d'un nombre premier. Henri MONTIAS (Paris), quant à lui, fait le lien avec Φ, le célèbre nombre d'or, en remarquant que $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n + \phi^2)^2 (n + \frac{1}{\phi^2})^2$. Autres bonnes solutions de André L'HUILLIER (39700 Sermange) et Christian ROMON.*

234. Neuf jetons

Il n'est pas possible d'obtenir 9 faces bleues. En effet, la parité du nombre de faces jaunes n'est pas modifiée par un « coup ». On part de neuf faces jaunes, on ne peut en obtenir zéro.



La configuration ci-dessus nécessite les 8 coups possibles : c'est le maximum, car jouer deux fois le même coup produit le même effet que ne pas jouer.

235. Les oeufs en chocolat

Les trois pesées suffisent. A et E sont à la liqueur et pèsent 126 grammes.
Les trois autres sont fourrés à la crème et pèsent 147 grammes.

Les œufs fourrés à la liqueur pèsent un nombre de grammes x inférieur à celui, y, des œufs fourrés à la crème.

Pesées 1 et 2 :

En remplaçant E par B et C, le poids moyen augmente. La différence, 168 grammes, représente soit y, soit $2y - x$.

Pesées 2 et 3 :

En remplaçant A par D et E, le poids moyen augmente encore. La différence, 147 grammes, représente encore soit y, soit $2y - x$.

Or on sait que $2y - x > y$. C'est que $y = 147$ et $2y - x = 168$, soit $x = 126$.

Il est ensuite facile de constater que A = E = 126, puis que B = C = D = 147.

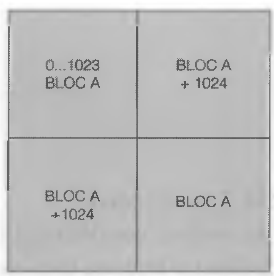
⊠ *Vous avez été très nombreux à donner à ce problème une solution exacte.*

236. Le tableau des nombres

On inscrira 1081 à l'intersection de la ligne 1001 et de la colonne 2002.

On remarque d'abord que le tableau est symétrique (on peut échanger lignes et colonnes).

On voit ensuite que si on considère quatre blocs carrés de la taille d'un nombre N qui constitue une puissance de 2, les quatre blocs contiennent les mêmes nombres éventuellement augmentés ou diminués de N selon la disposition ci-contre (représentée dans le cas N = 1024).



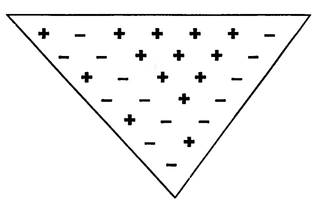
On réitère l'opération en restreignant chaque fois la taille des blocs pour obtenir le résultat.

Pour les spécialistes : on obtient à l'intersection de la ligne L et de la colonne C le nombre obtenu en effectuant la somme « sans retenue » des écritures binaires de (L – 1) et de (C – 1).

⊠ *C. BROERE (NL-La HAYE) a mis son ordinateur dans le coup pour arriver à 3001 à l'intersection de la ligne 1001 et de la colonne 2002, par exemple.*

237. La règle des signes

Voici une solution. La figure symétrique est aussi solution. Adressez-nous les autres solutions, si vous en trouvez.



☒ Votre collaboration a, ici encore, été totale et vos solutions très nombreuses.
- Beaucoup d'entre vous ont eu l'amabilité de nous envoyer une ou plusieurs solutions supplémentaires.
- D'autres ont mis en évidence « à la main » toutes les solutions. Ne représentons que les premières lignes :

• deux sont symétriques :

–	–	–	+	–	–	–
+	+	–	+	–	+	+

• cinq ne le sont pas :

–	–	–	–	–	+	–
–	–	+	–	+	–	+
–	+	+	–	+	+	+
–	+	+	+	+	–	+
+	–	–	–	–	+	+

Yves ARCHAMBAULT (Paris), Philippe BIHEL (22700 Perros-Guirec), Jean BOURLES (Bruxelles), Henri CHARRIERE (92100 Boulogne), D et J-P. KIEKEN (91230 Montgeron), Philippe LACHAT (Londres), Pierre REY, Christian ROMON, Heinrich SCHREINER (Vienne).
- Les derniers enfin mettent l'informatique à contribution pour obtenir un résultat exhaustif: Michel DUTEIL (Paris), Thierry HERAULT (76130 Mont-Saint-Aignan), Daniel MARTIN (87000 Limoges), Georges NEYRET (94240 L'Hay les Roses).
- Alain VALLON, lui, économise ses pas en remarquant que les parités des nombres de signes – sur la première ligne et dans le tableau tout entier sont contraires. Il faut donc, nous dit-il, dans le cas présent, un nombre pair de signes – sur la première ligne, ce qui limite d'étude aux cas où ce nombre est 2, 4 ou 6.
- J. DREVET (Marseille) va encore plus loin en exhibant une solution pour une première ligne à 8 éléments :

```
+ – + – – + – +
 – – – + – – –
  + +   – + +
   + – + – +
    – – – –
     + + +
      +
```

238. Les caramels

Les sachets contiennent tous le même nombre de caramels.

En ôtant n'importe quel sachet, il reste un nombre pair de caramels. C'est que tous les sachets contiennent un nombre de caramels de même parité.
– Si c'est un nombre pair, on divise virtuellement par deux le nombre de caramels de chaque sachet.
– Si c'est un nombre impair, toujours virtuellement, on enlève un caramel à chaque sachet et on divise son nombre de caramels restants par deux.
On constate alors que les sachets « virtuels » ont la même propriété que les sachets de départ : quel que soit le sachet ôté, on peut répartir les autres en deux groupes égaux de sept sachets.
On peut donc recommencer. Or, la suite des contenus d'un même sachet à l'issue des opérations virtuelles successives atteint toujours la valeur 1 et prend ensuite perpétuellement la valeur 0. Pour que la parité de tous les sachets reste constante, il est nécessaire qu'ils atteignent tous le contenu 0 en même temps, donc qu'ils aient eu le même nombre de caramels au départ.

☒ Y. F-S PETERMANN (Genève), facétieux, nous propose une variante de ce problème sous forme de 15 petits pots de miel que grand-père, apiculteur comme il se doit, destine à ses petits-enfants...

239. Jouer avec des allumettes

Avec un tas, Brice est sûr de gagner en laissant Amélie commencer si le nombre d'allumettes est un multiple de 3.

Il a donc craqué une (ou quatre...) des cent allumettes. Il en reste donc 99 ou 96... (ou tout autre multiple de 3). Chaque fois qu'Amélie ôte une allumette, il en ôte deux et vice versa. Amélie aura toujours devant elle un nombre d'allumettes multiple de 3, qui descendra jusqu'à zéro.

Avec deux tas, Amélie gagnera en faisant en sorte que l'écart entre les deux tas soit toujours multiple de 3 allumettes. Elle divise donc les 99 allumettes en deux tas dont la différence n'est pas multiple de 3 (par exemple, 70 et 29), puis enlève par exemple une allumette au tas de 29. La différence est 42, un multiple de 3. Quoi que fasse Brice, Amélie pourra toujours faire en sorte que cette différence soit un multiple de 3 jusqu'à l'emporter.

240. Qui veut gagner des euros ?

Richard a répondu à 98 questions et Sophie à 99.

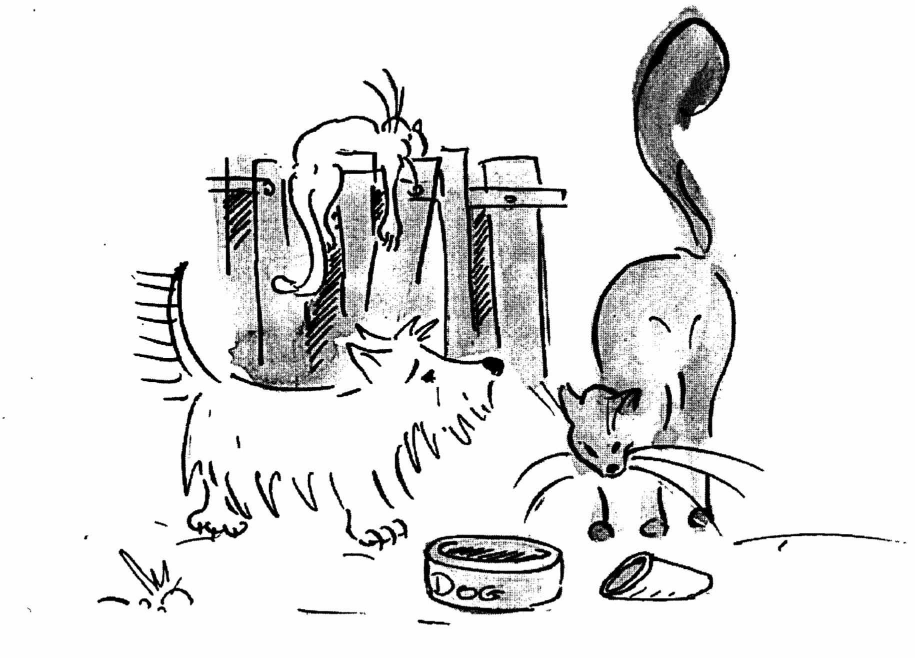
En appelant D les dizaines et U les unités du nombre N de coups joués par l'un des protagonistes, on parvient à une équation en nombres entiers assez complexes, mais que les spécialistes savent résoudre : l'égalité

- du nombre de pièces, $45\ D + \dfrac{U\ (U+1)}{2}$
- et du nombre de billets, $5\ D\ (D-1) + D\ (U+1)$.

Mais il est plus simple de dresser un tableau, pour constater que le nombre de pièces, en avance, n'est rattrapé par le nombre de billets que pour N = 98 (441 pièces et 441 billets) et N = 99 (450 de chaque). Au-delà, il est clair que le nombre de billets ajoutés à la cagnotte sera toujours supérieur au nombre de pièces.

Défis numériques

Chapitre 5



241. Les nombres croisés de l'année

Problème n°2 du 28-01-97

	1	2	3	4
A	0			
B			0	
C				
D				

Horizontalement :
A. Multiple de 97
B. Multiple de 97.
C. Multiple de 97
D. Multiple de 97.

Verticalement :
1. Multiple de 97.
2. Multiple de 97.
3. Multiple de 97.
4. Multiple de 97.

Complétez cette grille où seuls les zéros ont été placés. Il n'y en a pas d'autres dans la grille, même en admettant qu'un nombre puisse commencer par 0.

242. Ôtez un carré

Problème n°7 du 04-03-97

Voici la règle d'un jeu auquel vous pouvez vous adonner :
Deux joueurs disposent d'un tas d'allumettes. Chacun, à tour de rôle, ôte un certain nombre, non nul, d'allumettes du tas, ce nombre ôté devant impérativement être un carré : 1, 4, 9, 16, 25...
Le joueur enlevant la dernière allumette a gagné.

Selon la taille du tas de départ, l'issue du jeu n'est pas la même.
Par exemple, avec 5 allumettes, le premier joueur perdra, puisqu'il est obligé de laisser 4 ou 1 allumettes à son adversaire qui emportera le tas.
Au contraire, avec 11 allumettes, le premier joueur en ôtera 9, ce qui oblige son adversaire à lui en laisser une pour la victoire finale.

Le tas initial contient 28 allumettes. Quelle doit être la stratégie du premier joueur pour être sûr de l'emporter ?

243. Piscine de star

Problème n°12 du 08-04-97

Pour paver le fond de la piscine carrée qu'elle fait construire (sur son terrain dont aucune dimension n'excède 25 mètres), une actrice holywoodienne se fait livrer des dalles bleues d'un mètre sur un mètre qui doivent constituer le carré central, et des dalles jaunes de même dimension destinées à entourer ce carré central d'une ceinture d'un mètre de large.

Seulement, voilà, les stars sont capricieuses. Alors que les dalles sont déjà livrées, elle décide que c'est l'intérieur qui sera jaune et le contour bleu. D'abord catastrophé, l'architecte conçoit un nouveau projet de piscine carrée dont il est possible de paver le fond en respectant les vœux de la star et en utilisant toutes les dalles (sans les casser). Seule condition : la bordure bleue aura plus d'un mètre de large.

Quelles sont les dimensions de la piscine ?
Sauriez-vous résoudre un problème similaire dans lequel la diva exige que le contour demeure large d'un mètre, et où l'architecte s'en sort en transformant son projet en piscine rectangulaire ?

244. Le score impossible

Problème n°17 du 13-05-97

Dans une nouvelle forme de sport, on ne peut marquer que deux scores :
• 5 points, pour un but au pied
• 9 points pour un but à la main.
Certains totaux sont ainsi impossibles à atteindre par une équipe comme 3, 8 ou 12 points.

Montrez qu'à partir d'un certain nombre, tous les totaux sont possibles.
Quel est le plus grand score impossible à atteindre ?

245. Les groupages

Problème n°22 du 17-06-97

Voici quatre groupes de 10 nombres entiers inférieurs à 100 :

Groupe A : 12, 14, 26, 33, 41, 54, 71, 82, 92, 98.
Groupe B : 7, 15, 66, 75, 76, 79, 84, 93, 95, 99.
Groupe C : 11, 18, 27, 30, 43, 58, 75, 94, 95, 97.
Groupe D : 3, 21, 25, 32, 37, 43, 49, 56, 69, 84.

De chaque groupe, sauriez-vous extraire deux sous-groupes disjoints tels que la somme des nombres du premier sous-groupe soit égale à la somme des nombres du deuxième sous-groupe ?
(il n'est pas nécessaire que tous les nombres du groupe appartiennent à l'un des deux sous-groupes)
Montrez que cette extraction de deux sous-groupes de même somme est toujours possible, quels que soient les dix nombres entiers naturels inférieurs à 100 qui constituent le groupe.

246. Division muette

Problème n°27 du 22-07-97

```
* * * * * *          | * * *
* * *                |-----------------
-----                | * * * *, * * * *
    * * *            |
    * * *            |
    -----            |
      * * *          |
      * * *          |
      -----          |
        * * *        |
        * * *        |
        -----        |
          * * * *    |
          * * * *    |
          -------    |
                0    |
```

Tous les chiffres de cette division, soigneusement posée, puisqu'y figurent même les soustractions, ont été effacés. Il ne reste que leur trace sur la papier.

Pouvez-vous néanmoins la reconstituer ?

247. Énigme policière

Problème n°32 du 26-08-97

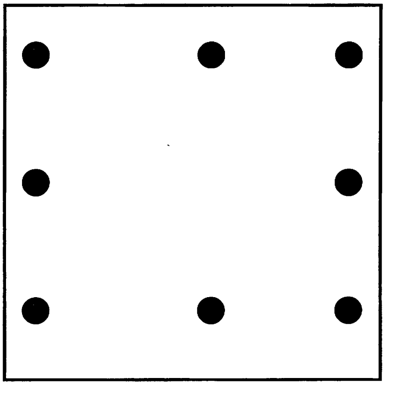
Un convoi de deux cars, de 50 places (maximum) chacun, conduit des prévenus depuis le tribunal vers leurs prisons respectives. Outre les prisonniers, les cars contiennent un certain nombre de policiers chargés de les raccompagner, parmi lesquels les deux chauffeurs.
Lors du premier arrêt du convoi, un tiers des voyageurs (prisonniers et policiers confondus) descend, et deux policiers montent. L'effectif total est maintenant réduit.
Lors du deuxième arrêt, un tiers des voyageurs descend, et deux policiers montent.
Lors du troisième arrêt, un tiers des voyageurs descend, et deux policiers montent.
Lors du quatrième arrêt, un tiers des voyageurs descend, et deux policiers montent.

Il ne restait plus maintenant que des policiers. Combien ?

248. Périmètre magique

Problème n°37 du 30-09-97

Peut-on disposer en carré, comme le suggère la figure, les entiers de 1 à 8, de manière que la somme des nombres situés sur chacune des lignes et des colonnes du périmètre soit la même ?

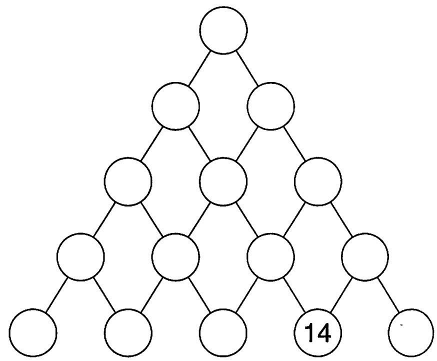


249. Magie triangulaire

Problème n°42 du 04-11-97

Disposez en triangle sur cette figure les entiers de 1 à 15, de manière que chaque nombre soit la différence (en valeur absolue) des deux qui le soutiennent (au rang inférieur).

Il n'y a plus qu'une des deux solutions symétriques dès lors que, pour vous aider, nous avons placé l'un des nombres (14).



250. Le compte est bon

Problème n°47 du 09-12-97

Voici une opération cryptée.
Comme dans tout problème de ce genre, chaque chiffre est remplacé par une lettre, toujours la même, et chaque lettre remplace toujours le même chiffre. Les nombres ne commencent pas par 0.

Nous espérions qu'il y ait trois solutions au problème, mais malheureusement nous en avons trouvé sept.

Sauriez-vous trouver au moins l'une des solutions ?

			U	**N**	**E**
+		**D**	**E**	**U**	**X**
=	**T**	**R**	**O**	**I**	**S**

251. Bonne année

Problème n°52 du 13-01-98

On appelle A le nombre 999...999 qui s'écrit en accolant 1998 fois le chiffre 9.

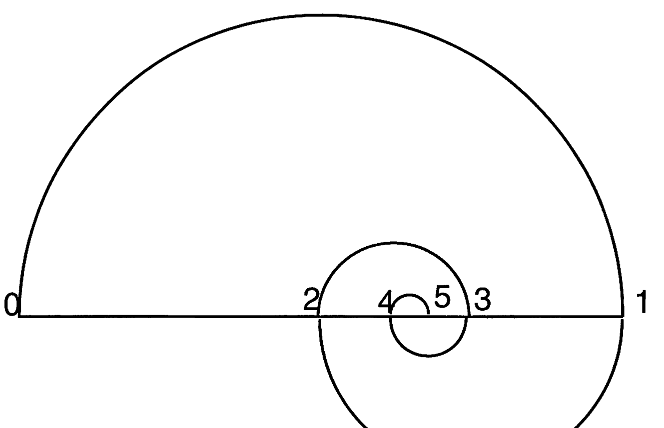
Quelle est la somme des chiffres du nombre obtenu en multipliant A par 1998 ?

252. La spirale des milieux

Problème n°56 du 10-02-98

On construit, comme sur le dessin, cette jolie spirale.
Le point 2 est le milieu du segment [0 ; 1].
Le point 3 est le milieu du segment [2 ; 1].
Le point 4 est le milieu du segment [2 ; 3].
Et ainsi de suite...

Autour de quel point la spirale s'enroule-t-elle ?



253. La période

Problème n°61 du 17-03-98

Lorsqu'on écrit l'inverse d'un entier sous forme décimale, la division ne s'arrête que rarement. On trouve alors une suite décimale *périodique*, c'est-à-dire de la forme 0,NNNN... où N est un groupe de chiffres qui se répète indéfiniment.

Ainsi, dans $\frac{1}{37} = 0{,}027\ 027\ 027\ \ldots$, N est le groupe 027. Le nombre de ses chiffres, 3, est *la période* de cette suite décimale.

Dans $\frac{1}{101} = 0{,}0099\ 0099\ 0099\ \ldots$, N est le groupe 0099.
Le nombre de ses chiffres, 4, est *la période* de cette suite décimale.

Quel est le plus petit entier dont l'inverse admet une suite décimale de période 5 ?

254. Les nombres heureux

Problème n°66 du 21-04-98

1998 est un nombre heureux : il existe en effet deux entiers strictement positifs de somme 1998 dont le produit est divisible par 1998.

Quels sont ces deux entiers ?
Plus délicat :
Quels sont les nombres malheureux ?

255. Rendez-le magique !

Problème n°72 du 02-06-98

Dans un carré magique, toutes les lignes, toutes les colonnes, et les deux diagonales ont la même somme.

Échangez deux couples de nombres de ce carré pour qu'il devienne magique.

9	24	7	20	3
4	12	25	18	16
17	5	13	21	11
10	8	1	14	22
23	6	19	2	15

256. Saucisson numérique

Problème n°77 du 07-07-98

Un charcutier vient de découvrir, sur un emballage, un nombre gigantesque (il a près de 50 chiffres). Ne sachant qu'en faire, il décide de le saucissonner en tranches de deux chiffres en partant de la droite. Puis il additionne toutes les "tranches" (les nombres de deux chiffres ainsi formés).
Par exemple, si le nombre se termine par ...367 523, il pose 23 + 75 + 36 + ...
La somme de tous ces nombres vaut 1998.

Quelque temps plus tard, le fils du charcutier tombe sur le même nombre. Il lui applique une technique différente : il écrit le premier chiffre en partant de la droite, enlève le second, ajoute le troisième, enlève le quatrième... jusqu'au dernier. Dans l'exemple précédent, cela donnerait :
3 – 2 + 5 – 7 + 6 – 3...

Le résultat est un nombre positif formé d'un seul chiffre. ***Lequel ?***

257. L'addition du « Mondial »

Problème n°82 du 11-08-98

Voici une addition cryptée. Comme dans tout problème de ce genre, chaque lettre représente un chiffre précis et deux lettres différentes correspondent à deux chiffres différents.

Combien vaut une COUPE ?

$$\begin{array}{r} \mathrm{F\ O\ O\ T} \\ +\ \mathrm{B\ A\ L\ L\ E} \\ \hline =\ \mathrm{C\ O\ U\ P\ E} \end{array}$$

258. Nombres croisés

Problème n°87 du 15-09-98

Remplissez cette grille, où tous les nombres possèdent quatre chiffres, aucun d'entre eux ne commençant par zéro. Une calculatrice peut s'avérer utile, même si elle n'est pas indispensable.

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Horizontalement
A. Multiple de 9
B. Multiple de 19
C. Carré parfait
D. Cube parfait

Verticalement
1. Palindrome multiple de 25
2. 4 fois le même chiffre
3. Multiple de 11
4. Puissance de 2

259. Une quinte de cinq

Problème n°92 du 20-10-98

Sauriez-vous écrire tous les nombres de 1 à 40 à l'aide d'opérations où intervient cinq fois (exactement) le nombre 5 ?

Les quatre opérations classiques sont permises, mais aussi d'autres opérateurs : puissances, racines carrées et même factorielles*, ainsi que toutes les parenthèses nécessaires. En revanche, il n'est pas permis d'accoler les *chiffres* «5» pour en faire un nombre comme 55.

* La «factorielle» d'un nombre N, notée N!, est le produit de tous les entiers de 1 à N. Ainsi, 5 ! = 120.

260. Économie de salive

Problème n°97 du 24-11-98

Les timbres que j'achète ont tous pour valeur un nombre entier de francs. Ils sont de trois sortes : les bleus à 1 franc, les verts, et les rouges dont la valeur faciale est supérieure à celle des verts.

J'ai remarqué que pour toutes les lettres dont l'affranchissement nécessite un nombre entier de francs compris entre 1 et 15, trois de mes timbres, au plus, suffisent.

Que valent les timbres verts et les timbres rouges ?

261. L'escalator

Problème n°102 du 29/12/1998

Madame Matronome monte les escaliers, même s'ils roulent, toujours à la même allure invariante : une marche par seconde. Elle atteint habituellement le sommet de l'escalator du RER en 30 secondes.
Ce jour-là, distraite, elle prend pour le monter l'escalier descendant (aussi lent dans sa descente que dans sa montée) et met 2 minutes pour atteindre le sommet.

Quel est le nombre de marches de l'escalator au repos ?

262. Le tarif publicitaire

Problème n° 107 du 02/02/1999

Le directeur de publicité d'une nouvelle revue a conçu un barème étonnant pour les annonceurs qui veulent lui acheter de l'espace publicitaire ne dépassant pas la surface d'une page.
Ce tarif obéit aux trois lois suivantes :
1• Si une surface est plus grande qu'une autre, son prix ne peut être inférieur au prix de la plus petite surface, mais il peut lui être égal.
2• Une surface triple entraîne une facturation double
3• Le prix de la page est fixé à 8960 F.
4• Si une page est entièrement occupée par deux publicités, elle rapporte la même somme, 8960 F, quelle que soit la répartition de la page entre ces deux publicités.

Quel est le prix d'une annonce occupant 1/1999 de la page ?
Quel est le prix d'une annonce occupant 1/13 de la page ?

263. Étonnantes racines

Problème n°112 du 16/03/1999

Vous connaissez tous $\sqrt{2}$, ce nombre qui multiplié par lui-même, est égal à 2.

Voici deux questions faciles mais déroutantes le concernant.

• ***Placez les parenthèses*** qui rendent vraie l'égalité suivante :

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

• ***Quelle est la valeur*** du nombre $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2...}}}}$?
(les pointillés représentent une suite infinie où se succèdent les symboles $\sqrt{}$ et 2 +).

264. La fraction du cancre

Problème n°117 du 20/04/1999

Drôle de méthode pour simplifier une fraction !
Car il faut être un cancre pour écrire l'égalité ci-dessous, où A, B et C sont des chiffres distincts non nuls :

$$\frac{ABBBBBBB}{BBBBBBBC} = \frac{A}{C}$$

Pourtant, le résultat est exact !

Reconstituez la fraction !
(Il y a plusieurs solutions, trouvez-les toutes)

265. Les bicyclettes néerlandaises

Problème n°122 du 25/05/1999

Dans cette petite ville des Pays-Bas, le recensement fait apparaître 2000 familles et 5495 vélos.
Il n'y a en effet que trois catégories de familles : celles qui possèdent 2 vélos, celles qui possèdent 3 vélos et celles qui en possèdent 4.
Coïncidence étonnante : deux de ces catégories comptent le même nombre de familles.

Combien de familles possèdent trois vélos ?

266. Tête à queue numérique

Problème n°127 du 29/06/1999

Un jour, un interminable nombre entier (il n'avait pas loin de 20 chiffres) fit un tête à queue : le 5 qui constituait son premier chiffre passa à la fin, les autres chiffres ne bougeant pas.
Du coup, le nombre fut sérieusement amoindri, puisque sa valeur fut divisée par 2.

Quel était ce nombre ?

267. La fraction insolite

Problème n°132 du 03/08/1999

E***xiste-t-il trois entiers a, b et c*** tels que la fraction $\frac{4}{1999}$ s'écrive comme la somme des inverses de ces entiers, soit

$$\frac{4}{1999} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad ?$$

Est-ce encore vrai en remplaçant au dénominateur 1999 par n'importe quel multiple de 4 auquel on a ôté 1 ? Pensez-vous qu'on peut remplacer 1999 par n'importe quel entier ?

268. Somme de suites

Problème n°137 du 07/09/1999

$$\mathbf{3} = 1 + 2$$
$$\mathbf{5} = 2 + 3$$
$$\mathbf{6} = 1 + 2 + 3$$
$$\mathbf{7} = 3 + 4$$
$$\mathbf{9} = 2 + 3 + 4 = 4 + 5$$
$$\mathbf{10} = 1 + 2 + 3 + 4$$

Parmi les nombres de 2 à 30, lesquels s'écrivent comme sommes de deux nombres consécutifs ou plus ?

D'une manière générale, quels sont les nombres entiers qui ne peuvent en aucun cas s'écrire comme somme de plusieurs nombres consécutifs ?

269. La dîme

Problème n°142 du 19/10/1999

Dans ce village d'Auvergne, on vient de faire, en l'an de grâce 1333, la récolte des châtaignes. L'année a été moyenne, et l'on n'a pas dépassé les 100 000 châtaignes.

Le seigneur prend évidemment sa dîme : on divise la récolte en dix parts égales, et comme il reste une châtaigne, le maître des lieux l'emporte avec sa part.

Le prévôt prend alors sa dîme, ou plutôt la dîme de ce qui reste : dans ce but, on fait 10 nouveaux tas, il reste une châtaigne que le prévôt emporte avec sa part.

On procède de même, dans l'ordre, avec le bailli, le curé et le bedeau. Chaque fois, coïncidence extraordinaire, il reste une châtaigne une fois que dix tas égaux sont faits, et elle est emportée avec le tas du notable.

Après le passage des cinq dignitaires, le reste des châtaignes est réparti entre les 48 familles du village.

Peuvent-elles toutes en prendre le même nombre ?

270. Enchanté !

Problème n°146 du 16/11/1999

Dans un carré enchanté de dimension 3, la somme des nombres situés sur les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales est la même : c'est la «somme enchantée». Si, en plus, les 9 premiers nombres entiers figurent tous dans le carré, on dit qu'il est magique.

Complétez ce carré pour qu'il soit enchanté.
Peut-on toujours compléter un carré où figurent trois nombres pour le rendre enchanté ?

	16	
10		
	12	

271. Carrément carrés

Problème n°149 du 07/12/1999

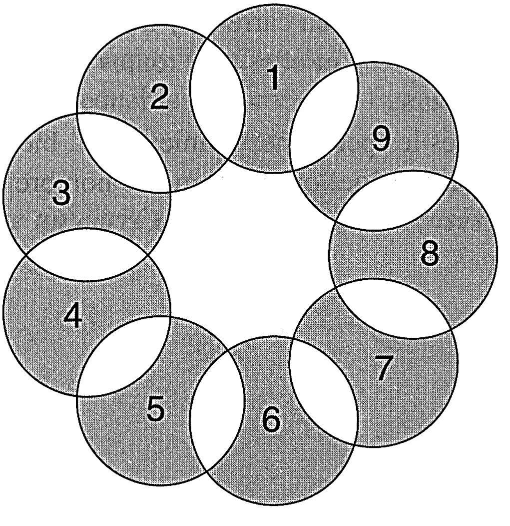
Commencez par écrire 16. Après le «1», intercalez «15» : vous obtenez 1156. Après le dernier «1», intercalez «15» : vous obtenez 111556. Continuez : 11115556, 1111155556, ...

Sauriez-vous, sans le moindre embryon de calculatrice, prouver que tous ces entiers sont des carrés parfaits et déterminer leurs racines carrées ?
Pour chacun de ces carrés parfaits, sauriez-vous écrire, toujours sans calculatrice, le carré immédiatement supérieur ?

272. L'anneau magique

Problème n°157 du 01/02/2000

Inscrivez les entiers de 1 à 9 dans les 9 zones blanches d'intersection des cercles de sorte que le total des 3 nombres figurant dans chacun des cercles soit le même.



273. Le nombre porte-bonheur

Problème n°162 du 07/03/2000

De l'écriture décimale du nombre porte-bonheur, vous enlevez le premier chiffre : le nombre restant est divisible par 13. Mais si au lieu du premier chiffre, vous aviez enlevé le deuxième chiffre, vous auriez encore pu diviser le nombre obtenu par 13. Si vous aviez enlevé le troisième chiffre, le quatrième chiffre, ou l'un quelconque des chiffres, même chose !
Et si vous faites la somme des chiffres du nombre porte-bonheur, vous obtenez encore 13 !

Que vaut le nombre porte-bonheur ?

274. La grande famille

Problème n°167 du 11/04/2000

Le patriarche de cette famille a eu des enfants, des petits-enfants, des arrière-petits-enfants et même des arrière-arrière-petits enfants. Tous sont vivants, en bonne santé, et sont venus souhaiter (sans leurs conjoints) à l'ancêtre son anniversaire. Des chaises ont été installées en carré (il y a autant de chaises dans chaque rangée que de rangées de chaises), et elles sont toutes occupées lorsque l'ancêtre se rassoit à la fin de son discours.
Chose extraordinaire, toutes les personnes réunies (sauf, bien sûr, les arrière-arrière-petits enfants, encore en bas âge) ont eu le même nombre d'enfants.

Combien ?

275. Le carré bègue

Problème n°170 du 09/05/2000

Un «nombre bègue» est un nombre dans lequel tous les chiffres sont doublés.

Ainsi, un nombre bègue de 4 chiffres s'écrit *aabb*.

Sauriez-vous trouver un nombre bègue de 4 chiffres qui soit un carré parfait (le carré d'un nombre entier) ?

276. Les carrés antimagiques

Problème n°177 du 27/06/2000

Dans une grille carrée, on écrit l'un des nombres 1, 2 ou 3 dans chaque case.

On totalise chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale, et on compare toutes ces sommes.

Est-il possible qu'elles soient toutes différentes ?

On ne s'occupe plus des diagonales. On appelle carré antimagique un carré rempli des nombres 1, 2 ou 3 dans lequel les sommes des lignes et des colonnes sont toutes distinctes.

Sauriez-vous construire un carré antimagique de six cases sur six ?

277. Élégance urbaine

Problème n°182 du 01/08/2000

Une nouvelle ligne de tramways vient d'être inaugurée dans cette ville.

Bien sûr, pour commencer, on n'a mis en service qu'un petit nombre (N) de rames, mais ce qu'elle sont élégantes !

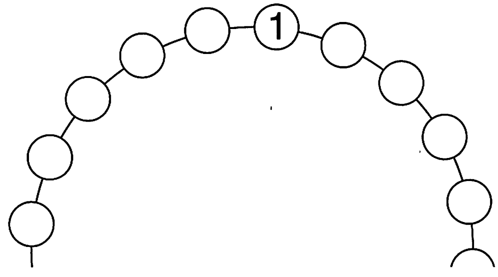
$$N \times TRAMS = SMART$$

Que vaut N ?
Et que vaut SMART ?
Rappel : dans une opération codée, chaque lettre représente un chiffre et chaque chiffre est toujours représenté par la même lettre. Aucun mot ne commence par zéro.

278. La roue des différences

Problème n°187 du 05/09/2000

Les nombres entiers inscrits dans cette roue ont une bien curieuse propriété : lorsqu'on parcourt la roue dans le sens des aiguilles d'une montre, le nombre inscrit dans une case est la différence (en valeur absolue) des nombres qui se trouvent dans les deux cases qui la précèdent.



La somme de tous les nombres inscrits est 20, et le nombre 1 est déjà inscrit.

Reconstituez cette roue.

Combien compte-t-elle de cases ?

279. Le cancre récidive

Problème n°192 du 10/10/2000

Dans ces mêmes colonnes, le cancre avait simplifié d'une drôle de manière les fractions

$\frac{166}{664}$, $\frac{199}{995}$ ou $\frac{266}{665}$

Il avait tout simplement rayé les deux derniers chiffres du numérateur et les deux premiers chiffres du dénominateur, et le résultat s'était avéré juste !

Aujourd'hui, l'incorrigible récidive : $\frac{ABC}{BCD} = \frac{A}{D}$

Et la fortune lui sourit, puisque le résultat, une fraction irréductible, s'avère encore exact. Pourtant les deux chiffres simplifiés, B et C, n'étaient cette fois pas égaux.

Quelle était donc la nouvelle fraction du cancre ?

280. A la pointe du triangle

Problème n°197 du 14/11/2000

Fabriquons le triangle numérique d'ordre 5 suivant, où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & & & \\
& & & & & 80 & & & & &
\end{array}$$

Sauriez-vous calculer, de préférence mentalement, le nombre inscrit à la pointe du triangle numérique d'ordre 6 ?

Et, sans le construire, celui qui se trouverait à la pointe du triangle numérique d'ordre 20 ?

La calculatrice est cette fois autorisée.

281. Déploiement triangulaire

Problème n°202 du 19/12/2002

L'armée de ce pays tout neuf a une particularité peu commune : toute son organisation repose sur le nombre 9. Ainsi, le plus petit gradé, le caporal, a toujours sous ses ordres un groupe de 9 soldats. Un sergent dirige 9 caporaux, eux-mêmes à la tête de leur groupe de 9 soldats. Un adjudant a sous ses ordres 9 sergents et leurs subalternes. Et ainsi de suite, ... jusqu'au grade le plus élevé.

Le général Georges Déployé est ainsi à la tête d'une armée importante.
Pour les besoins d'une parade qu'il organise dans un stade, il souhaite déployer ses hommes (et lui à leur tête) selon un schéma triangulaire : un homme sur la première ligne, deux sur la deuxième, trois sur la troisième...

Est-ce toujours possible sans que la dernière ligne soit incomplète ?

282. Faites l'appoint !

Problème n°207 du 23/01/2002

La scène se passe le premier janvier 2002. L'Euro est en service, ainsi que ses subdivisions, des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 cents. Un gamin se présente devant un distributeur qui délivre, moyennant un Euro, des barres de céréales. Mais un avertissement clignote en rouge :
"L'appareil ne rend pas la monnaie, faites l'appoint !"
Le gamin a plus d'un Euro sur lui, mais il s'avère incapable de constituer la somme exacte.

Combien possède-t-il, au maximum, d'argent dans sa poche ?

283. Rationalité

Problème n°212 du 27/02/2001

Un nombre est dit «rationnel» s'il s'écrit comme le quotient de deux entiers.

Existe-t-il deux rationnels distincts tels que la différence de leurs cubes soit le double de leur différence ?

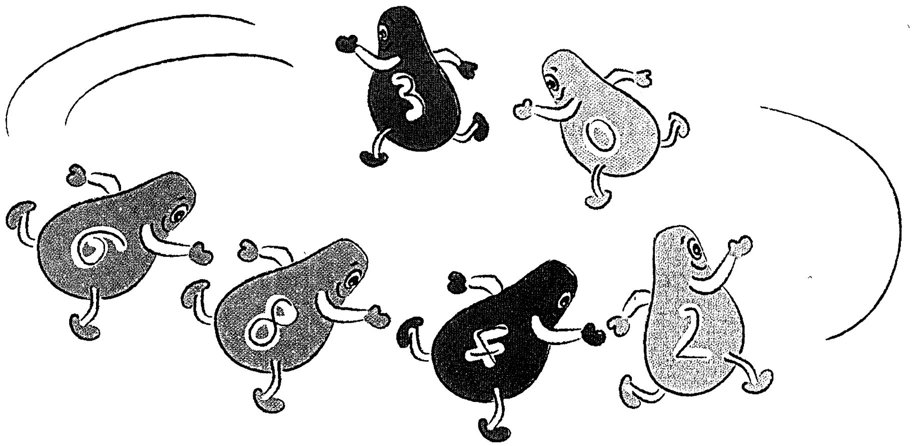
284. Permutation circulaire

Problème n°217 du 03/04/2001

Prenez un nombre de 6 chiffres. Si vous avez de la chance, il est divisible par 13.

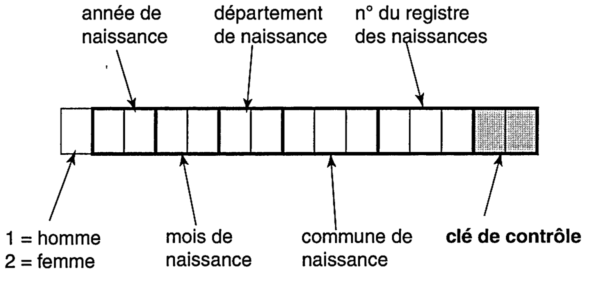
Faites passer le premier chiffre à la fin.

Le nouveau nombre est encore divisible par 13. Pourquoi ?



285. Trahie par la « Sécu » !

Problème n°222 du 08/05/2001



Le schéma montre comment est fait un numéro de sécurité sociale. Les deux derniers chiffres (dans la zone grisée) forment la "clé de contrôle".
Pour la calculer, on divise par 97 le nombre formé par les 13 premiers chiffres. La clé est le complément à 97 du reste de cette division.
La jolie Mylène, voulant peut-être se rajeunir aux yeux du séduisant pharmacien qui la sert, triche sur son année de naissance en falsifiant les deuxième et troisième chiffres.
Elle déclare que son numéro est le : 2 75 10 75 017 724 69.

Le pharmacien s'apercevra-t-il de la supercherie ?
En quelle année Mylène est-elle née ?

286. Enigme numérique

Problème n°227 du 12/06/2001

Je suis un nombre de 3 chiffres. Si on coupe mon carré en deux tranches de trois chiffres, en additionnant ces deux "moitiés", on trouve 1000.

Qui suis-je ?

Et si je suis un nombre de quatre chiffres dont la somme des deux tranches du carré vaut 10000 ?
(D'après une idée de M. Pierre Kamoun).

287. L'âge de César Thaire

Problème n°232 du 17/07/2001

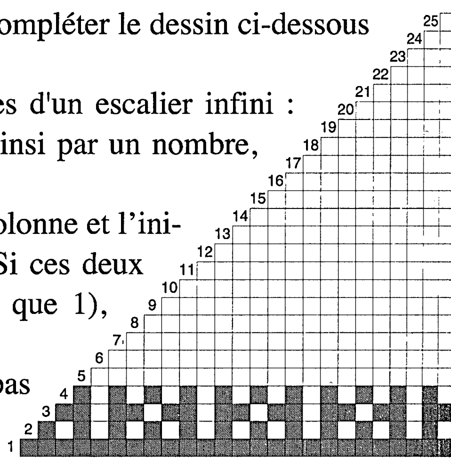
César Thaire a invité un couple d'amis à son anniversaire. On papote âges... « C'est étonnant, mais si on ajoute à mon âge le produit des deux chiffres qui le composent, puis encore la somme de ces chiffres, puis encore leur différence, on obtient 100 », confie Pierre.
« Bien que je sois plus jeune que lui, c'est exactement la même chose pour moi », précise Aure, sa femme.
« Ce n'est pas mon cas », dit Cesar. Puis il ajoute : « Mais si on enlève la différence des deux chiffres à la somme de mon âge, du produit des deux chiffres et de leur somme, cette fois, on obtient 100 ».

Quel est l'âge des trois protagonistes ?
(D'après le tournoi mathématique de Saint-Michel en l'Herm).

288. Carré blanc

Problème n°237 du 28/08/2001

Nous vous proposons de reconstituer et de compléter le dessin ci-dessous selon la règle suivante :
1. Inscrivez la suite des entiers sur les marches d'un escalier infini : chaque ligne et chaque colonne commencent ainsi par un nombre, leur initiale.
2. Pour chaque case, comparez l'initiale de la colonne et l'initiale de la ligne à laquelle la case appartient. Si ces deux nombres n'ont aucun diviseur commun (autre que 1), noircissez la case.
Si ce n'est pas le cas (si les nombres ne sont pas « premiers entre eux »), la case reste blanche.



Quel est le premier carré blanc (le plus à gauche) isolé au milieu de 8 carrés noirs ?

Quel est le premier carré noir isolé au milieu de 8 carrés blancs ?

289. Finale quatre

Problème n°242 du 02/10/2001

Les carrés de 2 ou de 8 se terminent par le chiffre 4.

144, le carré de 12, se termine par deux chiffres 4.

Quels sont les nombres dont le carré se termine par trois chiffres 4 ?

Existe-t-il des nombres dont le carré se termine par 4444 ?

290. Tourisme littéraire

Problème n°247 du 06/11/2001

La lecture du dernier livre de M.H. m'ennuie profondément au point que j'ai trouvé beaucoup plus drôle, en le feuilletant, d'en additionner tous les numéros de pages (de la 1 à la dernière numérotée). Une autre façon de faire du tourisme !
Après toutes ces opérations (sans faute), je trouve un total de 19575. Je referme le livre, satisfait, mais je m'aperçois que deux des pages sont restées collées.

Quel est le nombre de pages du livre ? Quelles pages ai-je sautées ?

Deuxième livre : même auteur, même punition. Le total est le même (19575), mais cette fois, quatre pages consécutives de la deuxième moitié du livre sont restées collées.

Quel est le nombre de pages du livre ? Quelles pages ai-je sautées ?

291. Festival de trois

Problème n°252 du 11/12/2001

Les adorateurs du chiffre « 3 » vénèrent un nombre plus que les autres, le nombre 333...33, composé du chiffre 3 à 111 exemplaires. La raison qu'ils invoquent est que la somme des chiffres de son carré est égale à trois fois la somme des chiffres du nombre.

Ont-ils raison ? Le nombre est-il si extraordinaire ?

292. Addition-miroir

Problème n°259 du 29/01/2002

L'addition ci-dessous (où les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I, et J représentent les dix chiffres de 0 à 9) a la particularité de se lire de gauche à droite, mais aussi de droite à gauche.

ABC	CBA
+ DE	+ ED
+ FG	+ GF
mais aussi	
= HIJ	= JIH

Reconstituez-la.

Pour éviter les solutions « interchangeables », nous vous précisons que A n'est pas zéro et que les nombres de deux chiffres sont dans l'ordre suivant :
DE > ED > GF > FG.

293. Carrés et cubes

Problème n°262 du 19/02/2002

Horizontalement :
I. Cube palindrome.
II. Somme de deux carrés.
III. Cube.
IV. Cube.
V. Carré. Carré.
Verticalement :
I. Cube.
II. Carré.
III. Carré.
IV. Carré. Somme de trois carrés.
V. Carré différence de deux carrés dont la somme des chiffres est un carré .

	I	II	III	IV	V
I					■
II					
III				■	
IV	■				
V			■		

Complétez cette grille de nombre croisés à l'aide des définitions.

Comme dans toute grille, aucun nombre ne commence par zéro. Les définitions des nombres à un seul chiffre ne sont pas données.

294. Handicap

Problème n°267 du 26/03/2002

Les chevaux sont aux ordres. Lorsqu'ils sont se sont présentés à la pesée, tous les trois, montés par leurs jockeys, la balance accusait 1000 kg au total. Pourtant les jockeys, à eux trois, ne pèsent que 181 kg. Mais il faut dire que Fox-trot, pèse cinq fois le poids de son jockey. Monty quatre fois et demi le poids du sien et Régalot seulement quatre fois le poids de son driver.

Quel est l'écart minimum de poids entre le plus lourd et le plus léger des chevaux ? Retrouvez alors dans ce cas le poids des chevaux et de leurs jockeys.

N.B. Toute vraisemblance ne serait que pure coïncidence.

295. Décodage

Problème n°273 du 07/05/2002

Si le nombre «UN» se crypte «AU», si le nombre «DEUX» se crypte «JLCG»

Comment se crypte le nombre «TROIS»?

296. La division

Problème n°277 du 04/06/2002

Les hommes et femmes qui composent la division du général Georges Déployé, moins de cinq mille âmes, ont une santé fragile. Lors des manœuvres, le nombre de soldats à l'infirmerie est allé croissant.

Dès le deuxième jour, il y avait un absent: le général a fait défiler ses soldats par deux.
Le troisième jour, trois soldats manquaient et le défilé fut organisé par rangs de trois.
Le quatrième jour, cinq soldats manquaient et le défilé fut organisé par rangs de quatre.
Le cinquième jour, sept soldats manquaient et le défilé fut organisé par rangs de cinq.
Le sixième jour, neuf soldats manquaient et le défilé fut organisé par rangs de six.
Et ainsi de suite: chaque jour, deux absents supplémentaires étaient signalés et les rangs comportaient un soldat de plus que la veille. Chaque rang était toujours complet.
Ainsi, le dixième jour, dernier jour des manœuvres, il manquait dix-sept soldats, et la division défila par dix.

Quel est le nombre de soldats de la division du général Georges Déployé?

297. Le nombre triangulaire

Problème n°282 du 16/07/2002

On dit qu'un nombre est « triangulaire » quand il est égal à la somme des premiers entiers naturels jusqu'à un certain rang. Ainsi, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ est un nombre triangulaire.

Trouvez un nombre triangulaire dont les trois chiffres en écriture décimale sont tous identiques.

298. Mystification

Problème n°287 du 20/08/2002

Les Extra-terrestres n'ont pas laissé grand chose de leur passage sur terre, hormis une opération sur les entiers : la mystification. Ils l'ont nommée * . Ainsi, mystifier a par b c'est obtenir un résultat noté a*b. Les règles en sont d'autant plus compliquées qu'on n'obtient pas forcément la même chose lorsqu'on mystifie b par a et a par b. Après une enquête archéologique poussée, nous avons percé trois des mystères de la mystification. Nous sommes heureux de vous en faire part :

1• Si on « mystifie » 0 par a, cela donne l'entier qui suit a.

2• Mystifier a par 0, c'est comme mystifier $(a - 1)$ par 1,

3• Pour mystifier $(a + 1)$ par $(b + 1)$, on commence par mystifier $(a + 1)$ par b ; puis a par le résultat.

Quel est le résultat de la mystification de 3 par 3 ?

299. Enigme chiffrée

Problème n°292 du 24/09/2002

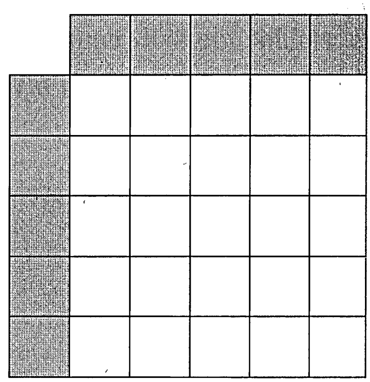
Je suis un nombre entier, et mon écriture décimale nécessite trois chiffres. Qu'on m'additionne aux deux entiers qui m'encadrent, on obtient un carré parfait. Qu'on m'additionne aux quatre entiers qui m'encadrent, on obtient un cube parfait.

Qui suis-je ?

300. Le carré de Lucifer

Problème n°297 du 29/10/2002

Si vous vous présentez aux portes de l'Enfer, vous êtes voués à un séjour de 666 ans dans son antre diabolique, à moins que...Lucifer vous propose, s'il vous trouve sympathique, de diminuer votre peine !
Il vous fournira alors le carré ci-contre, et vous donnera 666 secondes pour le remplir.
Dans les 10 cases grises, vous devez inscrire les nombres de 1 à 10, comme il vous plaira (chacun une fois). Vous remplirez alors le carré de Lucifer comme une table d'addition ou de multiplication, à la différence que l'opération utilisée sera ^: le nombre figurant au bord de la ligne sera élevé à la puissance du nombre figurant au bord de la colonne.
Ainsi, à l'intersection de la ligne commençant par « 3 » et de la colonne commençant par « 5 », vous écririez 243 ($3 \wedge 5 = 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$)
Vous ferez alors le total des 25 nombres figurant dans les cases blanches : ce sera le nombre de secondes de remise de peine.



Quel est le séjour minimum en enfer ?

D'après une idée de P. Kamoun.

Défis numériques SOLUTIONS

241. Les nombres croisés de l'année

On fait la liste des multiples de 97 et on procède par élimination.

⊠ *Raymond Marty, Garches.*

0	3	8	8
6	4	0	2
7	9	5	4
9	2	1	5

242. Ôtez un carré !

Le premier joueur doit ôter **16 allumettes**, en laissant 12 à son opposant. Quoi que fasse ce dernier, il est condamné.

- S'il laisse 11 ou 3 allumettes, le premier joueur pourra lui en laisser 2 pour une fin de partie évidente.
- S'il en laisse 8, le premier joueur en ôte une. Qu'il se retrouve alors avec 6 ou 3 allumettes, il pourra en laisser 2, pour la même fin de partie que plus haut.

243. Piscine de star

• La piscine du premier problème a **10 mètres de côté**. Son fond est pavé de 64 dalles bleues et de 36 dalles jaunes.
Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre solution, on fait l'hypothèse qu'il y a n^2 dalles bleues et $(4n + 4)$ dalles jaunes à identifier dans le deuxième projet à a^2 dalles jaunes et $4 (ab + b^2)$ dalles bleues.
On montre successivement que a est pair, que sa moitié a' est impaire, puis que le produit $a' (a' - 2)$ vaut $2b - 1$. Seul $a' = 3$ convient, la valeur suivante, 5, aboutissant à une piscine trop grande (26 mètres de côté).

• La piscine du deuxième problème a pour nouvelles dimensions **16 mètres sur 4** (au lieu de 8 sur 8 dans le premier projet). Son fond utilise 36 dalles bleues et 28 dalles jaunes.
Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre solution, on fait l'hypothèse qu'il y a n^2 dalles bleues et $(4n + 4)$ dalles jaunes à identifier dans le deuxième projet à ab dalles jaunes et $(2a + 2b + 4)$ dalles bleues.
On montre successivement que n, a et b sont pairs, que leurs moitiés n', a' et b' sont impaires, puis que $(n' - 1)^2 - 4$ est négatif : cette expression vaut en effet le produit $(a'-1)(1-b')$. Il ne reste que très peu d'essais pour conclure...

⊠ *André Kelly, Saint-Etienne-lès-Dignes.*

244. Le score impossible

• Avec aucun 9, on peut atteindre tous les multiples de 5
• Avec un 9, on peut atteindre tous les multiples de 5 moins 1, sauf le nombre 4.
• Avec deux 9, on peut atteindre tous les multiples de 5 moins 2, sauf les nombres 3,8,13.
• Avec trois 9, on peut atteindre tous les multiples de 5 moins 3, sauf les nombres 2,7,12,17,22.
• Avec quatre 9, on peut atteindre tous les multiples de 5 moins 4, sauf les nombres 1,6,11,16,21,26,31.
On voit que tous les nombres sont ainsi obtenus, sauf quelques uns dont **le plus grand est 31**.

245. Les groupages

Il y a pour chaque groupe plusieurs solutions. En voici une :
Groupe A : 14 + 33 + 41 + 92 = 82 + 98
Groupe B : 66 + 93 = 75 + 84
Groupe C : 11 + 30 + 97 = 43 + 95
Groupe D : 3 + 37 + 69 = 21 + 32 + 56

Dans le cas général, le nombre de parties différentes d'un groupe de 10 éléments est $2^{10} = 1024$. À chaque partie, on associe la somme S de ses éléments, somme d'au plus dix nombres inférieurs à 100. S est donc plus petite que 1000. Les 1024 sommes prennent donc au plus 1000 valeurs. Deux au moins d'entre elles sont égales. Si les parties correspondantes sont disjointes, le résultat est démontré. Dans le cas contraire, on retire les nombres en commun, ce qui ne change pas l'égalité des sommes, mais rend les parties disjointes.

246. Division muette

631938 / 625 = 1011,1008

Ce sont les zéros abaissés qui donnent la clé du problème. On déduit du premier que le diviseur ne peut se terminer par 0, et des trois suivants que sans être un diviseur de 1000 (le quotient a 4 chiffres après la virgule), son produit par le dernier chiffre du quotient se termine par trois zéros. Le seul nombre à trois chiffres qui réponde à cette définition est 625, et le dernier chiffre du quotient est 8. On reconstitue alors le quotient dont les autres chiffres ne peuvent être que 0 ou 1. Une multiplication termine la reconstitution.

247. Énigme policière

22, bien sûr !
Si on appelle V le nombre de voyageurs, il faut raisonner sur le nombre
N = V – 6.
Ce nombre N est est à chaque arrêt multiplié par 2/3.
Comme on ne suppose pas qu'une fraction de voyageur puisse descendre, c'est que N est un multiple de 3 x 3 x 3 x 3 = 81. Pour que V puisse rester inférieur à 100, il n'y a qu'une solution, N = 81 et V = 87 (N = 0 est contraire à l'hypothèse). Le nombre de voyageurs descend successivement de 87 à 60, 42, 30 et... 22.

✉ *Un lecteur, Yvon GORLIER (Beaumont de Pertuis) nous fait aimablement remarquer que s'il y avait eu six voyageurs au départ, il en serait toujours... resté six ! L'énoncé excluait d'ailleurs ce cas, en précisant « l'effectif total est maintenant réduit ».*

248. Périmètre magique

Aux symétries (et rotations) près, il y a **6 solutions** :
En effet, s'il existe un tel carré, et si on appelle n la somme des nombres par côté, comme la somme des entiers de1 à 8 vaut 36, 4 n = 36 + somme des nombres aux quatres coins.
• La somme des nombres aux quatres coins étant au minimum 10 (= 1 + 2 + 3 + 4) et au maximum 26 (= 5 + 6 + 7 + 8), cela impose à n d'être compris, puisqu'il doit rester entier, entre 12 et 15.
• De plus, la somme de deux nombres médians situés face à face valant
36 - 2n, ses seules valeurs possibles sont 12, 18, 8, 6, ce qui donne comme seules possibilités :

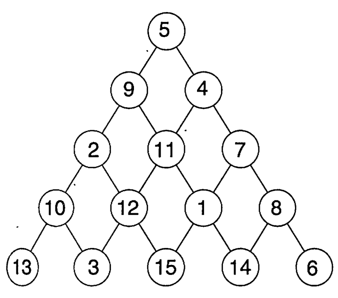
• 8 •	• 7 •	• 7 •	• 5 •	• 7 •	• 5 •
5 7	4 6	8 2	6 2	6 2	2 4
• 4 •	• 3 •	• 3 •	• 3 •	• 1 •	• 1 •

• On complète aisément ces carrés :

1 8 3	1 7 5	1 7 5	1 5 8	3 7 4	7 5 3
5 7	4 6	8 2	6 2	6 2	2 4
6 4 2	8 3 2	4 3 6	7 3 4	5 1 8	6 1 8

⊠ *Merci aux très nombreux lecteurs qui ont apporté leur contribution, trop nombreux pour que nous puissions les citer.*

249. Magie triangulaire



L'idée de la solution consiste à remarquer que 15 et 13 ne peuvent être que sur la ligne du bas. Si aucun des deux ne touchait 14, ils seraient à l'extrême gauche et engendreraient 2 au-dessus d'eux. Du coup, il n'y aurait pas de place pour 12.

Donc 1 est sur la deuxième ligne en partant du bas, ainsi que 12 (on aboutit à une contradiction en le supposant plus bas. Du coup, il ne peut être obtenu qu'à partir de 15 et 3. On complète de proche en proche par essais successifs.

250. Le compte est bon

Voici les sept solutions.
• 576 + 9658 = 10234
• 675 + 9568 = 10243
• 748 + 9875 = 10623
• 847 + 9785 = 10632
• 586 + 9657 = 10243
• 874 + 9482 = 10356
• 758 + 9874 = 10632

251. Bonne année !

Le produit cherché est égal à la différence : 1998000...000 (avec 1998 zéros) moins 1998.

Il s'écrit donc

$$\begin{array}{lr} & 1998000\ldots\ldots\ldots\ 0000 \\ - & 1998 \\ \hline = & 1997999\ldots9998002 \end{array}$$

avec 1994 chiffres "9" au centre.
La somme de ses chiffres est donc 36 + 1994 × 9 = **17 982**, qui est précisément égal à … **1998 × 9** !

⊠ *Robert MUNNICH, de Boulogne, précise que cette propriété est indépendante du choix du nombre de 9, en l'occurrence 1998. La somme des chiffres du résultat est toujours égale à 9N, où N est le nombre de chiffres 9 entrant dans le nombre A.*

252. La spirale des milieux

La spirale s'enroule autour d'un point P situé aux 2/3 du segment [0, 1].

Pour le montrer, on repère chaque point par sa distance à 0 (son abscisse) : 0 a pour abscisse 0, 1 a pour abscisse 1, et chaque point suivant a pour abscisse la demi-somme des abscisses des deux points qui le précèdent.
On calcule alors la distance des points successifs à P :
0 est à la distance 2/3. 1 est à la distance deux fois moindre, 1/3.
2 est à la distance encore deux fois moindre, 1/6. Et ainsi de suite… la distance à P est à chaque étape divisée par 2 et tend vers 0 !

⊠ *Jean BRUSSON, de Créteil, explique comment on peut se douter que l'abscisse p du point P de convergence est 2/3. Il écrit que ce point se place dans le diamètre [0;1] dans le même rapport que dans le diamètre [1;2].*

Cela se traduit par $p = 2(1-p)$, qui donne $p = 2/3$.

⊠ *François SCHLEICH, de La Seyne sur Mer, obtient, quant à lui, la valeur 2/3 par sommation d'une série géométrique.*

253. La période

1/41 = 0, 02439 02439 02439…

Si la période de la suite décimale de 1/z est 5, c'est qu'on a 1/z = 0,NNN… où N est un groupe de 5 chiffres.
En multipliant par 100 000, cela donne : 100 000 / z = N,NNN…
On soustrait les deux égalités et on multiplie par z. Cela devient :
99 999 = z × N. z est à prendre parmi les diviseurs de 99 999.
Or 99 999 = 3 × 3 × 41 × 271. Ni 3 ni 9 ne conviennent. Le plus petit diviseur restant de 99 999 est 41, et une vérification sur calculatrice achève la question.

254. Les nombres heureux

666 + 1332 = 1998

666 × 1332 est divisible par 1998.

• Plus généralement, si N est un nombre heureux, il doit s'écrire N = a + b, avec le produit ab multiple de N. À cause de ces deux conditions, les facteurs premiers entrant dans la factorisation de N doivent impérativement diviser a **et** b. Ainsi, 1998 s'écrivant $2 \times 3^3 \times 37$, a et b doivent tous les deux être multiples de 2, 3 et 37, donc de leur produit 222.
Il vient : a = k × 222 et b = (9–k) × 222. En écrivant le produit, on obtient la dernière condition : k doit être un multiple de 3, ce qui donne pour a et b, 3 et 6 fois 222.

• Si N est un produit de facteurs premiers intervenant à la puissance 1, a et b sont divisibles par tous les facteurs de N, donc par N, et ne peuvent avoir N pour somme. N est donc malheureux.
• On termine en montrant que de tels nombres sont les seuls à être malheureux.
En effet, si $N = k\,p^2$, en posant $p = m + n$, on voit que N est somme de kmp et de knp dont le produit est un multiple de N.

⊠ *Henri GUILLET, d'Aix en Provence, généralise le problème.*

255. Rendez-le magique !

Il suffit d'échanger **11 et 9 d'une part, 8 et 18 d'autre part.**
La somme magique étant 65, il manque 2 dans la ligne 1 et la colonne 1, alors que la ligne et la colonne 3 ont 2 en excédent. On ajoutera donc 2 à 9, et on ôtera 2 à 11, ce qui revient à **échanger 9 et 11**. Par ailleurs, dans la ligne 4 et la colonne 2, il manque 10, et dans la ligne 2 et la colonne 4, 10 sont en excédent. D'où **l'échange de 8 et 18**. Les diagonales ont alors aussi pour somme 65.

256. Saucisson numérique

Le résultat est 7.
On raisonne sur le reste de la division par 11 du nombre gigantesque, que nous appellerons N.
• Un nombre se terminant par exemple par ... 367 523 s'écrit $23 + 75 \times 100 + 36 \times 100^2 + \ldots$
Plus généralement, N est égal à une somme dont chaque terme est une "tranche" multipliée par une puissance de 100. Or, toutes les puissances de 100 ont pour reste 1 lors de la division par 11.
En additionnant les tranches, on trouve donc que la somme des "tranches" obtenue par le charcutier, 1998, admet le même reste que N pour la division par 11. Ce reste vaut 7 ($1998 = 11 \times 181 + 7$).
• Par ailleurs, le reste d'une puissance de 10 lors de la division par 11 est 1 si l'exposant est pair et 10 (= 11 – 1) si l'exposant est impair. En conséquence, la technique du fils du charcutier d'ajouter les chiffres correspondant à une puissance paire de 10 dans l'écriture décimale de N et d'enlever ceux correspondant à une puissance impaire ne change pas non plus le reste de la division par 11. Comme le résultat n'a qu'un chiffre, c'est le reste lui-même, soit 7.
• La même technique s'applique d'ailleurs pour savoir si un nombre est **divisible par 11**. Par exemple, 2785 a pour reste dans la division par 11 : - 2 + 7 - 8 + 5, qui n'est pas nul. 2785 n'est donc pas multiple de 11, alors que 4785 l'est.

⊠ *De nombreux courriers proposent des remarques intéressantes ou des variantes de la solution. Citons Antoine WEHENKEL, de Luxembourg, Vincent SCHNEIDER, de Benfeld, D. BLONDEAU, de Pornic, Michel PERRET, de La Celle-St-Cloud, J-P JOUGLAS, de Paris,*
⊠ Ivan NATAF de Laval propose, pour trouver le résultat, d'appliquer la méthode des charcutiers, père et fils à... 1998 !

257. L'addition du "Mondial"

Dans les deux seules solutions

$$\begin{array}{cccccc} & & 7 & 6 & 6 & 0 \\ + & 3 & 8 & 5 & 5 & 9 \\ \hline = & 4 & 6 & 2 & 1 & 9 \end{array}$$

et

		8	6	6	0
+	3	7	5	5	9
=	4	6	2	1	9

COUPE vaut 46219.

Quelques bribes de raisonnement :
- de T + E = E, on tire **T = 0**
- De l'addition des dizaines et des centaines, on tire (*) L + O = P + 10, car P ≠ U, et nécessairement **U = P + 1**
- Des dizaines de milliers, comme B ≠ C, on tire **C = B + 1**
- On connaît donc toutes les retenues. De l'addition des milliers, on tire (**) : F + A = O + 9
- (*) et (**) donnent F + A + L = P + 19, qui vaut au maximum 24 (9 + 8 + 7). **Le maximum de P est donc 5.**
- On procède ensuite par élimination : P = 5, 4, 3, 2 ne conviennent pas. Donc **P = 1**
- On élimine ensuite O = 8 et O = 7, etc... pour trouver **O = 6**
- F et A valent donc obligatoirenment 7 et 8, ou 8 et 7.

258. Nombres croisés

Voici l'unique solution

	1	2	3	4
A	5	8	6	8
B	2	8	3	1
C	2	8	0	9
D	5	8	3	2

Eléments de raisonnement :
On remplit, dans l'ordre :
- la ligne 4, puis la colonne 4,
- la colonne 2, puis la colonne 2, puis la ligne 1,
- la colonne 1,
- et enfin les lignes 2 et 3.

259. Une quinte de cinq

Voici une décomposition de chacun des 40 premiers nombres.
Elle n'estt pas forcément unique.

$1 = (5 / 5) + (5 - 5) / 5$ $\quad$ $2 = (5 + 5) / 5 + 5 - 5$ $\quad$ $3 = (5 + 5) / 5 + (5 / 5)$
$4 = (5 \times 5) / 5 - (5 / 5)$ $\quad$ $5 = (5 \times 5) / 5 + 5 - 5$ $\quad$ $6 = (5 \times 5) / 5 + (5 / 5)$
$7 = 5 + (5 / 5) + (5 / 5)$ $\quad$ $8 = 5 + (5 + 5 + 5) / 5$ $\quad$ $9 = \sqrt{5 \times 5} + 5 - (5 / 5)$
$10 = 5 \times 5 - (5 + 5 + 5)$ $\quad$ $11 = 5 + 5 + (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) / 5.$ $\quad$ $12 = 5 + 5 + (5 + 5) / 5$
$13 = (5 ! + 5 + 5) / (5 + 5)$ $\quad$ $14 = 5 + 5 + 5 - (5 / 5)$ $\quad$ $15 = 5 + 5 + 5 + 5 - 5$
$16 = 5 + 5 + 5 + (5 / 5)$ $\quad$ $17 = (5 ! - 5 - 5) / 5 - 5$ $\quad$ $18 = (5 ! / 5) - 5 - (5 / 5)$
$19 = 5 \times 5 - 5 - (5 / 5)$ $\quad$ $20 = 5 \times 5 - 5 + 5 - 5$ $\quad$ $21 = 5 \times 5 - 5 + (5 / 5)$
$22 = (5 ! - 5) / 5 - (5 / 5)$ $\quad$ $23 = (5 ! - 5) / 5 + 5 - 5$ $\quad$ $24 = (5 \times 5 \times 5 - 5) / 5$
$25 = 5 \times 5 - (5 - 5) \times 5$ $\quad$ $26 = (5 \times 5 \times 5 + 5) / 5$ $\quad$ $27 = 5 \times 5 + (5 + 5) / 5$
$28 = (5 ! + 5 \times 5 - 5) / 5$ $\quad$ $29 = 5 \times 5 + 5 - (5 / 5)$ $\quad$ $30 = (5 ! + 5 \times 5 + 5) / 5$
$31 = 5 \times 5 + 5 + (5 / 5)$ $\quad$ $32 = (5 / 5 + 5 / 5)^5$ $\quad$ $33 = 5 + 5 + (5 ! - 5) / 5$

$34 = (5 \times (5 + 5) + 5\,!\,) / 5$ $\quad$ $35 = [\,(5 + 5) / 5 + 5] \times 5$ $\quad$ $36 = (5\,! + 5\,! + 5\,!) / (5 + 5)$
$37 = 5 + [(5 + 5) / 5]^5$ $\quad$ $38 = (5\,! + 5\,!) / 5 - (5 + 5)$ $\quad$ $39 = (5\,! / 5) + 5 + 5 + 5$
$40 = 5 \times 5 + 5 + 5 + 5$

260. Économie de salive

La valeur des timbres est de **1, 4 et 5 francs.**

C'est la seule possibilité. Les timbres bleus valent 1 franc. Pour les valeurs des verts et des rouges, on élimine successivement :

- moins de 4 et moins de 5 (15 serait impossible)
- 2 et 5 (13 impossible)
- 2 et 6 (11 impossible)
- 2 et 7 (12 impossible)
- 2 et plus de 7 (7 impossible)
- 3 et 5 (12 impossible)
- 3 et 6 (11 impossible)
- 3 et 7 (12 impossible)
- 3 et 8 (13 impossible)
- 3 et plus de 8 (8 impossible)

261. L'escalator

L'escalator compte 48 marches.

Soit N le nombre de marches de l'escalator au repos.
La vitesse de montée de l'escalator est : (N – 30) marches en 30 secondes.
La vitesse de descente (la même) est : (120 – N) marches en 2 minutes.
Il vient : $4 \times (N - 30) = 120 - N$, d'où le résultat : $N = 48$.

☒ *Plusieurs lecteurs ont rectifié une erreur dans la solution parue initialement.*

262. Le tarif publicitaire

1/1999 de page coûte 70 F, 1/13 de page coûte 1280 F.

- Si une annonce occupe 1/3 de la page, d'après la loi 2, elle coûte la moitié du prix d'une page, soit 4480 F. Mais en vertu de la loi 4, une annonce occupant 2/3 de page est facturée le même prix, et d'après la loi 1, toute surface comprise entre 1/3 et 2/3 de page est facturée 4480 F. En particulier, une surface de 729/1999 coûtera ce prix. Donc, d'après la loi 2, 243/1999 coûteront 2 fois moins, 81/1999 encore 2 fois moins, et ainsi de suite jusqu'à 1/1999 de page qui coûtera 70 F.
- Appelons x le prix d'1/13 de page, et S = 8960 le prix d'une page.

12/13 coûtent S – x d'après la loi 4, 4/13 coûtent (S – x)/2 d'après la loi 2, 9/13 coûtent (S+x)/2 d'après la loi 4, 3/13 coûte (S+x)/4 d'après la loi 2, 1/13 coûte (S+x)/8 d'après la loi 2.
On résout l'équation $x = (S+x)/8$, qui donne $x = 1280$ F.

263. Étonnantes racines

- $\sqrt{2}^{\left[\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right]} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$

Tout vient du fait que $(a^b)^c = a^{bc}$

- $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}} = 2$

Si on appelle x le nombre $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}}$, on voit qu'en élevant x au carré, on supprime le premier symbole $\sqrt{}$. D'où : $x^2 = 2 + x$.
Or les seuls nombres y tels que $y^2 = 2 + y$ sont 2 et -1.
Comme x est positif, c'est 2.

264. La fraction du cancre

4 solutions :

$$\frac{16666666}{66666664} = \frac{1}{4}, \quad \frac{49999999}{99999998} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{19999999}{99999995} = \frac{1}{5} \text{ et } \frac{26666666}{66666665} = \frac{2}{5}$$

265. Les bicyclettes néelandaises

835 familles possèdent trois vélos.

On peut évidemment poser des équations pour résoudre ce problème, mais voici une solution plus élégante. Si toutes les familles appartenaient à la catégorie 3 (possédaient trois vélos), on compterait 6 000 vélos. Il en manque 505, c'est l'excédent des familles de la catégorie 2 sur celles de la catégorie 4.
Les possibilités sont donc :

Catégorie 2 :	505	506	507	508	...
Catégorie 3 :	1495	1493	1491	1489	...
Catégorie 4 :	0	1	2	3	...

La différence entre les familles de la catégorie 3 et celles de chacune des autres catégories diminue de 3 chaque fois qu'on progresse vers la droite dans le tableau ci-dessus. Cette différence ne peut devenir nulle que si c'était un multiple de 3. 1495 – 505 = 990 l'est. D'où le résultat :
330 familles à 4 vélos, 835 familles à 3 vélos et 835 familles à 2 vélos.

266. Tête à queue numérique

526 315 789 473 684 210

- La méthode la plus empirique consiste à «poser» la multiplication :

$$\begin{array}{rcr} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\ \times & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\ \hline = \quad 5 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \end{array}$$

On reporte le zéro à gauche du 5 et on poursuit :

		....	0 5
×		....	2
=	5	....	1 0

On reporte le 1 et ainsi de suite. Dès qu'on arrive à écrire 5 sans retenue sur la dernière ligne, on peut arrêter. Ce n'est le cas qu'au dix-huitième chiffre.

• Une méthode plus théorique consiste à imaginer que le nombre cherché s'écrive avec un 5 suivi du nombre A, comportant *(n–1)* chiffres. On peut alors écrire l'équation :
$5 \times 10^{n-1} + A = 2 \times (10\,A + 5)$, ce qui débouche, en posant $X = 10A + 5$, sur $19\,X = 5\,(10^n - 1)$.
Ainsi, il faut chercher n tel que $(10^n - 1)$ soit divisible par 19. Le «petit théorème de Fermat» nous donne la réponse : n doit être un multiple de 18. La solution en découle.

267. La fraction insolite

$$\frac{4}{1999} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{999500}$$

Plus généralement,

$$\frac{4}{4N-1} = \frac{4N}{N(4N-1)} = \frac{4N-1+1}{N(4N-1)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N(4N-1)}$$

$$\frac{4}{4N-1} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{N(4N-1)}$$

On peut encore arriver à trouver une décomposition en somme de trois inverses dans de nombreux cas, en particulier quand on remplace 1999 par n'importe quel nombre pair ou multiple de 3. Mais, bien qu'on conjecture que ce soit toujours possible (sauf pour le dénominateur 6), personne ne l'a démontré pour un dénominateur quelconque ! Alors, si le cœur vous en dit...

⊠ *Eliette LAPASSET (34, Grabels) propose une décomposition de* $\frac{4}{1999}$ *en somme de trois fractions de numérateur 1 (dites "égyptiennes") et de dénominateurs tous différents :*

$$\frac{4}{1999} = \frac{1}{546} + \frac{1}{5997} + \frac{1}{363878}$$

⊠ *Elie BOUSSEYROL (78, Buc) et Bertrand LABILLOY (Bruxelles) donnent leurs propres décompositions des nombres de la forme* $\frac{4}{m-1}$ *:*

$$\frac{4}{m-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{4m^2 - m + 1} + \frac{1}{m\,(4m-1)\,(4m^2 - m + 1)}$$

⊠ *Alain BAILLE (38, Grenoble) et John STEIRING (84, Lacoste) buttent sur* $\frac{4}{4m+1}$, *le dernier signalant que c'est le mathématicien hongrois Päl Erdös récemment disparu, qui a conjecturé que* $\frac{4}{n}$ *est décomposable en somme de trois*

fractions égyptiennes, pour tout n sauf 6 où il faut 4 fractions ou alors deux :
en effet,

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{45} \text{ ou } \frac{4}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

268. Somme de suites

• **Tous les nombres compris entre 2 et 30, à l'exception de 2, 4, 8 et 16** s'écrivent comme sommes de plusieurs nombres consécutifs.

3=1+2 ; 5=2+3 ; 6=1+2+3 ; 7=3+4 ; 9 = 2+3+4 ; 10=1+2+3+4 ; 11=5+6 ; 12=3+4+5 ; 13=6+7 ; 14=2+3+4+5 ; 15=4+5+6 ; 17=8+9 ; 18=3+4+5+6 ; 19=9+10 ; 20=2+3+4+5+6 ; 21=10+11 ; 22=4+5+6+7 ; 23=11+12 ; 24=7+8+9 ; 25=3+4+5+6+7 ; 26=5+6+7+8 ; 27=2+3+4+5+6+7 ; 30=9+10+11.

• **Seules les puissances de 2 ne peuvent s'écrire comme de telles sommes.**

Il s'agit, pour un entier n donné, de savoir s'il existe des entiers a et b>a tels que :
n = a + (a+1) + ... + b, somme de p entiers consécutifs (b – a + 1 = p). On calcule cette somme en remarquant que la somme des termes équidistants des extrêmes est fixe : 2n = p (b + a).
(a + b) et p sont de parités différentes. On pourra toujours trouver deux diviseurs de 2n de parités différentes à partir desquels on reconstituera a et b, sauf si n est une puissance de deux.

⊠ *Christian OESTREICHER donne du problème une solution très détaillée utilisant les nombres triangulaires* $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n\,(n + 1)}{2}$ *:*

Il montre qu'une somme de k termes s'écrit $T_k + ak$ *(avec* $a > 1$*), puis que* 2^n *ne peut s'écrire ainsi.*

⊠ *J. CARLHIAN (69, Lyon) utilise le fait que tout nombre impair est somme de deux entiers consécutifs (2n+1= n+(n+1)), tout multiple de 3 est somme de trois entiers consécutifs (3n=(n-1)+n+(n+1)), tout multiple de 5 somme de cinq entiers consécutifs...*

⊠ *Jacques TRAMU démontre très simplement l'inexistence de solution pour les puissances de 2 en remarquant que si une puissance de 2 est somme de p entiers consécutifs, p doit être à la fois pair et impair.*

269. La dîme

Si la récolte avait eu 9 châtaignes de plus, au moment du premier partage en 10, il ne serait rien resté. Le seigneur aurait pris sa part, qui aurait contenu une châtaigne de plus que sa "vraie" part. Au moment du second partage (pour le prévôt), ce qui reste contiendrait 9 châtaignes de plus que ce qu'il aurait dû avoir en réalité, et on se retrouve dans la situation précédente : le nombre de fruits est, au moment de ce second partage, encore divisible par 10. Même raisonnement avec le bailli et ainsi de suite. Le nombre de châtaignes de la récolte «augmentée» de 9 est donc divisible par 10^5 = 100 000. Ainsi, le nombre initial de fruits augmenté de 9 est un multiple de 100 000. Comme on a récolté moins de 100 000 châtaignes, la seule possibilité est qu'on en ait eu 99 991. Le seigneur en a reçu 10 000 (9999 + 1), le prévôt 9000, le bailli 8100, le curé 7290, et le bedeau 6561.
Il en reste 59 040 à partager entre 48 familles : **chacune en aura le même nombre, exactement 1230.**

270. Enchanté !

• On commence par montrer que dans tout carré enchanté, la case centrale représente le tiers de la somme enchantée, ce qui entraîne ici, en utilisant la deuxième colonne, que cette case centrale est occupée par 14 (la moyenne de 16 et 12) et que la somme enchantée vaut 42. On complète encore aisément la deuxième ligne (troisième colonne) par 18.
On appelle alors **a** le nombre en haut à droite, et on complète la première ligne et la troisième colonne en fonction de **a**. En écrivant les sommes magiques, il en résulte
a = 11, et le carré ci-contre.

26–a	16	a
10	14	18
?	12	24–a

15	16	11
10	14	18
17	12	13

• Avec trois cases préremplies, on peut toujours compléter en un carré enchanté sous les deux conditions nécessaires suivantes :
- la somme de deux nombres non centraux d'une rangée soit paire,
- chaque nombre de coin soit la demi-somme des deux nombres jouxtant le coin opposé.

☒ *André CAROUSE (17, Sainte-Marie de Ré), Augustin FRUCHARD (17, La Rochelle), Marcel POPPER (75, Paris) et d'autres retrouvent bien ces deux conditions nécessaires.*

☒ *Si Laurent BOTTE (13, Marseille) se contente de résoudre par un système d'équations le carré donné, François SCHNEIDER remarque qu'on obtient un carré enchanté à partir de seulement trois variables.*
Jacques VERGER (75, Paris) réduit ce nombre à deux en introduisant la notion de "carré réduit", obtenu en soustrayant à tous les termes le plus petit d'entre eux. Le carré réduit à l'origine de tous les autres carrés enchantés est alors le carré C ci-contre, avec $x \geq t$, x et t premiers entre eux, aux symétries et rotations près. Tous les autres carrés enchantés s'obtiennent par aC+b où a et b sont deux entiers.

x + t	2x − 2t	t
0	x	2x
2x − t	2t	x − t

271. Carrément carrés

• 16 est le carré de 4, 1156 de 34.
À partir du suivant, on va appliquer la méthode suivante :
Écrivons N = 111556 sous la forme :
N = 111111 + 444 + 1 = 111111 + 4 × 111 + 1

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad 9 \times N &= 999999 + 4 \times 999 + 9 \\ &= (1\,000\,000 - 1) + 4 \times (1\,000 - 1) + 9 \\ &= 1\,000\,000 + 4 \times 1\,000 + 4 \\ &= 1\,002^2. \end{aligned}$$

On en déduit que N est le carré de 1002/3 = 334.
En généralisant, on montre que le nombre qui s'écrit avec *c* chiffres «1» suivis de (*c* – 1) chiffres «5» et du chiffre «6» est le carré de S = 3...34 (S s'écrit avec (*c* – 1) chiffres «3» suivis du chiffre «4»).
• Le carré suivant est le carré du nombre (S+1) qui s'écrit avec (*c* – 1) chiffres «3» suivis du chiffre «5». 335, par exemple, est le tiers de 1 005. Le carré de 1005 s'écrit :

$$\begin{aligned} 1\,005^2 &= 1\,000\,000 + 10\,000 + 25 \\ &= 999\,999 + 9\,999 + 27 \end{aligned}$$

On divise par 9 :

$$\begin{aligned} 335^2 &= 111\,111 + 1\,111 + 3 \\ &= 112\,225 \end{aligned}$$

Plus généralement, **le carré de (S+1) est le nombre qui s'écrit avec (c – 1) chiffres «1» suivis de c chiffres «2» et du chiffre «5».**
Les lecteurs ont rivalisé d'astuce pour essayer de simplifier les calculs.

✉ *Elie BOUSSEYROL (78, Buc) fait remarquer que si on veut que* $N = (n+1)^2$ *il faut et il suffit que* $N - 1 = n^2+2n = n(n+2)$. *Or* $111\,555 = 111 \times 1005 = 333 \times 335$, *d'où* $111\,556 = 334^2$. *On peut généraliser. Notre lecteur constate aussi, tout comme Lucien CARRIER (75, Paris) que les carrés de 335, 3335, ... s'obtiennent en intercalant 12 après le dernier 1 du carré précédent :*
$35^2 = 1225$, $335^2 = 112\,225$, $3335^2 = 11\,122\,225$.

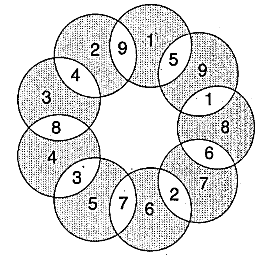
✉ *Christian ROMON (78, Carrières sur Seine) invente une notation simplificatrice pour désigner le nombre qui s'écrit avec n chiffres «1».*

✉ *C. BROERE (Anderghem, Belgique) utilise une méthode manuelle d'extraction des racines carrées.*

✉ *Michel MENGUAL (75, Paris), René TOURNADRE (49, Angers).*

272. L'anneau magique

Solution ci-contre.



✉ *Michel MENGUAL (75, Paris) et Christian ROMON (78, Carrières sur Seine) n'ont pas manqué de s'apercevoir que la somme de tous les nombres intérieurs aux cercles est trois fois celle des entiers de 1 à 9, ce qui leur permet de calculer la somme par cercle. Michel Mengual propose même une généralisation du problème à celui d'anneaux comportant un nombre impair de cercles.*

273. Le nombre porte-bonheur

Le nombre porte-bonheur vaut 1 111 111 111 111.

L'idée est de montrer, de proche en proche, que tous ses chiffres sont égaux.
Ainsi, s'il commence par AB..., on dit que la différence des nombres obtenus en enlevant A et en enlevant B est un multiple de 13. Or, cette différence vaut (B–A) suivi de zéros, qui n'est divisible par 13 que si A = B. Et ainsi de suite.
Il reste à trouver un nombre écrit à l'aide d'un seul chiffre, et dont la somme des chiffres est 13.
Seul 1 111 111 111 111 convient. Effectivement, si on ôte à ce nombre l'un de ses chiffres, il reste 111 111 111 111 qui est bien divisible par 13. C'est 13 × 8 547 008 547.

✉ *P. BRAJON (78, Jouy en Josas)*

274. La grande famille

Le «patriarche» et ses descendants ont tous eu 3 enfants.
Cela fait une assemblée de 121 personnes, le carré de 11.

En appelant a le nombre d'enfants par personne, et b le nombre de rangées, le nombre N de convives est : $N = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = b^2$

- On remarque que $(a^2 + a/2)^2 = a^4 + a^3 + a^2/4$ est inférieur à N
- Et que $(a^2 + a/2 +1)^2 = a^4 + a^3 + a^2\,(2+1/4) + a + 1$ est supérieur à N.

La seule possibilité que b soit un nombre entier est donc que a soit impair et $b = a^2 + a/2 +1/2$.

On a alors : $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = (a^2 + a/2 + 1/2)^2$
Cela se simplifie en : $a^2 - 2a - 3 = 0$, soit $a = 3$.

☒ *Christian ROMON (78, Carrières-sur-Seine) mentionne une particularité : qu'on ait, nous dit-il, 3, 4 ou 5 enfants par famille, le nombre de convives (121, 341 ou 781) est toujours multiple de 11.*

275. Le carré bègue

Le carré bègue cherché est 7744 = 88² et c'est le seul.

Un nombre bègue N de 4 chiffres *aabb* vaut $1100 \times a + 11 \times b$. C'est donc un multiple de 11, et comme c'est un carré, c'est un multiple de 121. Donc $N = 121 \times P$, où P est un carré.
Mais comme N a 4 chiffres, P est compris entre 9999/121 et 1100/121, soit entre 10 et 82.
Il n'y a que 6 carrés (à essayer) qui soient compris entre ces bornes. Un seul convient.
Nos lecteurs ont le souci du détail et souhaitent éviter les essais.

☒ *Jean KIND (25, Etouvans) précise que N = XXYY = 11 (100 X + Y) devant être un carré, 100 X + Y doit être un multiple de 11, le quotient, qui s'écrit UV, étant tel que U + V = 10. Cela ne laisse comme possibilités que 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, où seul 64 convient puisque c'est le seul carré.*

☒ *René TOURNADRE (49, Angers) raisonne, lui, sur 100 X + Y qu'il écrit 99 X + (X+Y), et qui doit être multiple de 11. C'est dire que X+Y aussi, d'où les possibilités : (2, 9) ; (3,8) ; (4,7) ; (5,6) ; (6,5) ; (7,4) ; (8,3) et (9,2).*

☒ *Michel, RABAUD (75, Paris), Christian ROMON et J. CARLHIAN (69, Lyon) préfèrent une solution algébrique :*

$100 X + Y = 11 n^2 = 99 X + (X+Y)$, d'où $n^2 = 9 X + \frac{X+Y}{11}$.

La seule possibilité est X + Y= 11, et donc

$n^2 = 9X + 1$, d'où $(n+1)(n-1) = 9X$, et ainsi $n+1 = 9$, $n-1= X$. On trouve en définitive $n = 8$, $X = 7$ et $Y = 4$. Le nombre cherché est bien $7744 = 88^2$.

Selon une remarque de Christian Romon, voilà que non seulement le carré est bègue, mais le nombre aussi.

276. Les carrés antimagiques

• Il n'est pas possible que les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales soient toutes différentes.

En effet, pour un carré de n cases sur n, une somme ne peut prendre qu'une des (2n + 1) valeurs entières allant de n à 3n, alors qu'il y a (2n + 2) lignes, colonnes et diagonales.

• Ci-contre un exemple de carré antimagique 6 × 6.

1	1	1	1	1	1	6
1	1	1	1	1	3	8
1	1	1	1	3	3	10
1	1	2	3	3	3	13
1	2	3	3	3	3	15
2	3	3	3	3	3	17
7	9	11	12	14	16	

NB : Il n'existe pas de carré antimagique 5 × 5, ni d'ailleurs d'aucune dimension impaire. Un problème analogue (carré rempli avec –1, 0, 1 uniquement) a été donné aux Olympiades Mathématiques Ukrainiennes en 1996, et la propriété peut se démontrer.

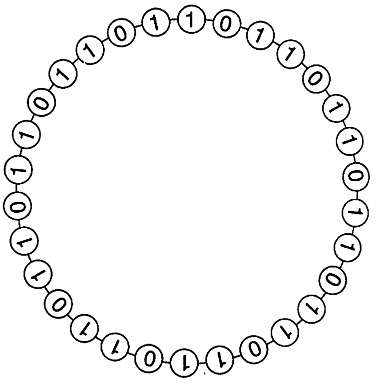
277. Élégance urbaine

• Il est assez facile d'éliminer les grandes valeurs de N (à partir de 5), puis, après quelques essais, les petites, pour trouver que seul **N = 4** peut convenir.
On parvient ensuite à l'unique solution :
21978 × 4 = 87 912

⊠ *Raymond BLOCH (78, Le Vésinet), auteur d'un traité de cryptarithmes intitulé «80 additions mystères», explique que l'opération cryptée ABCD × E=DCBA n'admet que deux solutions : 1089 × 9 = 9801 et 2178 × 4 = 8712, qu'on peut "prolonger" en intercalant un ou plusieurs "9" au milieu, par exemple : 109989 × 9= 989901 et 2199978 × 4 = 8799912. Comme on exclut ici les nombres comportant plusieurs "9", la seule solution est 21 978 × 4 = 87 912.*
⊠ *Jacques Dautrevaux (06, Saint-André)*

278. La roue des différences

• La seule façon de remplir une telle roue est d'alterner des cycles 1, 1, 0.
En effet, pour les deux nombres à gauche du «1», il n'y a que deux possibilités, (n – 1, n, 1) ou (n + 1, n, 1), mais elles sont toutes deux suivies,
si n n'est pas égal à 0 ou 1, par
(n – 1, n – 2, 1)...qui nous ramène à la situation précédente (n+1, n, 1) décalée de -2. On finira donc toujours, de décalage en décalage, à (p + 1, p, 1) avec p = 0 ou 1, toujours suivi de la période (1, 1, 0). Mais pour que la suite «boucle», cette situation doit aussi être celle des nombres à gauche du «1».
• La somme étant 20, il y a 10 tels cycles et **la roue compte 30 cases.**



279. Le cancre récidive

Trois fractions se simplifient à la manière du cancre : $\frac{484}{847}$, $\frac{654}{545}$ et $\frac{742}{424}$.

En effet, l'égalité $\frac{\text{ABC}}{\text{BCD}} = \frac{\text{A}}{\text{D}}$ où A, B et D sontcompris entre 1 et 9, où C, distinct de B, est entre 0 et 9, et où enfin A et D sont premiers entre eux, s'écrit aussi : $\frac{100\text{ A} + \text{N}}{10\text{ N} + \text{D}} = \frac{\text{A}}{\text{D}}$,

avec N = 10 B + C. Soit, après réduction :

$99 \times \text{A} \times \text{D} = \text{N} \times (10 \times \text{A} - \text{D})$. Comme $\text{B} \neq \text{C}$, N n'est pas multiple de 11.

C'est donc $10 \times \text{A} - \text{D}$ qui l'est. Il reste 8 essais à effectuer, dont trois mènent à des solutions.
⊠ *Pierre BEAUMONT, Jacques BUOB (01, Viriat), Jacques CHAUPIN (51, Vitry-le-François), Jean-Marie DELORD (34, Montpellier),Gilles DUPUIS (75, Paris), Pierre GASCOU (78, Versailles), M. GAVE (74, Annecy-le-Vieux), Claude GEORGE (84, Ansouis), Yasuhide HIRANO (75, Paris), Jean Daniel LE FRANC (92, Fontenay aux Roses), Henri MONNARDOT (42 Saint-Etienne), René MONNOT (34, Balaruc les Bains), Jean PIGETVIEUX (38, Grenoble), Marie-Claire PIGNOT (90 Bavilliers), Mme PREMAT (74, Veyrier-du-Lac), Christian ROMON (78 Carrières sur Seine), Charles ROUMIEU (34, Montpellier), Gabriel TAMAS (91, Gif sur Yvette), Antoine WEHENKEL (Luxembourg), M. WOLFF (48 Saint-André de Lancre).*

280. La pointe du triangle

• 192 sera inscrit sur la pointe du triangle d'ordre 6.

Une observation attentive permet de constater que les suites de nombres de chaque ligne sont des "progressions arithmétiques", c'est-à-dire qu'on obtient l'élément suivant en ajoutant un même nombre appelé "raison". Ainsi, la différence de deux termes consécutifs est 1 sur la première ligne, 2 sur la deuxième, puis 4, puis 8, puis 16. Elle double d'une ligne sur l'autre, et sera donc de 32 sur la sixième ligne du triangle d'ordre 6 qui comportera donc les nombres 80 et 112, dont la somme, 192, sera la pointe du triangle d'ordre 6..

• La pointe du triangle d'ordre 20 vaut $20 \times 2^{19} = 10 \times (1024)^2$
$= 10\,485\,760$

On peut montrer plus généralement que le premier terme de la ligne (p +1), qui est aussi pointe du triangle d'ordre p, vaut $p \times 2^{p-1}$. Pour cela, on considère le premier et le dernier terme de chaque ligne : leur somme vaut p sur la ligne 1 et double d'une ligne sur l'autre. En effet, si une ligne s'écrit : a b ...... c d, on a, par symétrie, a + d = b + c. La ligne suivante commence par a + b et finit par c + d, dont la somme, a + b + c + d, est bien le double de a + d. Ainsi, la somme des deux termes de la ligne p vaut $p \times 2^{p-1}$. C'est cette somme qu'on écrit sur la ligne suivante, à la pointe du triangle d'ordre p.

✉ *J. CARLHIAN (69, Lyon), distingue les triangles numériques d'ordre 2n, où la pointe est $n \times 4^n$ et les triangles d'ordre 2n+1 où la pointe est $(2n + 1) \times 4^n$. En effet, dans les premiers, la pointe termine la colonne du nombre médian, et dans les seconds, elle termine la colonne du nombre médian de la seconde ligne, d'ordre pair.*

✉ *Jean-Daniel LE FRANC (92, Fontenay aux Roses), Didier MAILLARD (75, Paris), Antoine WEHENKEL (Luxembourg).*

281. Déploiement triangulaire

Le déploiement triangulaire sera toujours possible.

Dans un tel déploiement, le nombre d'hommes est un nombre dit « triangulaire » qui s'écrit sous la forme $T_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \dfrac{n\,(n + 1)}{2}$.

S'il existe a grades, l'armée du général comprend

$$1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{a-1} = \frac{9^a - 1}{8} \text{ militaires.}$$

Ce nombre se met sous la forme du nombre triangulaire T_n pour $n = \dfrac{3^a - 1}{2}$

✉ *M. CARLHIAN (Lyon) précise que l'armée du pays aura, sur 3 lignes, 91 soldats et sur 4 lignes, 820. Christian ROMON généralise le problème, d'abord à la triangulation de l'armée romaine, rangée en carré de côté 3^k avec un chef à sa tête. Il trouve qu'elle n'est jamais possible, sauf pour $k = 1$, c'est-à-dire pour 9 hommes et leur général. Il va jusqu'à poser le problème de la triangulation de $1 + 3^k$ qui, lui, a deux solutions 10 et 28.*

282. Faîtes l'appoint !

Le gamin possède au maximum 1,43 Euro, sous la forme de :
- 1 pièce de 50 cents
- 4 pièces de 20 cents
- 1 pièce de 5 cents
- 4 pièces de 2 cents

283. Rationalité

Pour montrer que deux tels rationnels n'existent pas, on raisonne « par l'absurde ».

On suppose qu'ils existent et on les appelle a et b. $\dfrac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$.
On a donc $a^2 + ab + b^2 = 2$.

En posant $a = \dfrac{x}{y}$ et $b = \dfrac{z}{t}$, on se ramène à l'équation en nombres entiers :
$A^2 + AB + B^2 = 2C^2$, où $A = xt$, $B = yz$ et $C = yt$.
Si A ou B était impair, $A^2 + AB + B^2$ ne pourrait être pair.
A et B sont donc pairs, et $A^2 + AB + B^2$ est multiple de 4.
Mais alors, en simplifiant par 2, on constate que C est aussi pair, ce qui permet de diviser les deux membres de la relation par 4 et de recommencer avec une relation similaire, puis encore de diviser par 4 et de recommencer à l'infini...
Ce qui est absurde puisqu'on part d'entiers finis.

🖂 *Pierre SAMUEL (92 340 Bourg la Reine) pose une autre question : existe-t-il deux rationnels tels que la différence de leurs cubes soit le triple de leur différence ?*
Ce problème-ci a une infinité de solutions, nous dit-il, comme par exemple $\dfrac{26}{19}$ et $\dfrac{11}{19}$.

284. Permutation circulaire

Appelons N le nombre de 6 chiffres, et ABCDEF son écriture décimale.
Si x s'écrit BCDEF, on aura N = 100 000A + x = 13K (c'est un multiple de 13).
Le permuté, P, d'écriture décimale BCDEFA, s'écrit alors :
$P = A + 10x = A + 10\,(13K - 100\,000A)$.
Soit $P = 130K - 999\,999\,A$.
Or $999\,999 = 999 \times 1001 = 999 \times 13 \times 11 \times 7$.
P est donc un multiple de 13.

🖂 *Philippe KAHN (92100 Boulogne) et Paul PERBOST (06000 Nice) apportent des généralisations à ce problème. En utilisant toujours les mêmes notations, N est divisible par 7, 11 ou 13, nous fait remarquer P. Perbost, si et seulement si P l'est aussi. Nos deux lecteurs étendent également ce phénomène numérique à tout nombre de deux chiffres divisible par 11, ou de trois chiffres divisible par 37,... ou... de sept chiffres divisible par ..239. Par exemple, nous dit Ph. Kahn, comme 3 313 251 est divisible par 239, 3 132 513 l'est à son tour.*

285. Trahie par la « Sécu » !

- **Le pharmacien (ou plutôt son ordinateur) s'apercevra de la supercherie.**

97 étant un nombre premier, une confusion ne peut exister qu'entre deux dates de naissance distantes de... 97 ans ! Si Mylène était née en 1902 déclarait être née en 1999, l'ordinateur l'aurait crue, mais pas le pharmacien !

• Mylène est en réalité née en 1960.

Pour s'en rendre compte, on divise d'abord le nombre 2001075017724 par 97 (c'est le nombre de 13 chiffres dans lequel on a remplacé l'année de naissance par deux zéros). On peut le faire "à la main", mais il y a des méthodes plus rapides, en travaillant par "tranches" à partir de la fin. Ainsi, 24 donne 24. 100 a pour reste 3, donc 7700 a pour reste le triple de 77, soit 231, qui lui-même donne le reste 37. Et ainsi de suite... Le reste de la division est finalement 95.

Or, il devrait être 28 (97 – 69). On peut l'obtenir en rajoutant 30 au reste 95.

Il reste à trouver l'unique nombre de deux chiffres X tel que la division de X suivi de 10 zéros ($X \times 10^{10}$) par 97 donne 30. Or, le reste de la division de 10^{10} par 97 est 49. En multipliant par 2, on trouve pour reste 1, car $98 = 97 + 1$.

En multipliant par $X = 60$, on aura bien le reste 30.

☒ *Nos amis savent bien jongler avec les chiffres. Qu'ils parlent, comme Alain DEFRACE (94340 Joinville le Pont), en termes de congruences, ou en termes d'arithmétique élémentaire comme un autre lecteur de Jouy en Josas, ils donnent la bonne solution. Didier MAIXANDEAU (92600 Asnières) imagine avec humour qu'on peut aussi tricher sur le mois de naissance. Allant jusqu'au bout des calculs, il détaille avec minutie tous les rajeunissements et même tous les vieillissements possibles! Marlène pourrait en effet se rajeunir au mieux de 19 ans 3 mois et être née en février 1995, ou au pire de 12 ans 9 mois, ou alors se vieillir (pourquoi pas?) de 47 ans 10 mois, ou même de... 82 ans 11 mois...*

286. Enigme numérique

• 998, 406 ou 593 répondent à la première énigme.

Le carré du nombre X cherché s'écrit:

• • •	• • •
A	1000 – A

D'où l'égalité $X^2 = 1000\,A + 1000 - A$,
qu'on peut écrire : $X^2 - 1 = 999\,(A + 1)$
soit $(X - 1)(X + 1) = 27 \times 37 \times (A + 1)$.

Quatre cas se présentent alors:

• $X - 1$ est multiple de 999: impossible, car X n'a que trois chiffres.
• $X + 1$ est multiple de 999: seule possibilité $X = 998$
• $X - 1$ est multiple de 27 et $X + 1$ multiple de 37: $X = 406$ répond seul aux contraintes.
• $X + 1$ est multiple de 27 et $X - 1$ multiple de 37: $X = 593$ répond seul aux contraintes.

Il n'y a pas d'autre possibilité car $X - 1$ et $X + 1$ ne peuvent être simultanément multiples de 3.

• Un raisonnement similaire mène, dans le cas de quatre chiffres, à 6 solutions:
9998, 9899, 5554, 5455, 4544 et 4445.

287. L'âge de César Thaire

Age de César Thaire: 73 ans
Age de Pierre: 72 ans
Age d'Aure: 64 ans

En appelant a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités, on parvient à l'une des deux équations:

$$10\,a + b + ab + a + b + a - b = 100 \quad (1)$$

et $$10\,a + b + ab + a + b + b - a = 100 \quad (2)$$

L'équation (1) se transforme en $(a + 1)(b + 12) = 112$

On la résout en identifiant les diviseurs possibles de 112 à $(a + 1)$ et $(b + 12)$ avec la contrainte pour a et b d'être compris entre 1 et 9. On trouve les deux solutions $a = 7$; $b = 2$ et $a = 6$; $b = 4$.

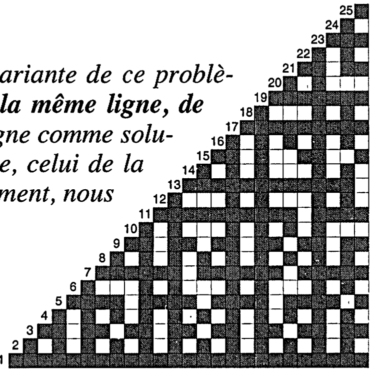
L'équation (2) se transforme en $(a + 3)(b + 10) = 130$

On la résout de même pour une unique solution: $a = 7$; $b = 3$.

288. Carré blanc

Premier carré blanc : ligne 6, colonne 12

Premier carré noir : ligne 21, colonne 55



✉ *Jules RENUCCI (20000 Ajaccio) nous suggère une variante de ce problème :* ***Trouver le premier carré noir (blanc) flanqué, sur la même ligne, de 4 carrés blancs (noirs).*** *Pour la première question, il désigne comme solution le carré situé ligne 6, colonne 10, et pour la seconde, celui de la ligne 151 296 145, colonne 151 296 186. C'est là effectivement, nous dit-il, que la notion d'escalier infini prend tout son sens !*

289. Finale quatre

• **Les entiers se terminant par 038, 462, 538 et 962 ont un carré qui se termine par 444** (On peut montrer que ce sont les seuls).

• **Il n'existe aucun carré se terminant par 4444.**

Remarque préliminaire : tout nombre se terminant par 4448 est divisible par 16.

Etudions alors le carré d'un nombre A.

– Si A est impair, son carré l'est également et ne peut se terminer par 4.

– Si A est un multiple de 4, son carré est un multiple de 16, ce qui n'est pas le cas d'un nombre se terminant par 4444.

– Si A est de la forme $A = 4k + 2$, son carré A^2 vaut $16(k^2 + k) + 4$, et, d'après la remarque préliminaire, $A^2 + 4$ n'est pas un multiple de 16.

✉ *Les solutions très complètes ne manquent pas : Jean-Luc GIOVACHINI (Paris) et Christian ROMON parlent congruences pour donner la solution générale. Les nombres dont les carrés sont terminés par 44 s'écrivent c38 avec un chiffre des centaines c multiple de 5. Ceux dont les carrés se terminent par 444 vont s'écrire c62, leur chiffre des centaines ayant pour reste 4 dans la division par 5. Philippe KAHN (92100 Boulogne) donne quant à lui la forme de ces nombres : 50p + 12 ou 50q + 38 pour les premiers, 500r + 462 ou 500s + 38 pour les seconds.*

290. Tourisme littéraire

• **Le premier livre a 199 pages numérotées. J'en ai sauté les pages 162 et 163.**

N étant le nombre de pages, q et $q + 1$ les pages sautées (avec q pair), on a la relation :

$\frac{N(N+1)}{2} - (2q + 1) = 19575$. N est donc au moins égal à 198,

car $\frac{197 \times 198}{2} = 19503 < 19575$.

$N = 198$ ne convient pas car $\frac{N(N+1)}{2} - 19575 = 126$ est pair.

Avec $N = 199$, $\frac{N(N+1)}{2} - 19575 = 325$. $q = 162$ convient.

Au-delà de 199, q serait trop grand.

• Le deuxième livre a 201 pages numérotées. J'en ai sauté les pages 180 à 183.
N étant le nombre de pages, $2q$ à $2q + 3$ les pages sautées,

$\frac{N(N+1)}{2} - 19575 = 8q + 6$ n'est vérifié (avec $2q + 3 \leq N$) que pour :

• $N = 198$ et $q = 15$
• $N = 201$ et $q = 90$.
Seule le dernier cas place les pages sautées dans la deuxième partie du livre.

☒ *Bonnes solutions de Gaston CASANOVA (Paris) et Philippe KAHN (92100 Boulogne).*

291. Festival de trois

Tous les nombres composés de N chiffres « 3 » ont la même propriété.

Un nombre A composé de N chiffres 3 s'écrit : $A = \frac{10^N - 1}{3}$.

En l'élevant au carré, on trouve

$$A^2 = \frac{(10^N - 1)(10^N - 1)}{9} = 10^N \times \frac{(10^N - 1)}{9} - \frac{(10^N - 1)}{9}$$

On pose l'opération :

	1 1 1...1 1 0 0...0 0	(N chiffres « 1 » suivis de N chiffres « 0 »)
–	1 1...1 1	(N chiffres « 1 »)
=	1 1...1 1 0 8 8...8 9	

A^2 est composé de (N – 1) chiffres « 1 », d'un « 0 », de (N – 1) chiffres « 8 » et d'un « 9 ».
La somme de ses chiffres vaut 9N, toujours 3 fois la somme des chiffres de A.

☒ *J-M. GADAT (60140 Rosoy) remarque que pour N < 10, le nombre formé de N chiffres 1 admet N^2 pour somme des chiffres de son carré. Didier MAILLARD (Paris) nous signale d'autres nombres vérifiant la propriété de l'énoncé comme 42 ou 63.*
Bonnes solutions de C. ROMON et Antoine WEHENKEL (Luxembourg).

292. Addition-miroir

	480			084
	+ 97			+ 79
	+ 35	mais aussi		+ 53
=	612		=	216

Il faut bien sûr, comme dans tous les cryptarithmes, supposer qu'à chaque lettre correspond un chiffre et un seul.

☒ *Loïc RIVET (95530 La Frette sur Seine) présente un classement des solutions en deux catégories, selon que D + F = E + G = 11 ou que D + F = E + G = 12. Christian ROMON justifie que le premier cas est impossible sans doublons. Il s'avère donc, nous dit-il, que la seule possibilité pour (A, B, C, D, E, F, G, H, I) est (4, 8, 0, 9, 7, 3, 5, 6, 12).*

293. Carrés et cubes

Horizontalement :
I. $1331 = 11^3$.
II. $23765 = 154^2 + 7^2$.
III. $512 = 8^3$.
IV. $2197 = 13^3$.

Verticalement :
II. $33124 = 182^2$.
III. $3721 = 61^2$.
IV. $93 = 8^2 + 5^2 + 2^2$.
V. $5776 = 76^2 = 95^2 - 57^2$.

	I	II	III	IV	V
I	1	3	3	1	■
II	2	3	7	6	5
III	5	1	2	■	7
IV	■	2	1	9	7
V	6	4	■	3	6

	I	II	III	IV	V
I	1	3	3	1	■
II	2	3	7	6	5
III	5	1	2	■	7
IV	■	2	1	9	7
V	6	4	■	1	6

Ces deux grilles ne diffèrent que par le second nombre de la colonne IV.
Si 93 = 82 + 52 + 22, 91 = 92 + 32 + 12.

✉ *Nos lecteurs sont économes : Philippe ANTOINE (59100 Roubaix) et Jacques CHAUPIN (1300 Vitry le François) précisent particulièrement que la donnée « différence de deux carrés » du V vertical est inutile. En effet, nous précise Ph. Antoine, tout carré, autre que 1 et 4, est différence de deux carrés : si un tel carré, n, est impair, il s'écrit :* $(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2$, *s'il est pair, donc multiple de 4, il s'écrit* $n = 4m = (m + 1)^2 - (m - 1)^2$.
De nombreux autres ont trouvé à cette grille les deux solutions : Pierre ANDRE (57070 Metz), Jean BOURLIES, Jacques DUFRESNE (92310 Sèvres), Gille DUPIN (Paris), J. FAURE (78000 Versailles), Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses), Christian ROMON, Patrice SULMONT (44300 Nantes), Henri TIBULLE (56100 Lorient).

294. Handicap

L'écart minimum entre le cheval plus lourd et le cheval le plus léger est environ de 97,07 kg.
Appelons f le poids (en kilogrammes) du jockey de Fox-trot, m celui du jockey de Monty et r celui du jockey de Régalot, $f + m + r = 181$.
Si on enlève de la tonne cinq fois ce poids, il ne reste plus que $f + m/2 = 95$.
On déduit aisément que $f = r + 9$.
Il reste maintenant à comprendre que Régalot est forcément plus léger que Fox-trot, et que l'écart minimum entre le cheval le plus lourd et le plus léger est obtenu quand Monty et Fox-trot ont le même poids. Le système s'écrit :
$4{,}5\,m = 5f \qquad f + m/2 = 95$.

Il s'ensuit $m = \frac{475}{7} \approx 67{,}86$ kg, et les autres valeurs indiquées dans le tableau ci-dessous.

	Monty	Fox-trot	Regalot	Total
Jockey	67,86	61,07	52,07	181,00
Cheval	305,36	305,36	208,29	819,00
Total				1000,00

Gardons-nous de ne chercher que les solutions en nombres entiers : elles ne répondent pas à l'écart minimum requis entre les poids extrêmes des chevaux.

✉ *Bonne solution de Christian ROMON.*

295. Décodage

« ZYWRC »

On remplace chaque lettre par la lettre décalée de 5 + P dans l'ordre alphabétique, P désignant la place de la lettre dans le mot.
Ainsi, le « T », première lettre de « TROIS » et vingtième lettre de l'alphabet, est remplacé par la lettre de rang 20 + 5 + 1 = 26, soit « Z ».
De même le « S », cinquième lettre de « TROIS » et dix-neuvième lettre de l'alphabet, est remplacé par la lettre de rang 19 + 5 + 5 = 29, soit en épelant l'alphabet de manière circulaire, la troisième lettre après « Z », c'est-à-dire « C »

296. La division

La division compte 2517 soldats.

Le nombre N de soldats est impair. Posons $N = 2p + 1$.
On déduit successivement que
- $p - 1$ est divisible par 3 (et donc $p + 2$)
- $p - 2$ est divisible par 2 (et donc $p + 2$)
- $p - 3$ est divisible par 5 (et donc $p + 2$)
- $p - 4$ est divisible par 3 (et donc $p + 2$)
- $p - 5$ est divisible par 7 (et donc $p + 2$)
- $p - 6$ est divisible par 4 (et donc $p + 2$)
- $p - 7$ est divisible par 9 (et donc $p + 2$)
- $p - 8$ est divisible par 5 (et donc $p + 2$)

$p + 2$ est donc divisible par 4, par 9, par 5 et par 7, donc par leur produit 1260.
Seule la valeur $p = 1258$, qui entraîne N = 2517, conduit à un résultat inférieur à 5000.

☒ *Qu'ils travaillent avec* N + 3, *comme Eric DARDE (33000 Bordeaux), Alain DEFRACE (94340 Joinville-le Pont), Philippe KAHN (92100 Boulogne) ou Christian ROMON, ou avec* N - 7 *comme Michel MENGUAL (Paris), les lecteurs trouvent à ces nombres assez de diviseurs pour donner la bonne solution.*

297. Le nombre triangulaire

Le nombre triangulaire cherché est 666.

En effet, la somme des N premiers entiers est égale à $\frac{N(N+1)}{2}$.

Un nombre s'écrivant avec 3 fois le même chiffre K vaut $K \times 111 = 3 \times K \times 37$.
On a donc $6 \times K \times 37 = N(N + 1)$.
On en déduit que 37 divise N ou (N + 1), et même qu'il est égal à l'un des deux (sinon N serait trop grand). N = 37 est impossible, car 38 n'est pas divisible par 6. La seule solution est N = 36, et donc K = 6.

☒ *Chacun a cherché ce problème à sa façon : Michel HEBRAUD (31000 Toulouse) a cherché le nombre triangulaire N en utilisant que 8N + 1 devait être un carré. Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses) généralise le problème aux nombres triangulaires à 2 chiffres identiques (55 et 66). A 4 ou 5 chiffres il n'y en a pas, nous dit-il, mais par contre les nombres de la forme 100p(p + 1) sont triangulaires et comportent trois zéros ou plus dans leur écriture décimale, comme par exemple 20 100, 320 400 ou 4 501 500. D'autres ont cherché, avec l'aide, bien sûr, d'un ordinateur, les nombres triangulaires comportant trois chiffres identiques, et ils en ont trouvé, beaucoup même : 616 605, 76636... la liste est très longue. D'autres encore ont cherché de tels nombres avec trois chiffres identiques consécutifs : 122 265, 222 778, 600 060,... Puis quatre : 1 222 266, 2 235 555,... Puis cinq : 5 666 661, 43 333 395... qui dit mieux ? (Antoine WEHENKEL, Luxembourg ; Michel DUTEIL, Paris)*

298. Mystification

La «mystification» de 3 par 3 donne 61.

On commence par calculer, pour tout entier a, le «mystifié» de 1 par a. D'après le mystère 3•,

$1 * a \quad = 0 * [1 * (a-1)] \qquad = [1 * (a-1)] + 1$

En réitérant cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 * a &= [1 * (a-2)] + 2 \\ &= [1 * (a-3)] + 3 \\ &= \dots \\ &= [1 * 0] + a \\ &= 0 * 1 + a \\ 1 * a &= a + 2. \end{aligned}$$

Par un procédé analogue, on obtient le résultat :

$2 * a \quad = 2a + 3.$

Alors, $3 * 3 = 2 * (3 * 2)$, et $3 * 2 = 2 * (3 * 1)$ et $3 * 1 = 2 * (3 * 0) = 2 * 5 = 13$,
d'où $3 * 2 = 29$, donc $3 * 3 = 2 * 29 = 61$.

✉ *Quelques passionnés de chiffres poursuivent plus loin la mystification. Michel HEBRAUD (31000 Toulouse) et René TOURNADRE (49000 Angers) donnent des formules, encore des formules :* $1*n = n + 2$, $2*n = 2n + 3$, $3*n = 2^{n+3} - 3$, *et bien pire ! Voilà que* $4*4 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$, *avec... 16 exposants superposés !*

299. Enigme chiffrée

Je suis le nombre 675.

Si X est le nombre cherché, 3X doit être un carré. C'est que X est multiple de 3.
5X doit être un cube. C'est que X est de la forme $X = 25\,Y^3$, mais comme X est multiple de 3, Y aussi.
En posant $Y = 3\,Z$, il vient $X = 675\,Z^3$.
Il reste à exprimer que l'écriture décimale de X ne comporte que trois chiffres : la seule solution correspond à $Z = 1$.

✉ *Beaucoup ont cherché aux solutions une forme générale, indépendamment de leur nombre de chiffres. Les nombres obéissant aux contraintes de l'énoncé s'écriront* $X = 675 \times U^6$. *En donnant à U les valeurs des entiers successifs, on obtient 675, 43200, 492 075, 2 764 800, 10 546 875, 31 492 800... et vive l'informatique pour calculer tout cela ! M. LACROIX (Marseille), Joël LIRAND (86360 Chasseneuil du Poitou), Claude TABET (Paris), Alain VALLON (78000 Versailles).*

300. Le carré de Lucifer

Le séjour minimum en enfer est de 510 ans et un peu plus de deux mois.

En remplissant le carré de Lucifer où les nombres de 1 à 10 ont été positionnés comme ci-contre, on réduit sa peine d'un peu plus de 4 milliards 913 millions et 250 000 secondes, soit presque 156 ans !

	1	2	3	4	10
5					
6					
7					
8					
9					

jeux, tests & maths

200 NOUVEAUX PROBLÈMES DU « MONDE »

(301 – 500)

Élisabeth BUSSER et Gilles COHEN

Dessins : Certains dessins de Natalia de la Fournière, Agnès Abécassis et Florence Panis, ont été repris des éditions originales des premiers volumes.

ISBN : 9782848840840

Jeux mathématiques

Sous la direction de Gilles Cohen - Éditions POLE

Premiers jeux

Mon premier sudoku	*Annette Parent*
Math'ernelle	*Magdi Albert*

Jeux, Tests et maths, collection violette (moins de 10 ans)

Les cinq mondes magiques	*F.F.J.M.*

Jeux, Tests et maths, collection bleue (9 à 12 ans)

50 énigmes mathématiques pour l'école	*F.F.J.M.*
Mathématiques par le jeu en CM : Nombres et Calcul	*Berrondo-Agrell*
Mathématiques par le jeu en CM : Géométrie et Mesures	*Berrondo-Agrell*
52 nouvelles énigmes mathématiques pour l'école	*F.F.J.M.*
Le labyrinthe maléfique (7 × 7 énigmes mathématiques pour l'école)	*F.F.J.M.*
Les mensonges de Pinollio	*Michel Criton*

Jeux, Tests et maths, collection verte (12 ans et +)

52 nouvelles énigmes mathématiques faciles	*F.F.J.M.*
7 × 7 énigmes et défis mathématiques faciles	*F.F.J.M.*
L'aiguille à remonter le temps et 48 autres jeux mathématiques faciles	*F.F.J.M.*

Jeux, Tests et maths, collection orange (14 ans et +)

52 nouvelles énigmes mathématiques pour tous	*F.F.J.M.*
7 × 7 énigmes et défis mathématiques pour tous	*F.F.J.M.*
L'angle mystérieux et 48 autres jeux mathématiques pour tous	*F.F.J.M.*

Jeux, Tests et maths, collection rouge (amateurs éclairés)

50 énigmes mathématiques pour lycéens et +	*F.F.J.M.*
énigmes mathématiques du Bout du Monde	*Atkins*
énigmes mathématiques de Lewis Carroll	*Lewis Carroll*
52 nouvelles énigmes mathématiques pour lycéens et +	*F.F.J.M.*
7 × 7 énigmes et défis mathématiques pour lycéens et +	*F.F.J.M.*
La roue exploratrice et 48 autres jeux mathématiques	*F.F.J.M.*

Autres ouvrages de jeux mathématiques

Logimath	*F.F.J.M.*
Panoramath 4	*C.I.J.M.*
Solutions d'expert	*Arthur Engel*
Jeux mathématiques du « Monde » voir p.6	

AVANT-PROPOS

AUX PROBLÈMES 301 À 500

Depuis 1996, 500 jeux et problèmes mathématiques ont été publiés dans « Le Monde », semaine après semaine, et plusieurs ouvrages ont paru, rassemblant à la fois les problèmes, les solutions, et les principales idées novatrices émises par les nombreux et fidèles lecteurs qui nous écrivent régulièrement depuis plus de dix ans, et que nous remercions chaleureusement.

L'ensemble des problèmes 301 à 500, édité indépendamment, constitue le quatrième volume, intitulé *200 nouveaux problèmes du « Monde »*, et fait suite à *Affaire de logique (1-100), 100 défis mathématiques du « Monde » (101-200)*, et *100 jeux mathématiques du « Monde » (201-300).*

Mais ce volume, comme d'ailleurs les autres, est repris dans un beau livre relié de plus de 500 pages, *L'intégrale des jeux mathématiques du « Monde »* (parution janvier 2008), dont il constitue la deuxième partie (301-500). La première partie, qui regroupe les problèmes 1 à 300, peut aussi être acquise sous la forme d'un coffret regroupant les trois premiers volumes.

Mille façons d'accéder à ces problèmes qui vous procureront, nous l'espérons, autant de plaisir à les chercher que nous avons eu à les concevoir.

Elisabeth Busser et Gilles Cohen

TABLE DES MATIÈRES

chapitre 1 • AFFAIRE DE LOGIQUE

n°		énoncé	solution
301	Le président mal-aimé	8	30
302	Le QCM	8	30
303	Le solitaire	9	31
304	Enceinte autoreférente	9	31
305	La pièce oubliée	10	32
306	Les géographes de Quadranie	11	32
307	Le tableau de nombres	12	33
307	Divisibilité interdite	12	33
309	Les couleurs de l'enseigne	13	33
310	La fiancée du pirate	13	33
311	Ne pas perdre la face	14	34
312	Un musée bien gardé	14	34
313	La partie de cartes	15	34
314	Les 25 jetons	16	35
315	Le dernier essai	16	35
316	Maudits parcmètres	17	35
317	L'ennéagone	18	36
318	Les neuf pièces	18	36
319	Division nationale	19	37
320	Total 100 interdit	19	37
321	Les lucarnes	20	37
322	Le musée	20	37
323	Le bonimenteur	21	38
324	Le festin des souris	21	38
325	Symétrie permise	22	38
326	Les paris sont ouverts	22	39
327	Des clubs politiques	23	39
328	Les cases grises	23	39
329	Les trois tables	24	40
330	Réseau routier	24	40
331	La course	25	41
332	Duel triangulaire	25	41
333	Les nombres de Quentin	26	41
334	le jeu des trois mousquetaires	26	42
335	Les deux tours	27	42
336	Deux packs dans un vestiaire	27	42
337	En rangs par deux !	28	43
338	Hitori, le successeur ?	28	43
339	Cinq masses	29	43
340	Le secret de Polichinelle	29	44

chapitre 2 • FIGURES LIBRES

n°		énoncé	solution
341	La pépinière	46	67
342	Le puzzle	46	68
343	La ligne de tramway	47	68
344	Un hexagone particulier	47	68
345	La trisection par pliage	48	69
346	La planète des 2 empires	49	69
347	Les 3 robots	49	69
348	Économie de distances	50	70
349	Le centre retrouvé	50	70
350	Gargantua géomètre	51	71
351	Le chemin de ronde	51	71
352	L'araignée	52	72
353	Les montagnes de Flatland	52	72
354	Racine de sept	53	73
355	Le cerf-volant partagé	53	74
356	Triangles orthomédians	54	74
357	Sangaku	54	74
358	Sur un billard	55	75
359	Patchwork	55	75
360	La quadrilatère de M. Optimax	56	75
361	Rondes et rondelles	56	76
362	L'ortho-hexagone	57	76
363	L'archipel du polygone	57	77
364	La cerise sur le gâteau	58	77
365	Distance rasante	58	78
366	Mmh ! des truffes...	59	78
367	Le pli	59	79
368	Une symétrie inattendue	60	79
369	Un puzzle simple	60	80
370	Théorème brouillé	61	80
371	Sangaku (et pas Sudoku)	61	81
372	L'étoile magique	62	81
373	Règle ou compas ?	62	81
374	Une figure qui manque d'aires	63	82
375	Global Positioning System	63	82
376	Sans compas	64	83
377	Compas interdit	64	83
378	Orthogonalité inattendue	65	84
379	Le restaurant du trigone	65	84
380	Le quadrilatère articulé	66	85

chapitre 3 • CURIOSITÉS & PARADOXES

n°		énoncé	solution
381	L'horloge de Fibodieci	88	106
382	Produit magique	88	106
383	Enigma	89	106
384	Le digicode	89	107
385	Les deux tas	90	107
386	L'aigle attaque	90	107
387	Le puzzle carré	91	107
388	Encore une tombola	91	108
389	Les deux correcteurs	92	108
390	Tour de piste	92	108
391	Un ensemble de nombres	93	109
392	Le quadrilatère mystérieux	93	109
393	Points à la ligne	93	109
394	La marelle circulaire	94	109
395	Dé qui roule...	94	110
396	La ville aux 3 amis	95	110

chapitre 3 • CURIOSITÉS & PARADOXES (suite)

n°		énoncé	solution
397	Un tournoi raté	95	111
398	Cartes sur tables	96	111
399	Alignements interdits	96	111
400	Multiplier les différences	97	112
401	Jeux de cubes	97	112
402	Le triangle infernal	98	112
403	Le peloton	98	112
404	Indice de pollution	99	113
405	Les podiums paveurs	99	113
406	Les carrés paveurs	100	114
407	Comparaisons	100	115
408	Les dossards de l'ABC	101	115
409	Le calculateur prodige	101	116
410	Deux tout-puissant	102	116
411	Les nombres de Frédéric	102	117
412	Fabrique de multiples	102	117
413	Express régional	103	118
414	Mettre de l'eau dans son vin	103	118
415	Puzzles de carrés	104	119
416	Un trop grand nombre	104	119
417	Puzzle à l'aire du té	104	120
418	Les deux billes	105	120
419	Racine entière	105	121
420	Consécutifs et divisibles	105	121

chapitre 4 • GRAPHES & ALGORITHMES

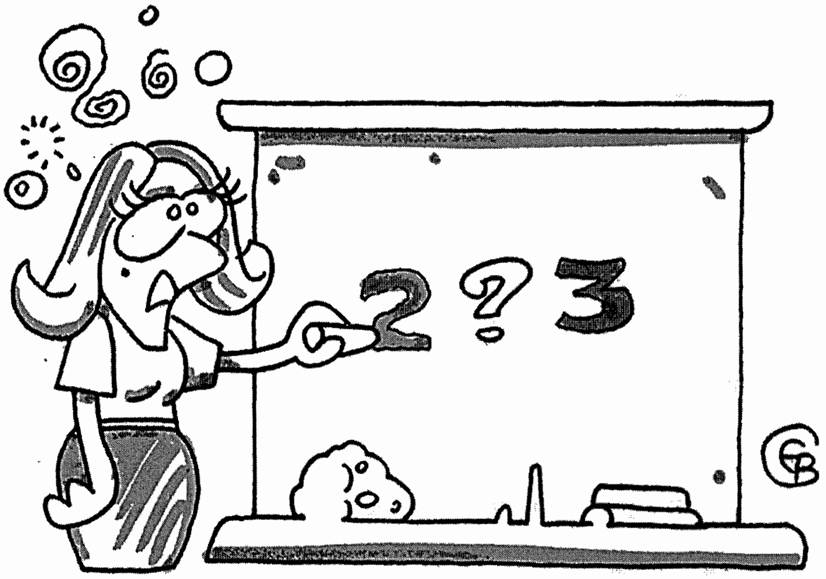
n°		énoncé	solution
421	Le circuit de la Tour	124	145
422	Le chamboule-tout	124	145
423	La machine à créer des nombres	125	146
424	La bande des quatre	126	146
425	Rencontre du troisième type	126	146
426	Les 40 voleurs et la balance	127	147
427	Casino privé	127	147
428	La tombola du club	128	148
429	La planche de timbres	128	148
430	Les trois urnes et le magicien	129	148
431	La machine à tricoter des nombres	129	149
432	Les terriers surpeuplés	130	149
433	Croissance 2004	130	150
434	La limousine de la famille Ours	131	150
435	Quadrichromie	131	150
436	Faites la queue, comme tout le monde !	132	151
437	Les pions bicolores	132	151
438	Le plus court des chemins	133	151
439	Les 3 sœurs	133	152
440	Intercalez la somme	134	152
441	Généalogie	134	152
442	Les deux meilleurs	135	153
443	Corvée de balayage	135	154
444	Le festin de l'araignée	136	154
445	L'onde verte	136	154
446	La feuille d'émargement	137	155
447	Le jeu des 30 pions	137	155
448	Les quatre objets et la balance	138	156
449	La ronde des pions	138	156
450	À la manière de Paul Klee	139	157
451	Le jeu du partage	139	157
452	Les 1 000 jetons	140	158
453	Loto-ku	140	158
454	Les cent cartes	141	158
455	La recette du sept	141	159
456	En noir et blanc	142	160
457	La roue de la fortune	142	160
458	Les jetons	143	160
459	Un jeu d'enfant !	143	161
460	Kitoudouble	144	161

chapitre 5 • DÉFIS NUMÉRIQUES

n°		énoncé	solution
461	Bonheur à trois	164	183
462	Les dominos de Dominique	164	183
463	Du travail d'orfèvre	165	184
464	Le nombre mystère	165	184
465	Octification	166	184
466	La nappe à carreaux	166	185
467	Quoi de « neuf »	166	185
468	L'assemblée des nombres	167	185
469	Un nombre de dix chiffres	167	185
470	Qui s'étend sur la tente ?	168	186
471	Les séries rivales	168	186
472	Digitalement votre	169	187
473	Retournement de situation	169	187
474	Plus fort que la calculatrice	170	187
475	Le carré palindrome	170	188
476	Les nombres aristocrates	171	188
477	Vide grenier	171	188
478	Magique ?	172	189
479	Otez le chiffre du milieu !	172	189
480	Palindromes et porte-bonheur	173	190
481	Le bal de la marquise des Anges	173	190
482	Carrément carrés	174	190
483	Un nombre prodigieux	174	192
484	Ananombres	175	193
485	Le match du 2 et du 3	175	194
486	Le baron	176	194
487	Mémoire (pas) vive	176	195
488	Briseur de code	177	195
489	Famille nombreuse	177	195
490	Des entiers intéressants	178	195
491	Nombres fréquentables	178	196
492	Deux chiffres inconnus	179	197
493	Déferlement de uns	179	198
494	Renversement de situation	180	198
495	Les nombres tricarrés	180	198
496	Les nombres diagonaux	181	199
497	Salaire hebdomadaire	181	200
498	Avoir la moyenne	182	200
499	Les « nombres de personne »	182	200
500	Dyslexie multiplicative	182	201

Affaire de logique

Chapitre 1



301. Le président mal-aimé

Problème n°303 du 10/12/02

Alain, Bernadette et Charles se présentent à la présidence d'un nouveau parti. Les douze membres du conseil qui doit procéder à l'élection émettent des votes d'une cohérence totale. Ainsi, l'un de ces électeurs, Nicolas, qui préfère Alain à Bernadette et Bernadette à Charles (et donc Alain à Charles), votera pour Alain lors de tout suffrage où ce dernier est présent, et votera Bernadette si un duel oppose cette dernière à Charles.
Lors du scrutin à un tour, où les trois candidats sont présents, Alain est élu, obtenant plus de voix que Bernadette qui obtient plus de voix que Charles. Pourtant, lors d'éventuels duels, Charles l'aurait emporté sur Bernadette comme sur Alain, alors que Bernadette l'aurait emporté sur Alain.

Indiquez en face de chacun des six ordres de préférence possibles le nombre de votants à qui cet ordre s'applique.

A – B – C	
A – C – B	
B – A – C	
B – C – A	
C – A – B	
C – B – A	

302. Le Q.C.M.

Problème n°308 du 14/01/03

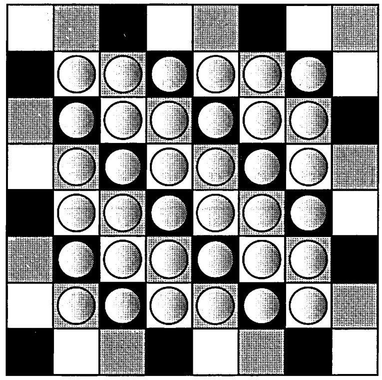
Bérénice est furieuse en constatant qu'avec le nouveau barème elle a un nombre de points (un nombre «premier» compris entre 45 et 70) inférieur de 8 points à celui qu'elle aurait obtenu avec l'ancienne formule ! L'examen se déroule sous forme d'un «QCM» de 30 questions. Parmi les cinq réponses suggérées, une seule est correcte. Le nouveau barème fixe 30 points au départ, plus quatre points par bonne réponse, moins un point par réponse erronée, une absence de réponse valant 0 point.
Avec l'ancien barème, on partait de zéro, mais on obtenait 5 points par bonne réponse, 2 points par question laissée sans réponse et 0 par réponse fausse.

Combien Bérénice a-t-elle laissé de questions sans réponse ?
Combien Bérénice a-t-elle donné de réponses fausses ?

303. Le solitaire

Problème n°313 du 18/02/03

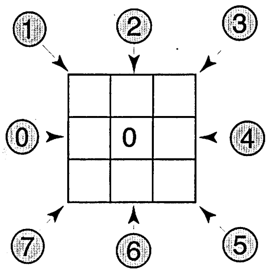
Sur un immense damier tricolore dont une partie est représentée ci-contre, des pions sont disposés en carré.
La réussite du « solitaire » consiste à les enlever successivement pour n'en laisser qu'un seul.
Le seul coup autorisé consiste à faire « sauter » un autre pion par dessus le pion à supprimer, horizontalement ou verticalement, et à le poser sur la case suivante (à condition qu'elle soit vide).

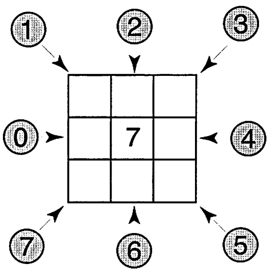


Est-il possible d'arriver à ses fins avec, au départ, un carré de 36 pions ? Et avec un carré de 16 pions ? Un carré de 25 pions ?

304. Enceinte autoréférente

Problème n°318 du 25/03/03





Complétez chacune des grilles ci-dessus à l'aide de chiffre de 0 à 7 de sorte que :
- le nombre des chiffres « 1 » de la grille figure en haut à gauche ;
- le nombre des chiffres « 2 » de la grille figure dans la case suivante de la première ligne ;

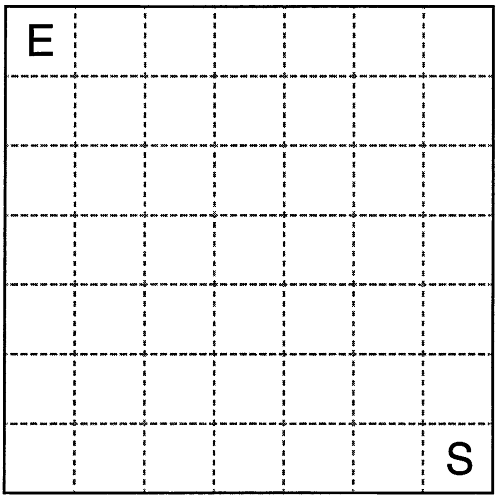
...et ainsi de suite, la flèche issue d'un cercle indiquant dans quelle case marquer le nombre de chiffres identiques à celui qui figure dans le cercle.

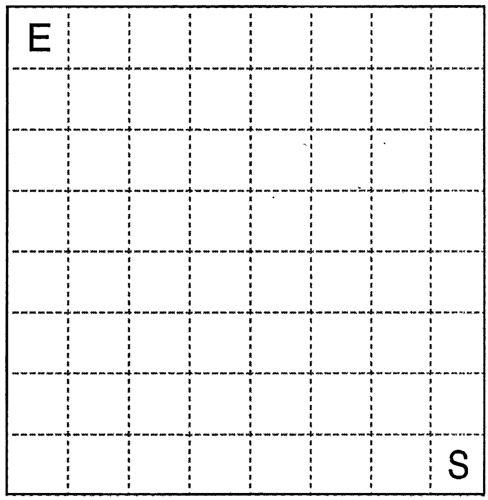
NB : les chiffres figurant dans les cercles ne sont pas comptabilisés.

305. La pièce oubliée

Problème n°323 du 29/04/03

Chacune de ces deux grilles représente un labyrinthe fait de pièces carrées qui communiquent entre elles par les côtés. La pièce d'entrée est marquée «E», la pièce de sortie «S».





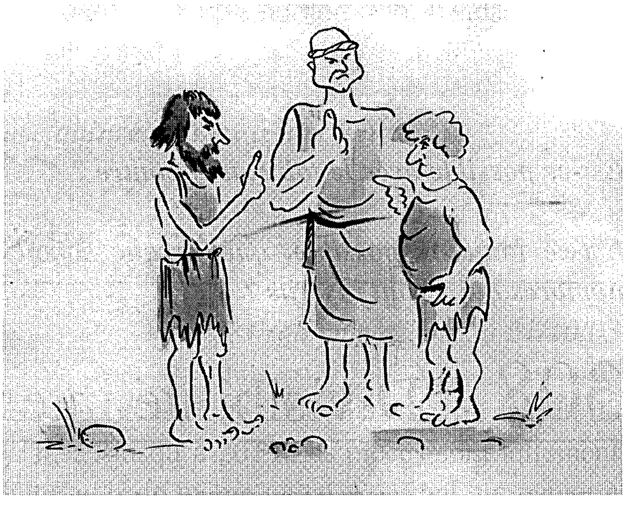
Pour chaque dimension (7 × 7 et 8 × 8), est-il possible de parcourir le labyrinthe, de E à S, en « oubliant » une pièce, et en passant une fois et une seule par chacune des autres ?
Si oui, quelles pièces peut-on « oublier » ?

306. Les géographes de Quadranie

Problème n° 328 du 03/06/03

Suite à un réaménagement du territoire, des géographes s'apprêtent à colorier la carte du centre de la Quadranie de telle sorte que deux régions ayant une frontière commune (non réduite à un point) soient coloriés dans des couleurs différentes. Les régions ont toutes la forme de rectangles identiques. Sans connaître le découpage précis ni les nouveaux contours du centre du pays, avec la seule information du nombre de régions, les géographes savent que trois couleurs suffiront.

Combien le centre du pays compte-t-il de régions au maximum ?



Coup de théâtre : le parlement vote un amendement. Les régions sont supprimées au profit de départements (en plus grand nombre que les régions du premier projet), qui seront tous cette fois des carrés de même taille. Le découpage du centre sera complété par un district fédéral (qui n'est pas considéré comme un département et peut avoir n'importe quelle forme). Les géographes se remettent au travail : là encore, deux départements ayant une frontière commune (non réduite à un point) seront coloriés dans des couleurs différentes. Et là encore, les géographes se rendent compte que trois couleurs suffiront pour colorier tous les départements (en dehors du district fédéral, représenté avec des hachures).

Combien le nouveau projet prévoit-il de départements au maximum ?

307. Le tableau de nombres

Problème n°333 du 08/07/03

Un tableau rectangulaire est rempli de nombres positifs ou négatifs (cases blanches). La somme par ligne et par colonne est indiquée dans les cases grises.

La seule manipulation autorisée consiste à inverser le signe de tous les nombres contenus dans une même ligne ou dans une même colonne.
L'objectif est, qu'à l'issue d'un certain nombre de manipulations, toutes les sommes soient des nombres positifs (ou nuls).

-3	3	2	-4	2	-8	-8
1	-2	5	-6	0	-3	-5
3	4	-9	2	-1	-1	-2
2	-4	1	7	3	7	16
3	1	-1	-1	4	-5	

Est-ce possible avec le tableau ci-contre ?

Est-ce toujours possible, quelles que soient les dimensions du tableau et les nombres qui y sont inscrits ?

308. Divisibilité interdite

Problème n°338 du 12/08/03

On fait une sélection de nombres pris parmi les entiers de 1 à 999.

Combien sont-ils au maximum, sachant qu'aucun d'entre eux ne divise un des autres entiers de la sélection ?

309. Les couleurs de l'enseigne

Problème n°343 du 16/09/03

Les lampes qui servent d'enseigne à cette boîte de nuit sont au nombre de quinze et sont à tout instant des quinze mêmes couleurs différentes. Ainsi, cette nuit-là, à minuit, ont-elles pour couleurs, de gauche à droite : blanc, bouteille, carmin, ciel, eau, émeraude, gris, jaune, marron, orange, outremer, rose, turquoise, vermillon, violet.
Toutes les heures, elles changent de couleur, toujours de la même façon. Ainsi, le gris est toujours suivi du rose, etc.

À deux heures du matin, toujours de gauche à droite elles sont maintenant : eau, marron, orange, gris, turquoise, rose, ciel, jaune, vermillon, violet, bouteille, émeraude, blanc, carmin, outremer.

Quelle était la couleur de chacune des quinze lampes à une heure ?

310. La fiancée du pirate

Problème n°348 du 21/10/03

On a retrouvé le trésor de la fiancée de Joe le pirate ! Un vieux coffre rempli de vingt pièces marquées 1 F, 2 F, 3 F, ... jusqu'à 20 F. Les pièces sont tellement abîmées par le temps qu'elles semblent toutes du même métal. Pourtant, un papier à peine lisible précise que la valeur des dix pièces de vermeil excède de 110 F celle des neuf pièces d'argent.

Combien vaut la pièce d'or ?

311. Ne pas perdre la face

Problème n°353 du 02/12/03

Le lièvre et la tortue viennent de disputer une course et sont arrivés *ex aequo*. Pour se départager, ils décident de s'en remettre au sort. Le lièvre dispose de deux pièces de monnaie, la tortue de trois. Ils lancent leurs pièces et comptent le nombre de «face». Si la tortue en a strictement plus que le lièvre, elle gagnera. Sinon, c'est le lièvre qui l'emportera.

Lequel des deux a le plus de chances de l'emporter ?

Et si la tortue disposait de 100 pièces et le lièvre de 99 ?

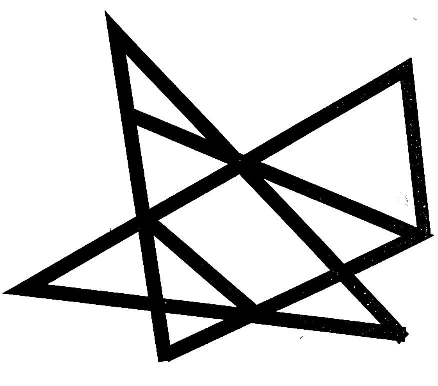
312. Un musée bien gardé

Problème n°358 du 06/01/04

Ce musée est un véritable labyrinthe, fait d'allées rectilignes (en noir) et d'intersections.
Aussi a-t-on, pour le garder, posté des surveillants à certaines des intersections.
On considère qu'un surveillant contrôle toutes les allées conduisant au carrefour où il se trouve.

Sauriez-vous dire, en observant simplement le plan, combien on dénombre d'allées et d'intersections ?

Quel est le nombre minimum de surveillants qu'il faut poster pour que toutes les allées du musée soient surveillées ?



313. La partie de cartes

Problème n°363 du 10/02/04

Trois joueurs engagent une partie. Le matériel est simple : trois cartes marquées de trois sommes différentes, toutes des nombres entiers (strictement positifs) d'euros.
Le jeu commence : le donneur mélange, puis distribue les trois cartes (il en donne une à chaque joueur). On retourne les cartes, chacun gagne la somme marquée sur sa carte. Puis on recommence avec les trois mêmes cartes pour un nouveau tour.
Après une partie lors de laquelle Bérénice s'est retrouvée avec la plus mauvaise carte au deuxième tour, Athalie, Bérénice et Caligula finissent avec respectivement 12, 18 et 25 euros.

Quelles sommes étaient marquées sur chacune des trois cartes ?
Reconstituez la partie complète.

314. Les vingt-cinq jetons

Problème n°368 du 16/03/04

Vingt-cinq jetons sont disposés sur une table. André et Béatrice jouent au jeu suivant : ils en enlèvent à tour de rôle 1, 4, 7 ou 8. Il est interdit d'enlever un autre nombre de jetons. Celui qui enlève le dernier jeton a gagné.

C'est André qui commence.

A-t-il une stratégie gagnante ?
Si oui, combien de jetons doit-il enlever au premier coup ?
Sinon, dites pourquoi Béatrice gagnera si elle joue bien.

315. Le dernier essai

Problème n°373 du 20/04/04

Un cambrioleur doit découvrir la combinaison à trois chiffres du coffre. Mais il n'a droit qu'à cinq erreurs, car après six essais infructueux, l'alarme se déclenche.
Heureusement, une diode de couleur s'allume dans certains cas.
• Verte quand un chiffre au moins coïncide, à la bonne place, avec celui de la combinaison.
• Jaune quand aucun chiffre n'est bien placé, mais qu'un chiffre au moins, bien que mal placé, appartient à la combinaison.

Voici le résultat des quatre premiers essais du cambrioleur, notés A, B, C et D :

A. **671** : diode **jaune** ; B. **128** : diode **verte** ;
C. **429** : diode **jaune** ; D. **798** : diode **jaune**.

Quels sont les combinaisons possibles du coffre ?
Le cambrioleur peut-il être certain de découvrir la bonne combinaison après l'essai suivant ?

316. Maudits parcmètres !

Problème n°378 du 25/05/04

Pour se garer dans cette ville, on insère dans les parcmètres des « unités de stationnement », une unité pour moins d'un quart d'heure jusqu'à 20 unités quand on se gare pour la demi-journée.
La municipalité a fait fabriquer trois types de jetons (marqués de trois valeurs différentes) que les administrés doivent insérer dans les parcmètres.
Les parcmètres sont conçus de telle sorte qu'ils n'acceptent pas plus de quatre jetons, ni plus de deux jetons de même valeur faciale.

Quelle est la valeur qu'on a attribuée aux trois types de jetons pour qu'un automobiliste puisse insérer toute somme comprise entre 1 et 20 unités ?

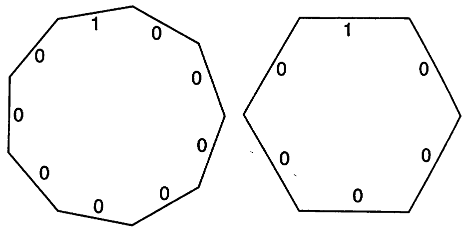
De nouveaux modèles de parcmètres sont disponibles. Ils ne peuvent toujours accueillir que quatre jetons, et pas plus de deux fois le même, mais peuvent rendre la monnaie (dans les mêmes conditions : pas plus de quatre jetons, dont au plus deux fois le même).

Quelles doivent être les valeurs des trois nouveaux types de jetons en circulation pour qu'on puisse payer toute somme entre 1 et le plus grand nombre possible ?

317. L'ennéagone

Problème n°383 du 29/06/04

On écrit un « 1 » et des « 0 » sur les côtés d'un hexagone et d'un ennéagone (9 côtes), comme l'indique le dessin. On modifie alors les chiffres de la façon suivante : à chaque tour de jeu, on choisit un « 1 » appelé le pivot (ce pivot restera invariant lors de ce tour), et on modifie les deux chiffres inscrits sur les côtés adjacents à ce pivot (« 0 » devient « 1 » et « 1 » devient « 0 »).



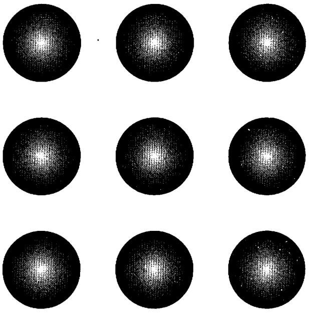
Est-il possible de faire en sorte que tous les chiffres deviennent des « 1 » sur l'hexagone ? Et sur l'ennéagone ?

318. Les neuf pièces

Problème n°388 du 03/08/04

Les neuf pièces ci-contre semblent identiques. Pourtant, si sept d'entre elles le sont vraiment, l'une a 1 gramme de plus et l'autre 1 gramme de moins.

Vous disposez d'une balance à deux plateaux.



En combien de pesées, au minimum, déterminer la pièce plus légère et la pièce plus lourde ?

319. Division nationale

Problème n°393 du 07/09/04

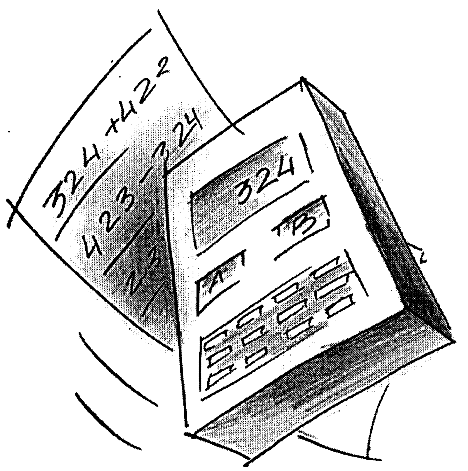
Lors de la première journée d'un championnat, les 16 équipes se rencontrent lors de 8 matches.
Les 8 équipes qui reçoivent marquent toutes un nombre différent de buts compris entre 0 et 7.
Il en est de même des 8 équipes visiteuses.

Est-il possible que les écarts de buts des 8 matches soient tous différents ?

Même question avec une ligue de 20 équipes où les hôtes, comme les visiteurs, marquent un nombre différent de buts compris entre 0 et 9.

320. Total 100 interdit

Problème n°398 du 12/10/04



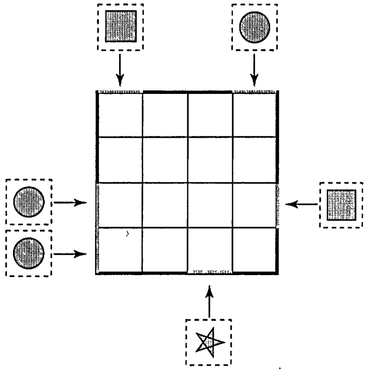
Un groupe d'entiers distincts compris entre 1 et 99 est choisi de telle sorte qu'il soit impossible d'en extraire un sous-ensemble de somme 100.

Combien le groupe contient-il de nombres au maximum ?

321. Les lucarnes

Problème n°403 du 16/11/04

Dans une boîte carrée fermée en bois contenant 16 alvéoles, on range 9 décorations de Noël. Dans chaque rangée, horizontale comme verticale, il y a exactement une étoile, une boule de Noël et un petit cube doré, l'une des alvéoles restant vide. Le dessus de la boîte est opaque, mais sur les côtés, il y a six lucarnes transparentes. Chaque lucarne permet de voir le premier objet de la rangée (celui de la première alvéole, ou celui de la deuxième si la première alvéole est vide).



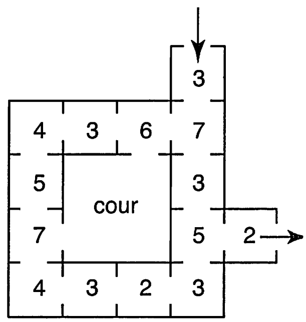
La vision obtenue depuis chaque lucarne est indiquée sur le côté. Saurez-vous reconstituer précisément le contenu de la boîte ?

322. Le musée

Problème n°408 du 21/12/04

Un visiteur pénètre dans ce musée par l'unique entrée (au Nord) et passe de salle en salle par les ouvertures représentées sur le plan ci-contre, de manière totalement aléatoire. Émerveillé par la richesse du contenu, il n'hésite pas à revenir sur ses pas pour admirer les trésors du musée.

Chaque fois qu'il franchit une porte, un compteur enregistre un passage dans la salle dans laquelle il entre. Après un long périple, parfois interrompu par un bol d'air frais dans la grande cour carrée centrale du musée, il termine sa visite en sortant par l'unique sortie située à l'Est. Le plan indique pour chaque pièce le nombre de fois qu'il y est entré y compris depuis l'extérieur ou depuis la cour.



Combien le visiteur a-t-il fait de passages dans la cour ?

323. Le bonimenteur

Problème n°413 du 25/01/05

Un bonimenteur présente aux passants un petit sac contenant des jetons, sur chacun desquels est inscrit un nombre entier.
« Que cinq d'entre vous misent un euro et tirent un jeton », lance-t-il. Et il ajoute : « Si la somme des cinq nombres inscrits sur les jetons tirés est divisible par 5, chacun des cinq joueurs gagnera 100 euros ! » Le coquin ne prend pas grand risque ! Il sait qu'il est impossible que le total soit un multiple de 5.

Combien y a-t-il de jetons, au plus, dans le sac ?

324. Le festin des souris

Problème n°418 du 01/03/05

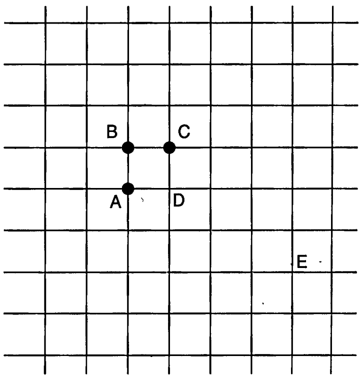
Ça y est, deux souris ont envahi ce matin l'armoire à provisions ! Très affairées à piller les réserves, elles sont aussi très organisées : Grisette ouvre les « sachets fraîcheur » de trois biscottes, Roussette les paquets contenant quatre tranches de gouda. Ce que les souris préfèrent, ce sont les « canapés » : une tranche de fromage sur une biscotte. Grisette suggère à sa comparse d'échanger biscottes contre fromage.
– « D'accord, mais deux biscottes pour une tranche de fromage », dit Roussette pas prêteuse.
Et les échanges vont bon train : deux biscottes pour une tranche de fromage ou une tranche de fromage contre deux biscottes, chaque souris n'ouvrant un nouveau sachet que s'il est indispensable à son appétit ou à une transaction. À la fin de la matinée, rassasiées par les canapés engloutis, elle arrêtent leur manège. Il reste alors à Roussette quelques biscottes mais plus aucune tranche de fromage, et à Grisette quelques tranches de fromage, mais plus aucune biscotte. Plus tard, commentant son indigestion, Grisette se justifie : « Que voulez-vous, à tout moment, il me manquait du fromage pour aller sur mes biscottes ou des biscottes pour soutenir mon fromage ».

Grisette ment-elle ? Combien lui restait-il de tranches de fromage à la fin de la matinée ?

325. Symétrie permise

Problème n°423 du 05/04/05

Sur un quadrillage illimité, trois points sont tracés sur les nœuds A, B et C du quadrillage, ainsi que le montre la figure. à tout moment, on peut tracer un point supplémentaire de la manière suivante :
– on choisit un point déjà tracé, le « générateur ».
– on choisit un deuxième point déjà tracé, le « centre ».
On peut alors tracer un troisième point, «l'image», symétrique du «générateur» par rapport au centre.
On recommence l'opération autant de fois qu'il le faut.



Peut-on tracer un point au nœud E ? Si oui, en combien d'étapes au minimum ?
Peut-on tracer un point au nœud D ? Si oui, en combien d'étapes au minimum ?

326. Les paris sont ouverts

Problème n°428 du 10/05/05

Il pleut et les deux enfants ont organisé une course d'escargots dans le jardin. Une course bien modeste puisqu'il n'y a que quatre participants, baptisés Warf, Xory, Yorx, et Zazou. Les paris vont bon train. Alice donne l'ordre W, Z, X, Y et Bob l'ordre Z, X, W, Y.
La course a lieu et les enfants encouragent les gastéropodes. Déception pour Alice : aucun des escargots n'est arrivé à la place prévue. Pire, des trois paires d'escargots consécutifs du pari d'Alice, aucune n'est arrivée en se suivant dans l'ordre du pari. Bob a eu un peu plus de chance : un escargot exactement est arrivé à la bonne place et une – mais une seule – des paires d'escargots consécutifs de sa prédiction est arrivée en se suivant dans l'ordre qu'il avait prévu.

Quel est l'ordre d'arrivée ?

327. Des clubs politiques

Problème n°433 du 14/06/05

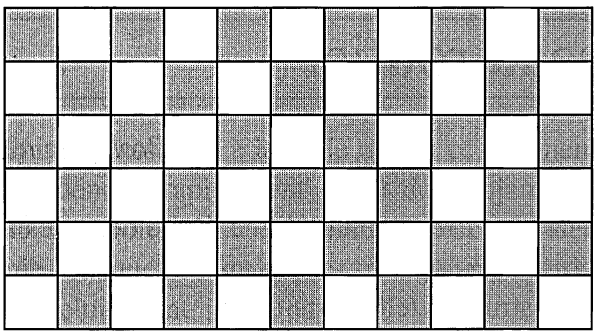
Dans ce parti politique, se sont formés des clubs.

- Aucun club ne contient tous les membres du parti.
- Mais si on considère deux adhérents pris au hasard, il existe toujours un club auquel ils appartiennent tous les deux.
- Et un même adhérent n'appartient jamais à plus de 2 clubs.

Combien y a-t-il de clubs, au plus ? Au moins ?

328. Les cases grises

Problème n°438 du 19/07/05



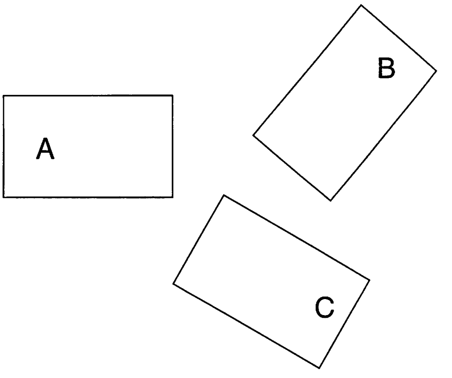
Dans chacune des cases d'un tableau rectangulaire, colorié comme un damier, est inscrit un nombre entier. On sait que :
- la somme des éléments de chaque ligne est paire.
- la somme des éléments de chaque colonne est impaire.

Quelle est la parité du nombre de colonnes ?
Peut-on prédire, en fonction des dimensions du tableau, la parité de la somme des nombres inscrits dans les cases grises ?

329. Les trois tables

Problème n°443 du 23/08/05

Deux joueurs disposent d'un grand nombre de pions ronds identiques et de trois guéridons rectangulaires de mêmes dimensions, A, B et C. Chacun d'eux, à tour de rôle, place un pion sur un des guéridons.
Un pion n'a pas le droit d'en toucher un autre ni de sortir de la surface des guéridons.
Le premier à ne plus pouvoir respecter cette règle a perdu.



L'un des joueurs dispose-t-il d'une stratégie gagnante ?
Si oui, comment doit-il jouer en fonction du jeu de son adversaire ?

330. Réseau routier

Problème n°448 du 27/09/05

Dans une petite île, chaque route joint en ligne droite deux des villes.

Le réseau routier a été construit de telle sorte que :
– De chaque ville partent au plus trois routes
– On peut toujours aller d'une ville à l'autre soit par une route directe, soit en passant au plus par une ville intermédiaire.

Le nombre de villes de l'île peut-il être 5 ? 6 ? 7 ?
Combien y a-t-il, au plus, de villes dans cette île ?

331. La course

Problème n°453 du 01/11/05

Antoine, Bernard, Claude, Daniel et Etienne viennent de se mesurer à la course à pied.

Leurs déclarations à l'arrivée sont contradictoires :

Antoine : « Je suis arrivé juste devant Claude »

Etienne : « Bernard est arrivé juste devant Claude ».

Daniel : « J'ai battu Claude ! »

Bernard : « Daniel est quatrième »

Claude : « Je suis arrivé troisième et Etienne n'est ni premier, ni dernier »

Il s'avère que les deux derniers arrivés ont menti.

Quel était l'ordre exact d'arrivée ?

332. Duel triangulaire

Problème n°458 du 06/12/05

Antoine et Bernard s'assoient à la table de jeu et entament une partie de Speed, un jeu qui se dénoue rapidement et ne donne jamais lieu à un match nul. Antoine l'emporte et Carole s'installe alors à la place de Bernard. Le jeu continue ainsi toute la soirée. Chaque fois qu'un des trois joueurs perd, il laisse sa place pour la partie suivante à celui qui ne jouait pas.

À la fin de la soirée, on s'arrête après une nouvelle défaite de Bernard ; ce dernier se trouve avoir perdu 15 fois tandis que Carole a gagné 19 fois.

Combien de fois Antoine a-t-il gagné ?

333. Les nombres de Quentin

Problème n°463 du 10/01/06

Quentin a inventé une famille de nombres entiers.

Ils ne commencent pas par 0 et sont formés de chiffres tous différents. De plus, la somme de trois chiffres consécutifs d'un nombre de Quentin est toujours un multiple de 5.
Le nombre des chiffres d'un nombre de Quentin est appelé sa « longueur ».

Quelle est la longueur maximale d'un nombre de Quentin ?
Combien y a-t-il de nombres de Quentin de longueur maximale ?

334. Le jeu des trois mousquetaires

Problème n°468 du 15/02/06

Atos, Bortos et Caramis se retrouvent autour d'une table de jeu dans leur estaminet favori.
Ils décident de risquer quelques uns des louis d'or qu'ils viennent de recevoir pour récompense de bons services rendus au roi.
Chacun place un petit nombre de louis devant lui. La règle du jeu est simple : à chaque manche, le perdant partage les louis qu'il possède (sur la table) en deux parts égales qu'il donne à chacun de ses deux compères. Si son capital est impair, il doit ajouter le louis qui manque de sa poche pour pouvoir effectuer un partage équitable.
Quand un des mousquetaires perd deux fois de suite, n'ayant plus rien à partager, il perd définitivement et la partie s'arrête.
Au début de la partie, le total des trois tas est de 24 louis.
Atos perd le premier, puis Bortos, et enfin Caramis, qui perd deux fois de suite, ce qui clôt le jeu.
Personne n'a eu à compléter le partage de ses louis et, chose étonnante, Bortos se retrouve avec le même nombre de louis qu'au début, ce qui n'est pas le cas de ses compères, bien sûr.

Combien chacun disposait-il de louis au début de la partie ?

335. Les deux tours

Problème n°473 du 21/03/06

La cité des Matheux est formée de deux tours d'habitation. La tour A compte 34 étages (le rez-de-chaussée est réservé aux vélos) et à chaque étage vivent entre 1 et 51 personnes (le nombre d'habitants de chaque étage est connu de tous). La tour B compte 51 étages (le rez-de-chaussée est réservé aux poussettes), et à chaque étage vivent entre 1 et 34 personnes (le nombre d'habitants de chaque étage est connu de tous).
Les habitants ont coutume de désigner par « colonie » l'ensemble formé par des étages consécutifs d'une même tour.
Une grande rivalité oppose les habitants des deux tours qui ne manquent pas de se défier quotidiennement en se lançant des énigmes mathématiques. Le défi du jour consiste à trouver une colonie de la tour A et une colonie de la tour B qui comptent le même nombre d'habitants.

Un tel défi a-t-il forcément une solution ?

336. Deux packs dans un vestiaire

Problème n°478 du 25/04/06

Deux équipes de rugby (15 joueurs chacune) vont s'affronter, les All et les Black. Les All pèsent tous le même poids (100 kg) et les Black pèsent tous le même poids (plus de 100 kg, l'information précise est un secret d'état).
Tout ce beau monde est au vestiaire, dans une tenue que la décence nous interdit de décrire, et l'arbitre n'est plus tout à fait sûr de savoir qui est All et qui est Black.
Il sélectionne quinze des joueurs (qu'il croit être les All) et les place sur sa gauche, tandis que les autres sont consignés à droite.
Avec l'aide d'une grande balance à deux plateaux qui se trouve dans les vestiaires, il voudrait vérifier son hypothèse.
Il y parvient effectivement en quatre pesées. Il ne s'était pas trompé.

Comment a-t-il procédé ?

337. En rangs par deux !

Problème n°483 du 06/06/06

Le Général Georges Déployé met ses troupes en ordre de marche, et il veut voir tout le monde en rangs par deux. Son unité, désormais mixte, rangée sur deux colonnes identiques, comporte dans chaque colonne autant d'hommes que de femmes. De plus, d'une colonne à l'autre, il y a deux fois plus de paires de femmes que de paires mixtes.

Quel est, parmi les effectifs suivants, celui de l'unité du Général ?
150 – 156 – 160 – 168 – 174 – 182 – 190 – 192.

338. Hitori, le successeur ?

Problème n°488 du 11/07/06

Le jeu « Hitori » fait rage cet été. Il pourrait bien être l'un des candidats à la succession du Sudoku. En voici donc un problème.

Noircir les cases convenables de sorte que la grille respecte les règles suivantes :
– une ligne ou une colonne ne peut contenir deux lettres identiques
– les cases restantes doivent être connectées entre elles par un côté pour former un bloc d'un seul tenant.

G	B	B	F	C	G	E	D
A	C	B	E	C	H	H	G
A	G	G	H	B	F	D	E
B	E	F	D	B	E	C	F
F	F	D	A	E	G	G	C
E	A	G	H	H	D	F	A
H	E	E	G	F	F	B	H
C	D	E	A	A	G	D	F

Mais attention : il est interdit de noircir deux cases voisines (par un côté).

339. Cinq masses

Problème n°493 du 15/08/06

Un robot opérant dans une chambre stérile doit retrouver la masse de cinq billes d'apparence identique mais dont on sait qu'elles pèsent 1 g, 2 g, 3 g, 4 g et 5 g. Il dispose pour cela d'une balance de précision à deux plateaux.

En combien de pesées au minimum est-on sûr qu'il va identifier les cinq billes ? Comment ?

340. Le secret de Polichinelle

Problème n°498 du 19/09/06

2006 personnes (parmi lesquelles Polichinelle) connaissent chacune une partie différente d'un secret. Elle disposent d'une messagerie électronique qui n'est capable d'envoyer de message qu'à une personne à la fois. Lorsqu'une personne envoie un message à une autre personne, elle lui dit tout ce qu'elle sait sur le secret.

Quel est le nombre minimum de messages nécessaires pour que Polichinelle soit au courant del'intégralité du secret ?

Quel est le nombre minimum de messages nécessaires pour que les 2006 personnes soient mises au courant de l'intégralité du secret ?

Affaire de logique SOLUTIONS

301. Le président mal-aimé

A–B–C	1
A–C–B	4
B–A–C	0
B–C–A	4
C–A–B	0
C–B–A	3

Compte tenu des résultats des scrutins et des préférences de Nicolas, seule la configuration ci-contre est possible.
Alain est élu avec 5 voix contre 4 à Bernadette et 3 à Charles.
Pourtant, Charles l'emporterait face à Alain comme face à Bernadette par 7 voix contre 5, et Bernadette l'emporterait sur le même score face à Alain.

✉ *Tous les lecteurs qui sont intervenus ont signalé l'existence d'une autre solution, mais qui ne respecte pas les préférences de Nicolas :*

A–B–C	0
A–C–B	5
B–A–C	0
B–C–A	4
C–A–B	0
C–B–A	3

Nous devons à Bernard BONAITI une explication magistrale, tenant en quelques lignes :

- *Pour que A gagne, il faut qu'il ait eu plus du tiers des voix, donc plus de 4, mais pour qu'il perde ses duels contre B et C, il faut qu'il en ait moins de la moitié. Ainsi, A a 5 voix. Donc B en a 4 et C 3.*
- *Pour que A perde ses duels, il faut qu'il ne soit jamais 2^e^, donc les lignes BAC et CAB sont nulles, la ligne BCA vaut 4 et CBA vaut 3.*
- *Pour que B perde son duel contre C, il reste donc pour la ligne ABC deux possibilités, 0 ou 1.*

Son auteur précise d'ailleurs « qu'il vaut mieux être premier ou troisième que second partout » et « qu'on retrouve là le bonus à la victoire donné dans certains championnats, comme la coupe du monde de foot ».
La plupart des autres lecteurs (J.-Jacques COLLEAU, J-Louis FOULLEY (92160 Antony), J.-W. James (Eastwood, Australie), Louis OLLIVIER, Larry SCHAEFFER, Christian ROMON, Antoine WEHENKEL (Luxembourg)), outre leur contribution, nous rappellent que ce vote, individuellement conforme à la préférence collective globale, peut être en contradiction avec les préférences partielles, résultat connu sous le nom d'« effet Condorcet », particularité découverte par celui-ci au XVIII^e^ siècle.

302. Le Q.C.M.

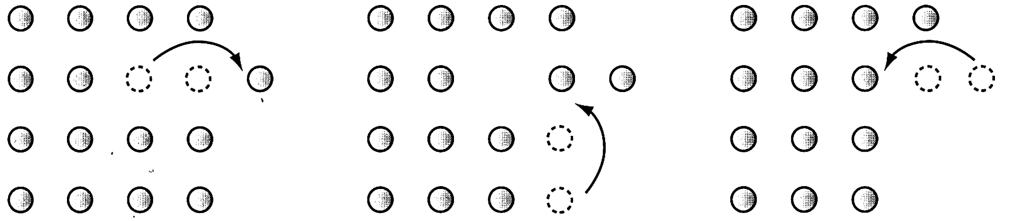
Bérénice a laissé 8 questions sans réponse.
Répartissons les 30 points accordés au départ entre les 30 questions (en ajoutant pour chaque question un point au barème). Avec le nouveau barème, tout se passe donc comme si on accordait 5 points pour une bonne réponse (inchangé), 0 points pour une mauvaise réponse (inchangé) et 1 point (au lieu de 2) pour une question sans réponse. Le déficit de 8 points correspond donc à 8 absences de réponse.
Bérénice a donné 13 réponses fausses.

Le nombre de points de Bérénice est donc 5 fois le nombre de bonnes réponses augmenté de 8. S'il est premier compris entre 45 et 70, ce ne peut être que 53. Bérénice a donc donné 9 réponses exactes, ce qui, compte tenu de ses 8 questions sans réponse, fait 13 réponses erronées.

⊠ *Peu de nouveautés dans les solutions des lecteurs.*

303. Le solitaire

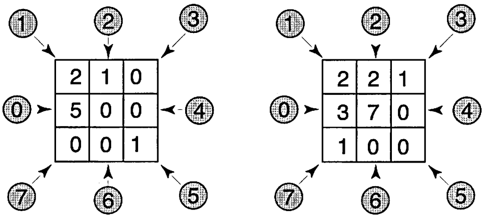
Il n'est pas possible de réussir avec un nombre de pions multiple de 9.
Les 36 pions sont au départ également répartis entre les trois couleurs de cases.
Lors de chaque « coup », le nombre de pions situés sur chaque couleur de case change de parité : deux de ces nombres diminuent d'une unité (case de départ du pion sauteur et case du pion sauté) tandis que le troisième nombre (case d'arrivée du pion sauteur) augmente d'une unité.
Il y a même parité au départ, il y aura même parité des trois nombres à l'arrivée, ce qui interdit la configuration (1, 0, 0).
Il est possible de réussir si le nombre de pions n'est pas multiple de 9.
La clé consiste à voir qu'on peut, dans ce cas, supprimer successivement des alignements de 3 pions consécutifs. Il ne subsistera qu'un pion : en effet, s'il n'est pas multiple de 9, le nombre de pions d'un carré est un multiple de 3 augmenté de 1.
Le dessin indique le début de la procédure à 16 pions.



⊠ *Contribution longue et argumentée de C. ROMON.*

304. Enceinte autoréférente

Comptons dans la grille les 0, les 1, les 2, ..., les 7 : il y a 9 chiffres en tout. Remplir la grille c'est donc trouver une décomposition de 9 en somme de huit nombres qui, après avoir ajouté 0 ou 7, respecte les conditions dictées par la grille.



⊠ *Pascal GILLANT (67440 Marmoutier) trouve au problème un prolongement et donne des grilles comportant en leur centre les chiffres 1 (deux variantes), 4, 5 ou 6. Il dit n'en avoir trouvé aucune comportant les chiffres 2 ou 3 en leur centre.*

2	2	0
4	1	1
0	0	0

3	0	1
4	1	1
0	0	0

1	2	0
4	4	2
0	0	0

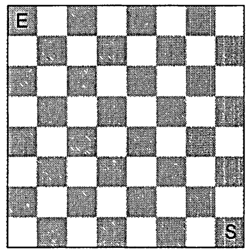
2	2	1
3	5	0
0	0	1

2	2	1
3	6	0
0	1	0

305. La pièce oubliée

La clé réside dans le coloriage de la grille (voir dessin).
La grille 7 × 7 ne peut être parcourue en « oubliant » une case.
La grille 8 × 8 peut l'être à condition que la case « oubliée » soit de couleur blanche.

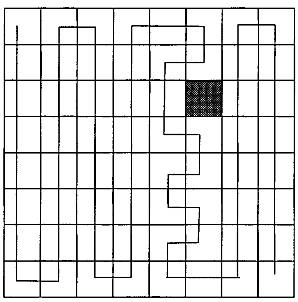
En effet, il s'agit de partir d'une case noire pour parvenir à une case noire. Or on ne peut passer que d'une case noire à une blanche et réciproquement. Le chemin doit donc comporter, en dehors des pièces « entrée » et « sortie », une pièce blanche de plus que de pièce noire (soit un total impair).

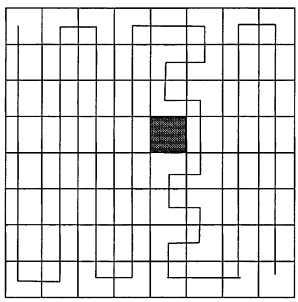


• Dans le cas de la grille 7 × 7, il reste 47 cases dont on enlève la case oubliée, soit un nombre pair.

• Dans le cas de la grille 8 × 8, la condition nécessaire est remplie à condition d'ôter une case blanche (il reste alors 31 cases blanches et 30 cases noires). On montre dans cette hypothèse que le parcours est toujours possible.

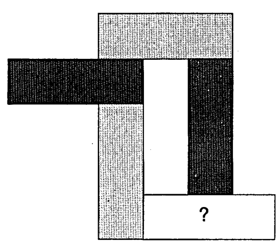
☒ *Michel HERBRAUD (31000 Toulouse) nous signale l'existence de tels problèmes également chez Claude BERGE, mathématicien, l'un des fondateur de la théorie des graphes, membre de l'Oulipo décédé en 2002. C. ROMON nous propose deux exemples de chemins répondant à la question.*





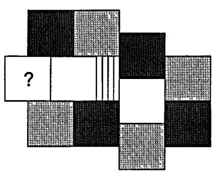
306. Les géographes de Quadranie

Le projet d'aménagement du territoire prévoyait au plus 5 régions.
Le projet amendé était limité à 10 départements.



• En effet, pour toute configuration de rectangles en nombre inférieur ou égal à 5, il est possible de trouver un coloriage qui n'utilise que trois couleurs. Ce n'est plus vrai avec 6 rectangles, comme en témoigne l'exemple ci-contre, impossible à colorier avec trois couleurs seulement.

• De même, avec dix carrés égaux, il est toujours possible de trouver un coloriage qui n'utilise que trois couleurs. Ce n'est plus le cas avec 11 carrés (dessin du bas).



☒ *Des lecteurs imaginatifs, comme M. CAROUGE (17740 Ste Marie de Ré) proposent des dispositions particulières de onze carrés qu'on peut colorier avec trois couleurs seulement.*

307. Le tableau de nombres

Il est toujours possible de parvenir à une situation ne comportant que des sommes positives.
Pour cela, on utilise la stratégie suivante : on avise une somme strictement négative, et on inverse les signes de la rangée correspondante. La somme des toutes les cases grises augmente strictement.
On recommence avec une nouvelle somme négative. Et ainsi de suite. La somme des cases grises ne peut s'accroître à l'infini, car les valeurs qu'elle peut prendre sont en nombre fini.
Après « l'inversion » lui permettant d'atteindre son maximum, toutes les sommes seront positives, car sinon, en inversant les signes de la rangée correspondante, on pourrait dépasser ce maximum.

☒ *C. ROMON donne pour majorant du nombre d'étapes nécessaires la demi-différence entre la somme des valeurs absolues des nombres du tableau et la somme de ces nombres eux-mêmes.*

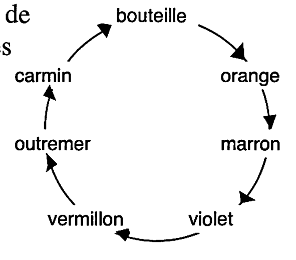
308. Divisibilité interdite

La sélection compte au maximum 500 nombres.
• D'une part, on voit qu'en sélectionnant les 500 entiers de 500 à 999, aucun d'entre eux ne divise un des autres, puisque le premier multiple de chacun de ces nombres (en dehors de lui-même) est strictement supérieur à 999.
• D'autre part, quelle que soit la sélection, on constate que pour chaque entier N strictement inférieur à 500 de la sélection, il existe un nombre M_N parmi 2N, 4N, 8N etc. compris entre 500 et 999, qui ne fait donc pas partie de la sélection. Par ailleurs, si N et N' inférieurs à 500 sont des nombres différents de la sélection (aucun des deux n'est un multiple de l'autre), M_N et $M_{N'}$ sont distincts. Cela limite le nombre des entiers de la sélection au nombre des entiers supérieurs ou égaux à 500, c'est-à-dire à 500 nombres.

309. Les couleurs de l'enseigne

Les quinze couleurs sont, à une heure, dans l'ordre : *turquoise, orange, bouteille, émeraude, blanc, gris, rose, jaune, violet, marron, carmin, ciel, eau, outremer, vermillon.*
On pouvait y parvenir «par tâtonnements». Mais pour les spécialistes, indiquons que la méthode consiste à considérer chaque changement horaire comme une permutation (inconnue) des quinze couleurs et à travailler sur les *orbites* du «carré» de cette permutation, celle obtenue au bout de deux heures. On remarque les cycles suivants de ce carré :

blanc → eau → turquoise (→ blanc...)
bouteille → marron → vermillon → carmin → orange → violet → outremer (→ bouteille...)
ciel → gris (→ ciel...)
émeraude → rose (→ émeraude...)
jaune (→ jaune...)



Il reste à trouver la «racine carrée» des cycles impairs, et à faire se correspondre les cycles d'ordre 2 d'après l'indication donnée dans l'énoncé (« le *gris* est toujours suivi du *rose* »).
Ci-contre, la «racine carrée» du cycle de 7 couleurs.

310. La fiancée du pirate

La pièce d'or vaut 10 F.
La valeur minimum des 9 pièces d'argent est 45 F (1 + 2 +... + 9).
La valeur maximum des 10 pièces de vermeil est 155 F (11 + 12 + ... + 20).
La différence de 110 F est donc la plus grande possible, elle ne peut être obtenue que pour ces valeurs, ce qui ne laisse à la pièce d'or qu'une seule possibilité : 10.

311. Ne pas perdre la face

Le lièvre et la tortue ont tous deux autant de chances de l'emporter dans toute situation où le lièvre dispose de n pièces et la tortue de $n + 1$.

Supposons en effet d'abord que le lièvre et la tortue lancent tous deux n pièces.
Trois situations peuvent alors se produire :
1 : le nombre de «face» du lièvre est supérieur
2 : le nombre de «face» de la tortue est supérieur
3 : il y a égalité des nombres de «face».
Dans les deux premiers cas, qui sont équiprobables, la pièce supplémentaire de la tortue n'y changera rien. Le lièvre l'emportera dans le cas 1 et la tortue dans le cas 2.
Dans le troisième cas, la dernière pièce de la tortue va faire la différence : la tortue gagnera si elle obtient «face», le lièvre vaincra si elle obtient «pile».
Les deux protagonistes ont bien la même probabilité de l'emporter.

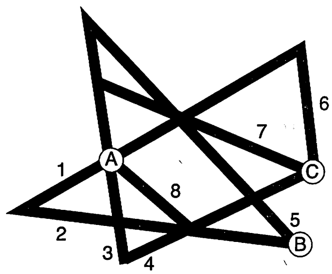
⊠ *Quelques lecteurs contestataires du résultat annoncé ont distingué les situations «gagnantes pour la tortue», «gagnantes pour le lièvre» et «ex aequo». Elles se produisent effectivement dans 1 cas sur 2 pour la première, 3 cas sur 16 pour la seconde et 5 cas sur 16 pour la troisième. Le lièvre ne l'emportant, dans l'énoncé, que si la tortue ne gagne pas, chacun a bien autant de chances de gagner que l'autre.*

312. Un musée bien gardé

On dénombre 8 allées et 12 intersections. Il suffit de trois gardiens pour les contrôler.

Les allées sont numérotées de 1 à 8.
Le gardien A contrôle les allées 1, 3 et 8.
Le gardien B les allées 2 et 5.
Le gardien C les allées 4, 6 et 7.

(d'après le «Logic Flip»).



⊠ *Christian ROMON détaille sa démarche et justifie l'unicité de la solution donnée de la façon suivante :*

- *Les arêtes 6 et 8 n'ont que deux nœuds chacune : C et D pour 6, A et E pour 8.*
- *S'il existe une configuration-solution à trois nœuds, elle comporte donc l'un des quatres doublets (A, C), (E, C), (A, D) ou (E, D).*
- *Seul l'un de ces quatre couples, (A, C) associé au sommet B, permet de couvrir le reste des allées.*

313. La partie de cartes

Les cartes portaient les sommes : 2 €, 4 € et 5 €.

La somme distribuée à chaque tour est au moins égale à 6.
Le total distribué étant 55 euros, c'est qu'il y a eu 5 tours, chacun donnant lieu à la distribution de 11 euros. En principe, 5 configurations peuvent y mener :
A : 1, 2, 8
B : 1, 3, 7
C : 1, 4, 6
D : 2, 3, 6
E : 2, 4, 5
Or, en cinq coups, on ne peut :

• ni obtenir 18 (dont un « 2 ») avec la configuration A ;
• ni arriver à un nombre pair avec la configuration B ;
• ni arriver à 12 avec la configuration C ;
• ni atteindre 25 avec la configuration D.

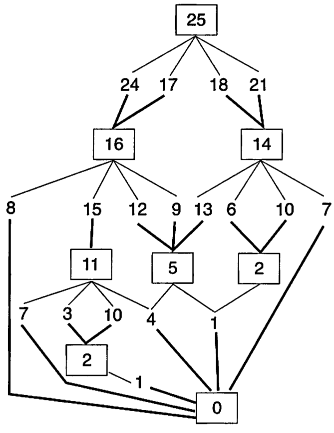
Seule, la configuration E convient, et on peut même reconstituer complètement la partie :

Athalie :	2 4 2 2 2
Bérénice :	4 2 4 4 4
Caligula :	5 5 5 5 5

314. Les vingt-cinq jetons

C'est Béatrice qui gagnera.

Le graphe ci-contre indique la stratégie gagnante de Béatrice (en gras), quelle que soit la façon de jouer d'André.



⊠ *Christian ROMON théorise sa solution en appelant « noyau » l'ensemble des positions perdantes pour celui qui les reçoit. Ce « noyau » est ici 0, 2, 5, 11, 14, 16 et 25. Le 25 du départ est donc perdant et Béatrice gagnera, précise-t-il en rendant systématiquement à André une position du noyau.*

315. Le dernier essai

• Les combinaisons encore possibles à ce stade sont 147, 182 et 184.

De l'essai B, on conclut que l'un au moins des chiffres 1, 2, 8 est à la bonne place. Mais ce ne peut être le 2 (essai C) ni le 8 (essai D) : c'est donc le 1, en première position. Le 9 ne pouvant donc être ni en première position, ni en deuxième (essai D), ni en troisième (essai C), il ne fait pas partie de la combinaison. Cette dernière comporte donc un (et un seul) des chiffres 4 ou 2 (essai C), et un (et un seul) des chiffres 7 ou 8 (essai D). En examinant les positions possibles de ces chiffres, on aboutit aux trois combinaisons indiquées.

• Il est alors possible de trouver la combinaison en un coup en proposant, par exemple, le code 802. La diode jaune correspondra alors à la combinaison 184, la verte à 182. Si elle ne s'allume pas, ce sera147.

⊠ *Un exemple différent (646) est proposé par Christian ROMON : le signal jaune correspond alors à 184, le vert à 147 et l'absence de signal à 182.*

316. Maudits parcmètres !

• Les jetons sont de 1, 3 et 8 unités.

- Les jetons de 1 sont nécessaires. Comme on ne peut en utiliser que deux, il faudra par ailleurs des jetons de 2 ou de 3 unités.
- En choisissant la valeur 2, on ne peut dépasser 6 avec deux jetons de chaque. Il faudra donc un jeton marqué au plus 7, et avec quatre jetons, on ne pourra dépasser 18.
  Il faut donc utiliser la valeur 3, ce qui permet d'atteindre tout total jusqu'à 8. Le troisième jeton devra être marqué au plus 9.
- En choisissant des jetons de 1, 3 et 9, le système de numération de base 3 nous apprend qu'avec au plus deux utilisations chacun, on peut obtenir toute somme de 1 à 26, mais en dépassant le total de quatre jetons. Ainsi, on ne peut obtenir 17 qu'avec cinq jetons. Il faut donc réviser la troisième

valeur à la baisse. En choisissant 7, on ne peut obtenir 19 qu'avec cinq jetons.

En revanche, avec 8 comme troisième valeur, il est possible d'obtenir toute valeur entre 1 et 20.

• Si le parcmètre peut rendre la monnaie, des jetons de valeurs faciales 1, 5 et 24 permettent de payer toute somme entre 1 et 54.

⊠ *Attention ! Ce n'est pas parce qu'on peut payer toute somme entre 1 et 54 qu'on peut le faire avec n'importe quels jetons ! On ne pourra effectivement pas payer 1 unité avec un jeton de 24 comme nous le signale Jean SCHILLING (54000 Nancy).*

317. L'ennéagone

Il est possible de n'obtenir que des « 1 » sur l'ennéagone mais pas sur l'hexagone.

• Il suffit d'abord de se rendre compte que le total des chiffres obtenus reste toujours impair. Il n'est donc pas possible d'entourer l'hexagone de chiffres « 1 », le total 6 étant pair.

• Pour l'ennéagone, voici une suite de procédures (le « pivot » du coup suivant est souligné) :

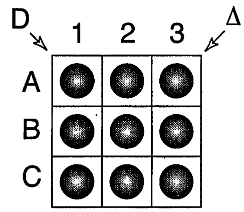
$\underline{1}$
$1\ 1\ \underline{1}$
$\underline{1}\ 0\ 1\ 1$
$\underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1$
$1\ 1\ 0\ \underline{1}\ 1\ 1$
$1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \underline{1}$
$\underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$
$1\ 1\ 0\ \underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1$
$1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \underline{1}\ 1\ 1$
$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \underline{1}$
$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$

On peut remarquer que cet algorithme fonctionne pour tout polygone possédant un nombre impair de côtés.

⊠ *On peut, dit C. ROMON, généraliser le résultat : « Si sur un n-gone on a une chaîne fermée ordonnée comportant un nombre impair de côtés séparés entre eux par un même troisième et que cette chaîne ne comporte que des zéros, on ne peut pas la transformer entièrement ».*

318. Les neuf pièces

Il est possible de trouver la pièce plus lourde et celle qui est plus légère en 4 pesées.



Remarquons d'abord qu'il y a 72 dispositions possibles de ces deux pièces. Une pesée ne pouvant avoir que 3 résultats, 4 pesées au moins sont nécessaires : avec 3 pesées, on ne pourrait discriminer que 27 cas ($3^3 = 27$, alors que $3^4 = 81$).

Pour illustrer notre solution en 4 pesées, imaginons que les pièces sont placées sur un damier, comme sur la figure.

Pesée 1 : ligne A contre ligne B.

Pesée 2 : colonne 1 contre colonne 2.

Les intruses ne pouvant être à la fois dans la même ligne et dans la même colonne, il ne peut y avoir deux égalités. Quitte à effectuer une rotation, ou échanger des numéros de lignes, ou encore de colonnes, il ne reste que deux cas à étudier :

• Cas 1 : A > B et 1 = 2

• Cas 2 : A > B et 1 > 2.

Opérons alors deux nouvelles pesées.

Pesée 3 : ligne C contre colonne 3

Pesée 4 : A1 et B2 contre B1 et A2.

Les tableaux ci-contre donnent dans les deux cas la pièce la plus lourde (en gras) et la pièce la plus légère :

Cas 1 : A > B et 1 = 2	C < 3	C = 3	C > 3
A1 + B2 < A2 + B1	**A2** C2	**A2** B2	**C2** B2
A1 + B2 = A2 + B1	**A3** C3	**A3** B3	**C3** B3
A1 + B2> A2 + B1	**A1** C1	**A1** B1	**C1** B1

Cas 2 : A > B et 1 > 2	C < 3	C = 3	C > 3
A1 + B2 < A2 + B1	**A3** B2	**C3** B2	**C1** B2
A1 + B2 = A2 + B1	**A3** C2	**A1** B2	**C1** B3
A1 + B2 > A2 + B1	**A1** C2	**A1** C3	**A1** B3

✉ *C'est sur les suggestions de Yves ARCHAMBAULT (Paris) et Elio SUHAMY (Paris) que nous avons amélioré la solution initiale.*

319. Division nationale

• Avec 16 équipes, les écarts peuvent être tous différents.
Exemple : 7-0, 1-7, 6-1, 2-6, 0-3, 4-2, 3-4, 5-5

• Avec 20 équipes, c'est impossible.
En effet, la somme des différences algébriques des scores est nulle, puisque le total des buts marqués par les équipes à domicile et par les équipes visiteuses est le même.
La somme de deux entiers ayant même parité que leur différence, la somme des écarts est donc un nombre pair.
Si les écarts étaient tous différents, ils seraient égaux à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, dont la somme, 45, est un nombre impair, ce qui montre l'impossibilité.

✉ *Sur une remarque de C. ROMON, nous ajouterons que pour des scores de 0 à 7 ou de 0 à 8 (et plus généralement de 0 à 4k + 3 ou de 0 à 4k) il est possible d'avoir des écarts tous différents. Voici ses exemples pour 7 équipes, puis pour 8 :*

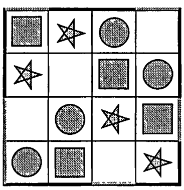
Équipes A	7	0	6	1	5	3	4	2
Équipes B	0	6	1	5	3	4	7	2
Écarts	7	6	5	4	2	1	3	0

Équipes A	8	0	7	1	6	3	5	4	2
Équipes B	0	7	1	6	3	5	4	8	2
Écarts	8	7	6	5	3	2	1	4	0

320. Total 100 interdit

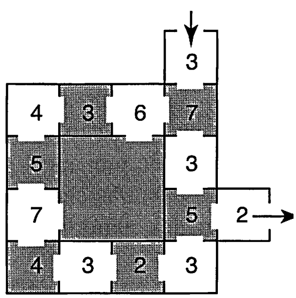
Il y a au plus 50 nombres dans le groupe.
– Il est possible de trouver un tel groupe de 50 nombres, par exemple tous les entiers de 50 à 99.
– Un tel groupe ne peut contenir 51 nombres. Car dans chacun des couples suivants, un seul nombre peut appartenir au groupe : (1, 99), (2, 98), (3, 97),..., (48, 52), (49, 51). Cela limite le groupe à 49 nombres, auxquels on peut ajouter le nombre 50, soit un total 50 nombres maximum.

321. Les lucarnes



322. Le musée

Le visiteur est entré 4 fois dans la cour.
Imaginons un coloriage des pièces comme sur la figure. Les ouvertures permettent toujours de passer d'une pièce blanche à une pièce grise ou réciproquement, la cour étant considérée comme grise.
Le circuit commençant et se terminant par une pièce blanche, le nombre d'entrées dans une pièce blanche (31) est supérieur d'une unité au nombre d'entrées dans une pièce grise. Or, ce nombre d'entrées, hors la cour, est 26.
D'où le résultat.



323. Le bonimenteur

Il y a au plus huit jetons dans le sac.

• Le sac pourrait par exemple contenir les nombres 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5 : il est clair que la somme de 5 d'entre eux ne peut jamais être un multiple de 5.

• Pour montrer *a contrario* qu'avec 9 nombres, il existe toujours une possibilité que la somme de 5 d'entre eux soit un multiple de 5, imaginons (raisonnement par l'absurde) un ensemble de 9 nombres tels qu'aucune somme de 5 d'entre eux soit un multiple de 5.

Pour simplifier, on désignera les nombres par leur reste dans la division par 5 (ce qui ne change rien à la divisibilité de leur somme). Les seules valeurs prises par les restes sont donc 0, 1, 2, 3 et 4.

On peut exclure tout de suite dans l'ensemble des 9 nombres :

– un reste pris 5 fois (au moins) : la combinaison AAAAA aurait une somme divisible par 5.

– la coexistence des 5 restes : $0 + 1 + 2 + 3 + 4$ est un multiple de 5.

Il ne reste plus que des ensembles de 9 nombres comportant trois ou quatre restes pris chacun entre une et quatre fois.

Une étude exhaustive montre non seulement que c'est impossible que la somme de 5 quelconques des nombres parmi 9 ne soit jamais multiple de 5, mais même qu'avec trois valeurs, ce serait impossible pour la somme de 5 nombres parmi 8, et qu'avec quatre valeurs pour la somme de 5 nombres parmi 7.

⊠ *Solution très détaillée de C. ROMON. G. BLANC tente de généraliser le problème en posant la question : De toute suite de longueur 2n – 1, peut-on toujours extraire une sous-suite de longueur n dont la somme soit multiple de n ?*

324. Le festin des souris

Il reste à Grisette trois tranches de gouda. De plus, elle ment : à un moment donné, elle avait autant de biscottes que de tranches de fromage.

• Il suffit de s'intéresser à la différence « Nombre de biscottes – Nombre de tranches de fromage » possédées par Grisette.

Cette différence, strictement positive avant le premier échange (elle est égale à 3 à l'ouverture du premier sachet), augmente de 3 à chaque ouverture de sachet, et diminue de 3 à chaque échange.

Quand il ne reste plus de biscotte, c'est qu'elle est égale à –3 (au-delà, il y aurait eu une ouverture ou un échange inutile). De plus, pour passer de +3 à –3, c'est qu'elle a transité par 0 au bout d'un nombre entier d'échanges, d'où le diagnostic du mensonge.

⊠ *On peut, bien sûr, comme l'ont fait certains de nos lecteurs, inventer nombre de scénarios de festins de souris mais sans jamais oublier qu'il ne doit rester à Grisette plus aucune biscotte mais quelques tranches de fromage et à Roussette plus aucune tranche de fromage mais quelques biscottes !*

325. Symétrie permise

On peut tracer un point au nœud E en 3 étapes

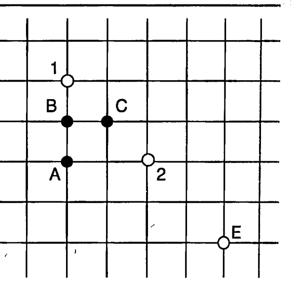
Point 1 : générateur A, centre B ;

Point 2 : générateur 1, centre C ;

Point E : générateur 1, centre 2.

On ne peut pas tracer de point en D.

En effet, si, en prenant B pour origine, on s'intéresse aux coordonnées des points, on s'aperçoit que les coordonnées d'une image ont même parité que les coordonnées du générateur.



Le point D, ayant ses deux coordonnées impaires, ne peut être engendré que par un point dont les deux coordonnées sont impaires, lui-même ne pouvant être engendré que par un point de coordonnées impaires et ainsi de suite... Or, un tel point n'existe pas sur la figure initiale.

⊠ *Bonnes suggestions de C. GILORMINI (54600 Villers les Nancy), de C. ROMON et... d'un lecteur anonyme.*

326. Les paris sont ouverts

L'ordre d'arrivée est ZWYX.

En effet, parmi les paires consécutives ZX, XW et WY du pari de Bob, une seule est bonne.

- ZX est à éliminer, car c'est une paire consécutive du pari d'Alice.
- Si X et W se suivaient à l'arrivée, X ne pourrait être en deuxième position (Bob aurait deux escargots à la bonne place), ni en troisième position (Alice aurait deviné la place de X).

X ne pourrait donc être qu'en tête, et il reste deux configurations : XWYZ, impossible car Bob n'aurait aucun escargot bien placé, et XWZY, impossible car Alice en aurait un.

- Reste WY : W ne peut être en première position (pari d'Alice), ni en troisième (pari de Bob).

Pour W en seconde position, les ordres d'arrivée possibles sont XWYZ (impossible car Bob n'aurait aucun escargot bien placé), et enfin ZWYX compatible avec toutes les conditions.

⊠ *Précisons, sur une remarque de C. ROMON, que la déception d'Alice est due au fait que « Tout paire consécutive conduit à une inversion de l'ordre ».*

327. Des clubs politiques

Il existe exactement 3 clubs.

Il existe plus d'un club, puisque tous les adhérents ne peuvent appartenir au même.

Un même adhérent appartient à au moins deux clubs, sans quoi il existerait un autre adhérent qui ne partagerait pas avec lui l'appartenance à un même club.

Il existe donc deux clubs distincts A et B, dont l'intersection C n'est pas vide.

Appelons A' l'ensemble des membres appartenant à A mais pas à B, B' l'ensemble des membres appartenant à B mais pas à A. Un membre quelconque de C appartient déjà à deux clubs. Il est donc impossible qu'il fasse « club commun » avec un élément extérieur à A et B. La réunion $A' \cup C \cup B'$ (qui est aussi $A \cup B$) contient donc tous les membres du parti.

Mais les membres de B' n'ont encore aucun club commun avec ceux de A'. Comme les uns et les autres n'ont plus le droit d'appartenir qu'à un seul autre club, il existe un club contenant à la fois les membres de B' et de A'.

A, B et $A' \cup B'$ sont donc les trois seuls clubs, et tous les adhérents du parti appartiennent à deux d'entre eux.

328. Les cases grises

Il y a un nombre pair de colonnes.

Le total des cases grises est pair si le nombre de colonnes est multiple de 4, impair sinon.

- La somme de tous les nombres inscrits est paire, puisque c'est la somme des lignes.

Mais c'est aussi la somme des colonnes. Si le nombre de colonnes était impair, on trouverait, en les totalisant, une somme impaire, ce qui est absurde.

- On fait la somme des lignes de rang impair et des colonnes de rang pair. On obtient la somme des cases grises et d'une partie des cases blanches comptées deux fois. Ce total a donc la même parité que la somme des cases grises. Or, on a totalisé des lignes (de sommes paires) et la moitié des colonnes, chacune ayant une somme impaire.

En définitive, la somme a la parité de la moitié du nombre de colonnes.

329. Les trois tables

Le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante.
Il pose le premier pion au centre d'un guéridon, par exemple A.

• Si le deuxième joueur pose un pion sur le guéridon A, il répondra en posant son pion à la position symétrique par rapport au centre de A.

• Si le deuxième joueur pose un pion sur un autre guéridon, par exemple B, il répondra en posant un pion selon une isométrie (choisie une fois pour toutes) qui transforme B en C. Il va de soi que si le deuxième joueur pose un pion sur C, le premier répondra selon l'isométrie réciproque.

(problème inspiré d'un courrier de Laurent Morel).

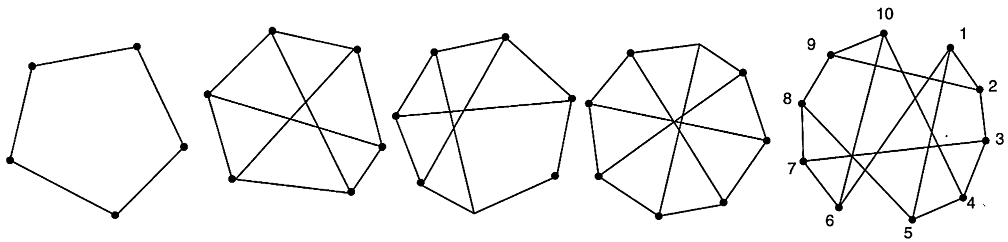
⌧ C. ROMON propose une stratégie toute simple : celle de choisir pour isométrie l'identité, c'est-à-dire de répondre en posant sur la dernière table un jeton exactement au même endroit que l'autre joueur sur la table précédente.

330. Réseau routier

Il y a au plus 10 villes dans l'île (mais il ne peut pas y en avoir 9).
Voici des solutions à 5, 6, 7, 8, 10 villes.

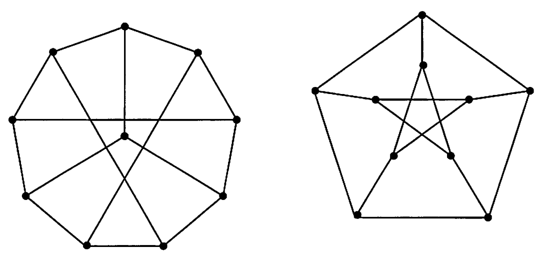
• Avec 9 villes, il ne peut pas se faire que des 9 villes partent 3 routes. En effet, on parviendrait à 27 extrémités de routes (nombre impair) alors que chaque route compte 2 extrémités. Il existe donc une ville, soit A, dont ne partent que 2 routes. A est reliée directement à B et C; de B et C partent au plus 2 routes menant au plus à D, E, F et G, ce qui fait au total au plus 6 villes reliées directement ou via une étape à A. Il ne peut y en avoir 8.

Il ne peut y avoir plus de 10 villes puisqu'une ville donnée ne peut être reliée au plus qu'à trois villes par une route directe et six autres villes par une liaison avec une étape ; le réseau ne pourra effectivement comporter au plus que 1 + 3 + 6 = 10 villes.



⌧ Merci aux nombreux lecteurs qui nous ont envoyé leurs solutions pour un réseau à 10 villes : Jacques DEMOULIN (78150 Le Chesnay), Jean DURUP (34200 Sète), Gérard FERRET (Paris), Patrick GORDON (Paris), Yvan GRIMALDI (77300 Fontainebleau), Pierre PAUFIQUE (22700 Perros Guirec), Christian ROMON, Jean SCHILLING (54000 Nancy), Bernard TRUFFAULE (11980 Sainte-Luce-sur -Loire). Le regretté Adrien DOUADY précise en outre que le graphe représentant cette situation est un dodécaèdre (12 faces, 20 sommets) où on identifierait les sommets opposés.

Certains dessins sont spécialement symétriques et méritent d'être reproduits ici :



331. La course

L'ordre d'arrivée est Daniel – Antoine – Claude – Etienne – Bernard

Il y a un menteur parmi Antoine et Etienne, un autre parmi Daniel et Bernard.
Donc Claude dit la vérité. Il est arrivé troisième.
Si Etienne disait vrai, Bernard serait deuxième et Claude troisième, et Etienne serait premier (car il dirait la vérité) ce qui est contredit par Claude.
Donc Etienne ment et Antoine dit vrai : il est deuxième et Claude troisième. Etienne est quatrième, puisqu'il ne peut être dernier (d'après Claude).
Il reste les deux configurations : D - A - C - E - B et B - A - C - E - D
La dernière est impossible, puisque Bernard affirme que Daniel est quatrième.

✉ *Jean-Pierre LECA (Paris) prend la peine d'étudier les dix choix possibles des deux menteurs en construisant la table de vérité des déclarations de A, B, C, D et E, pour aboutir à tous les éliminer sauf celui qui conduit au bon ordre d'arrivée : D - A - C - E - B.*

332. Duel triangulaire

Antoine a gagné 10 fois.

En effet, si on désigne chaque joueur par son initiale et si on appelle UV le nombre de victoires de U contre V, les hypothèses se traduisent par les relations suivantes :
1. « Bernard a perdu 15 parties » : AB + CB = 15
2. « Carole a gagné 19 parties » : CA + CB = 19
3. « Chaque défaite de Bernard (en dehors de la dernière) a été suivie d'une partie entre Antoine et Carole, et réciproquement chaque partie entre Antoine et Carole a été précédée d'une défaite de Bernard » : AC + CA = 14

L'inconnue X est le nombre de victoires d'Antoine AB + AC
En additionnant les relations 1 et 3, on obtient : AB + AC + CB + CA = 15 + 14,
soit X + 19 = 29.

✉ *Solution spécialement détaillée de Richard RIEDEL (Paris)*

333. Les nombres de Quentin

La longueur maximale d'un nombre de Quentin est 6.
Il y a 80 nombres de Quentin à 6 chiffres.

Commençons par une remarque :
si 4 chiffres *abcd* se suivent dans un nombre de Quentin, la différence entre *a* et *d* est 5.
• Ainsi, si 7 chiffres se suivaient, le premier et le septième seraient égaux.
Un nombre de Quentin ne peut donc avoir 7 chiffres ou plus, et on peut en trouver de longueur 6 (par exemple 140 695), d'où la longueur maximale de 6.
• Compte tenu de la remarque préliminaire, un nombre de Quentin à 6 chiffres s'écrit :
$a\ b\ c\ a'\ b'\ c'$ où $a' = a \pm 5$, $b' = b \pm 5$, $c' = c \pm 5$.
Il est donc entièrement déterminé par ses trois premiers chiffres $a\ b\ c$.
Si on se borne à des chiffres compris entre 0 et 4, a, b, et c ne peuvent prendre (dans le désordre) que les valeurs 0, 1, 4 ou 0, 2, 3, soit, s'il n'y avait pas d'interdiction de commencer par 0, 12 possibilités. Mais on peut remplacer chacun des trois chiffres par le chiffre augmenté de 5, ce qui multiplie par 8 le nombre de combinaisons. Sur les 96 nombres ainsi obtenus, il faut enlever les 16 qui commencent par 0, ce qui en laisse 80.

334. Le jeu des trois mousquetaires

Atos disposait de 6 louis, Bortos et Caramis de 9 louis chacun.

Si on appelle A, B et C les trois sommes misées par les mousquetaires, il apparaît que A est pair, puisque la somme peut être partagée en deux parts. On pose $A = 2a$.

Voici ce que possèdent les mousquetaires après chaque tour :

	Atos	Bortos	Caramis
	$2a$	B	C
1er tour	0	$(B + a)$	$(C + a)$
2e tour	$(B + a)/2$	0	$(2C + B + 3a)/2$
3e tour	$2a + C$	$(2C + B + 3a)/4 = B$	0

De l'équation issue du capital de Bortos, qui s'écrit aussi : $2\,C = 3\,(B - a)$, on déduit l'existence d'un entier strictement positif k tel que : $C = 3k$ et $B - a = 2k$.

$A + B + C = 24$ s'écrit alors : $5k + 3a = 24$, qui a pour seule solution $k = a = 3$ si on exige que les entiers a et k soient strictement positifs.

335. Les deux tours

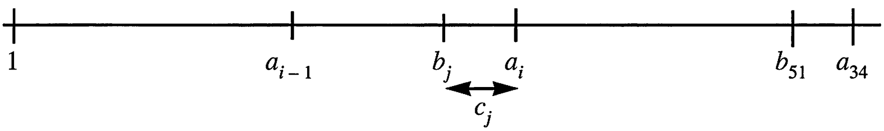
Il existe toujours une colonie de la tour A et une colonie de la tour B qui comptent le même nombre d'habitants.

Supposons que l'une des tours (par exemple la tour A) ait plus d'habitants que l'autre (sinon le problème aurait comme solution évidente les colonies formées de l'ensemble des tours).

Pour i allant de 1 à 34, appelons a_i le nombre de personnes qui habitent entre l'étage 1 et l'étage i inclus de la tour A.

Pour j allant de 1 à 51, appelons b_j le nombre de personnes qui habitent entre l'étage 1 et l'étage j inclus de la tour B.

Si l'un des a_i est égal à l'un des b_j, c'est gagné ! Sinon, dessinons les suites entremêlées des a_i et des b_j. Vu leur disposition, pour tout j de 1 à 51, b_j est strictement compris entre deux a_i consécutifs. Cela détermine l'entier c_j (voir dessin).



De plus, $a_i - a_{i-1}$ (nombre d'habitants de l'étage i) est au plus égal à 51 et donc c_j est compris entre 1 et 50. Quand j varie, c_j prend 51 valeurs parmi 50 possibles, deux des c_j sont égaux.

La colonie de la tour B comprise entre les étages correspondant à ces deux valeurs de j a donc le même nombre d'habitants que la colonie de la tour A comprise entre les étages i associés.

Et si la tour B avait eu plus d'habitants que la tour A, on arriverait à la même conclusion en inversant les rôles des deux tours.

336. Deux packs dans un vestiaire

En appelant A1, A2,... A15 les joueurs de gauche (dont il veut démontrer qu'ils sont les All, plus légers) et B1, B2,... B15 les joueurs de droite (dont il veut démontrer qu'ils sont les Black, plus lourds), l'arbitre opère les quatre pesées suivantes, qui penchent toutes à droite :

Première pesée :	A1	B1
Deuxième pesée :	B1 A2 A3	A1 B2 B3
Troisième pesée :	B1 B2 B3 A4 A5 A6 A7	A1 A2 A3 B4 B5 B6 B7
Quatrième pesée :	B1... B7 A8...A15	A1...A7 B8...B15

De chaque pesée, il ressort qu'il y a plus de All sur le plateau de gauche que sur le plateau de droite (et donc plus de Black sur le plateau de droite que sur celui de gauche).
Plus précisément, de la première pesée, il ressort que A1 est un All et B1 un Black.
De la deuxième pesée, comme on connaît le All A1 à droite et le Black B1 à gauche, c'est que A2 et A3 sont des All tandis que B2 et B3 sont des Black.
De la troisième pesée, comme on connaît les All A1, A2, A3 à droite et les Black B1, B2, B3 à gauche, c'est que A4, A5, A6 et A7 sont des All tandis que B4, B5, B6 et B7 sont des Black.
La dernière pesée vient de la même façon entièrement conforter l'hypothèse de l'arbitre.

✉ *François ADRIEN (78000 Versailles) propose une solution qui a le mérite de s'énoncer simplement.*
La balance penche toujours à gauche, voici les pesées :

	Plateau de gauche	*Plateau de droite*
1re pesée :	*B1*	*A1*
2e pesée :	*B1A1*	*A2A3*
3e pesée :	*B1A1A2A3*	*A4A5A6A7*
4e pesée :	*B1A1A2A3A4A5A6A7*	*A8A9A10A11A12A13A14A15*

337. En rangs par deux !

L'unité compte 160 personnes.

Il y a autant d'hommes que de femmes. En conséquence, il y a autant de paires d'hommes que de paires de femmes. Mais comme il y a autant d'hommes que de femmes dans chaque rangée, le nombre d'hommes associés à une femme d'une rangée est égal au nombre de femmes de la même rangée associées à un homme. Le nombre m de paires mixtes est donc pair.
Compte tenu des hypothèses (deux fois plus de paires de femmes que de paires mixtes), il y a donc $2m$ paires de femmes, $2m$ paires d'hommes et m paires mixtes, soit $5m$ paires.
L'effectif est donc $10m$ et comme m est pair, c'est un multiple de 20.

338. Hitori, le successeur ?

La solution suivante est unique.

G	B		F	C		E	D
	C	B	E		H		G
A	G		H	B	F	D	E
B		F	D		E	C	
	F	D	A	E		G	C
E	A	G		H	D	F	
	E		G	F		B	H
C	D	E		A	G		F

339. Cinq masses

Il est possible d'identifier les billes en 5 pesées.

On prend 4 billes qu'on appellera A, B, C, D et on compare les groupes de deux de ces billes de toutes les façons possibles (cela fait donc 3 pesées).

- S'il y a un équilibre parmi ces trois pesées ($A + B = C + D$), c'est que la laissée pour compte E pèse un nombre impair de grammes (puisque $A + B + C + D = 15 - E$ est pair).
  Appelons A la bille qui est sur le plateau le plus bas dans les deux autres pesées et B celle qui est sur le plateau le plus haut. On compare alors les deux autres, et on appelle C la plus lourde.
  On a donc : $A + B = C + D$; $A + C > B + D$; $A + D > B + C$; $C > D$.
  ce qui se traduit par : $A > C > D > B$.
  Dernière pesée, on compare E à $B + D$.

Si $E > B + D$, c'est que $E = 5$ (et $A = 4, C = 3, D = 2, B = 1$).
Si $E = B + D$, c'est que $E = 3$ (et $A = 5, C = 4, D = 2, B = 1$).
Si $E < B + D$, c'est que $E = 1$ (et $A = 5, C = 4, D = 3, B = 2$).

• S'il n'y a pas d'équilibre parmi ces trois pesées, c'est que la laissée pour compte E pèse un nombre pair de grammes. Deux cas sont possibles :

– Il existe une bille A sur tous les plateaux bas. C'est que $A = 5$ et $E = 4$.
On compare deux des billes B et C (par exemple $B > C$), puis $E = 4$ à $B + C$.
Si $E > B + C$, c'est que $B = 2$ et $C = 1$ (donc $D = 3$).
Si $E = B + C$, c'est que $B = 3$ et $C = 1$ (donc $D = 2$).
Si $E < B + C$, c'est que $B = 3$ et $C = 2$ (donc $D = 1$).

– Il existe une bille A sur tous les plateaux hauts. C'est que $A = 1$ et $E = 2$.
On compare deux des billes B et C (par exemple $B > C$), puis B à $A + D$ pour conclure.
Si $A + D > B$, c'est que $D = 5$, si $A + D = B$, c'est que $D = 4$, si $A + D < B$, c'est que $D = 3$.

340. Le secret de Polichinelle

2005 messages sont nécessaires pour que Polichinelle connaisse le secret, 4010 pour que tout le monde le connaisse.

• Donnons un numéro de 1 à 2006 aux personnages, Polichinelle prenant le dernier numéro. Imaginons maintenant une chaîne de 2005 messages, du numéro 1 vers le 2, du 2 vers le 3, de 3 vers 4,..., de 2005 vers 2006. À l'issue de cette chaîne, Polichinelle sera au courant de tous les fragments du secret.

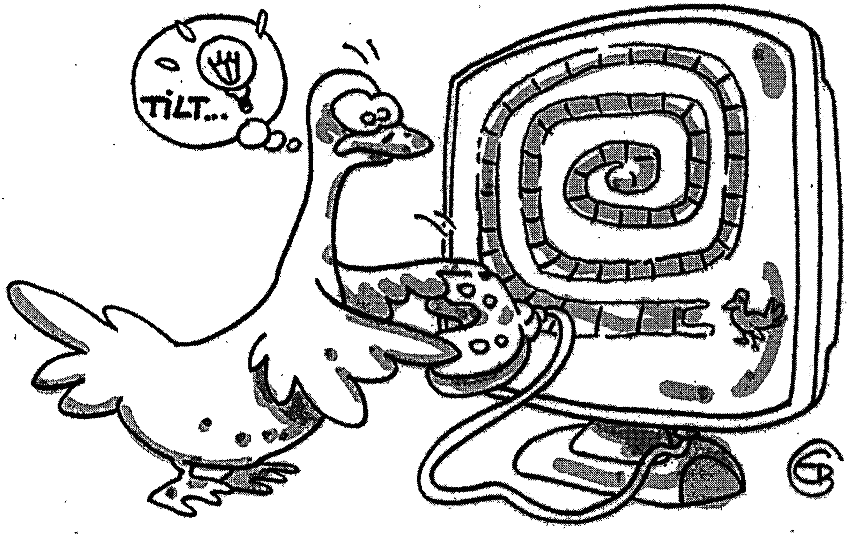
Par ailleurs, une telle situation ne peut se produire sans que chacun des personnages de 1 à 2005 n'ait livré son fragment, donc n'ait envoyé un message. 2005 est donc le nombre minimum de messages.

• Au bout de 2004 messages, d'après le raisonnement précédent, personne n'a encore une connaissance complète du secret. Pour que chacun le connaisse, il est donc nécessaire que chacun reçoive encore au minimum un message à partir de cet instant. Le nombre de messages nécessaires pour que chacun connaisse le secret est au moins égal à 4010.

Or, on peut trouver une façon d'y parvenir en 4010 messages. En partant de la situation où Polichinelle connaît le secret au bout de 2005 messages, il suffit que Polichinelle envoie un message à chacun des personnages de 1 à 2005 pour que tout le monde connaisse le secret au bout de 4010 messages.

Figures libres

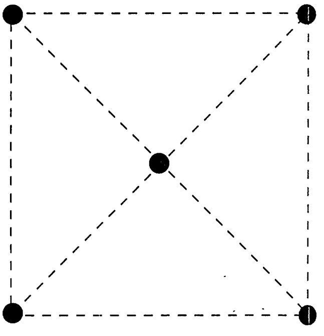
Chapitre 2



341. La pépinière

Problème n°304 du 17/12/02

La jeune Isabelle a demandé à son jardinier de planter un embryon de pépinière de cinq arbres dans son jardin. Mais pas n'importe comment !
Les triangles formés par trois quelconques d'entre eux doivent impérativement être isocèles. Voici (dessin ci-contre) comment le jardinier s'acquitta de sa mission.



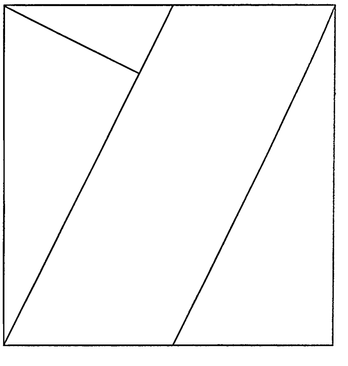
Mais la capricieuse jeune fille lui demanda de recommencer le travail sous prétexte qu'elle tient les carrés en horreur !

Comment le dévoué jardinier put-il la satisfaire, et même lui donner le choix entre deux configurations ?
Peut-on planter plus de cinq arbres en respectant les contraintes d'Isobelle ?

342. Le puzzle

Problème n°309 du 21/01/03

À partir d'un carré de bois, un menuisier découpe les 4 pièces d'un puzzle (un parallélogramme et 3 triangles rectangles) suivant le schéma ci-contre.
Il parvient alors, en disposant autrement les quatre pièces du puzzle, à former un rectangle assez « allongé ».



Reconstituez ce rectangle.
Quel est le « format » du rectangle, c'est-à-dire le rapport de la longueur sur la largeur ?

343. La ligne de tramway

Problème n°314 du 25/02/03

Cette petite ville de province a décidé de sacrifier à la mode du tramway. Mais elle n'a les moyens de construire qu'une ligne. Il est donc décidé, pour ménager les susceptibilités, qu'elle sera circulaire ! Malheureusement, les quatre pôles d'attraction de la ville, le stade, le théâtre, le marché et l'hôtel de ville, ne sont pas situés sur un même cercle. Il est donc décidé qu'ils seront à égale distance du tracé de la ligne.

Quels sont les tracés possibles ?

344. Un hexagone particulier

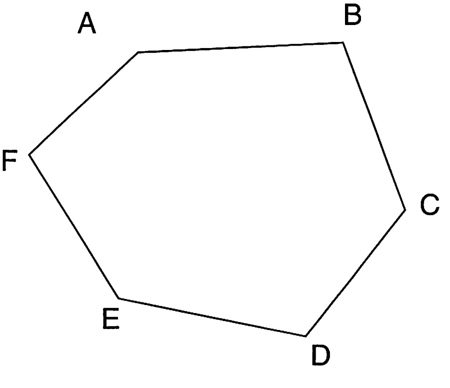
Problème n°319 du 01/04/03

« En géométrie, les raisonnements justes se font sur une figure fausse ».

Un hexagone convexe ABCDEF est tel que les aires des six triangles ABC, BCD, CDE, DEF, EFA et FAB soient toutes égales à 1.

Pourquoi la figure ci-contre, censée illustrer le problème, est-elle manifestement fausse ?

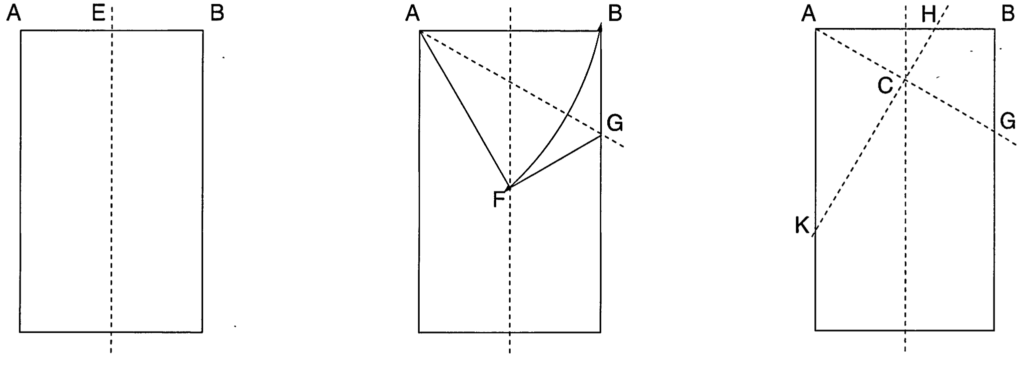
Quelle est l'aire minimum de l'hexagone ?
Et son aire maximum ?



345. La trisection par pliage

Problème n°324 du 06/05/03

Un jeune géomètre, déçu d'apprendre que la trisection d'un angle est impossible avec la seule aide d'une règle et d'un compas, décide de s'attaquer à la trisection d'un segment. Son seul outil ? Le pliage. Il commence par découper un morceau rectangulaire de papier dont la largeur AB est justement le segment à partager en 3. Voici alors ses trois étapes :

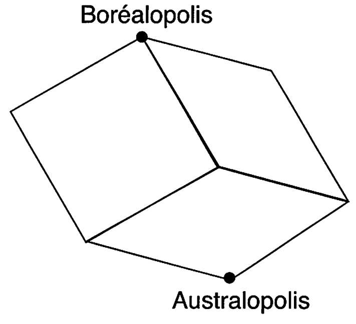


étape 1	étape 2	étape 3
Pli du rectangle. en deux E est le milieu de [AB]	Pli selon un axe (AG) passant par A de manière à amener B sur le pli médian (en F)	Pli amenant A en G selon un axe (HK) passant par C.

Le jeune géomètre a-t-il raison quand il prétend que H est au tiers de BA ?

346. La planète des deux empires

Problème n°329 du 10/06/03

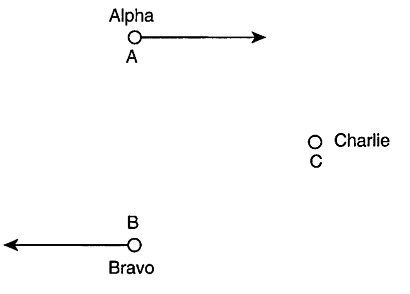


Loin de nous, dans une autre galaxie, existe une planète habitée de forme cubique. Elle tourne sur elle-même en vingt-quatre heures autour de l'axe de ses deux pôles qui sont des sommets opposés du cube. Sur la planète coexistent plus ou moins pacifiquement deux empires dont les capitales, Australopolis et Boréalopolis sont situées aux deux pôles.
Lors d'un grand sommet planétaire, il est décidé de fixer définitivement la frontière entre les deux empires : tout point de la planète appartiendra à un empire s'il est plus proche de sa capitale que de la capitale de l'empire rival.

Sauriez-vous représenter la frontière entre les deux empires ?

347. Les trois robots

Problème n°334 du 15/07/03



Sur un grand terrain plat, trois robots, Alpha, Bravo et Charlie, sont au sommet d'un grand triangle équilatéral ABC. Au signal, Alpha s'élance vers la droite dans la direction perpendiculaire à (AB), à la vitesse de 50 km/h. Bravo s'élance au même moment dans la même direction et à la même vitesse, mais vers la gauche. Quant à Charlie, il est programmé pour qu'à chaque instant, il forme avec Alpha et Bravo un triangle équilatéral.

Quelle trajectoire Charlie décrit-il ? À quelle vitesse se meut-il ?

348. Économie de distances

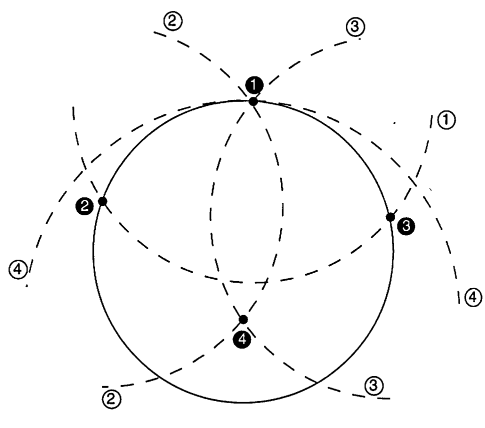
Problème n°339 du 19/08/03

Après avoir placé un certain nombre de points dans le plan, on calcule toutes les distances séparant deux d'entre eux. L'objectif est de minimiser le nombre des distances différentes.
Ainsi, avec 3 points, on peut n'avoir qu'une distance si on choisit les points au sommet d'un triangle équilatéral.

Quel est le nombre minimum de distances que l'on peut obtenir avec 4 points ? 5 points ?
6, 7, 8, 9 points ? 12 points ?

349. Le centre retrouvé

Problème n°344 du 23/09/03

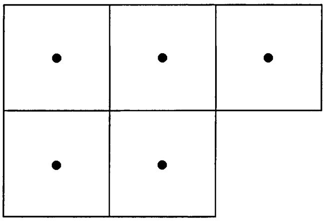


Un jour Napoléon, équipé d'un simple compas, traça un cercle (en trait continu) sur une plage de l'Ile de Beauté. Quand il revint, quelques minutes plus tard, le centre avait disparu, effacé par le vent. Sans s'émouvoir, et bien qu'ayant perdu l'ouverture de compas qui lui avait permis de tracer le cercle, l'empereur retrouva le centre, sous le regard admiratif de son entourage.
Il traça pour cela six arcs de cercle.
Le premier, centré en un point du cercle initial, avait un rayon quelconque mais plus grand que celui du cercle initial. Il est représenté, comme les trois suivants, en pointillés. Les numéros d'ordre des arcs sont indiqués en noir et entourés tandis que ceux des centres le sont en blanc sur fond noir.

Quelle est la suite de la procédure et pourquoi ?

350. Gargantua géomètre

Problème n°349 du 28/10/03



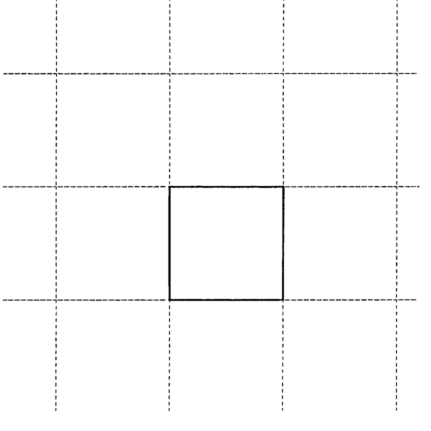
Pour fêter son anniversaire, Gargantua a confectionné une énorme patisserie en juxtaposant cinq gâteaux carrés identiques (collés entre eux par une bonne couche de crème au beurre) au centre desquels il a placé cinq magnifiques cerises.

Il veut alors, d'un seul coup de couteau, faire deux parts de même aire, une pour lui et une pour ses nombreux invités.
Gargantua n'est pas un expert en géométrie, il ne sait construire que le milieu d'un segment. Il invite cependant ses convives à le mettre à l'épreuve.
Qu'ils choisissent une cerise, et il coupera le gâteau en deux d'un seul coup de couteau passant par cette cerise et un point qu'il saura déterminer.

Gargantua pourra-t-il relever le défi ?

351. Le chemin de ronde

Problème n°354 du 09/12/03



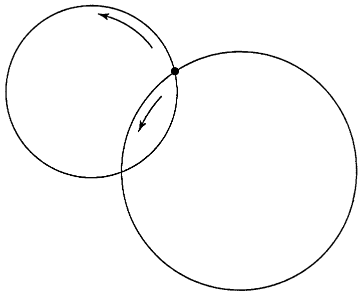
La réserve d'or de la banque Piquetout est enfermée dans la tour Harpagon, un haut bâtiment de base carrée. Tout autour, un « no man's land » en protège l'accès, lui-même entouré d'un chemin de ronde construit de telle sorte que de n'importe quel point du chemin, on voit la Tour Harpagon sous un angle de 45°.

Pourriez-vous tracer le chemin de ronde ?

352. L'araignée

Problème n°355 du 13/01/04

Deux mouches se posent sur l'un des points d'intersection de deux cercles de sucre situés sur une table. Elles partent simultanément, chacune le long de son cercle, à vitesse constante (pas la même), dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Après un tour complet, elles se retrouvent exactement en même temps à leur point de départ.



Pendant tout ce temps et sans qu'elles s'en doutent, une araignée les guette, immobile sur la table. Elle a choisi un point, connu d'elle seule, qui lui permet d'être à égale distance des deux mouches à chaque instant de leur périple.

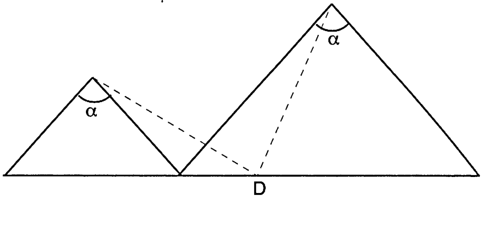
Où la cruelle araignée est-elle placée ?

353. Les montagnes de Flatland

Problème n°364 du 17/02/04

Dans l'univers de Flatland, il manque une dimension : la profondeur. Ainsi, les deux triangles isocèles de même forme de la figure ci-contre (ils ont le même angle au sommet α) sont des montagnes.
Les habitants, qui n'ont, eux non plus, aucune profondeur (géométriquement, ce sont des points), ont le choix entre les escalader (pour les plus sportifs) et suivre le chemin qui longe leur base commune.
Justement, aujourd'hui, un arpenteur longe ce chemin jusqu'à arriver au point D équidistant des deux sommets.

Sous quel angle voit-il ces deux sommets ?



354. Racine de sept

Problème n°369 du 23/03/04

Étant donnée une longueur-unité, il est assez classique de construire, à l'aide exclusive d'une règle non graduée et d'un compas, un segment de longueur $\sqrt{7}$.

Comment fait-on ?

Sauriez-vous, inversement, étant donnée sur une feuille blanche une longueur qu'on vous dit égale à $\sqrt{7}$, retrouver avec quelle unité elle a été mesurée ?

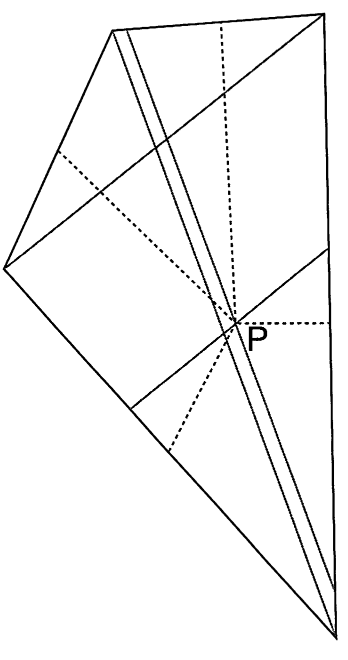
355. Le cerf-volant partagé

Problème n°374 du 27/04/04

Le vieil Euclide a offert à ses quatre petits-enfants un grand cerf-volant ayant la forme d'un quadrilatère convexe (sans autre propriété particulière). Mais les enfants se le disputent si âprement que leur grand-père, excédé, le déchire en quatre nouveaux quadrilatères, qu'il donne aux quatre garnements.

Son découpage n'est cependant pas le fait du hasard : par le milieu de chacune des diagonales, il a mené une parallèle à l'autre diagonale. Ces deux droites se coupent en un point P.

Euclide a alors coupé selon les segments joignant P aux quatre milieux des côtés du cerf-volant initial.



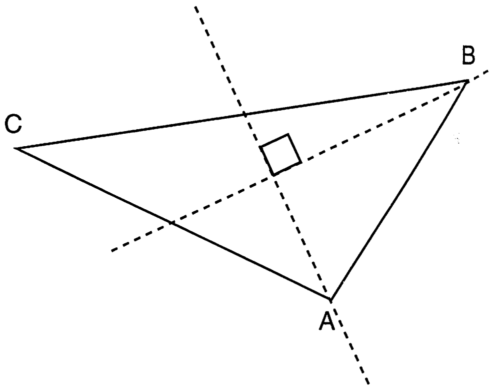
« Il n'y aura pas de jaloux, les quatre cerf-volants sont d'aires égales », affirme-t-il.

Euclide a-t-il raison ?

356. Triangles orthomédians

Problème n°379 du 01/06/04

Dans un triangle, les médianes sont les droites qui joignent un sommet au milieu du côté opposé.
La figure ci-contre est un triangle « orthomédian » selon A et B : les médianes issues de ces deux points sont perpendiculaires.



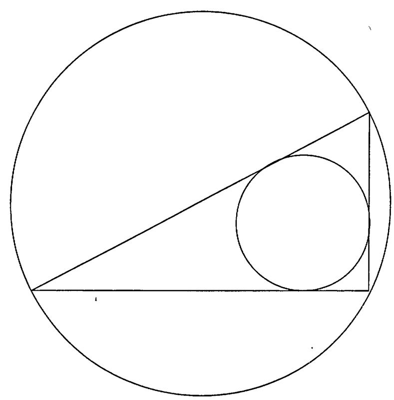
Pouvez-vous exprimer la somme des carrés des deux côtés $CA^2 + CB^2$ en fonction du carré du troisième AB^2 ?

PS : ne cherchez pas le mot *orthomédian* dans le dictionnaire, nous l'avons inventé.

357. Sangaku

Problème n°384 du 06/07/04

Il était d'usage dans le Japon antique d'offrir aux dieux amateurs de mathématiques... des problèmes de géométrie gravés sur des tablettes.
C'était l'art du sangaku.
Sur l'une des tablettes retrouvées, quelques coups de pinceau retraçaient l'énigme :



- le triangle est rectangle ;
- ses côtés sont entiers ;
- son aire est 60.

Quels sont les deux diamètres ?

358. Sur un billard

Problème n°389 du 10/08/04

Six boules de billard, de rayon 5 cm, sont placées dans un « triangle » équilatéral en restant toutes « à plat ». Ce serait impossible pour tout triangle plus petit, même légèrement.

Quel est la longueur d'un côté du triangle ?

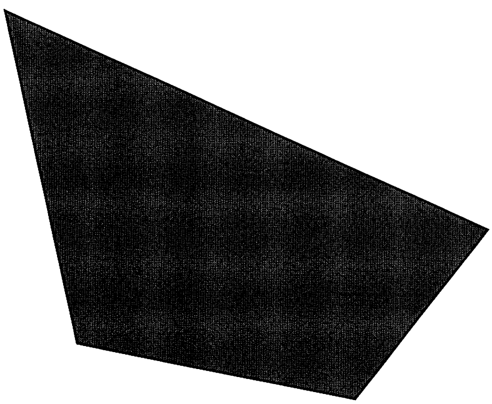
Quelle serait la longueur du côté du plus petit triangle équilatéral contenant quatre boules ? Et cinq ?

359. Patchwork

Problème n°394 du 14/09/04

Votre objectif : réaliser un « patchwork » avec des morceaux de tissu identiques, ayant tous la forme de ce quadrilatère convexe. Il s'agit d'obtenir un grand morceau de tissu plan, sans laisser de vide, et sans que deux morceaux se recouvrent.

Est-ce possible ?
Si oui, comment opérer ?



360. Le quadrilatère de M. Optimax

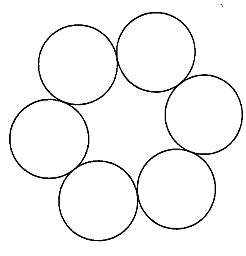
Problème n°399 du 19/10/04

M. Optimax est propriétaire terrien et bon mathématicien, ce qui a parfois des avantages.
Ainsi, lorsque l'administration lui a permis de construire une habitation dont le périmètre n'excédait pas 60 mètres, il a choisi de la construire circulaire car il savait qu'à périmètre donné, l'aire d'une figure plane est maximale quand la figure est un cercle.
Cette fois, c'est dans un quadrilatère convexe qu'il devait délimiter une plantation. La longueur des quatre côtés lui a été imposée par la réglementation. Elle est, naturellement, compatible avec l'existence de tels quadrilatères.

M. Optimax a décidé de faire en sorte que les quatre sommets de son quadrilatère soient situés sur un même cercle. Est-ce toujours possible ?
M. Optimax pense que, parmi tous les quadrilatères ayant ces longueurs pour côtés, le sien possède la plus grande aire. Est-ce vrai ?

361. Rondes et rondelles

Problème n°404 du 23/11/04



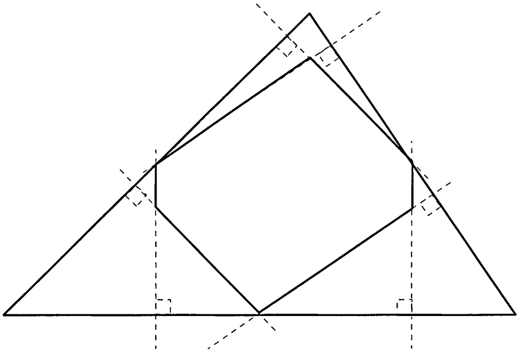
Cette fabrique de rondelles en métal a pris pour unité la pièce d'un euro. Les rayons des rondelles fabriquées sont des multiples entiers du rayon de la pièce d'un euro. Ainsi, une monorondelle a la taille d'un euro, une birondelle a des dimensions doubles, ..., une i-rondelle a pour rayon i fois celui d'un euro.
Le jeu favori du contremaître consiste à disposer des euros en ronde circulaire, de manière régulière, et d'essayer de placer au centre l'une des rondelles de sa fabrication. Voici la disposition qu'il obtient avec 6 euros.

Lui sera-t-il possible de placer au centre une monorondelle ? Quelle est la taille de la plus grande rondelle qu'il pourra inscrire au centre d'une ronde de 2005 euros ?

362. L'ortho-hexagone

Problème n°409 du 28/12/04

Dans un triangle acutangle (ses trois angles sont aigus), on mène par les milieux des trois côtés les perpendiculaires aux deux autres côtés. Ces six droites forment l'ortho-hexagone.



Quelle est le rapport de son aire à celle du triangle ?

363. L'archipel du polygone

Problème n°414 du 01/02/05

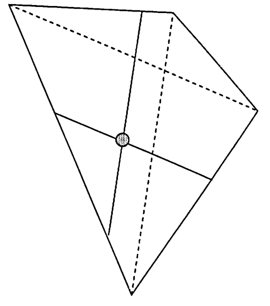
L'île de la Quarraïde, dans l'archipel du Polygone, est un petit territoire en forme de quadrilatère convexe. Aux sommets de ce quadrilatère se situent les quatre ports de l'île, Atoll, Barcarolles, Croisiport, Digue-Haute.

Patricia, la téméraire exploratrice, se retrouve dans les terres, à 20 km d'Atoll, 10 km de Barcarolles, 18 km de Croisiport et 6 km de Digue-Haute.

Quelle est, au maximum, la superficie de l'île de la Quarraïde ?

364. La cerise sur le gateau

Problème n°419 du 08/03/05



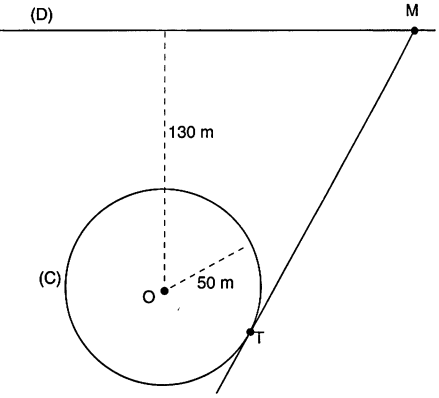
Quel beau gâteau d'anniversaire pour Alice et ses trois invités ! Seule difficulté, le partage. La patisserie a la forme d'un quadrilatère convexe pas spécialement remarquable, garni d'une cerise rouge bizarrement située à l'intersection de deux lignes (droites) de chocolat. Chaque ligne de chocolat est parallèle à une diagonale (en pointillés sur le dessin) garnie, elle, de crème vanille, et passe par le milieu de l'autre diagonale à la vanille.
Les convives sont admiratifs et salivent déjà, mais se demandent si Alice saura découper ce gâteau en quatre quadrilatères de même aire.

Comment Alice peut-elle donner quatre coups de couteau rectilignes passant tous au beau milieu de la cerise pour confectionner à coup sûr quatre parts égales ?

365. Distance rasante

Problème n°424 du 12/04/05

Depuis la route nationale (D) rectiligne, on peut apercevoir les ruines du fort (C), cercle parfait de 50 mètres de rayon dont le centre O est situé à 130 mètres à vol d'oiseau de la route (voir le plan).
On appellera « distance rasante » d'un point M à un cercle la longueur d'une tangente MT menée du point M au cercle.



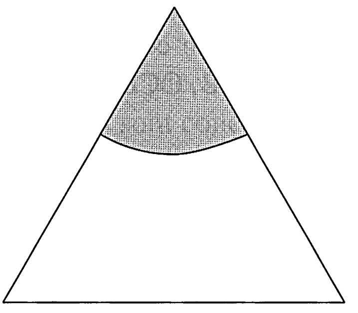
Sauriez-vous montrer l'existence d'un « point rasant » R du plan ne dépendant que de la droite (D) tel que pour tout point M de (D), la distance rasante de M au fort (C) soit égale à la distance de M au point R ?

Vous construirez R dans le contexte de la figure.

366. Mmh ! Des truffes...

Problème n°429 du 17/05/05

Pig, le cochon truffier, est chargé aujourd'hui d'une mission de la plus haute importance : repérer des truffes dans le Domaine du Petit Bois, une forêt en forme de triangle équilatéral. Pig est un honnête chasseur de truffes mais le rayon d'action R de son flair est exactement la moitié de la hauteur du triangle équilatéral en question.



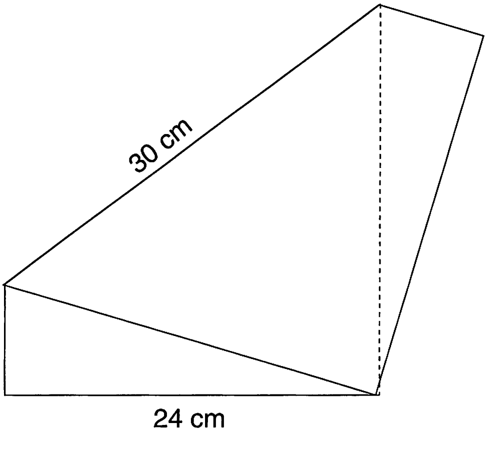
Comment faire pour que Pig et son maître, en partant d'un des coins du Petit Bois, fassent le moins de chemin possible tout en explorant bien sûr le domaine entier ?

367. Le pli

Problème n°434 du 21/06/05

On plie une feuille de papier rectangulaire de manière à amener l'un de ses coins sur le coin opposé.
La largeur de la feuille est 24 cm.
La longueur du pli est égale à 30 cm.

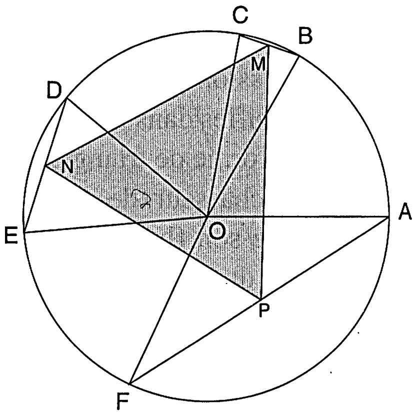
Quelle est la longueur de la feuille ?



368. Une symétrie inattendue

Problème n°439 du 26/07/05

A, B, C, D, E, F sont, dans cet ordre, 6 points pris sur un cercle de centre O tels que les triangles OAB, OCD, OEF soient équilatéraux.



M est le milieu de de [BC], N celui de [DE], et P celui de [FA].

Le triangle MNP présente une symétrie inattendue : laquelle et pourquoi ?

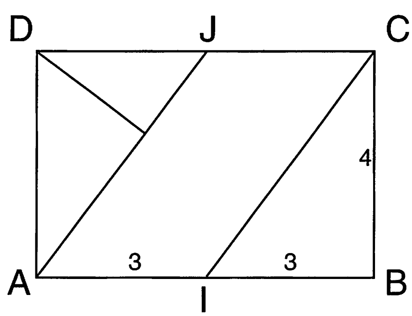
369. Un puzzle simple

Problème n°444 du 30/08/05

Le rectangle ABCD a pour dimensions AB = 6 cm et BC = 4 cm.

En trois coups de ciseaux, on le découpe en quatre pièces, trois triangles rectangles et un parallélogramme (voir la figure, où I est le milieu de [AB], et J le milieu de [CD]).

Peut-on réarranger les morceaux en un autre rectangle ? Si oui, quelles sont ses dimensions ?



370. Théorème brouillé

Problème n°449 du 04/10/05

« Dans le triangle acutangle* ABC, la bissectrice issue de A, la médiane issue de B et la hauteur issue de C se coupent en un point P.
– Tu mélanges les théorèmes ! Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes, les trois médianes sont concourantes, les trois hauteurs sont concourantes.
– Mais moi je te parle d'un triangle particulier !
– S'il est équilatéral, c'est évidemment vrai.
– Non, il n'est pas équilatéral. D'ailleurs l'angle A fait 70°.»

Comment construire un tel triangle ?
Resterait-il acutangle si l'angle A était égal à 45° ?

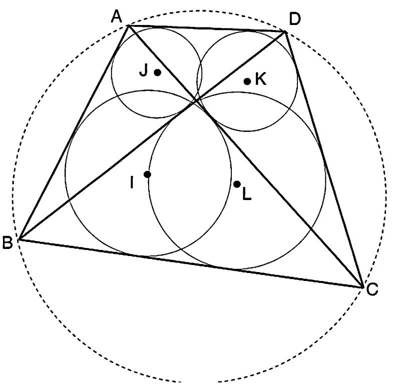
* *triangle acutangle* : dont tous les angles son aigus

371. Sangaku (et pas sudoku)

Problème n°454 du 08/11/05

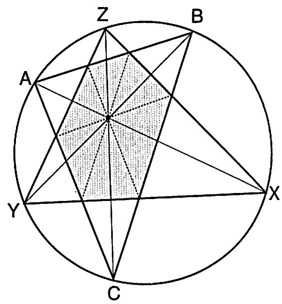
Les san ga ku, ce sont ces tablettes votives en bois qu'on trouve dès le XVII^e siècle dans les temples japonais, où figurent de petits problèmes de géométrie. Très visuels, ils se passaient des mots pour se comprendre.
Pour ceux qui en ont besoin, A, B, C et D sont cocycliques, I, J, K et L sont les centres des cercles inscrits aux quatre triangles qu'ils forment.

Sauriez-vous montrer que le quadrilatère IJKL est un rectangle ?



372. L'étoile magique

Problème n°459 du 13/12/05



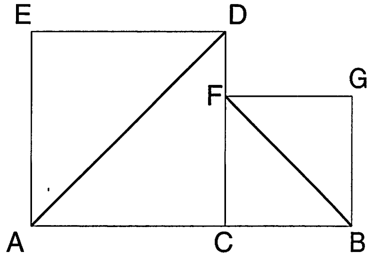
« Sur un cercle, prends trois points A, B, C.
– Au hasard ?.
– Oui. Appelle X, Y et Z les milieux respectifs des arcs BC, CA et AB.
– Les deux triangles ABC et XYZ dessinent une jolie étoile, à l'intérieur duquel je peux colorier un hexagone.
– C'est exact. Joins A à X, B à Y, C à Z.
– C'est magique ! On dirait que les trois droites passent par un même point.
– Ce n'est pas seulement une impression.
Et par ce point passent aussi les diagonales de ton hexagone ! ».

Sauriez-vous prouver ces deux coïncidences ?

373. Règle ou compas ?

Problème n°464 du 17/01/06

— En géométrie, une figure « constructible », c'est bien une figure qui peut être tracée à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas ?
– Oui, mais ce qu'on sait moins, c'est qu'une telle figure peut toujours être construite à l'aide exclusive d'un compas.



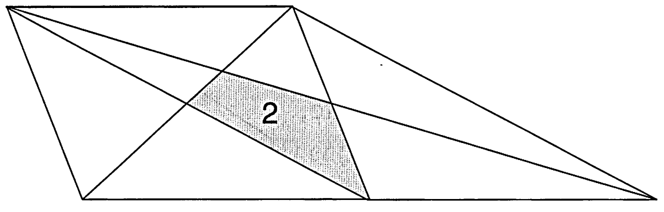
– Eh bien, moi, je te propose une construction à l'aide exclusive d'une règle : un point C a été choisi sur le segment [AB], et deux carrés ACDE et BCFG tracés du même côté du segment. Construis-moi le point M d'où l'on « voit » les deux diagonales [AD] et [BF] sous un angle droit.
– Je n'ai pas besoin de règle ! C'est le point C.
– Oui, mais il y en a un autre, et c'est lui qui m'intéresse.

Comment construire le point M à l'aide exclusive d'une règle ?

374. Une figure qui manque d'aires

Problème n°469 du 22/02/06

Cette figure, formée de deux parallélogrammes enchevêtrés et de leurs diagonales, comporte huit zones. Seule, l'aire d'une des zones est donnée.

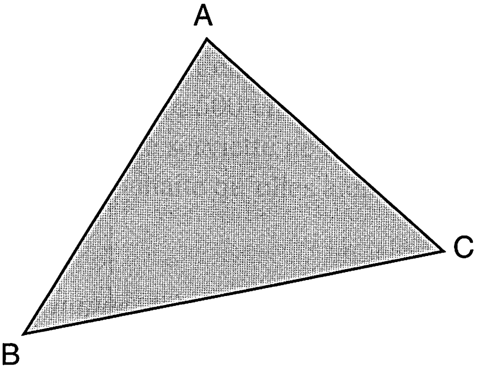


Quelle est la valeur des sept aires inconnues ?

375. Global positioning system

Problème n°474 du 28/03/06

Trois amis s'enfoncent séparément dans une forêt en forme de triangle, de sommets A, B et C.
Au bout d'une heure, grâce à leur radio et leur GPS, ils donnent les informations suivantes :
– Géraldine est exactement au milieu du segment qui joint le sommet A à la position P de Pauline.
– Pauline est exactement au milieu du segment qui joint le sommet B à la position S de Serge.
– Serge est exactement au milieu du segment qui joint le sommet C à la position G de Géraldine.

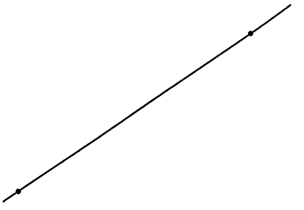


Représentez sur la carte la position des trois amis.
Quel est le rapport de l'aire du triangle GPS à celle du triangle ABC ?

376. Sans compas

Problème n°479 du 09/05/06

Avec une simple règle non graduée, sans compas, on ne peut pas déterminer précisément le milieu d'un segment tracé.



Tout change si la règle est à bords parallèles.
Elle permet alors non seulement de tracer une ligne droite, mais une parallèle à cette ligne.

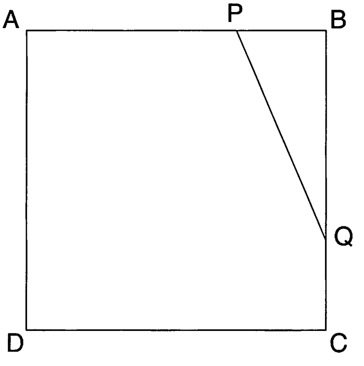
Comment, avec le seul soutien d'une règle non graduée à bords parallèles, construire le milieu d'un segment donné ?

377. Compas interdit

Problème n°484 du 13/06/06

Sur un carré ABCD, on place les points P et Q comme sur la figure de manière que AP = BQ.

Comment construire la perpendiculaire à (PQ) issue de D à l'aide d'une simple règle non graduée, en un minimum de tracés ?

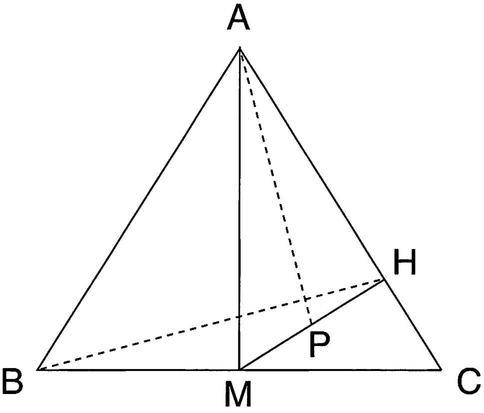


378. Orthogonalité inattendue

Problème n°489 du 18/07/06

ABC est un triangle isocèle en A.
Le milieu M de [BC] se projette orthogonalement en H sur (AC).
P est le milieu de [MH].

Pourquoi les droites (BH) et (AP) sont-elles perpendiculaires ?



379. Le restaurant du Trigone

Problème n°494 du 22/08/06

Les tables de ce restaurant ont de drôles de forme : certaines sont rondes, d'autres polygonales.
La seule chose commune qu'on peut en dire, c'est qu'elles sont convexes, c'est-à-dire que si on joint en ligne droite deux points d'une table, on n'en sort pas.
Les serviettes, elles, de forme triangulaire, ont toutes pour aire 500 cm^2.
Le restaurateur a essayé tous les triangles possibles : aucune serviette ne tient à plat sur aucune des tables. Quant aux nappes, le restaurateur souhaite qu'elles aient, elles aussi, la forme d'un triangle.

Peut-il faire fabriquer pour chaque table une nappe triangulaire d'au plus 2000 cm^2 qui recouvre entièrement la table ?

380. Le quadrilatère articulé

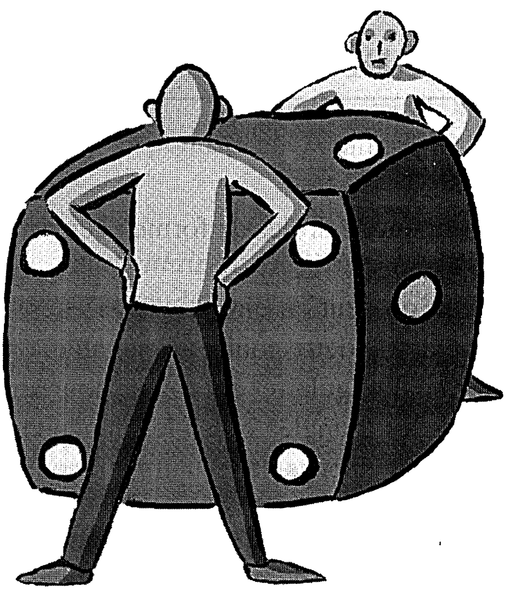
Problème n°499 du 26/09/06

Parmi tous les quadrilatères formés par quatre tiges rigides articulées de longueurs respectives 30, 40, 60 et 50 cm, on veut construire, à la règle et au compas, un quadrilatère tel que la distance des milieux des diagonales soit égale à 20 cm.

Existe-t-il ?

Est-il unique ?

Détailler précisément la construction d'un tel quadrilatère.



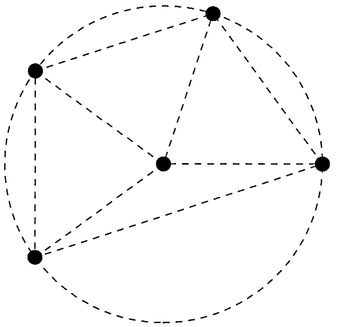
Figures libres SOLUTIONS

341. La pépinière

• Le jardinier peut respecter les conditions requises en donnant à Isabelle le choix entre deux configurations :

– placer les cinq arbres aux cinq sommets d'un pentagone régulier.

– les placer au centre et en quatre sommets de ce même pentagone (dessin).



• Avec un arbre au centre et aux cinq sommets du pentagone régulier, on obtient une pépinière de six arbres qui vérifie les mêmes contraintes.

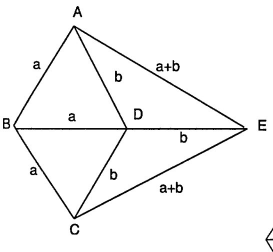
En revanche, le mathématicien Erdösz a montré qu'il n'est plus possible, au-delà de six points dans le plan et de huit points dans l'espace, de faire en sorte que trois quelconques des points forment un triangle isocèle.

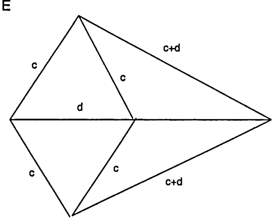
🖂 *Toutes les interventions de lecteurs suggèrent de nouvelles solutions :*

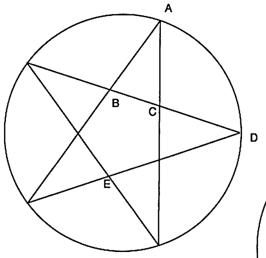
• *Sébastien KERNIVINEN (35050 Rennes) et André LEFEVRE (Bruxelles) placent les arbres aux quatre sommets consécutifs d'un pentagone régulier et à l'intersection des diagonales du trapèze ainsi formé,*

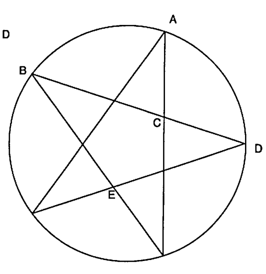
• *Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses) et Michel MENGAL suggèrent des dispositions à base de losanges. Dans l'une d'elles intervient un triangle isocèle dont les angles à la base mesurent 72° : le fameux « triangle d'or ».*

• *Jean-Louis PAC (92100 Boulogne-Billancourt) et Christian ROMON donnent des solutions encore plus complètes si on n'impose pas aux triangles plats d'être isocèles. (voir dessins)*



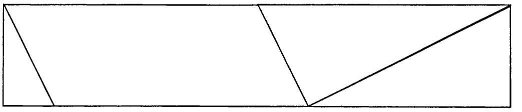




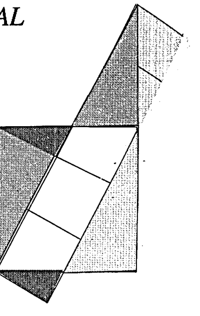


342. Le puzzle

Voici le rectangle reconstitué. Son «format» est 5.



En effet, si le carré d'origine a 2 unités pour côté, une application successive du théorème de Pythagore et du théorème de Thalès montrent qu'il a pour longueur $2\sqrt{5}$ et pour largeur $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

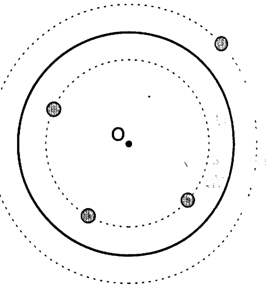


☒ *Les lecteurs comme J. CHAUPIN (51300 Vitry le François), M. MENGUAL (Paris), C. ROMON ou J. SALAT (21200 Beaune) rivalisent d'astuce pour transformer ce carré en rectangle. Presque tous reconstituent le rectangle de la manière suivante :*

P. GORDON propose même une généralisation obtenue en partageant deux côtés opposés du carré en n parties égales, constituant ainsi n – 1 parallélogrammes permettant de construire un rectangle dont le « format » est 1 + n^2. Le cas du problème 309 correspond à n = 2, ce qui donne bien un format de 5.

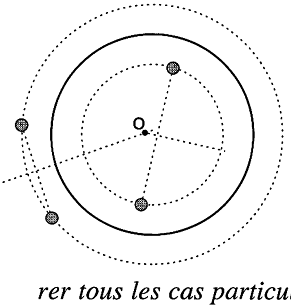
343. La ligne de tramway

Il y a sept tracés possibles, correspondant à deux types de construction.



• Construction 1 (4 solutions, dont l'une éventuellement dégénérée en une droite si trois des points sont alignés) :
On considère le cercle circonscrit à 3 des 4 points. Soit O son centre et R son rayon.
Une solution est alors le cercle de centre O et de rayon la demi-somme de R et de la distance de O au quatrième point.

• Construction 2 (3 solutions, dont l'une éventuellement dégénérée en une droite si les quatre points forment un trapèze, ou en deux droites si les quatre points forment un parallélogramme) :

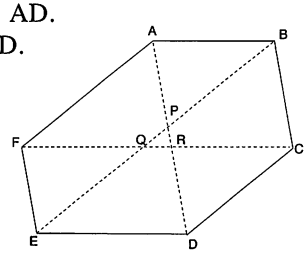


On trace la médiatrice du segment joignant deux des points, puis la médiatrice du segment joignant les deux autres.
Soit O le point d'intersection de ces deux médiatrices.
Une solution est alors le cercle de centre O et de rayon la demi-somme des distances de O à un point de chaque groupe.

☒ *Nos lecteurs ont le souci du détail et tiennent absolument à explorer tous les cas particuliers. Propositions intéressantes dans ce sens de Micheline LEMASURIER (94600 Choisy le Roi), Jef Van STAEYEN (Lille), Christian ROMON.*

344. Un hexagone particulier

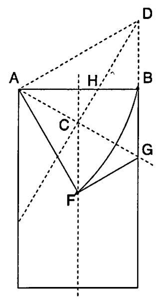
La figure est fausse car les côtés de l'hexagone doivent être parallèles deux à deux.
L'aire minimum de l'hexagone est 6, mais elle peut être aussi grande que l'on veut.



• L'égalité des aires ABC et BCD implique le parallélisme de BC et AD.
L'égalité des aires de DEF et EFA implique le parallélisme de EF et AD.
On en déduit BC//AD//EF.
De même, CD//BE//FA et AB//CF//DE.
• Ainsi, EDCQ, ABCR et AFEP sont des parallélogrammes d'aire 2.
L'aire de l'hexagone est la somme de leurs trois aires et de celle du triangle PQR. Elle est donc plus grande que 6, valeur atteinte dans le cas, par exemple, d'un hexagone régulier.
En revanche, en choisissant des longueurs de côtés alternativement très petites et très grandes, on peut construire un hexagone d'aire aussi grande que l'on veut qui réponde à la question.

⊠ *Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble) fait une étude complète de l'aire de l'hexagone et prouve bien qu'elle peut devenir aussi grande qu'on veut.*

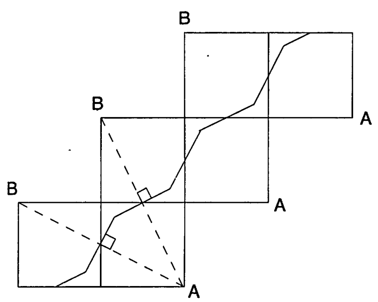
345. La trisection par pliage

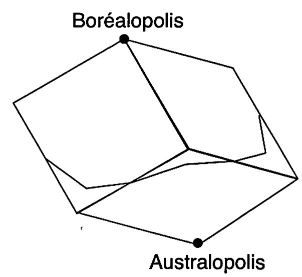


Le point H est bien au tiers du segment [BA].
Le triangle ABF est équilatéral (F est sur la médiatrice de [AB], A sur la médiatrice de [BF]). AGB, triangle semi équilatéral, est aussi la moitié du triangle équilatéral AGD construit en lui ajoutant son symétrique par rapport à (AB).
H est le centre de gravité de ce triangle.
Il est donc situé au tiers de la médiane [BA].

346. La planète des deux empires

La frontière est obtenue en « développant » le cube et en traçant les médiatrices du segment joignant les deux capitales.
Voici, ci-dessous, son tracé sur le « patron » du cube le plus adapté.

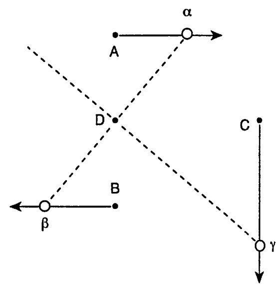




⊠ *Comme le précise Mme A-M. REBEL (40150 Hossegor), on parle dans ce problème de « distance à la surface du cube, c'est-à-dire de chemin à parcourir » et pas de « distance dans l'espace ». De beaux tracés de la part de Michel MENGUAL (Paris) et C. ROMON.*

347. Les trois robots

Charlie décrit une demi-droite parallèle à AB à la vitesse d'environ 86,6 km/h.
Le segment [α β] qui relie Alpha à Bravo a pour milieu un point D invariant. Le segment [D γ] qui relie D à Charlie est perpendiculaire à [α β] et sa longueur vaut $\sqrt{3}$ fois celle de [D β]. Ainsi, on passe de β à γ (comme on passe de B à C) en effectuant autour de D une rotation de 90° suivie d'une homothétie de centre D et de rapport $\sqrt{3}$.



Le point γ décrira une demi-droite perpendiculaire à celle que décrit le point β.
On peut de plus remarquer que la distance décrite par Charlie sur cette demi-droite est $\sqrt{3}$ fois plus élevée que celle décrite par Bravo dans le même temps..

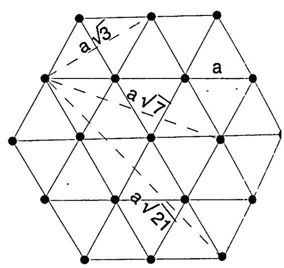
⊠ *De nombreuses bonnes solutions nous sont parvenues, comme celle de René TOURNADRE (44000 Angers).*

348. Économie de distances

On peut réduire le nombre de distances à 2 pour 4 ou 5 points, à 3 pour 6 ou 7 points, à 4 pour 8 ou 9 points, ... en plaçant les points aux sommets d'un polygone régulier.

En suivant la même logique, on pourrait placer 12 points de sorte que les distances soient au nombre de 6. Mais on peut faire mieux : avec la configuration ci-dessous, 12 points peuvent ne donner lieu qu'à 5 distances : $a, 2a, 3a, a\sqrt{3}, a\sqrt{7}$.

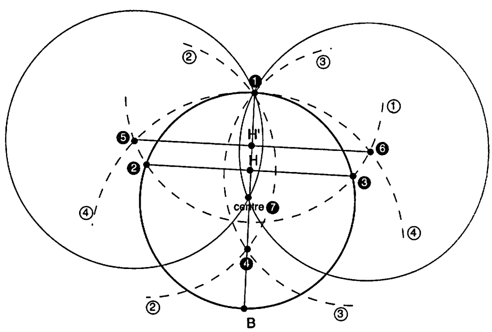
⊠ *ROMON suggère d'utiliser le maillage triangulaire non seulement pour 12 points, mais aussi pour 6, 8 et 9 points.*



349. Le centre retrouvé

La construction (réellement trouvée par Napoléon avec l'aide de son conseiller Mascheroni) est indiquée sur le dessin ci-contre.

Elle consiste à tracer le symétrique ❹ de ❶ par rapport à la droite ❷❸, puis l'arc de centre ❹ passant par ❶ qui coupe le cercle en ❺ et ❻.
Le centre ❼ du cercle sera le symétrique de ❶ par rapport à la droite ❺❻.
Pourquoi ? Parce que dire que H', milieu de ❺❻, est le milieu de ❼❶ est équivalent à dire que H, milieu de ❷❸, est le milieu de ❹❶. En effet, ❶H × ❶B = ❶❷^2 = ❶❺^2 = ❶H' × ❶B', où B' est l'extrémité du diamètre du cercle (4) passant par ❶.



⊠ *Certains lecteurs comme Philippe DUCROS (78000 Versailles) ou Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble) préfèrent expliquer leur solution par des triangles semblables plutôt que par des relations métriques dans le triangle rectangle. C'est leur droit! D'autres, comme Yves ARCHAMBAULT (Paris) ou Michel HEBRAUD (31000 Toulouse) souhaitent apporter quelques précisions historiques. Il semblerait en effet que d'une part la scène ne puisse se dérouler en Corse, Napoléon étant déjà empereur, puisqu'il n'y serait pas retourné depuis 1793, et que d'autre part le problème ait été résolu par Mascheroni. Ce serait alors Bonaparte qui l'aurait présenté à Lagrange et Laplace lors d'une réunion fêtant la paix de Campo Formio en 1797.*

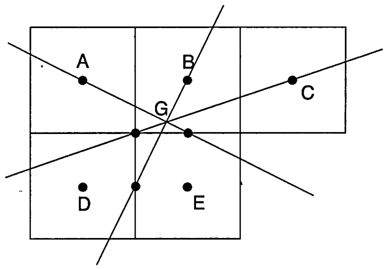
350. Gargantua géomètre

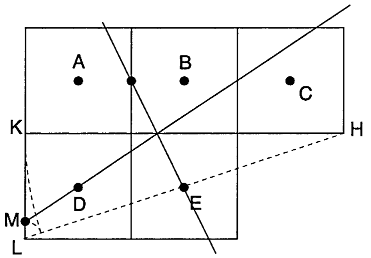
Les découpages reposent sur la propriété suivante :
toute droite passant par le centre de symétrie d'une figure la partage en deux morceaux de même aire.
Les coups de couteau de Gargantua passent donc par :

- A et le milieu de [BE] ;
- B et le milieu de [DE] ;
- C et le point de contact des quatre autres gâteaux.

Ces trois tracés concourent au centre de gravité G du gâteau.

- Gargantua pouvait encore donner un coup de couteau joignant E et le milieu de [AB] pour opérer l'un des deux partages restants.
- Quant au partage issu de D, il semble en revanche hors de portée de quelqu'un ne sachant construire que des milieux de segments (la figure montre la construction : reporter la longueur HK sur le segment [HL], puis tracer un arc de cercle de centre L pour obtenir le point M qu'on joint à D). Gargantua a probablement pensé joindre D au milieu de [BC], ce qui partage le gâteau en deux parties à peine différentes, puisque la pente de son tracé supposé, 2/3, environ 0,667, est fort peu différente de la pente de MD, qui est $7 - 2\sqrt{10}$, soit environ 0,675.

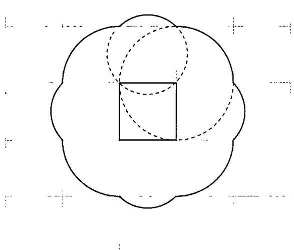




✉ *Sur ce problème, abondant et sympathique courrier de lecteurs soucieux de rectifier l'erreur de la solution primitive. La cause a été entendue !*

- *Beaucoup d'humour dans les lettres d'André CAROUGE (17740 Ste Marie de Ré), de Patrice SULMONT (44300 Nantes) ou de Gérard BRETECHER (92190 Meudon), qui propose par ailleurs une très élégante construction du trait de coupe passant par D. Il suggère en effet de joindre C au milieu I de [AE]et de placer sur le segment [IC] le point J tel que IJ soit le demi-côté du carré. (DJ) est alors la droite cherchée.*
- *Des constructions très simples de E. BRUNETON (13100 Aix en Provence), Jacques DEMOULIN (78150 Le Chesnay), Michel HEBRAUD (31000 Toulouse) et Robert LECLERCQ (Paris).*
- *Beaucoup résolvent le problème par un calcul, parfois extrêmement précis, comme Philippe KAHN (92100 Boulogne) qui souligne que « la découpe correcte passe presque par le milieu de [BC], avec un écart de 1,317% ».*

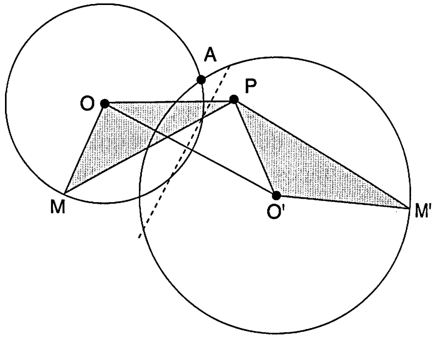
351. Le chemin de ronde



Le chemin de ronde est constitué d'une succession de 8 arcs de cercles obtenus à partir des deux premiers par rotations successives de 90°.
Le principe : l'ensemble des points d'où l'on « voit » un segment sous un angle donné est un arc de cercle. La construction des deux premiers cercles est faite en pointillés sur la figure.

352. L'araignée

L'araignée est placée au point P symétrique du point A de départ des mouches par rapport à la médiatrice du segment joignant les deux centres O et O'.



À chaque instant, si M et M' sont les positions respectives des deux mouches sur chaque cercle, les triangles OPM et O'PM' sont isométriques, en effet :

• leurs angles en O et O' sont égaux par différence des angles égaux AOM et AO'M' (les mouches ont même vitesse angulaire), et des angles AOP et AO'P (égaux par symétrie).

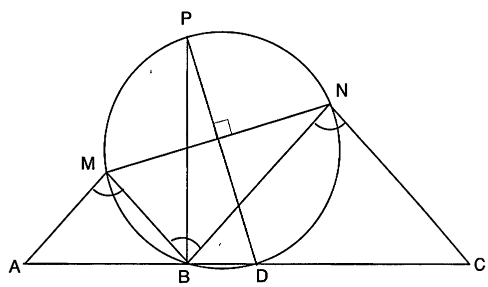
• OP = O'A = O'M' et O'P = OA = OM

Ainsi, quelle que soit la position des mouches, PM = PM'

> ⊠ De *nombreux lecteurs signalant la difficulté à « inventer » le point P, d'autres, en écho, comme Michel HEBRAUD (31000 Toulouse) Micheline LEMASURIER (94600 Choisy le Roi) ou René TOURNADRE (Angers), apportent d'intéressantes clarifications. Leurs interventions donnent un cadre de la recherche du fameux point P en trois points :*
>
> • *Désignons par I le milieu de [MM'] (de médiatrice Δ, J celui de [OO'] (de médiatrice d), par c le cercle de centre O, c' le cercle de centre O'. En utilisant la similitude s de centre A qui transforme c en c', on peut démontrer par des considérations d'angles que les points M, B et M' sont alignés.*
>
> • *Il existe par ailleurs une similitude s' de centre A qui transforme M en I, et donc c en un autre cercle k centré en I et passant par A et B.*
>
> • *C'est le point P, diamétralement opposé à B sur k qui apportera la solution : fixe, il est évidemment sur Δ et répond à la question. On démontre facilement par ailleurs que c'est également le symétrique de A par rapport à d.*
>
> *Marcel DAVID (74200 Thonon les Bains) va plus loin et propose de généraliser le problème à deux cas :*
>
> • *Celui où les deux mouches tournent dans des sens opposés : la solution est alors le point B' symétrique de B par rapport à d,*
>
> • *Celui où les deux cercles sont tangents en T, avec quatre mouches cette fois, tournant dans les deux sens : la solution est dans ce cas le point Ω symétrique de O par rapport à T.*

353. Les montagnes de Flatland

L'angle d'où l'on voit les deux sommets depuis D vaut α.



Pour le montrer, on construit le cercle circonscrit à BMN. La verticale issue de B coupe ce cercle en P. Comme les angles MBP et PBN sont égaux (ils valent α/2), les longueurs PM et PN sont égales, et la droite (PD) est la médiatrice de [MN] (puisque D est aussi équidistant de M et de N). Il ne reste plus qu'à remarquer que D est sur le cercle, car le segment [PD] est le diamètre porté par cette médiatrice : en effet, l'angle PBD est droit.

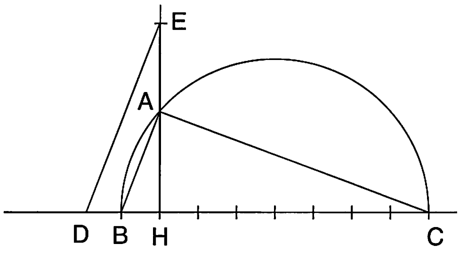
Conséquence, l'angle MDN et l'angle MBN,

qui interceptent la même corde [MN], sont égaux.
Or, MBN est égal à α, c'est aussi le cas de MDN.

⊠ *Les lecteurs rivalisent d'astuces géométriques pour donner des solutions originales. La palme revient à celle de P. CAZAL (34170 Castelnau-le-Lez). Elle tient en deux lignes :*
Si M' est le symétrique de M par rapport à (AB), le cercle de centre D passant par M en T passe aussi par M' et les points M, B, N sont alignés. Ainsi, l'angle LL'N est la moitié de α. Donc l'angle MDN, angle au centre correspondant, est, lui, égal à α.
Le promeneur, fait remarquer C. ROMON, commence par voir les deux sommets sous l'angle α lorsqu'il est au pied commun des deux pics et retrouve cet angle lorsqu'il est à égale distance des deux.

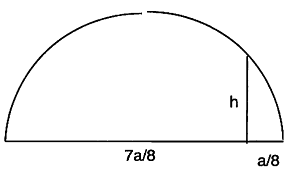
354. Racine de sept

• Pour construire la longueur $\sqrt{7}$ à partir d'une unité a, il suffit de construire le segment BC de longueur 8 a, le point H à l'intérieur de sorte que BH = a, et de tracer un demi-cercle de diamètre BC.
La perpendiculaire en H à BC coupe le demi-cercle en A. **La longueur AH est égale à $a\sqrt{7}$.**
• Pour retrouver l'unité b à partir de la longueur $b\sqrt{7}$, on utilise la même figure. On reporte la longueur $b\sqrt{7}$ sur la demi-droite [HA], de sorte que HE = $b\sqrt{7}$, La parallèle à (AB) issue de E coupe la droite (BC) en D. **DH est alors l'unité b cherchée.**

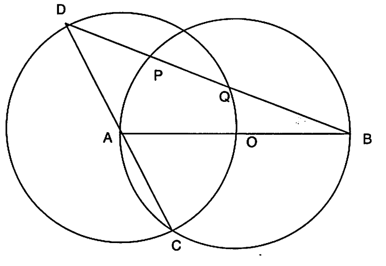


N.B. La parallèle à (AB) passant par E se construit à la règle et au compas en reportant, par exemple, le triangle BAH de telle sorte que A soit translaté en E.

⊠ *Les lecteurs, comme Jean-Marie GADAT (60140 Rosoy), René GOUIN (50350 Donville), Philippe KAHN (92100 Boulogne), Pierre KAMOUN (92200 Neuilly sur Seine), Jean-Daniel LE FRANC (92260 Fontenay aux Roses) proposent pour ce problème des constructions classiques de triangles rectangles de côté 3 et d'hypoténuse 4 ou de côtés de l'angle droit 2 et $\sqrt{3}$. J. PIGET-VIEUX en propose une plus originale :*



C. ROMON en a inventé une autre, où les deux cercles ont même rayon 1. Il prouve d'une part que DB = $\sqrt{7}$, d'autre part que DP = $\frac{2}{\sqrt{7}}$. On peut donc ainsi obtenir $\frac{1}{\sqrt{7}}$ et, en partant de cercles de rayon $\sqrt{7}$, reconstituer l'unité.



355. Le cerf-volant partagé

Euclide a raison : les aires des quatre quadrilatères sont bien égales.

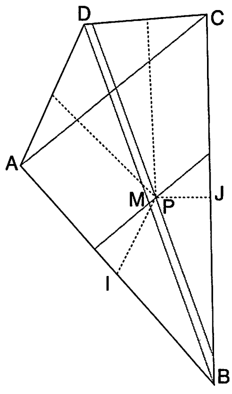
On appelle M, I, J les milieux respectifs de [BD], [AB], [BC].

Comme l'aire du triangle BMJ est le quart de celle de BCD, l'aire de BMI le quart de celle de BAD, l'aire de BIMJ est le quart de celle du cerf-volant.

Or, l'aire du triangle PIJ est aussi celle de MIJ : les deux triangles ont même base, et même hauteur puisque (MP) est parallèle à (AC), elle-même parallèle à (IJ). Le quadrilatère BIPJ a donc même aire que BIMJ, soit le quart de l'aire du cerf-volant.

Il en est de même pour les trois autres quadrilatères.

⊠ *Que les lecteurs ne s'y trompent pas : le partage ne se fait pas en triangles !*



356. Triangles orthomédians

Si les médianes relatives à deux côtés sont perpendiculaires, la somme des carrés de ces côtés est égale à cinq fois le carré du troisième.

Une utilisation répétée du théorème de Pythagore permet de le montrer.

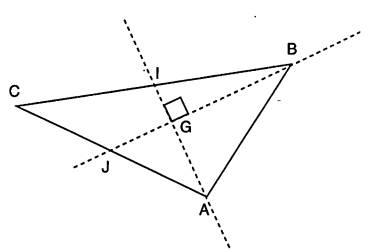
$CB^2 = 4\ BI^2 = 4\ GB^2 + 4\ GI^2$

$CA^2 = 4\ AJ^2 = 4\ GA^2 + 4\ GJ^2$

En faisant la somme :

$$CA^2 + CB^2 = 4\ (GB^2 + GA^2) + 4\ (GI^2 + GJ^2)$$
$$= 4\ AB^2 \qquad + 4\ IJ^2$$

Or, AB = 2IJ, d'où : $\mathbf{CA^2 + CB^2 = 5\ AB^2}$.



⊠ *À chacun ses préoccupations : C. ROMON utilise pour sa démonstration que dans un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit les carrés des côtés opposés ont des sommes égales. Anne-Marie REBEL (40150 Hossegor) se préoccupe, elle, de la propriété réciproque et démontre que tout triangle ABC tel que $CA^2 + CB^2 = 5\ AB^2$ a ses médianes [AI] et [BJ] perpendiculaires.*

357. Sangaku

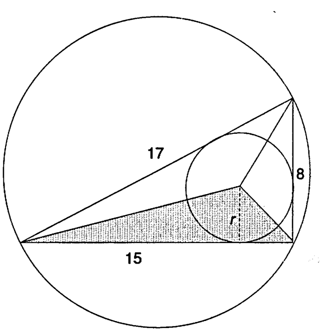
Le diamètre du grand cercle est 17, celui du petit 6.

On commence par chercher les côtés de l'angle droit. Leur produit est 120.

Pour que l'hypoténuse soit entière, il n'y a qu'une possibilité : que les deux longueurs soient 15 et 8. La longueur de l'hypoténuse est alors 17, diamètre du grand cercle.

On calcule le rayon r du petit cercle en additionnant les aires des trois triangles découpés par son centre :

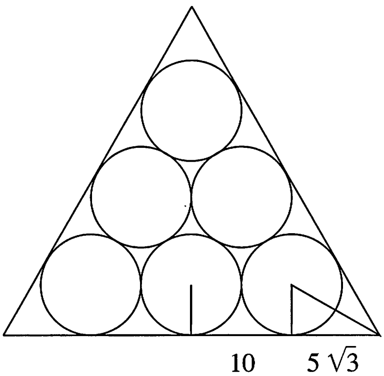
$$\frac{r\,(15 + 8 + 17)}{2} = 60. \text{ Il vient } r = 3.$$

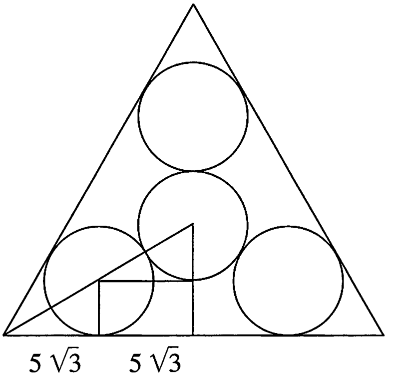


⊠ *Philippe KAHN (92100 Boulogne) appuie ses calculs de nombreux exemples d'autres triangles possibles. Bonne solutions aussi de M. MENGUAL (Paris), C. ROMON, Antoine WEHENKEL (Luxembourg).*

358. Sur un billard

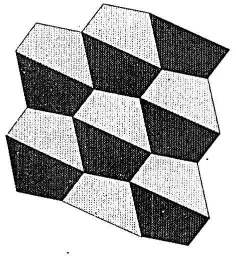
Le côté du plus petit triangle contenant 6 boules (et même 5) est 10 (2 + $\sqrt{3}$), soit environ 37,32 cm.
Le côté du plus petit triangle contenant 4 boules est 20 $\sqrt{3}$, soit environ 34,64 cm.
En voici les configurations :

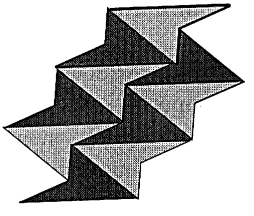




359. Patchwork

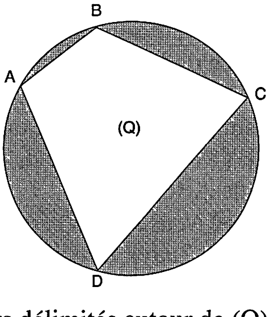
Il est possible de paver le plan avec n'importe quel quadrilatère.
Il suffit de construire les symétriques du morceau initial par rapport au milieu de chacun de ses quatre côtés et de réitérer l'opération.





360. Le quadrilatère de M. Optimax

• Si quatre longueurs (compatibles avec son existence*) sont données, **il existe bien quatre points cocycliques (situés sur un même cercle) formant un quadrilatère (Q) dont les côtés ont justement ces quatre longueurs.**
Imaginez pour cela que le quadrilatère soit dans un premier temps articulé et que vous le déformiez en faisant varier l'un des angles continûment de sa valeur minimale à sa valeur maximale. Vous passerez forcément** par une valeur intermédiaire telle que la somme de cet angle et de l'angle opposé soit égale à 180°. Le quadrilatère sera alors « inscriptible » dans un cercle.



Sur la figure, on a matérialisé (en grisé) les quatre segments circulaires alors délimités autour de (Q).
• **Le quadrilatère (Q) est bien d'aire maximale.**
Si un autre quadrilatère convexe (R) a les mêmes longueurs de côtés, on reporte autour de (R) les segments circulaires importés du tracé de (Q).

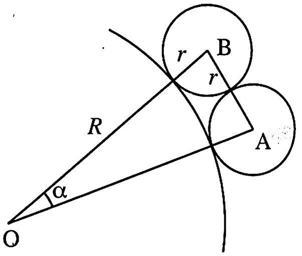
On obtient une figure de même périmètre que le cercle tracé autour de (Q). Cette figure a donc une aire inférieure à celle du cercle, puisqu'à périmètre constant, c'est le cercle qui est d'aire maximale. Le quadrilatère (R) est donc d'aire inférieure au quadrilatère (Q).
* Condition d'existence : la somme de deux côtés consécutifs est plus grande que la différence des deux autres.
** L'un des deux angles opposés peut, dans une position limite, être nul (et la somme inférieure à 180°), l'autre peut, au contraire, dans l'autre position limite, être plat (et la somme supérieure à 180°).

⊠ *Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble), en résolvant ce problème par le calcul, démontre que si a, b, c, d sont les longueurs des côtés, α l'angle entre les côtés de longueur a et b, β l'angle entre les côtés de longueur c et d, l'aire S du quadrilatère est telle que $4S^2 = K - 2\, abcd \cos(\alpha + \beta)$. K est une constante ne dépendant que des longueurs a, b, c et d. L'aire ainsi formulée est maximale si $\alpha + \beta = 180°$, c'est-à-dire si les points A, B, C, D sont cocycliques.*

361. Rondes et rondelles

• On peut effectivement insérer une monorondelle au centre d'une ronde de 6 euros. Si on considère le triangle formé par les centres A et B de deux pièces consécutives et le centre O du cercle intérieur, il est équilatéral, A et B étant deux sommets consécutifs de l'hexagone régulier formé parles centres des 6 pièces. Le rayon du cercle central est donc égal à celui des pièces de la couronne.

• On peut placer une 637-rondelle au centre d'une ronde de 2005 euros. Si on appelle R le rayon de plus grand disque qu'on peut insérer au centre de la ronde, et r le rayon d'une pièce d'un euro, si α est l'angle AOB (tout petit) d'où les centres de deux pièces consécutives sont vues du centre du disque, on peut assimiler le segment AB (de longueur $2r$) à l'arc de cercle (le deux-mille-cinquième de la circonférence d'un cercle de rayon $R + r$).



On a donc la relation : $2r \sim \dfrac{2\pi (R + r)}{2005}$. Le rapport $\dfrac{R}{r}$ est donc peu différent de $\dfrac{2005}{\pi} - 1$,

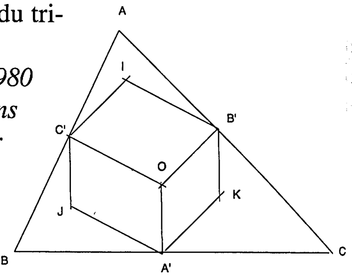
soit de 637,211... Une 637-rondelle tiendra donc.
Remarque : Si l'on veut éviter les approximations, on calculera : $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{\sin(\alpha/2)} - 1 \approx 637{,}2115829$

(au lieu de 637,2113218 précédemment), ce qui conduit à la même réponse.

362. L'ortho-hexagone

L'aire de l'ortho-hexagone est la moitié de celle du triangle.

Si O désigne l'intersection des médiatrices du triangle ABC, on voit apparaître quatre parallélogrammes. L'aire de l'hexagone est alors égale au double de celle du triangle A'B'C' (quart de celle du triangle ABC), donc à la moitié de celle du triangle ABC.

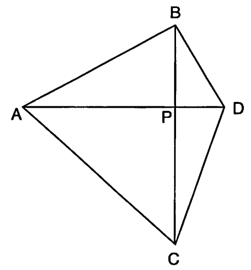


⊠ *Nous devons cette élégante solution à Grégoire PECOU (29980 Loc Tudy). Elle remplace avantageusement celle que nous avions initialement proposée. Ce fidèle lecteur suggère en sus de placer A', B', C' de manière quelconque sur les côtés du triangle ABC et, à partir d'un point quelconque O dans le triangle A'B'C', de construire un hexagone en remplaçant les perpendiculaires menées par A', B', C' par les parallèles à (OA'), OB') et*

(OC'). L'aire de l'hexagone obtenu, nous dit-il, est le double de celle de A'B'C'. L'hexagone obtenu, nous dit-il, peut même être régulier pour un choix convenable de O. On devine aisément qu'il s'agit du centre du cercle circonscrit à A'B'C'.

363. L'archipel du polygone

L'aire de la Quarraïde est au plus de 364 km².

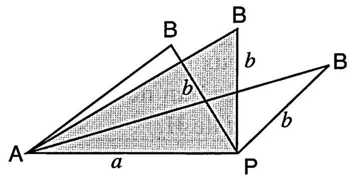


• Un triangle PAB, tel que PA = a et PB = b sera d'aire maximale si l'angle APB est droit. L'aire en sera alors $ab/2$.

• Si Patricia (P) est aux distances a, b, c, d des quatre ports dans cet ordre, l'aire de l'île sera la somme des aires des quatre triangles de sommet P. Elle sera donc maximale quand les quatre angles P sont droits et vaudra : $S = (ab + bc + cd + da) / 2$ soit $S = (a + c)(b + d) / 2$.

• a, b, c et d prennent les quatre valeurs 20, 10, 18 et 6.

Le produit de deux nombres de somme donnée est maximal quand les deux nombres sont le plus proches possible.



Pour que $(a + c)$ et $(b + d)$ soient le plus proches possible, il faut en grouper les extrêmes et les médians. Le produit est alors égal à $26 \times 28 = 728$ et l'aire maximale à 364 km².

⊠ *Michel VERHAEGHE (06800 Cagnes sur Mer) propose une approche très géométrique du calcul de l'aire en construisant les cercles de centre P et de rayons successifs a, b, c et d. Dans le cas où B et C sont opposés, BC est maximum, nous dit-il, si B, P, C sont alignés, et vaut dans ce cas b + c ; La valeur maximum de la hauteur issue de A du triangle ABC est alors a, celle de la hauteur issue de D du triangle BCD étant d.*

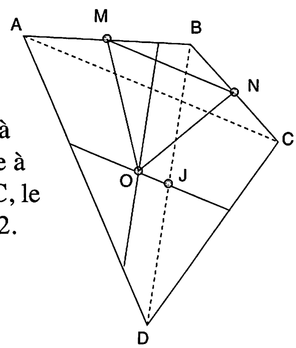
D'où la valeur maximum de l'aire du quadrilatère : $\frac{1}{2}(b + c) \times (a + d)$.

En distinguant trois types de polygones (B opposé soit à A, soit à C, soit à D) on trouve trois possibilités : 360, 364 et 304, la plus grande d'entre elles correspondant à l'aire maximum cherchée : 364 km².

Quelques autres lecteurs (anonymes, dommage !...) nous ont proposé de bonnes solutions.

364. La cerise sur le gateau

Alice pourra faire quatre traits de coupe joignant la cerise aux milieux des quatres côtés.



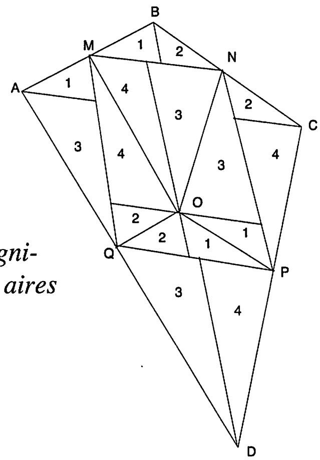
Avec les notations du dessin, l'aire du quadrilatère OMBN est la somme de celles de OMN et de BMN.

• L'aire de BMN est le quart de celle de ABC puisque M et N sont les milieux des côtés du triangle ABC.

• L'aire de OMN est par ailleurs égale à celle de JMN (JO est parallèle à AC, donc à MN). Or, JM, joignant les milieux de DB et AB, est parallèle à DA et moitié plus petit. Ainsi, l'aire de JMN est le quart de celle de ADC, le triangle JMN étant semblable à ADC avec un rapport de réduction de 1/2.

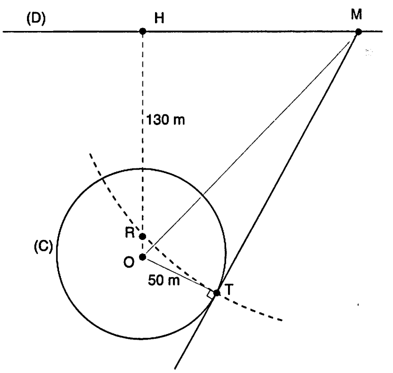
En résumé, l'aire de OMBN est bien le quart de l'aire totale du gâteau.

Il en est de même pour les trois autres parts.



🖂 *François DUC (84100 Orange) propose, sur le modèle de celui-ci, de créer un autre problème : ABCD est un quadrilatère convexe, M, N, P, Q les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA]. Prouver qu'il existe un unique point O tel que les quadrilatères AMOQ, BMON, CPON et DQOP aient même aire. Indiquer une construction de O à la règle et au compas.*
M. PATRON (59910 Bondues) donne à ce problème une magnifique preuve « sans mots » traduite sur le dessin suivant, où les aires portant les mêmes numéros sont égales.

365. Distance rasante

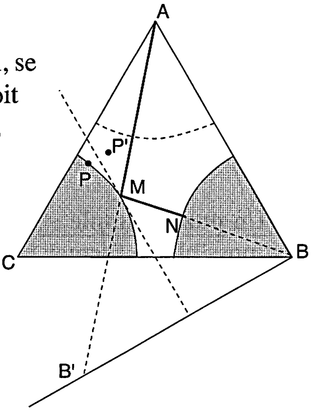


Il existe deux points rasants R et R', situés sur (OH), symétriques l'un de l'autre part rapport à (D), chacun à 120 mètres de H.
Pour des raisons de symétrie, si un tel point R existe, il est sur (OH), axe de symétrie de la figure. Voici comment on va découvrir ce point. La tangente (MT) étant perpendiculaire à OT, on a : $MO^2 = MT^2 + OT^2 = MT^2 + 50^2$
Toujours d'après Pythagore :
$MO^2 = MH^2 + HO^2 = MH^2 + 130^2$
Soit, par différence : $MT^2 = MH^2 + 130^2 - 50^2 = MH^2 + 120^2$
Il reste à appeler R et R' les points de (OH) symétriques par rapport à (D) tels que HR = HR' = 120 m. On a alors :
$MT^2 = MH^2 + HR^2 = MH^2 + HR'^2$ soit, après une dernière application de Pythagore, $MT^2 = MR^2 = MR'^2$.

🖂 *De nombreux lecteurs nous ont signalé l'existence de deux points R et R' répondant à la question alors que la solution originale n'en prévoyait qu'un. Certains nous ont même fourni d'autres constructions, faisant souvent appel à la « rasante » de points particuliers comme le point H ou les projetés orthogonaux sur (D) des extrémités du diamètre de (C) parallèle à (D). Merci à Philippe KAHN (92 100 Boulogne) et à René TOURNADRE (Angers) pour leurs solutions originales.*

366. Mmh ! Des truffes...

Le trajet réalisant le parcours minimum est AMN où M est le milieu de l'arc de centre C et de rayon R, et où M, N et B sont alignés.
Pig doit choisir le chemin le plus court en partant de A. Il n'aura déjà pas à rentrer dans les secteurs grisés, arcs de cercles de rayon R et de centres B et C, puisqu'en atteignant leurs bords, il pourra explorer le secteur tout entier. Une fois choisi le point P sur le premier arc, il est clair qu'il atteindra le deuxième arc par le chemin le plus court en « visant » le point B. Minimiser APN, c'est donc minimiser APB.
Or, la distance parcourue en supposant qu'il poursuive jusqu'à B serait AP + PB, soit, en utilisant la symétrie par rapport à la droite en pointillés, tangente en son milieu à l'arc de centre C.



AP + P'B' > AP + PB' > AMB' = AMB.
Elle est donc bien minimale en P = M.
Remarque : Pig agit comme le ferait un rayon lumineux qui, de source A, se réfléchirait sur les miroirs circulaires manière que le trajet AM + MN soit minimum. L'angle d'incidence en M doit être égal à l'angle de réflexion, sachant que MN doit être minimum. Ces conditions ne sont réalisées simultanément que si d'une part M, N et C sont alignés, et si d'autre part, pour des raisons de symétrie, M est au milieu de l'arc.

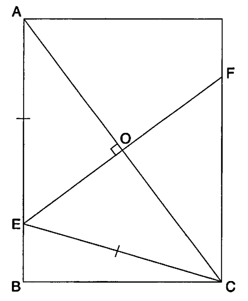
☒ *Jean-marie GADAT (60140 Rosoy) et Michel MENGUAL (Paris) proposent des solutions analytiques. C. ROMON donne par un calcul exclusivement géométrique la valeur exacte de la distance parcourue :*

$$AM + MN = R \times (2 \times \sqrt{\frac{7}{3}} - 1) < 2{,}055R,$$

concluant ainsi qu'il suffit à Pig de parcourir un peu plus du double de son rayon d'action pour explorer tout le domaine.

367. Le pli

La longueur de la feuille est 32 cm.

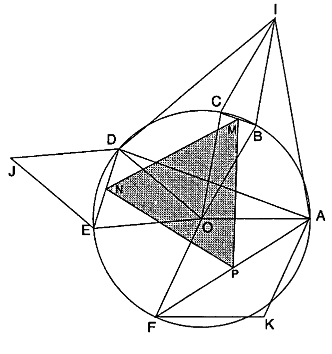


Appelons l la largeur, lk la longueur du rectangle, d la longueur de sa diagonale.
Les triangles rectangles ABC et AOE, qui ont un angle aigu commun, sont semblables.
D'où en particulier EF = $\dfrac{d}{k}$ et $d = 30\,k$.

Comme $d^2 = l^2\,(1 + k^2)$, cela donne $\left(\dfrac{30}{24}\right)^2 = \dfrac{1 + k^2}{k^2}$. Soit $k = \dfrac{4}{3}$.

368. Une symétrie inattendue

Le triangle MNP est équilatéral.

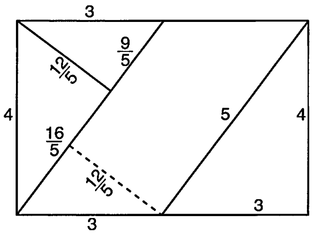


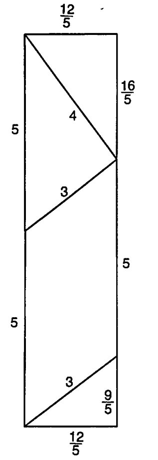
On commence par compléter les parallélogrammes OBIC, ODJE et OFKA.
- Le triangle IAD est équilatéral. En effet, I a pour image D par la succession de la translation qui amène B en O (donc I en C) et de la rotation de 60° de centre O. Cette transformation est d'ailleurs une rotation d'angle 60°, et comme elle amène B en O, c'est une rotation de centre A.
- Par ailleurs, la succession de la translation amenant D en O (et donc J en E), de la rotation de centre O d'angle 60° et de la translation qui amène O sur A (et donc F sur K) transforme D en A et J en K. Cette suite de trois transformations est donc la rotation de centre I, d'angle 60°, et ainsi IJK est équilatéral.
- Comme MNP n'est rien d'autre que l'image réduite dans un rapport 1 / 2 de IJK, MNP est lui aussi équilatéral.

✉ Georges LACROIX (13009 Marseille) démontre qu'en plaçant A, B, C, D, E, F aux sommets d'un hexagone régulier on obtient (évidemment) un triangle équilatéral, mais aussi qu'à partir de là on peut obtenir toute autre configuration en faisant glisser les arcs AB, CD, EF sur le cercle, et que les triangles MNP obtenus sont encore « équilatéraux ». Robert MUNNICH (Paris) propose, lui, de démontrer que le triangle AID est équilatéral en prouvant tout simplement l'isométrie des triangles ABI et AOD.

369. Un puzzle simple

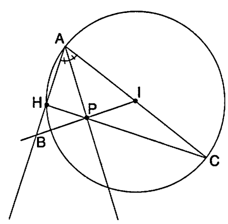
Il est possible de former un nouveau rectangle avec les pièces du puzzle.
Le format de ce nouveau rectangle est de 10 cm de longueur sur 2,4 cm de largeur. Les dimensions, calculées à l'aide des théorèmes de Pythagore et de Thalès et reportées sur le dessin, vous permettront de le vérifier.





370. Théorème brouillé

• Pour construire la figure, on trace d'abord le cercle de diamètre AC (et de centre I, milieu de [AC]). L'angle A, imposé à 70°, permet de connaître la droite (AB) qui coupe le cercle en H, pied de la hauteur issue de C. La bissectrice issue de A coupe la droite (CH) en P. Il reste à joindre I à P pour construire B à l'intersection des droites (AB) et (IP).



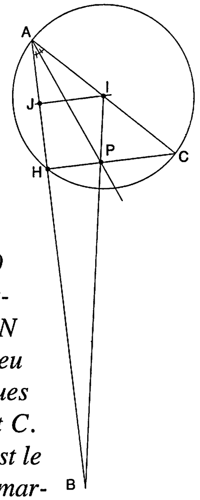
• Dans le cas où l'angle A est égal à 45°, le triangle AHC est rectangle isocèle. On prend HA = HC comme unité. Alors, comme (AP) est bissectrice de l'angle A, on a :

$$\frac{PH}{PC} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\ \text{D'où } PH = \sqrt{2} - 1.$$

De plus, en appelant J le milieu de [AH], on a :

$$\frac{BH}{BJ} = \frac{PH}{IJ}.\ \text{D'où } BH = 1 + \sqrt{2}.$$

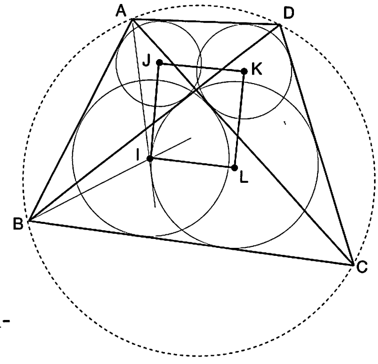
Ainsi, HB > HA : l'angle C dépasse donc 90°.



✉ Jacques DEMOULIN (78150 Le Chesmay), Raymond MILLION (78180 Montigny le Bretonneux) et Philippe KAHN (92100 Boulogne) se sont intéressés aux valeurs limites de l'angle A qui rendent le triangle acutangle. P. KAHN précise que les triangles acutangles sont rencontrés entre l'angle en A un peu supérieur à 50° et un peu supérieur à 70°, ces valeurs-limites étant obtenues pour B ou C droits. Bernard TRUFFAULT (44980 Sainte Luce sur Loire) et C. ROMON prouvent tous deux que le triangle est rectangle si son hypoténuse est le produit d'un de ses côtés de l'angle droit par le nombre d'or, un résultat remarquable !

371. Sangaku (et pas sudoku)

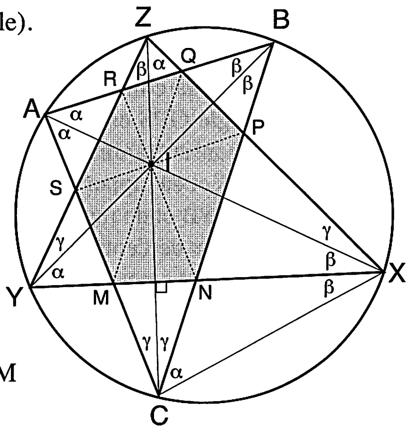
• Ne considérons dans un premier temps que le triangle ABC, dont nous désignerons par A, B et C les angles et I désignera l'angle en I du triangle AIB, D l'angle en D du triangle ABD.
Tous les angles sont mesurés en degrés.
Alors : A + B + C = 180°
donc (A/2) + (B/2) = 90 – (C/2) .
Par ailleurs, (A/2) + (B/2) + I = 180°
d'où I = 180 – (90 – (C/2)) = 90 + C/2.
• De même dans le triangle ABD :
J (angle AJB) = 90 + (D/2).
• Or, C = D (ce sont des angles inscrits à un même arc de cercle AB) donc les angles AJB et AIB sont égaux et les points A, B, I, J sont sur un même cercle. De même pour les points B, I, L, C.



Or, on a l'égalité d'angles BAJ + BCL = 90° puisque c'est la moitié de la somme d'angles AD + BCD,
d'où BIJ + BIL = 360 – 90 et ainsi LIJ = 90°.
De même pour les trois autres angles du quadrilatère IJKL, qui se trouve donc être un rectangle.

372. L'étoile magique

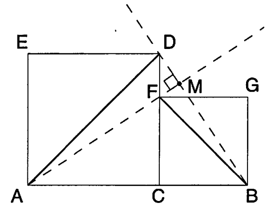
• Première coïncidence :
Les droites AX, BY et CZ sont les bissectrices du triangle ABC. Elles sont donc concourantes (au centre I du cercle inscrit à ce triangle).
• Deuxième coïncidence :
En appelant 2α, 2β et 2γ les angles du triangle ABC, et en utilisant les propriétés de l'angle inscrit (deux angles inscrits à un même arc sont égaux), on obtient la figure ci-contre où certains angles ont été marqués en fonction de α, β, γ.



On remarque par ailleurs que l'angle CIX (angle extérieur au triangle ZIX) est égal à α + γ. En conséquence, XY, bissectrice du triangle isocèle (en X) CIX, est médiatrice de CI.
Pour raison de symétrie, MINC est un losange, ce qui entraîne que IM est parallèle à CN.
Par permutation circulaire, IQ est parallèle à BP, donc Q, I, M sont alignés.
Il en est de même des autres alignements attendus.

373. Règle ou compas ?

M est l'intersection des droites (AF) et (BD).
Le quart de tour de centre C dans le sens « horaire » transforme A en D et F en B, donc la droite (AF) en (BD).
Les droites (AF) et (BD) se coupent donc perpendiculairement en un point M d'où l'on « voit » les deux diagonales sous un angle droit.



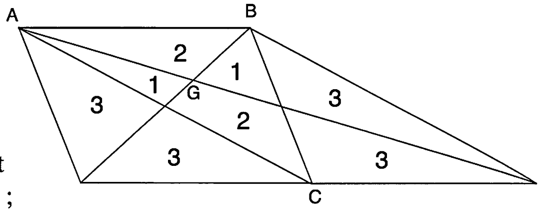
⊠ *Joseph-Paul FELLER (57000 Metz), Jean le cardinal (37000 Tours) ainsi que André SERRE (92800 Puteaux) mettent en avant que (BF) et (DC) sont deux hauteurs du triangle ADB, dont l'orthocentre est donc F. La troisième hauteur passe donc par F, et (AF) est ainsi perpendiculai-*

re à (DB) en un point M qui répond à la question. Daniel DESLANDES (92400 Courbevoie) apporte une précision supplémentaire : le point M se trouve également sur la droite (EG). On peut effectivement le démontrer : $\widehat{EMF} = \widehat{EMA} = \widehat{EDA} = 45°$ (E, A, C, M, D appartiennent tous au cercle de diamètre [AD]. De même, $\widehat{FMG} = 180° - \widehat{FCG} = 135°$ puisque M et C sont sur deux arcs différents d'extrémités F et G du cercle de diamètre [BF].

374. Une figure qui manque d'aires

La figure ci-dessus indique l'aire de chaque zone.

Ces aires se calculent en utilisant les résultats suivants :

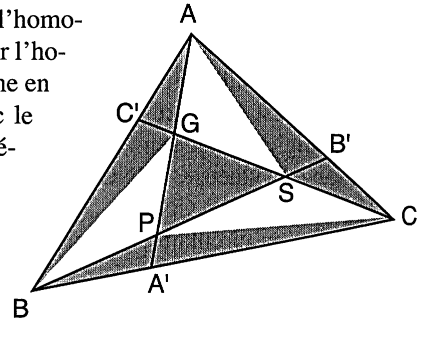


• le rapport dans lequel une droite issue d'un sommet partage l'aire d'un triangle est aussi celui dans lequel elle partage le côté opposé ;
• les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux et en conséquence, elles partagent le parallélogramme en quatre zones d'aires égales ;
• le centre de gravité G d'un triangle ABC est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

⊠ *Certains lecteurs résolvent le problème à l'aide de tracés supplémentaires permettant le découpage de la figure en triangles d'aire connue. Philippe KAHN (92100 Boulogne) trace ainsi le segment joignant les centres des deux parallélogrammes et André SERRE (92800 Puteaux) joint C à G pour découper le triangle ABC en six triangles d'aire 1.*

375. Global positioning system

La figure indique la construction des points cherchés.
L'aire du triangle GPS est le septième de celle du triangle ABC.



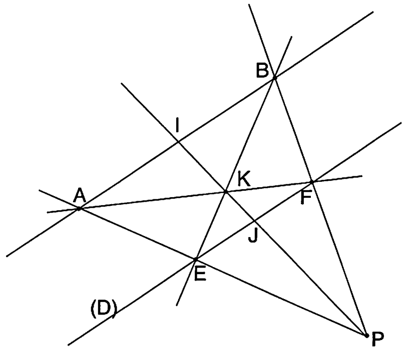
• Une solution consiste à dire que G se transforme en P par l'homothétie de centre A et de rapport 2, que P se transforme en S par l'homothétie de centre B et de rapport 2, enfin que S se transforme en G par l'homothétie de centre C et de rapport 2. G est donc le centre de l'homothétie composée des trois homothéties précédentes. On le construit en joignant A à son image par la composée d'homothéties, puis B à son image, et en prenant l'intersection de ces droites.
De même pour les autres points.
• Autre solution, « barycentrique » cette fois : on commence par construire les points A' au tiers de [BC] en partant de B, B' au tiers de [CA] en partant de C, C' au tiers de [AB] en partant de A.
On joint alors A à A', B à B' et C à C' pour obtenir par intersection les points G, P et S comme sur la figure. Un raisonnement «barycentrique» montre que sur AA', AG = GP = 3 PA' (et donc AA' = 7 PA').
De même, BP = PS = 3 SB' et CS = SG = 3 GC'.
• Il s'ensuit alors que les sept zones triangulaire représentées sur la figure en gris ou en blanc ont même aire.

⊠ *La plupart des lecteurs donnent par découpage des solutions ne faisant pas intervenir de transformation géométrique.*

376. Sans compas

Pour construire le milieu du segment [AB] :

- Tracer, à l'aide de la règle à bords parallèles, une droite (D) parallèle à (AB)
- Par un point P en dehors de ces deux droites, mener deux sécantes (PA) et (PB) qui coupent (D) en E et F.
- Tracer (EB) et (AF) qui se coupent en K.
- Le point I, intersection de (AB) et (PK) est le milieu de [AB].



Pourquoi ?

– L'homothétie de centre P qui transforme A en E et B en F transforme le milieu I de [AB] en le milieu J de [EF]. Les points P, I, J sont donc alignés.

– L'homothétie de centre K qui transforme A en F et B en E transforme également I en J.

Les points K, I, J sont donc alignés.

– Ainsi, les quatre points P, J, K, I sont alignés.

En joignant P à K on construit du même coup le milieu de [AB] et celui de [EF].

⊠ *La plupart des lecteurs intervenus proposent la solution simple que voici :*

– on fait passer un des bords de la règle par a et l'autre par B ;

– ceci est possible pour deux positions de la règle symétriques par rapport à la droite (AB) ;

– on détermine ainsi un parallélogramme dont l'une des diagonales est [AB] ;

– le milieu de [AB] s'obtient en traçant les deux diagonales de ce parallélogramme.

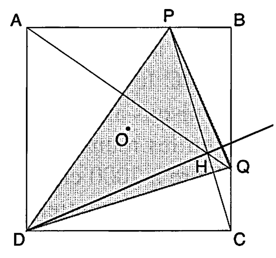
C'est le cas de François ADRIEN (78000 Versailles), Pierre ANDRE (57070 Metz), Xavier ARSENE-HENRY (Paris), Jean BERRY (92260 Fontenay aux Roses), François BRAVO (88400 Gerardmer), V. CAMESCASSE (44000 Nantes), Bernard CANCEILL (91590 Mondeville), M. GAVE (74940 Annecy le Vieux), Philippe KAHN (92100 Boulogne), Bernard LOUBIERES (06480 La Colle sur Loup), Robert MUNNICH (Paris), Ph. PAQUETEAU (33110 Le Bouscat). René MONNOT (34540 Balaruc les Bains) signale toutefois, à juste titre, que cette construction n'est valable que si la largeur de la règle est supérieure à la longueur AB. Si ce n'est pas le cas, nous dit ce lecteur, il suffit « d'agrandir » le segment [AB] en le prolongeant de part et d'autre de A et de B par des segments de même longueur, par exemple multiples de la largeur de la règle.

Marcel CHAPELAND (71000 Macon) indique, lui, une variant de la construction précédente, toujours à base de parallélogramme, et J-P. BOUDIER (37000 TOURS) fournit en plus de cela deux solutions utilisant les médianes d'un triangle. Seule la solution d'André SERRE (92800 Puteaux) fait appel à une homothétie.

377. Compas interdit

3 tracés suffisent pour construire la perpendiculaire à (PQ) passant par D.

1. Droite (CP)
2. Droite (AQ) qui coupe la précédente en H
3. (DH) est perpendiculaire à (PQ).



Justification : La rotation de centre O et d'angle 90° transforme Q en P, D en C, A en D, donc :

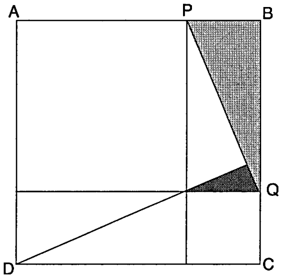
(QD) en (PC) : les deux droites sont perpendiculaires ;

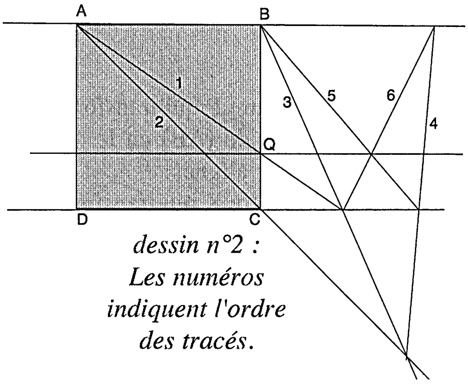
(AQ) en (DP) : les deux droites sont perpendiculaires.

En conséquence, H est l'orthocentre du triangle PDQ, et la troisième hauteur, la perpendiculaire à (PQ) passant par D, passe également par H.

☒ *Pol DAUBE (22430 Erquy) et Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble) ont eu tous deux la même idée : utiliser les projetés orthogonaux de P et Q sur les côtés opposés du carré pour prouver que les angles PQB et HDC sont égaux, d'où la similitude des triangles grisés. L'un étant rectangle, l'autre le sera aussi (dessin n°1). La seule difficulté consiste à tracer à la règle seule les parallèles aux côtés du carré passant par P et Q, mais ce n'est pas impossible (voir dessin n°2) ...*

dessin n°1





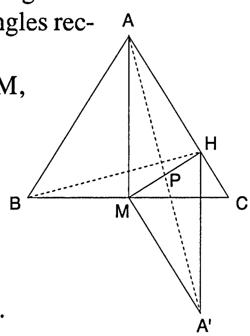
dessin n°2 : Les numéros indiquent l'ordre des tracés.

378. Orthogonalité inattendue

On trace le point A' de façon que le quadrilatère AMA'H soit un parallélogramme.

Ainsi, les diagonales [AA'] et [MH] se coupent en leur milieu P. Les triangles rectangles AMB et AHM (donc A'MH) sont semblables.

La similitude (composée d'une rotation et d'une homothétie) de centre M, d'angle $-90°$, et de rapport $\dfrac{MA}{MB}$ transforme :



- B en A
- H en A'

et donc (BH) en (AA').

Ainsi, (BH) et (AA') sont perpendiculaires. Or P est sur la droite (AA').

D'où la conclusion : (BH) et (AP) sont perpendiculaires.

☒ *La palette des méthodes proposées par nos lecteurs est ici très variée : similitude de centre A transformant B en M pour François BRAVO (88400 Gérardmer) et Jacques VERGE (Paris), triangles semblables et trigonométrie pour A. CAROUGE (17740 Sainte Marie de Ré) et M. GAVE (74940 Annecy le Vieux), Produit scalaire pour Jacques PELLETIER (52110 Bouzancourt).*

379. Le restaurant du Trigone

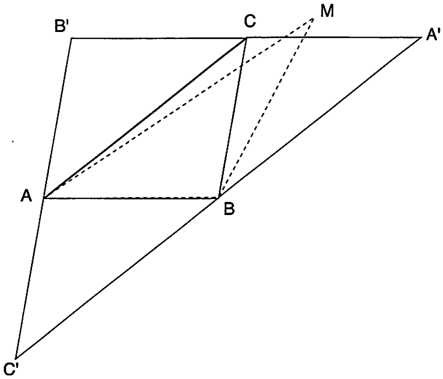
Oui, pour chaque table, il existe forcément une nappe triangulaire de moins de 2000 cm^2 qui recouvre la table.

Soit ABC le triangle de plus grande aire inscrit dans la table. Il a une aire inférieure à 500 cm^2. Construisons alors les trois symétriques de ABC par rapport aux milieux des côtés. Avec ABC, on a alors en les réunissant un triangle A'B'C' quatre fois plus grand que le triangle initial, donc d'aire inférieure à 2000 cm^2.

On peut alors montrer qu'il n'existe aucun point de la table en dehors de ce grand triangle, sous peine

de trouver un triangle d'aire supérieure à celle de ABC inscrit dans la table.(voir dessin).
En effet, si le point M, par exemple, appartenait à la table, le triangle ABM serait entièrement contenu dans la table pour raison de convexité. Or, ce triangle est d'aire supérieure à l'aire de ABC (même base AB et hauteur plus grande), ce qui est impossible puisque ABC est un triangle d'aire maximale inscrit dans la table.

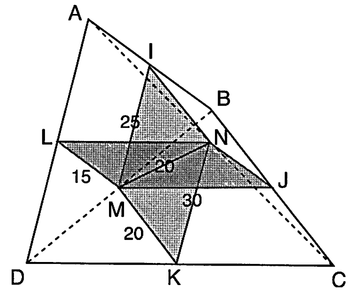
☒ *Solution claire de C. ROMON.*



380. Le quadrilatère articulé

Il existe pour le quadrilatère cherché deux possibilités, l'un convexe (figure n°1), l'autre concave (figure n°2).

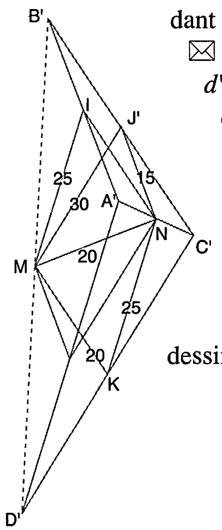
Imaginons le problème résolu, et construit un quadrilatère ABCD tel que AB = 30, BC = 40, CD = 60, DA = 50 et MN = 20 (où M et N sont les milieux respectifs des diagonales [BD] et [AC].
I, J, K, L étant les milieux des côtés, MJNL et MKNI sont des parallélogrammes dont on peut aisément calculer les longueurs des côtés, indiquées sur la figure (le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième et de longueur moitié).
Réciproquement, à partir de la donnée du segment [MN], de longueur 20, on construit d'abord les points I, J, K et L, sommets des parallélogrammes, grâce à ces longueurs, puis les côtés du quadrilatère, puisqu'on connaît leurs milieux et leurs directions, parallèles aux côtés des parallélogrammes.



dessin 1

Il existe deux façons d'agencer les parallélogrammes MJNL et MKNI, correspondant à deux formes de quadrilatères différentes.

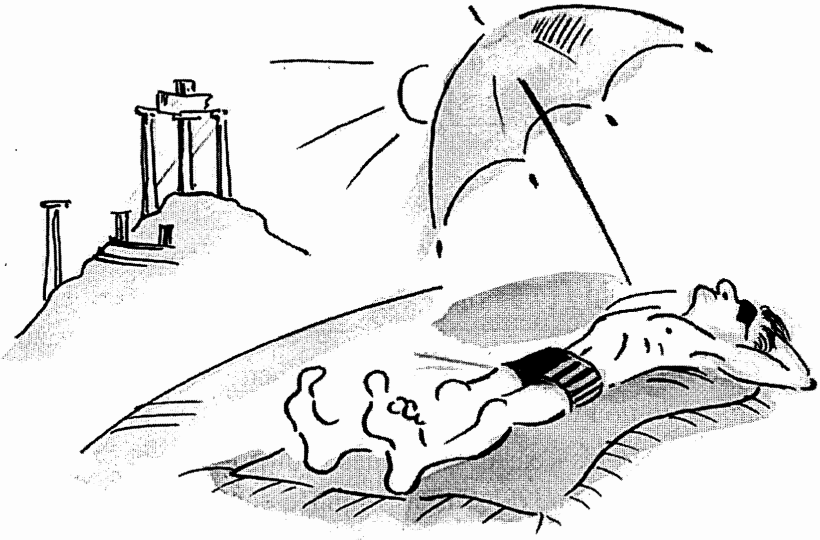
☒ *Merci à nos lecteurs, toujours attentifs, de nous avoir signalé l'existence d'une deuxième solution, dont nous n'avions pas fait part dans notre édition originale. Interventions pertinentes de Gilbert GROS (78990 Elancourt), Pierre-Jean LAURENT (38420 Murianette), Jean LEMARIE (92400 Courbevoie), Louis REMILLIEUX (74410 Saint-Jorioz), C. ROMON, Alain VALLON (78000 Versailles).*



dessin 2

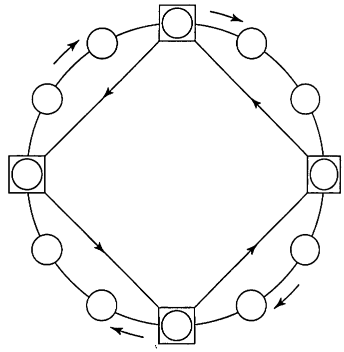
Curiosités & paradoxes

Chapitre 3



381. L'horloge de Fibodieci

Problème n°305 du 24/11/02



Fibodieci, célèbre horloger de Pise, a confectionné une drôle d'horloge. À la place des heures, il a gravé dans les douze cercles des chiffres compris entre 0 et 9 de telle sorte que, lorsqu'on progresse dans le sens des aiguilles, chaque chiffre soit le chiffre des unités de la somme des deux précédents.
Ainsi, après un « 3 » et un « 8 », on aurait forcément un « 1 », puis un « 9 », puis un « 0 » etc.

Mais ce qui est le plus étonnant, c'est que parmi ces douze chiffres, ceux qui sont situés aux quatre points cardinaux (dans les carrés) vérifient la même propriété quand on progresse de l'un à l'autre en sens inverse (le long du grand carré qui les relie).

Parmi les douze nombres, un et un seul, situé à l'un des quatre points cardinaux, occupe la place qu'il occuperait dans une *vraie* horloge.

Reconstituez l'horloge de Fibodieci.

382. Produit magique

Problème n°310 du 28/01/03

Tout le monde connaît les « carrés magiques additifs » dont un exemple est donné ci-contre. On place dans les 16 cases d'un carré les entiers de 1 à 16 de sorte que toutes les lignes, toutes les colonnes et les deux diagonales aient la même somme.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Mais sauriez-vous ranger dans un carré de même taille les 16 diviseurs du nombre 216 de sorte que le produit des nombres situés sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale soit le même ?

383. Enigma

Problème n°315 du 04/03/03

OQURXEXAUQXZGQSKWDJYXDIKUUJT

Le message ci-dessus a été adressé autrefois par un philosophe aux futures générations.
Mais il a été crypté par un adepte facétieux qui n'a laissé que l'explication suivante :

Des blocs de quatre lettres d'abord tu formeras
De la CLEF chaque bloc alors décaleras
Ainsi le court mot DE qu'on rencontre deux fois
Est codé par GQ, mais aussi par IK.

Sauriez-vous décrypter le message ?

384. Le digicode

Problème n°320 du 08/04/03

Pour pénétrer dans le hall de cet immeuble, il faut taper le bon code : un nombre qui comporte des chiffres compris entre 0 et 9. Un cambrioleur voudrait franchir ce premier obstacle, mais il ignore le code.
En observant de loin un occupant entrer dans l'immeuble, il a l'impression que le code comporte deux chiffres. Il suffit qu'il tape les 100 combinaisons possibles de 00 à 99, soit au maximum 200 pressions sur les touches. Mais, économe de son énergie, il se dit que le digicode doit certainement mémoriser les derniers chiffres tapés. Ainsi, en appuyant sur 1234, il couvre les combinaisons 12, 23 et 34.

Combien de touches, au maximum, devra-t-il presser pour être sûr d'accéder au hall ?

Et si le digicode comporte trois chiffres ?

385. Les deux tas

Problème n°325 du 12/05/03

• Écrivez les nombres de 1 à 20 sur 20 cartons.
• Faites-en deux tas de 10 cartons, que vous triez, le premier par ordre croissant, le deuxième par ordre décroissant.
• Prenez le premier carton de chaque tas et notez la différence des deux nombres (en valeur absolue) puis jetez les deux cartons.
• Faites de même avec le deuxième carton de chaque tas, puis le troisième etc. : vous noterez à chaque fois la différence des deux nombres inscrits sur les cartons avant de les jeter.
• Faites la somme des dix différences.

Sauriez-vous montrer que cette somme est la même, quelle que soit la façon de répartir les cartes entre les deux tas ? Combien vaut-elle ?

386. L'aigle attaque

Problème n°330 du 17/06/03

La scène se déroule dans une région montagneuse. Un mouton, qui paissait sur un plateau, a échappé à la vigilance de son berger. Pour son malheur, un aigle, dont le nid est situé sur un pic rocheux, à 600 mètres d'altitude, l'aperçoit. Le mouton se trouve à 600 mètres de la verticale du nid de l'oiseau de proie.
L'aigle à l'attaque peut progresser à sa guise de deux manières :
– en piqué : dans n'importe quelle direction, à 60 km/h
– en chute libre : uniquement à la verticale, à 156 km/h.

Le berger, qui voit le danger, peut être auprès du mouton en 48 secondes.

Parviendra-t-il à soustraire le mouton des griffes du rapace ?

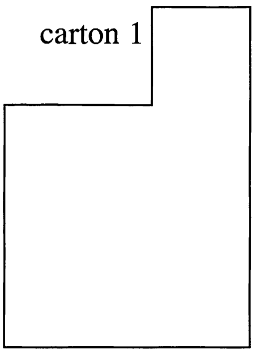
387. Le puzzle carré

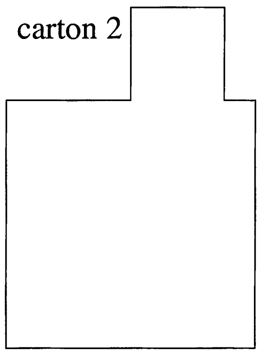
Problème n°335 du 22/07/03

À partir d'une plaque de carton constituée d'un grand carré surmonté d'un petit, on veut découper les pièces d'un puzzle qui permettra de reconstituer un autre carré (plus grand que les deux premiers).

Comment réaliser ce puzzle avec seulement deux découpes rectilignes du carton numéro 1 ?

Comment réaliser ce puzzle avec seulement trois découpes rectilignes du carton numéro 2 ?





388. Encore une tombola

Problème n°340 du 26/08/03

Les billets de cette tombola sont très nombreux : 54264. Il y en a autant que façons de griser 6 des 21 cases de cette grille. Un billet est gagnant si deux quelconques des nombres inscrits dans les cases grisées ont une différence au moins égale à 3.

Combien y a-t-il de billets gagnants ?

Billet perdant

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

Billet gagnant

389. Les deux correcteurs

Problème n°345 du 30/09/03

Pour s'assurer qu'un minimum de fautes subsistera, la rédaction du « Monde » a demandé à deux correcteurs de relire l'intégralité d'un numéro avant impression. Le premier d'entre eux détecte 45 « coquilles ». Le deuxième en découvre 56, parmi lesquelles 40 ont déjà été signalées par le premier.

Quelle est votre estimation du nombre total de fautes ?

N.B. Est-il besoin de préciser que cette histoire est de la pure fiction, le nombre d'erreurs dans votre journal préféré étant infime, même avant correction ?

390. Tour de piste

Problème n°350 du 04/11/03

Les cyclistes Jan et Lance s'élancent en sens inverse sur une piste circulaire.

Jan, qui partait lancé, roule à une vitesse uniforme tout au long du circuit.
Lance, qui partait arrêté, produit un effort intense de sorte que sa vitesse croît constamment (uniformément) tout au long du parcours, si bien qu'après avoir croisé une première fois son concurrent, il boucle son tour exactement en même temps que lui.

Quelle fraction de tour Jan avait-il parcourue au moment du premier croisement ?

391. Un ensemble de nombres

Problème n°355 du 16/12/03

Dans cet ensemble de nombres rationnels, tous distincts, compris entre 0 et 1, il y a 0 et il y a 1.
On sait par ailleurs que si un groupe de nombres y figure, leur moyenne aussi.

Le nombre 1/3 figure-t-il forcément dans cet ensemble ?

Et le nombre 1/5 ?

392. Le quadrilatère mystérieux

Problème n°356 du 20/01/04

Bonjour. Je m'appelle ABCD et je suis un quadrilatère convexe.

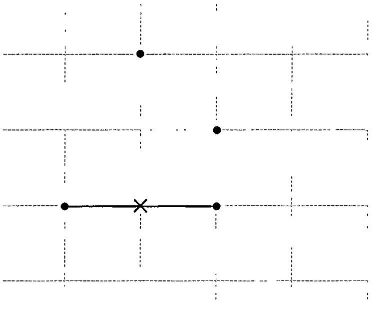
Le cercle qui admet pour diamètre mon côté AB est tangent à mon côté CD.
Le cercle qui admet pour diamètre mon côté CD est tangent à mon côté AB.
Je ne suis pas un parallélogramme.

Qui suis-je ?

393. Points à la ligne

Problème n°367 du 09/03/04

Sur des nœuds d'un quadrillage régulier, on place un certain nombre de points.

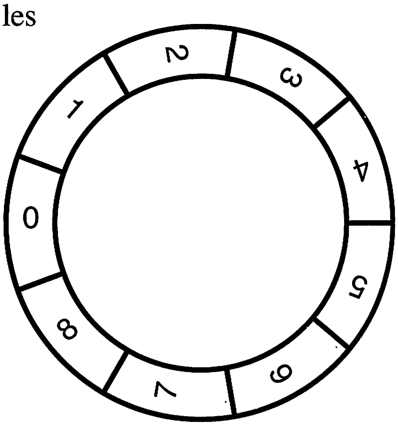


À partir de combien de points est-on certain qu'il existe un couple d'entre eux dont le milieu est un nœud du quadrillage ?

394. La marelle circulaire

Problème n°370 du 30/03/04

Les neuf cases de cette marelle contiennent les nombres successifs de 0 à 8. Chaque enfant part du zéro, avance à cloche-pied d'un pas vers la case « 1 », y dépose un caillou, avance de deux pas, dépose un caillou dans la case 3, avance de trois pas, puis de quatre, puis de cinq et ainsi de suite, en avançant toujours d'un pas supplémentaire et en déposant un caillou dans la case d'accueil. Il s'arrête quand il trébuche ou quand son pas est sorti de la case prévue.

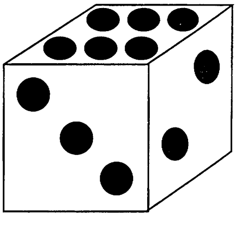


Est-il possible à un enfant de réaliser le grand chelem, c'est-à-dire de déposer au moins un caillou dans toutes les cases ? Et avec une marelle à huit cases (numérotées de 0 à 7) ?
Combien la marelle doit-elle compter de cases pour que le grand chelem soit possible ?

395. Dé qui roule…

Problème n°375 du 04/05/04

Un dé ordinaire est posé sur une table, la face supérieure étant un « six ». La face cachée est donc le « un », puisque le total de deux faces opposées du dé est égal à 7. On comptabilise ce « six », puis on fait pivoter le dé sur l'une de ses arêtes, et on note la valeur de la face supérieure. On recommence à faire pivoter le dé, et ainsi de suite, jusqu'à totaliser cent valeurs de la face supérieure.



Quel est le plus grand total qu'il est possible d'obtenir ? Et le plus petit ?
Est-il possible de parvenir à tout nombre compris entre ces deux bornes ?

396. La ville aux trois amis

Problème n°380 du 08/06/04

Dans cette ville, chaque habitant a exactement trois amis, pas un de plus, pas un de moins.

Sauriez-vous montrer que cette ville a un nombre pair d'habitants ?

La situation est-elle possible avec tout nombre pair d'habitants ?

397. Un tournoi raté

Problème n°385 du 13/07/04

Ce tournoi de jeux de rôles avait mal commencé : on devait jouer pendant toutes les vacances, mais le château-fort hanté était libre moins d'un mois. Les participants devaient venir par centaines, or ils étaient moins de cinquante !

Quoiqu'il en soit, le tournoi eut lieu, et les concurrents s'affrontèrent selon une règle établie depuis des lustres. On attribuait quotidiennement des points à chaque joueur selon son classement du jour :
1 point pour le premier, 2 points pour le deuxième, et ainsi de suite jusqu'au dernier (il n'y a jamais eu d'ex aequo).

Chose extraordinaire, à la fin du tournoi, tous les participants avaient le même nombre de points : 333

Combien étaient-ils ? Combien de jours la joute avait-elle duré ?

398. Cartes sur table

Problème n°390 du 17/08/04

Sur chacune des cartes de ce jeu, on a inscrit un nombre entier strictement positif. Il y a onze cartes et la somme des nombres inscrits est égale à 20.

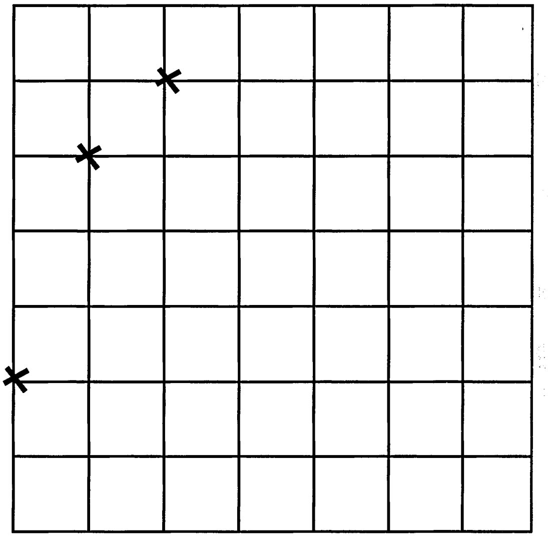
Peut-on forcément séparer le paquet en deux tas de total 10 ?

399. Alignements interdits

Problème n°395 du 21/09/04

Sur les 64 nœuds de ce quadrillage, vous pouvez tracer autant de croix que vous le souhaitez à condition que trois d'entre elles ne soient jamais alignées, dans quelque direction que ce soit. Trois croix sont déjà placées.

Quel est le plus grand nombre de croix que vous pourrez disposer ?



400. Multiplier les différences

Problème n°400 du 26/10/04

On prend quatre entiers quelconques : a, b, c, d.

On fait toutes les différences $a - b, a - c, a - d, b - c, b - d, c - d$, puis on fait le produit de toutes ces différences.

Ce produit est toujours un multiple de 12. Pourquoi ?

401. Jeux de cubes

Problème n°405 du 30/11/04

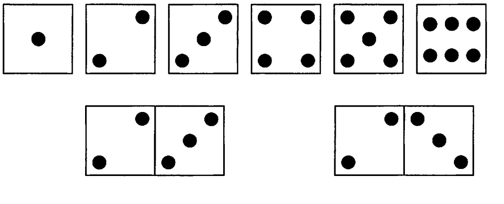
On dispose de cubes identiques en bois brut. On veut peindre les six faces de chaque cube avec les six couleurs : blanc, noir, bleu, rouge, vert et jaune, une couleur par face, jamais deux faces de la même couleur.

Combien de cubes différents pourrait-on ainsi obtenir ?

Attention, deux cubes ne sont différents que si, quelle que soit la façon de les poser sur une table, ils ne peuvent pas apparaître identiques.

Et si on veut peindre sur les faces des points pour figurer les nombres de 1 à 6 et obtenir des dés. Combien de dés différents (pas forcément réglementaires) pourrait-on cette fois obtenir ?

Pour ceux qui pensent que c'est la même question, voici la disposition de tels points. On pourra remarquer que toutes les valeurs ne présentent pas les mêmes invariances par symétrie ou rotation. Ainsi, il y a plusieurs façons de placer un « 2 » à côté d'un « 3 ».

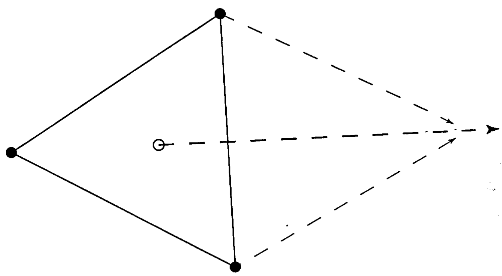


402. Le triangle infernal

Problème n°410 du 04/01/05

Une mangouste se trouve au centre d'un triangle équilatéral. À chaque sommet de ce triangle, un scorpion. La mangouste peut se débarrasser d'un scorpion, mais deux scorpions, s'ils s'unissent, peuvent tuer la mangouste.

Au même moment, la mangouste et les scorpions démarrent.
La mangouste se dirige, à vitesse constante, le long d'une droite qui passe à égale distance de deux scorpions tandis que les scorpions, qui se déplacent tous à la même vitesse, à peine moins grande que celle de leur proie, visent un point de sa trajectoire qu'ils choisissent au mieux.



La mangouste s'échappera-t-elle du triangle infernal ?

403. Le peloton

Problème n°415 du 08/02/05

Etape de montagne dans le tour de France. Dès la première côte, le peloton de 301 coureurs s'étire. À midi, l'écart entre le premier et le deuxième s'établit à 30 mètres, mais il y a 6000 mètres entre le premier et le dernier, les écarts entre coureurs étant tous de 10 mètres, 20 mètres ou 30 mètres.

On compte d'ailleurs 100 écarts de 10 mètres, 100 écarts de 20 mètres et 100 de 30 mètres.

La radio du tour prétend malgré cela qu'il n'y a jamais 3000 mètres d'écart entre deux coureurs. Est-ce possible ?

404. Indice de pollution

Problème n°420 du 15/03/05

Depuis 2001, la station «Air Pur» publie quotidiennement pour la ville Math City un indice de pollution. Il s'agit d'un nombre entier compris entre 0 et 5 qui rend compte de l'importance des gaz polluants, l'indice zéro correspondant à un jour sans pollution, l'indice 5 à un état d'alerte maximale.

Cette année-là, les habitants de Math City ont constaté que :
- le nombre de jours sans pollution était un nombre premier ;
- le nombre de jours à pollution inférieure ou égale à 1 était un nombre premier ;
- le nombre de jours à pollution inférieure ou égale à 2 était un nombre premier ;
- le nombre de jours à pollution inférieure ou égale à 3 était un nombre premier ;
- le nombre de jours à pollution égale à 4 était un nombre premier ;
- il y a eu trente-huit jours à pollution maximale.

De plus, la somme de tous les indices de l'année s'est également avérée être un nombre premier.

Combien y a-t-il eu de jours sans pollution ? En quelle année était-ce ?

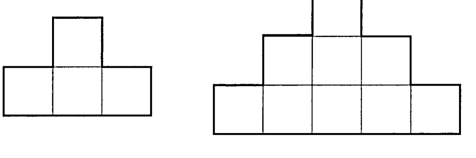
Nota : on rappelle qu'un nombre premier est un entier au moins égal à 2 qui admet pour seuls diviseurs lui-même et 1.

405. Les podiums paveurs

Problème n°425 du 19/04/05

Vous disposez en nombre suffisant de deux types de pièces : les petits podiums P et les grands podiums G. Le but est de paver un carré avec ces pièces, sans trou ni recouvrement, et sans sortir du carré.

Est-il possible de paver avec les podiums P et G un carré de côté 4 ? de côté 6 ? de côté 10 ? Quels sont les carrés qu'on peut paver à l'aide exclusive de grands podiums ?



406. Les carrés paveurs

Problème n°430 du 24/05/05

Vous disposez des carrés suivants :

1 carré de côté 1 ;
2 carrés de côté 2 ;
1 carré de côté 3 ;
4 carrés de côté 4;
1 carré de côté 5 ;
4 carrés de côté 6 ;
1 carré de côté 7 ;
1 carré de côté 10.

Est-il possible de paver un rectangle à l'aide de ces 15 pièces ?

Le pavage ne doit avoir, naturellement, ni trou ni chevauchement.

407. Comparaisons

Problème n°435 du 28/06/05

Trois nombres positifs a, b, c sont tels que leur somme surpasse leur produit :

$$a + b + c \geq abc$$

Peut-on comparer leur produit à la somme de leurs carrés $a^2 + b^2 + c^2$?

408. Les dossards de l'ABC

Problème n°440 du 02/08/05

5 des joueurs de l'Archimède Basket Club sont présents sur le terrain. Leurs numéros (tous différents) sont des nombres entiers compris entre 1 et 12. L'un des sportifs, qui porte le numéro 1, fait la remarque suivante : « Tiens, c'est curieux, si on prend deux nombres quelconques dans la liste de nos numéros, ils appartiennent toujours à une suite arithmétique obtenue avec un troisième nombre de la liste ».

Quels sont les numéros des dossards des cinq joueurs présents sur le terrain ?
La propriété serait-elle possible avec une liste finie, mais de plus de cinq nombres ?
NB : Une « suite arithmétique » de trois nombres est une suite de la forme a ; $a + r$; $a + 2r$; où les « écarts » sont identiques entre le premier et le deuxième et entre le deuxième et le troisième.

409. Le calculateur prodige

Problème n°445 du 06/09/05

Pour valider son record, Léonard a convoqué la presse. Il demande à deux journalistes de choisir chacun un nombre entier : « 4 », annonce le premier, « 11 » déclare le second. Léonard écrit alors une suite de nombres, *à la manière de Fibonacci*, chacun étant la somme des deux qui le précèdent : 4, 11, 15, 26, 41, ...
« Dites-moi quand vous souhaitez que je m'arrête », dit-il au premier journaliste. Ce dernier, voulant le pousser dans ses retranchements, le laisse continuer assez longtemps :
... 67, 108, 175, 283, 458, 741, 1199, 1940, 3139, 5079, 8218, 13297, 21515,...
« Stooop ! », hurle le journaliste.
« Bien, je vais maintenant calculer en une fraction de seconde la somme des termes jusqu'à celui que vous m'indiquerez », dit-il au second journaliste.
« Jusqu'à 5079 », répond l'autre.
« La somme est 13286 », dit tranquillement Léonard.
Les calculatrices sortent des poches, les doigts fébriles frappent les touches. Chacun doit se rendre à l'évidence, Léonard a donné la bonne réponse.

Comment a-t-il fait ?

410. Deux tout puissant

Problème n°450 du 11/10/05

Un nombre de 2 chiffres, écrit uniquement avec des 1 et des 2, et divisible par 2^2, évidemment que ça existe, c'est 12.
Un nombre de 3 chiffres, écrit uniquement avec des 1 et des 2, et divisible par 2^3, ça existe aussi, vous l'avez sur la langue, c'est ...

Trouvez un nombre de 4 chiffres, écrit uniquement avec des 1 et des 2, et divisible par 2^4.
Existe-t-il pour tout n, un nombre de n chiffres, écrit uniquement avec des 1 et des 2, et divisible par 2^n ?

411. Les nombres de Frédéric

Problème n°455 du 15/11/05

Le jeune mathématicien Frédéric s'intéresse aux nombres F (ou nombres de Frédéric) qui s'écrivent comme somme des premiers carrés (jusqu'à un certain rang variable n strictement positif) précédés du signe + ou du signe – :
$F = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm 4^2 \pm \ldots \pm n^2$

Sauriez-vous écrire les nombres 1, 2, 3, 4 sous forme de nombres de Frédéric ?
Montrez que tous les nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls) sont des nombres de Frédéric.

412. Fabrique de multiples

Problème n°460 du 20/12/05

Le nombre 213 749 est un multiple de 37, vous pouvez nous faire confiance.

Pouvez-vous trouver 23 autres nombres, dont l'écriture décimale comporte les six mêmes chiffres, et qui soient aussi des multiples de 37 ?

413. Express régional

Problème n°465 du 24/01/06

L'autoroute longeait la voie ferrée. Je roulais à vitesse constante (et autorisée par le code de la route).
Les trains express régionaux, qui s'élançaient à intervalles réguliers et à vitesse constante dans les deux sens, roulaient moins vite que moi : j'en dépassais un toutes les 55 minutes, tandis que je croisais toutes les cinq minutes ceux qui venaient en sens inverse.

À quel intervalle les TER quittaient-ils leur gare ?

414. Mettre de l'eau dans son vin

Problème n°470 du 28/02/06

Deux réservoirs de 10 litres contiennent chacun 9 litres d'eau et 1 litre de colorant chimique miracle rouge qui a la particularité de se mêler uniformément, intégralement et immédiatement à l'eau à laquelle il est mélangé. La concentration en colorant de 10% est jugée excessive et on décide de la diminuer.

Pour le premier réservoir, on procède de la manière suivante : on ouvre la vanne d'écoulement, on laisse échapper un litre, puis on verse un litre d'eau claire. On renouvelle l'expérience dix fois.

Quelle est la nouvelle concentration en colorant, en %, à deux décimales près ?

Pour le deuxième réservoir, on ouvre la vanne qui laisse s'écouler pendant dix minutes le liquide à raison d'un litre par minute, et on ajoute parallèlement et au même rythme d'un litre par minute de l'eau claire.

La nouvelle concentration sera-t-elle supérieure ou inférieure à celle du premier réservoir ? Quelle sera-t-elle, en %, à deux décimales près ? **(réservé aux experts)**

415. Puzzles de carrés

Problème n°475 du 05/04/06

Un fabriquant de puzzles ne possède qu'une machine à façonner des pièces carrées. Les pièces peuvent donc avoir toutes sortes de dimensions, mais doivent rester carrées. Quant aux tableaux à reconstituer, ils sont également de forme carrée. Sur chaque boîte, figure en gros caractères le nombre de pièces du puzzle.

Quels sont les nombres qui ne figureront jamais sur les boîtes ?

416. Un trop grand nombre

Problème n°480 du 16/05/06

L'opération ci-dessous porte sur des nombres trop grands pour rentrer dans une calculatrice (et puis cela prendrait trop de temps). Pourtant, on vous l'affirme, le résultat est un carré parfait.

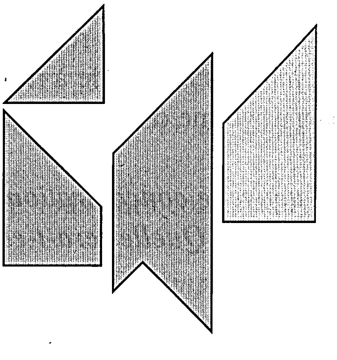
$$\underbrace{444\ldots44}_{\text{2006 fois}}\ \underbrace{111\ldots11}_{\text{2006 fois}} - \underbrace{555\ldots55}_{\text{2006 fois}}$$

Sauriez-vous le montrer et, sans calculatrice, déterminer la racine carrée de ce résultat ?

417. Puzzle à l'aire du té

Problème n°485 du 20/06/06

Rencontré pendant le dernier *Salon des Jeux Mathématiques* ce puzzle, vexant quand on n'en vient pas à bout, car semblant si facile !



Reconstituez la lettre T à l'aide des quatre pièces ci-contre.

418. Les deux billes

Problème n°490 du 25/07/06

Un tube cylindrique contient une certaine quantité d'eau.

On y plonge une bille d'acier sphérique de 7 mm de rayon : l'eau affleure juste au sommet de la bille.
On la retire et on plonge cette fois dans le tube une bille d'acier sphérique de 14 mm de rayon : l'eau affleure encore exactement au sommet de la bille.

Quelle était la hauteur de l'eau avant qu'on y plonge les billes ?

419. Racine entière

Problème n°495 du 29/08/06

Un nombre entier strictement positif N étant donné, on appelle « racine entière » de N, et on note ((N)), la racine carrée de N arrondie à l'entier le plus proche.

Sauriez-vous calculer la somme de tous les inverses des racines entières des nombres entiers compris entre 1 et 2007 ?

420. Consécutifs et divisibles

Problème n°500 du 03/10/06

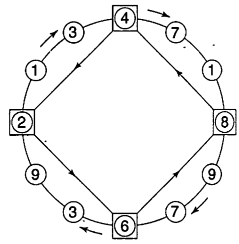
Une liste d'entiers vérifie « la propriété N » (où N est lui-même un entier) si tous les éléments de cette liste sont divisibles par l'un des entiers de 2 à N.

Quelle est la longueur de la plus grande liste d'entiers consécutifs qui vérifie la propriété 12 ?

Curiosités & paradoxes SOLUTIONS

381. L'horloge de Fibodieci

Voici la seule solution : seul, le « 6 » occupe la place qu'il occuperait dans une vraie horloge.



Pour déterminer cette succession de chiffres, on peut, à partir du premier, a, celui qui est à la place du « 1 » et du second, b, à la place du « 2 », déterminer les autres en remplaçant chaque nombre du calcul par son reste dans la division par 10. Nous obtenons donc la suite : a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, ... $8a + 13b$ ou $8a + 3b$, ..., $55a + 89b$ ou $5a + 9b$ pour le douzième, puis $9a + 4b$ doit être égal à a et $4a + 3b$ doit être égal à b. Il ne reste de ces deux dernières conditions que $4a + 2b$ a pour reste 0 dans la division par 10, ou encore $2a + b$ est multiple de 5. D'où a priori deux solutions, $(a, b) = (7, 1)$ ou $(a, b) = (2, 6)$ dont seule la première vérifie toutes les conditions du problème proposé.

✉ *Un bon nombre de lecteurs signalent l'existence d'une autre solution, mais elle ne respecte pas les consignes de l'énoncé puisque le « 4 » figure à sa bonne place, en plus du « 6 ».*

382. Produit magique

Voici l'une des solutions.

216	4	2	27
3	18	36	24
9	6	12	72
8	108	54	1

On remarquera qu'elle a été obtenue à partir d'un carré magique « additif » en substituant aux entiers de 1 à 16 les diviseurs de 216 rangés dans l'ordre 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216. Le « produit magique » est 46 656.

✉ *La plupart des lecteurs font le lien entre carré magique additif et carré magique multiplicatif. J. CARLHIAN (Lyon) et C. ROMON utilisent, eux, les puissances de 2 et de 3, puisque $216 = 2^3 \times 3^3$ pour remplir ce carré.*

383. Enigma

Le plus sûr est de n'être sûr de rien.

Cette phrase de Voltaire pouvait être décryptée en groupant les lettres par blocs de quatre, et en décalant (négativement) les lettres, dans chaque bloc, par rapport à la place qu'elles occupent dans l'alphabet, de 3, 12, 5 et 6 rangs. On remarque que les lettres de rangs 3, 12, 5 et 6 forment le mot CLEF

384. Le digicode

Si le code comporte deux chiffres, il suffit de presser sur 101 touches.
Et s'il comporte trois chiffres, sur 1002 touches.

Une suite possible des 101 pressions avec deux chiffres est :
0010203040506070809**1**1213...19**2**2324...29**3**3435...39**4**4546...49**5**56...59**6**67...69**7**78**7**9**8**89**9**0

On peut construire une suite similaire (de 1002 éléments) avec un digicode de trois chiffres :
0001...009**011...019**021...029...091...099**1**112...119**1**22...129...199**2**223...229...299**3**334...399...899**900**

✉ *Si Philippe LALLOUET (72160 Connerré) nous décrit avec précision l'algorithme de frappe des touches, Christian ROMON nous en donne une construction par récurrence.*

385. Les deux tas

La somme vaut 100 quelle que soit la répartition entre les deux tas.

En additionnant les dix différences, on voit que la somme des différence est obtenue en additionnant 10 des nombres de 1 à 20 et en soustrayant les 10 autres.

On remarque alors qu'un nombre strictement supérieur à 10 ne peut être précédé que du signe +.

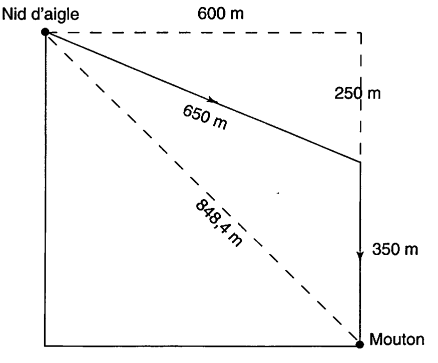
En effet, s'il était inférieur au nombre X marqué sur le carton de même rang de l'autre tas, il serait aussi inférieur à tous les nombres plus grands que X du tas de X et à tous les nombres plus grands que lui de son propre tas. Cela entraîne qu'il serait inférieur à 10 nombres (au moins). C'est impossible pour un nombre strictement supérieur à 10. En conséquence, tous les nombres de 11 à 20 sont précédés du signe +, tous les nombres de 1 à 10 du signe –, et le total des différences vaut 100.

386. L'aigle attaque

L'aigle, s'il adopte la bonne trajectoire, s'emparera du mouton **avant l'arrivée du berger**.

- En volant horizontalement jusqu'à la vericale du mouton, puis en se laissant tomber, il mettra 36 s de vol et 13,8 s de chute, soit plus de 48 s.
- En volant directement vers sa proie, il mettra 50,9 s.
- Mais en volant jusqu'au point situé à 350 m à la verticale du mouton, et en se laissant tomber de ce point, il ne mettra que 39 s de vol et environ 8,1 s de chute.

Il sera sur le mouton près d'une seconde avant le berger !

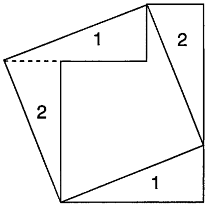


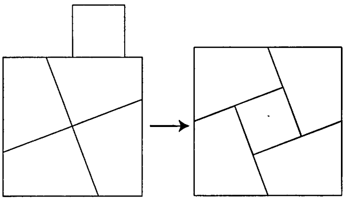
✉ *Certains lecteurs demandent des explications, d'autres donnent des solutions approchées, d'autres enfin, comme Bernard LOUZEAU (Paris) et C. ROMON proposent une démarche analytique. En appelant par exemple H l'intersection entre la verticale du mouton et l'horizontale de l'aigle et x la distance entre H et le point où la trajectoire du rapace change de direction, le temps (en secondes) de vol de l'aigle est :*

$t(x) = \frac{3}{50} \times \sqrt{600^2 + x^2} + \frac{3}{130} \times (600 - x)$. *Il atteint son minimum pour* $x = 250$.

387. Le puzzle carré

À gauche, la manière de construire le puzzle 1 en deux coups de ciseaux.
À droite, la manière de construire le puzzle 2 en trois coups de ciseaux.





✉ *Bernard TRUFFAULT (44980 Ste-Luce-sur-Loire) nous invite à faire toutes les constructions préparatoires par pliage car, nous dit-il, « les côtés du grand carré sont partagés suivant la demi-différence et la demi-somme des côtés des deux carrés donnés ».*

388. Encore une tombola

Il y a 462 billets gagnants. À chaque liste croissante (a, b, c, d, e, f) de nombres grisés sur une grille gagnante, on peut faire correspondre la liste $(a, b-2, c-4, d-6, e-8, f-10)$ de 6 nombres – tous différents – pris parmi les entiers de 1 à 11. Cette correspondance est bijective, c'est-à-dire que réciproquement, à une telle liste, correspond exactement un billet gagnant. Il y a donc autant de billets gagnants que de façons de choisir 6 nombres distints parmi 11.

✉ *Antoine WEHENKEL (Luxembourg) donne un calcul très détaillé du nombre de billets gagnants en précisant que le nombre total de billets n'intervient pas dans ce calcul.*

389. Les deux correcteurs

Le nombre de fautes peut être estimé à 63.

Soit p la probabilité avec laquelle une erreur est détectée par le premier correcteur, q celle avec laquelle elle est détectée par le deuxième, N le nombre de fautes. Les travaux des deux correcteurs étant indépendants, la probabilité avec laquelle une faute est détectée par les deux correcteurs à la fois est pq.

Le nombre moyen d'erreurs détecté par le premier correcteur sera Np. La loi des grands nombres indique que sa valeur la plus probable est 45.

Le nombre moyen d'erreurs détecté par le deuxième correcteur sera Nq, de valeur la plus probable 56.

Le nombre moyen d'erreurs détecté par les deux correcteurs sera Npq, de valeur la plus probable 40.

On a la relation : $N = \dfrac{Np \times Nq}{Npq}$. L'estimation de N sera : $\dfrac{45 \times 56}{40} = 63$.

390. Tour de piste

Au premier croisement, Jan avait parcouru environ 0,618 tour de piste.

À tout instant t, la distance parcourue par Jan, vt, est proportionnelle au temps, celle parcourue par Lance, ct^2, proportionnelle au carré du temps.

Si T est le temps mis par les deux coureurs pour parcourir un tour de piste (de longueur D), on a donc $vT = cT^2 = D$

Le premier croisement se fait à l'instant xT, où x est la fraction de tour parcourue par Jan.

Jan a parcouru la distance vxT. Pendant ce temps, Lance a parcouru la distance $cx^2\,T^2$.

Le total est un tour de piste D, on a donc $vxT + cx^2\,T^2 = D$.

Soit $xD + x^2\,D = D$.

x est le seul nombre positif vérifiant l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, soit $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

391. Un ensemble de nombres

1/3 ou 1/5 appartiennent à cet ensemble, ainsi que tout rationnel compris entre 0 et 1.

• 1/2 appartient à l'ensemble comme moyenne de 0 et 1, 1/4 comme moyenne de 0 et 1/2, 3/4 comme moyenne de 1/2 et 1, enfin 1/3 comme moyenne de 0, 1/4 et 3/4.

• On montre ensuite assez facilement que les rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2 appartiennent à l'ensemble. Alors, 1/5 en fera partie comme moyenne de 1/16, 1/8, 3/16, 1/4 et 3/8.

• On peut généraliser cette méthode à tout rationnel compris entre 0 et 1.

392. Le quadrilatère mystérieux

Je suis un trapèze

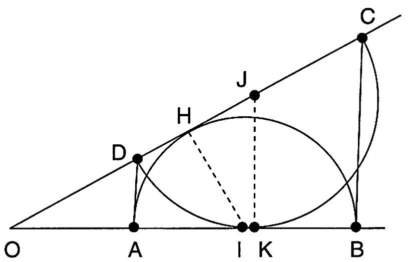
Si AB et CD sont parallèles, ABCD est un parallélogramme, ce qui est exclu par l'énoncé.

Donc AB et CD se coupent, en O par exemple.

On appelle alors I le milieu de AB (qui se projette sur CD au point de contact H avec le cercle) et J le milieu de CD (qui se projette sur AB au point de contact K avec l'autre cercle).

Les triangles rectangles OIH et OJK sont semblables (tous leurs angles sont égaux).

On a alors les proportions :



$$\frac{OI}{OJ} = \frac{IH}{JK} = \frac{OI + IH}{OJ + JK} = \frac{OI - IH}{OJ - JK}$$

c'est-à-dire $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OA}{OD}$

AD et BC sont parallèles !

☒ *Ce problème, comme le signale C. ROMON, est celui du jeu « les tours de Hanoï ».*

393. Points à la ligne

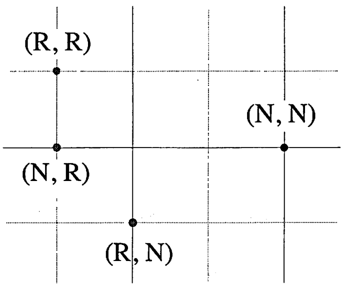
Parmi 5 points, il en existera forcément 2 dont le milieu est sur le quadrillage.

En effet, colorions alternativement en noir et en rouge les lignes du quadrillage.

Le milieu du segment joignant deux points P et Q sera un nœud du quadrillage si P et Q sont sur des lignes horizontales de même couleur et sur des lignes verticales de même couleur.

Si on associe à chaque point le couple formé par la couleur de ses lignes horizontale et verticale, il y a quatre possibilités : (N, N), (N, R), (R, N), (R, R).

Parmi cinq points, deux correspondront forcément à un même couple.



Quatre points de «couleurs» différentes.
Le cinquième prendra forcément la même couleur que l'un de ces quatre.

394. La marelle circulaire

Le grand chelem n'est pas possible avec neuf cases, mais est possible avec huit cases et chaque fois que le nombre de cases est une puissance de 2.

• À neuf cases, la suite des cases visitées est 0, 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 0, et le même cycle recommence.
• À huit cases, on visite successivement les cases 0, 1, 3, 6, 2, 7, 5, 4, soit toutes les cases.
• Plus généralement, pour un nombre N de cases, le nombre de pas permettant de s'arrêter à une case est de la forme $\frac{p(p+1)}{2}$, où p est un entier qui varie à partir de 0. Si les nombres de pas parcourus diffèrent d'un multiple de N, l'enfant tombera sur la même case.
– Lorsque N est une puissance de 2, si p et q sont différents et strictement plus petits que N, la différence entre deux de ces nombres de pas $\frac{p(p+1)}{2}$ et $\frac{q(q+1)}{2}$ est $\frac{(p-q)(p+q+1)}{2}$.
Ce n'est jamais un multiple de N : un seul des deux facteurs est pair, et chacun des deux est plus petit que N. Les N premières cases visitées sont donc toutes différentes.
– Lorsque N est impair, la suite des cases visitées est périodique de période N, et la k-ème case visitée est la même que la $(N-k-1)$ème.
– Enfin, lorsque $N = 2^t A$ est pair sans être une puissance de 2 (A impair), on montre cette fois que la différence peut être un multiple de N quand on choisit p et q de telle sorte que $p-q$ soit égal à A et $p+q+1$ à 2^{t+1}.

⊠ *Merci à Yves ARCHAMBAULT (Paris) pour les précisions qu'il apporte en prouvant que, pour $N = 2^tA$, dans les 2N premiers sauts il y en a plus de N qui diffèrent d'un multiple de N.*

395. Dé qui roule...

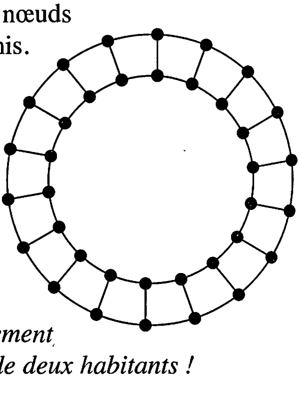
Le plus grand total qu'on puisse obtenir est 550 (50 fois alternativement 6 et 5).
Le plus petit total est 155 (6-2, puis 49 fois alternativement 1 et 2).
Il est possible de parvenir à tout nombre compris entre ces deux bornes.
On peut par exemple obtenir toute somme comprise entre 542 et 549 (sauf 546) en changeant les deux derniers dés de la suite de 550 en 6-4 (549), 6-3 (548), 6-2 (547), 4-2 (545), 4-1 (544), 3-1 (543), 1-2 (542). Pour 546, on peut remplacer les quatre derniers dés par 6-4-5-3.
Ensuite, pour descendre de 8, il suffit de remplacer la dernière séquence 6-5 par 1-2.
Cette méthode permet de trouver tous les totaux sauf 156, 157 et 162.
156 s'obtient par 6-3, puis 49 fois alternativement 1 et 2, 157 par 6-4, puis 49 fois alternativement 1 et 2, 162 par 6-3-6-3, puis 48 fois alternativement 1 et 2.

396. La ville aux trois amis

• Soit N le nombre d'habitants de la ville. Imaginons un graphe où les nœuds sont les habitants, et où une arête joint deux habitants quand ils sont amis. Comptons le nombre A d'arêtes.
En multipliant le nombre trois d'arêtes qui partent de chaque nœud par le nombre N de nœuds, chaque arête est comptée deux fois.

Donc $A = \frac{3N}{2}$. Mais A est un entier, ce qui impose que N soit pair.

• Voici un graphe montrant qu'avec un nombre pair d'habitants, la situation est toujours possible.



⊠ *Il est évident que la ville en question, comme nous le fait justement remarquer Jean-Marc MERRIEN (44000 Nantes), doit avoir plus de deux habitants !*

397. Un tournoi raté

36 joueurs ont joué 18 jours. Soit N le nombre de joueurs, K le nombre de jours :

Le total des points attribués chaque jour est $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}$

On doit donc identifier $333\,N = \dfrac{KN\,(N+1)}{2}$, soit $K\,(N + 1) = 666$.

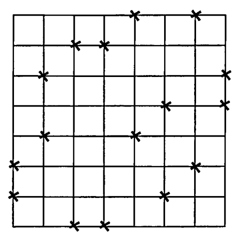
On essaie pour K tous les diviseurs de 666 inférieurs à 30 (on a joué moins d'un mois), soit 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Seul K = 18 donne pour N un nombre inférieur à 50.

398. Cartes sur table

On peut toujours réaliser deux tas de total 10. Rangeons les cartes dans un ordre quelconque et écrivons le nombre A_1 inscrit sur la première. Puis le nombre A_2 totalisant la première et la deuxième carte. Le nombre A_3 du total des trois premières. Et ainsi de suite jusqu'au total $A_{11} = 20$ des onze cartes. Parmi ces onze totaux, deux d'entre eux, A_p et A_q, ont forcément le même chiffre des unités (puisqu'il n'y a que dix chiffres possibles). Ces nombres étant compris entre 1 et 20, leur différence est égale à 10. C'est donc que la somme des nombres inscrits sur les cartes de rang $p + 1$ à q est 10.

> ✉ *C. ROMON construit rapidement un tas de total 10 en utilisant un lemme : « Si k est la valeur de la carte la plus élevée, il existe au moins k cartes de valeur 1 », qu'il démontre par l'absurde.*

399. Alignements interdits



On peut placer 16 croix, comme sur la figure ci-contre.
Bien qu'il semble que ce soit le maximum, nous n'avons pas trouvé d'argument pour le justifier autre qu'un programme informatique.

> ✉ *De nombreux lecteurs se sont penchés sérieusement sur ce problème et beaucoup nous ont dit avoir trouvé 57 solutions pour remplir une telle grille, dont 8 répondent aux conditions des trois points imposés. Solutions très détaillées de Pierre CARRE (Paris), Pierre GAILLARD (38240 MEYLAN), Didier MAILLARD (Paris), Alain POQUERUSSE (91120 Palaiseau), Jean-Claude RAYNAL (91940 Les Ulis). Nous devons à Marie-Nicole GRAS (38520 Le Bourg d'Oisan) une solution spécialement symétrique. Merci aux nombreux autres pour leurs propositions qui nous ont permis d'améliorer la solution.*

400. Multiplier les différences

• Le produit est déjà multiple de 4. En effet, parmi 4 nombres,
– ou bien 3 au moins sont de même parité, et le produit de leurs différences est un multiple de 8.
– ou bien 2 sont pairs (leur différence est paire) et deux sont impairs (leur différence est paire), donc le produit de leurs différences est un multiple de 4.
• Le produit est en plus multiple de 3.
En effet, parmi 4 nombres, 2 au moins ont même reste dans la division par 3, et donc leur différence est un multiple de 3.
• Un nombre à la fois multiple de 4 et de 3 est multiple de leur produit, 12, car 3 et 4 sont premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun autre que 1).

> ✉ *Un lecteur anonyme fait remarquer que le produit en question est invariant par une même translation d'amplitude entière sur tous les entiers a, b, c et d. Ainsi, si on retranche d à tous ces entiers, on peut, sans perte de généralité, considérer le produit abc(a – b)(a – c)(b – c).*

401. Jeu de cubes

Il y 30 cubes peints différents et 240 dés différents.

• S'il s'agissait de simplement permuter les couleurs, nous aurions :
$6\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ possibilités. Seulement, le cube n'est pas n'importe quelle figure, et comme il présente beaucoup de symétries, parmi ces figures, beaucoup sont les mêmes. À partir d'un cube peint donné, on obtient un cubes identique par des rotations :
– autour d'un axe passant par deux sommets opposés : il y a 8 telles rotations,
– autour d'un axe passant par les milieux de deux arêtes opposées : il y a 6 telles rotations,
– autour d'un axe passant par les centres de deux faces opposées : il y a 3 tels axes, chacun donnant 3 rotations, donc 9 telles rotations.Chaque cube possède donc 23 modèles identiques ; il figure donc 24 fois dans la liste des 720, d'où la réponse.

• Pour dénombrer les «dés», il suffit de distinguer les nombres de points «symétriques», 1, 4 et 5,invariants par rotation de 90°, et les «dissymétriques», 2, 3 et 6, invariants par rotation de 180° mais pas par rotation de 90°. En partant des 30 configurations du cube peint, on voit qu'il n'y a qu'une façon de remplacer une couleur par un nombre «symétrique», et deux façons de remplacer une couleur par un nombre «dissymétrique». Le nombre de configurations est donc multiplié par $2 \times 2 \times 2 = 8$. Évidemment, seuls les dés dont la somme des deux faces vaut 7 sont réglementaires. Il y en a 16 configurations.

402. Le triangle infernal

Les deux scorpions rattraperont la mangouste si le carré de leur vitesse est supérieur aux 3/4 du carré de la vitesse de la mangouste.

Sur l'axe sur lequel se déplace la mangouste, on fixe l'origine au milieu du segment des deux scorpions. L'unité étant la longueur d'un côté du triangle équilatéral :
• le carré de la distance parcourue par les scorpions sera donc $x^2 + \frac{1}{4}$

• tandis que celui de la distance parcourue par la mangouste est $(x + \frac{\sqrt{3}}{6})^2$.

En appelant k le rapport des carrés des vitesses des scorpions à la mangouste, il y aura jonction des trois bestioles au point d'abscisse x si la relation suivante est vérifiée : $x^2 + \frac{1}{4} = k\,(x + \frac{\sqrt{3}}{6})^2$.

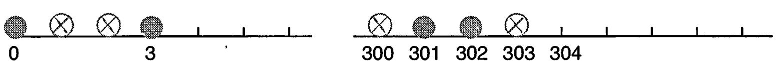
La condition se ramène à l'équation : $(1 - k)\,x^2 - kx\,\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\,(1 - \frac{k}{3})$ qui admet des solutions si k est supérieur à $\frac{3}{4}$.

> ⌧ *Et si la mangouste partait dans l'autre sens ? suggère avec humour Emmanuel FRAISSE (92340 Bourg la Reine).*

403. Le peloton

Il y a forcément deux coureurs à 3000 mètres l'un de l'autre.

Supposons en effet que la radio dise vrai, et divisons le serpentin du peloton à midi en décamètres. Un point gris désigne un cycliste, une croix l'absence de cycliste.



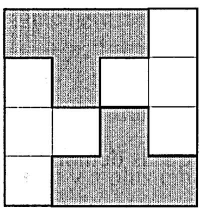
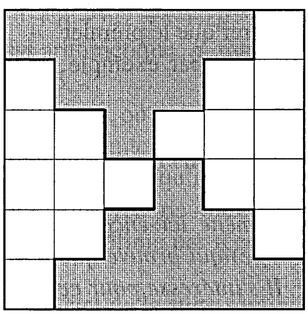
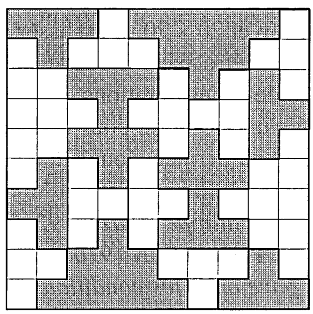
Une remarque préliminaire s'impose : s'il n'y a aucun écart de 3000 mètres entre deux coureurs, on déduit aisément qu'alors, à chaque écart de 3 décamètres entre deux coureurs consécutifs correspond 300 décamètres plus loin (ou 300 décamètres plus tôt) un écart d'1 décamètre entre deux coureurs. Réciproquement, chaque écart d'1 décamètre donne lieu 300 décamètres avant ou après à un écart de 3 décamètres, puisqu'il y a autant d'écarts de chaque sorte.
Regardons alors ce qui se passe dans la première moitié du parcours (précisément du coureur de tête jusqu'au coureur du décamètre 301, puisqu'il n'y a pas de coureur au décamètre 300).
S'il y a dans cette moitié p écarts de 3 décamètres, il y en a donc $(100 - p)$ dans la deuxième moitié, autant que d'écarts d'1 décamètre dans la première moitié, d'après la remarque préliminaire. Au total, $100 + 2p$ décamètres sont ainsi utilisés.
Conclusion : il reste $(201 - 2p)$ décamètres, soit un nombre impair de décamètres, pour caser les écarts de 2 décamètres, ce qui est impossible.

404. Indice de pollution

Il n'y a eu que deux jours sans pollution. Cela se passait en 2004.
Appelons respectivement a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 les nombres de jours d'indice 0, 1, 2, 3, 4 et 5.
L'énoncé nous apprend que a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, a_4 sont des nombres premiers et que $a_5 = 38$.
En dehors de 2, les autres nombres premiers sont impairs.
• Si a_0 était strictement supérieur à 2, les nombres a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, seraient impairs, et en conséquence, par différence, a_1, a_2 et a_3 seraient pairs.
La dernière condition, qui s'écrit « $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 190$ est un nombre premier », ne serait pas vérifiée (le nombre serait pair). Donc a_0 est égal à 2.
• Si $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ était égal à 2, l'année comportant 365 ou 366 jours, c'est que a_4 serait égal à 325 ou 326 qui ne sont pas premiers.
Donc $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ est un nombre premier impair.
De même, a_4 ne peut être égal à 2, car c'est $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ qui serait égal à 325 ou 326.
Donc a_4 est lui aussi un nombre premier impair.
Le nombre de jours de l'année est $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + a_4 + 38$, soit la somme de 2 nombres impairs et d'un nombre pair. Il s'agit donc d'une année bissextile, c'est 2004.

405. Les podiums paveurs

Voici des pavages de carrés de côtés 4, 6 et 10.

Les seuls carrés pavables à l'aide de grands podiums sont ceux dont le côté est multiple de 6.
Compte tenu du fait que les grands podiums contiennent 9 cases, le côté d'un carré pavable sera un multiple de 3. S'il est multiple de 6, c'est possible en reproduisant le dessin central autant de fois que

nécessaire. Nous allons montrer qu'il n'est pas possible de paver avec les podiums G des carrés de côté impair.

En effet, en coloriant les cases alternativement en blanc et en gris, on s'aperçoit que la différence entre le nombre de cases grises et le nombre de cases blanches d'un grand podium est 3. En pavant n'importe quelle forme avec des grands podiums, cette différence reste un multiple de 3. Or, c'est 1 pour un carré impair.

✉ Philippe KAHN (92100 Boulogne) procède à une recherche systématique. En nommant p le nombre de petits podiums et g le nombre de grands podiums, a le côté du carré à paver et en écrivant $4 \times p + 9 \times g = a^2$, il explore les diverses valeurs de l'énoncé.

a	*p*	*g*	*résultat*
4	*4*	*0*	*Voir dessin*
6	*0*	*4*	*Voir dessin*
	9	*0*	
10	*7*	*8*	
	16	*4*	*Voir dessin*
	25	*4*	

Bernard TRUFFAULT (44980 Ste Luce sur Loire) s'est, lui, intéressé aux rectangle pavables à l'aide de ces deux formes de podiums. Il dresse la liste de leurs dimensions dans un imposant tableau très coloré, que la bichromie ne nous permet malheureusement pas de reproduire ici. Ses résultats sont considérables puisqu'il dit – sans être sûr d'être exhaustif – pouvoir paver les rectangles de dimensions suivantes, où k est entier :

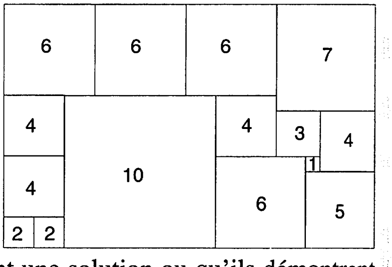
- 4×4
- 6×6, $6 \times (10 + 2k)$
- $(5 + 4k) \times 4$, 5×11, 5×12, 5×13
- $7 \times (11 + 6k)$, $(7 + 4k) \times (12 + 2k)$, $7 \times (13 + 6k)$
- 8×15, 8×17, 8×22
- $9 \times (12 + 3k)$, $9 \times (14 + 3k)$, 9×19
- 11×13, 13×13, 15×15.

Joli travail !

406. Les carrés paveurs

Oui, il est possible de paver un rectangle 25 × 16 à l'aide de ces pièces.

Compte tenu de la surface, 400, et de la dimension de la plus grande pièce, 10 × 10, les seuls rectangles éventuellement pavables à l'aide de ces 15 pièces ont pour dimensions 40 × 10, 25 × 16 et 20 × 20. Il est assez facile de montrer que le premier ne peut être pavé à l'aide des carrés imposés (par exemple, avec des considérations de périmètre).



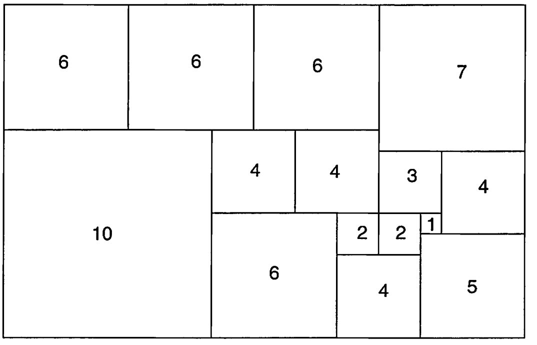
Voici une solution pour le deuxième.

Quant au dernier, nous attendons des lecteurs qu'ils nous donnent une solution ou qu'ils démontrent l'impossibilité.

✉ Philippe KAHN (92100 Boulogne) mène ici encore une recherche systématique. C'est G. PAILLOTIN (91600 Savigny sur Orge) qui prouve que le rectangle 20 × 20 ne peut être pavé dans les conditions de l'énoncé. Il s'intéresse pour cela aux quatre pièces de dimension impaire : 1, 3, 5 ou 7. chaque ligne et chaque colonne du carré 20 × 20 devant « intercepter » 0, 2 ou 4 de ces pièces, les 7 lignes du carré 7 × 7 devront aussi intercepter 4 ou 5 lignes du carré de côté 5 et 2 ou 3 lignes du carré de côté 3. La pièce 1 × 1 se logera, elle, dans l'un des lignes restantes soit de la pièce 3 × 3 soit de la pièce 5 × 5. Cette façon de procéder étant

unique à une permutation près, nous dit ce lecteur perspicace, on ne pourra l'appliquer aux colonnes, d'où l'impossibilité.

• Le rectangle 16 × 25 peut, lui, être pavé. P. KAHN et C. ROMON nous donnent une solution un peu différente de celle proposée :



407. Comparaisons

La somme des carrés des trois nombres est elle aussi plus grande que leur produit.

Quitte à changer leurs noms, on peut supposer que a est le plus grand des trois nombres.

On sait par ailleurs que la somme des carrés de deux nombres est plus grande que leur double produit.

Alors, $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc \geq bc\,(\frac{a^2}{bc} + 2) \geq 3bc.$

• Si $a \leq 3$, cela entraîne $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.

• Si $a > 3$, on va utiliser l'hypothèse $a + b + c \geq abc$ que l'on écrit $bc \leq \frac{a+b+c}{a}$

Alors, $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 \geq abc \times \frac{a}{bc} \geq abc \times \frac{a^2}{a+b+c} \geq abc \times \frac{a}{3} > abc.$

408. Les dossards de l'ABC

Les joueurs sur le terrain portent les numéros 1, 3, 4, 5, 7.

La propriété est impossible avec plus de cinq nombres.

• Soient, par ordre croissant, $1, b, c, d, e$ les cinq numéros des dossards de l'ABC.

– e doit être impair ($e = 1 + 2n$), pour former une suite arithmétique avec 1 et $c = 1 + n$.

– $1 + d$ doit être le double de b pour former une suite avec 1.

On a donc une liste de la forme : $1, 1 + p, 1 + n, 1 + 2p, 1 + 2n$ avec $0 < p < n \leq 5$. Il reste à exprimer que la suite contenant $1 + p$ et $1 + 2n$ ne peut être complétée que par $1 + 2p$ si on se limite à une liste de cinq nombres. D'où $1 + n + p/2 = 1 + 2p$ *et donc* $2n = 3\,p$. On constate alors que la suite $1 + p, 1 + n, 1 + 2p$ est elle aussi arithmétique. n, multiple de 3 inférieur ou égal à 5, ne peut être que 3, d'où $p = 2$ et la liste 1, 3, 4, 5, 7.

• Quitte à translater les nombres de la liste, on peut supposer que le plus petit est 0, le plus grand $2n$, le nombre n permettant de compléter la suite arithmétique où figurent les deux précédents.

S'il y a plus cinq nombres dans la liste, c'est qu'on peut trouver dans l'intervalle $]n\,;\,2n[$ au moins deux nombres, et donc un nombre k différent de $4n/3$. Alors, on peut construire, avec pour premier terme k, la suite de nombres de la liste définie par récurrence de la manière suivante.

Soit x un élément de cette suite :

– Si x est supérieur à n, le terme suivant de la suite sera $x/2$, formant la suite arithmétique $0, x/2, x$

– Si x est inférieur à n, le terme suivant sera $n + x/2$, formant la suite arithmétique $x, n + x/2, 2n$

Cette suite sera alors infinie (les suites extraites de rang pair et impair sont strictement monotones), ce qui est contraire à l'hypothèse que la liste est finie.

409. Le calculateur prodige

La somme des *n* premiers termes d'une suite construite *à la manière de Fibonacci* est toujours égale au terme de rang *n + 2* dont on ôte le terme de rang 2.

Dans le cas de la suite de Léonard, le terme de rang 2 est 11. Ajoutons-le à la somme des n termes et groupons à chaque étape les deux premiers termes. On trouve le terme de rang $n + 2$.

Voici le calcul si on s'arrête à 108, qu'il est très facile de généraliser :

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{11} + 4 + 11 + 15 + 26 + 41 + 67 + 108 \\ &= \mathbf{15} + 11 + 15 + 26 + 41 + 67 + 108 \\ &= \mathbf{26} + 15 + 26 + 41 + 67 + 108 \\ &= \mathbf{41} + 26 + 41 + 67 + 108 \\ &= \mathbf{67} + 41 + 67 + 108 \\ &= \mathbf{108} + 67 + 108 \\ &= \mathbf{175} + 108 \\ &= \mathbf{283} \end{aligned}$$

✉ *Pour nos lecteurs, férus de mathématiques, qui nous demandent une « vraie » généralisation, nous visualiserons une propriété particulière des suites construites sur le modèle de celle de Fibonacci, que les puristes démontreraient par récurrence :*

$$+\begin{cases} F_{n+é} = \cancel{F_{n+1}} + F_n \\ \cancel{F_{n+1}} = \cancel{F_n} + F_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \cancel{F_2} = F_1 + F_0 \end{cases}$$

Soit, après addition et simplifications : $F_{n+2} = \sum_{i=0}^{n} F_i + F_1$ *ou encore :* $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - F_1$.

Comme le font remarquer Jean BERRY (92260 Fontenay aux Roses), C. ROMON ou R. TOURNADRE (49000 Angers), calculer la somme à un rang quelconque revient à retrancher le second terme (ici, 11) au terme de la suite situé deux rangs plus loin que le terme désigné.
D'où le résultat, puisque $F_n = 5079$, $F_{n+1} = 5079 + 3139 = 8218$, $F_{n+2} = 8218 + 5079 = 13297$, *la somme donnée par le prodige est bien* $13297 - 11 = 13286$.

410. Deux tout puissant

2 chiffres : 12 est divisible par 4
3 chiffres : 112 est divisible par 8
4 chiffres : 2112 est divisible par 16
5 chiffres : 22112 est divisible par 32 …
Il existe pour tout *n* un nombre qui convient.

On peut, à partir d'un nombre A de n chiffres, divisible par 2^n, construire un nombre B de $(n + 1)$ chiffres divisible par 2^{n+1} de la manière suivante :

– Le quotient de A par 2^n est pair, on ajoute un « 2 » devant A.
En effet, A est divisible par 2^{n+1} et 2×10^n aussi.
– Le quotient de A par 2^n est impair, on ajoute un « 1 » devant A.
En effet, $A = (2B + 1)\, 2^n$ et $10^n + A = (B + 1)\, 5^n \times 2^{n+1}$.

De proche en proche, on montre (c'est une démonstration *par récurrence*) qie la propriété est vraie pour tout n.

✉ *Jacques DEMOULIN (78150 Le Chesnay) et C. ROMON fournissent tous deux des généralisations. Le premier va même plus loin que le second puisqu'il établit par récurrence la propriété, où il a remplacé 1 et 2 par i (chiffre impair) et p (chiffre pair).*
Son algorithme, semblable à celui que nous avions énoncé, s'écrit, en appelant N_n *le nombre*

de n chiffres en question :

• $N_1 = p$.

• *Si* N_n *est le produit de* 2^n *par un nombre pair, le chiffre le plus à gauche de* N_{n+1} *est p, les chiffres suivants étant exactement ceux de* N_n.

• *Si* N_n *est le produit de* 2^n *par un nombre impair, le chiffre le plus à gauche de* N_{n+1} *est i, les chiffres suivants étant exactement ceux de* N_n.

On peut par exemple, pour i = 7 et p = 4, nous dit ce lecteur, construire de proche en proche les nombres N_n, *que nous rassemblerons dans le tableau ci-contre :*

n	N_n *et sa décomposition*
1	$4 = 2 \times 2^1$
2	$44 = 11 \times 2^2$
3	$744 = 93 \times 2^3$
4	$7\,744 = 484 \times 2^4$
5	$47\,744 = 1\,492 \times 2^5$
...	....
14	$44\,474\,444\,447\,744 = 2\,714\,504\,666 \times 2^{14}$

411. Les nombres de Frédéric

$\mathbf{1 = 1^2}$

$\mathbf{2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2}$

$\mathbf{3 = -1^2 + 2^2}$

$\mathbf{4 = -1^2 - 2^2 + 3^2}$

Plus généralement, on montre que pour tout entier a, $4 = a^2 - (a+1)^2 - (a+2)^2 + (a+3)^2$.
Ainsi, si un nombre F s'écrit comme somme des premiers carrés (jusqu'à un certain rang n) précédés du signe + ou du signe –, il en est de même de F + 4 (en posant $a = n + 1$).

• Ainsi, comme les nombres 1, 2, 3 et 4 sont des nombres de Frédéric, tous les entiers strictement positifs le sont.

• Pour les nombres strictement négatifs – F, il suffit de changer le signe de la somme permettant d'obtenir F.

• Enfin, pour obtenir 0, il suffit d'ajouter 4 à – 4 : $\mathbf{0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2}$.

⊠ *Solution simple et courte de Micheline LEMASURIER (94600 Choisy le Roi).*

412. Fabrique de multiples

Il est possible de mettre en évidence 23 permutations des chiffres qui conservent la divisibilité par 37.

La clé de cette affirmation vient d'une propriété simple : le reste de la division de 1000 par 37 est 1. En effet, 999 = 37 × 27.

• En conséquence, on ne change pas la qualité de multiple de 37 d'un nombre en échangeant le premier le quatrième chiffre car *abc def* – *dbc aef* = 99 900 ($a - d$).

De même, en échangeant le deuxième et le cinquième chiffre, ou encore en échangeant le troisième et le sixième chiffre. Soit au total, en comptant le nombre initial, 8 permutations des chiffres produisent un multiple de 37.

• Autre type de permutation : si A = *abc def* est un multiple de 37, B = *bca efd* l'est aussi.
Cela découle en effet de la relation : 10 A – B = 999 (d + 1000 a)
On en déduit évidemment une autre permutation multiple de 37, le nombre C = *cab fde*.

• En combinant les deux types de permutations, on parvient à 24 multiples de 37 :
213 749, 713 249, 243 719, 743 219, 219 743, 719 243, 249 713, 749 213,
132 497, 432 197, 192 437, 492 137, 137 492, 437 192, 197 432, 497 132,
321 974, 921 374, 371 924, 971 324, 324 971, 924 371, 374 921, 974 321.

✉ *D. BLONDEAU (83000 Toulon), ayant remarqué que parmi les nombres déduits de 213 749 par la première série de 8 permutations figure* ***743 219****, et que* ***321 974*** *est lui aussi divisible par 37, il fait agir sur ce nombre la même série de permutations. Dans les nombres obtenus, il particularise également* ***371 924****, lui associe* ***192 437****, lui aussi divisible par 37, et le transforme toujours par les mêmes permutations. Il retrouve ainsi nos 24 résultats, en n'utilisant qu'une seule série de permutations.*
C. ROMON note qu'on aurait le même résultat avec des nombres comme 134 865 ou 123 654 puisque le nombre écrit en système décimal abc def a même reste dans la division par 37 que celui qui s'écrit (a + d) (b + e) (c + f).

413. Express régional

Les TER quittaient leur gare toutes les 11 minutes.

Si v est la vitesse de l'automobile et w celle d'un train, la distance d qui sépare deux trains est parcourue en 5 minutes à la vitesse $v + w$ et en 55 minutes à la vitesse $v - w$.

Il s'ensuit la relation : $\dfrac{w + w}{v - w} = 55\backslash 5$, soit $v = 1{,}2\,w$.

Ainsi, la distance d est parcourue en 55 minutes à la vitesse $0{,}2w$, soit en 11 minutes à la vitesse w.

✉ *Bravo à Michel MILHIET pour avoir réécrit avec humour un énoncé qu'il jugeait sans doute un peu trop « sévère » : Je roulais à vitesse stabilisée le long d'une double voie ferrée. Par un hasard malicieux, à un instant donné, je croisais un TER et en rattrapais un autre. Les deux TER roulaient à la même vitesse, inférieure à la mienne. À cet instant, je déclenchai mon chronomètre : toutes les 5 minutes je croisais un TER et je mis 55 minutes à rattraper celui qui roulait dans le même sens que moi. À quel intervalle de temps les TER quittaient-ils leur gare ?*

414. Mettre de l'eau dans son vin

La nouvelle concentration du premier réservoir est d'environ 3,49 %.
Celle du deuxième réservoir d'environ 3,68 %.

• Dans le premier cas, à chaque manipulation, la concentration est amputée d'un dizième.

Elle sera donc égale à $\left(\dfrac{9}{10}\right)^{10} \times 10\%$.

• Dans le deuxième cas, on va supposer que tout se passe comme dans le premier cas, mais qu'au lieu d'un litre, on procède par mini-vidanges et mini-remplissages de δ litres (en δ minutes), δ étant tout petit.

Appelons K(t) la concentration à l'instant t exprimé en minutes. Alors, $K(t + \delta) = K(t) \times \dfrac{10 - \delta}{10}$

Cela s'écrit $\dfrac{K(t + \delta) - k(t)}{\delta} = -\dfrac{K(t)}{10}$

On fait tendre δ vers zéro. Ceux de nos lecteurs très familiers de l'analyse mathématique auront reconnu une équation différentielle :

$K'(t) = -\dfrac{K(t)}{10}$, dont la solution est $K(t) = 10\% \exp(-\dfrac{t}{10})$, soit, pour $t = 10$, $K(10) = \dfrac{1}{e} \times 10\% = 3{,}68\%$.

Pardon pour la technicité de cette solution, où e représente la base des exponentielles, mais sans pousser autant la théorie, il était assez intuitif que la concentration diminuait moins vite en continu.

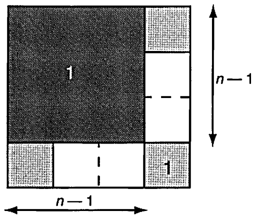
☒ *Jean-François PABION (69140 Rillieux la Pape) propose une façon de faire plus élémentaire. Si l'on remplace, nous dit-il, la $n^{ième}$ partie du bidon par de l'eau claire, la concentration est multipliée par $\frac{1}{n}$, puis par $(1 - \frac{1}{n})^n$ après n opérations de ce type. La suite définie par $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ converge en croissant vers $\frac{1}{e}$. Ainsi, plus on s'approche de l'opération effectuée en continu, plus la concentration résiduelle augmente. Ceci explique que le second résultat soit plus élevé que le premier.*

415. Puzzles de carrés

Les seuls nombres à ne pas pouvoir figurer sur les boîtes sont 2, 3 et 5.

• Des puzzles carrés de 2 ou 3 pièces sont impossibles, car une pièce occuperait au moins deux sommets, et donc aurait la taille du grand carré.

• Un puzzle de 5 pièces est impossible, car de deux choses l'une : ou bien les 4 pièces occupant les sommets sont des quarts du grand carré, et elles ne laisseraient aucun espace libre, ou bien ce n'est pas le cas, et l'espace disponible n'est pas un carré.



• On reconstitue facilement des puzzles comportant un nombre pair de pièces à partir de 4, en remarquant que :
$n^2 = (n - 1)^2 + 2n - 1$.
Ainsi, pour $n > 1$, on divise le grand carré en n^2 carrés unité, et on regroupe dans un angle $(n - 1)^2$ d'entre eux pour former une pièce carrée de côté $(n - 1)$ qu'on assemble avec les $(2n - 1)$ pièces unités restantes pour former un puzzle de $2n$ pièces.

• Enfin, en découpant une pièce carrée en quatre pièces identiques, on passe d'un puzzle de $2n$ pièces à un puzzle de $(2n + 3)$ pièces, ce qui permet tous les puzzles comportant un nombre impair de pièces à partir de 7.

416. Un trop grand nombre

Le résultat de l'opération est le carré de $\underbrace{666...66}_{\text{2006 fois}}$.

Pour le montrer, posons $A = \underbrace{111...11}_{\text{2006 fois}}$.

Le résultat R de l'opération s'écrit :
$R = 4\ A \times 10^{2006} + A - 5\ A$
$R = 4\ A \times (10^{2006} - 1)$
$R = 4\ A \times 9\ A$
$R = (6\ A)^2$

☒ *Partant du fait que $A_1 = 41 - 5 = 6^2$, $A_2 = 4411 - 55 = 66^2$, $A_3 = 444111 - 555 = 666^2$, Phillippe KAHN (92100 Boulogne) et Paul PERBOST (06000 Nice), qui nous parle d'un mystérieux carré discrètement voilé par quelques nombres bien élevés, proposent une généralisation du problème aux nombres* $A_n = \underbrace{44...44}_{n\text{ fois}}\underbrace{11...11}_{n\text{ fois}} - \underbrace{55...55}_{n\text{ fois}}$.

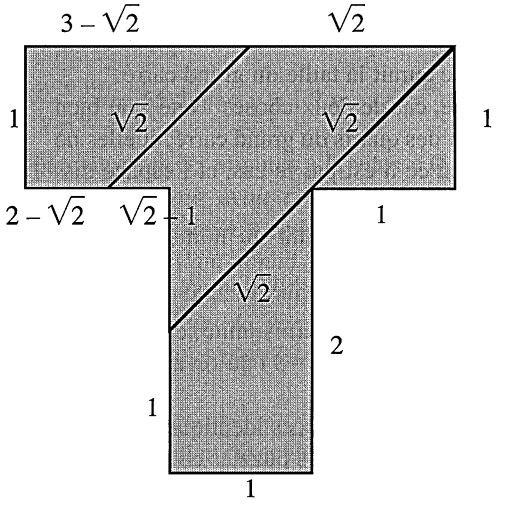
Tous deux arrivent au résultat : $A_n = (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^1 + 10^0) \times (10^n - 1) \times 4$, *qu'ils mettent sous la forme :*

$$A_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} \times (10^n - 1) \times 4 = \frac{4}{9} \times (10^n - 1)^2 = \frac{4}{9} \times \underbrace{99..99}_{n \text{ fois}}{}^2 = (6 \times \underbrace{11...11}_{n \text{ fois}})^2.$$

Bonne réponse également de Bernard LOUBIERES (06480 La Colle sur Loup).

417. Puzzle à l'aire du té

⊠ *Philippe KAHN prend le soin de préciser toutes les longueurs de toutes les pièces. Il dit les avoir utilisées pour reconstituer le puzzle.*



418. Les deux billes

La hauteur d'eau initiale était 12 mm.

Si on appelle h la hauteur d'eau et R le rayon de base du tube cylindrique, enfin b le rayon d'une des deux billes, on doit avoir à chaque opération :

$h \pi R^2$	$= 2b \pi R^2$	$- \frac{4}{3} \pi b^3$
(volume initial) du liquide	= (volume total occupant une hauteur de 2b)	– (volume de la bille)

En donnant à b les valeurs 7 et 14, on obtient deux équations du premier degré en R^2 et hR^2 :

(1) $14 R^2 - h R^2 = \frac{4}{3} 7^3$ et (2) $28 R^2 - h R^2 = \frac{4}{3} 14^3$

Par différence, il vient $14 R^2 = (14^3 - 7^3)$, d'où $R^2 = \frac{2}{3} 7^3$ puis $h R^2 = \frac{24}{3} 7^3$.

d'où $h = 12$.

☒ *De Daniel LIMAT (25000 Besançon), une solution très astucieuse :*
• *On peut, nous dit-il, tout d'abord remarquer que, le volume d'une sphère étant proportionnel au cube de son rayon, on multiplie son volume par 8 quand on double son rayon.*
• *Ainsi, remplacer la petite bille par la grande revient à ajouter 7 petites billes identiques à la petite.*
• *Si le niveau monte de 14 mm avec 7 billes, c'est qu'il monte de 2 mm par bille dans l'espace cylindrique de l'expérience.*
• *Comme inversement retirer une bille fait baisser le niveau de 2 mm, le niveau initial était de 14 – 2 = 12 mm. Il suffisait d'y penser !*

419. Racine entière

La somme des inverses des racines entières des nombres de 1 à 2007 est égale à 88,6.
Une première constatation s'impose : si un nombre N a une « racine entière » égale à p, alors $p(p-1) < \mathrm{N} \leq p(p+1)$.
En effet, $(p + 0{,}5)^2 = p^2 + p + 0{,}25$.
Donc $((p^2 + p)) = p$ et $((p^2 + p + 1)) = p + 1$.
En conséquence, il y a exactement $2p$ nombres dont la racine entière est p.

La somme des inverses de leurs racines entières $\frac{1}{p}$ est donc 2.

2007 = 1980 + 27, où 1980 = 44 × 45.
La somme des inverses des racines entières des nombres de 1 à 1980 est 2 × 44 = 88.

La somme des inverses des racines entières des nombres de 1980 à 2007 est $27 \times \frac{1}{45} = 0{,}6$.
D'où le résultat.

☒ *Une observation simple de Michel MENGUAL introduit clairement la solution. Il aligne les premiers entiers n et la suite de leurs « racines entières » ((n)) :*

n	*1*	*2*	*3*	…	*6*	*7*	…	*12*	*13*	…	*20*	*21*	…	*30*	…	*1893*	…	*1980*	*1981*	…	*2007*
((n))	*1*	*1*	*2*	…	*2*	*3*	…	*3*	*4*	…	*4*	*5*	…	*5*	…	*44*	…	*44*	*45*	…	*45*
effectifs des groupes	*2 nb*		*4 nb*			*6 nb*			*8 nb*			*10 nb*				*88 nombres*			*27 nombres*		

Dans les 44 premiers groupes de nombres la somme des « racines entières » des éléments constituants est 2 et dans le 45ᵉ groupe, elle est de $\frac{27}{45}$, une façon rapide de mener au résultat. Il ne fallait évidemment pas confondre ici « racine entière », qui est l'entier ***le plus proche de la racine carrée*** *et « partie entière de la racine », qui est l'entier* ***immédiatement inférieur*** *à la racine.*

420. Consécutifs et divisibles

Une liste d'entiers consécutifs qui vérifie la propriété 12 comporte au plus 13 éléments.
• D'abord, il existe bien une liste de 13 nombres consécutifs qui vérifie la propriété 12. Par exemple, les entiers compris entre 114 et 126.
• Supposons maintenant qu'il existe une liste de 14 nombres consécutifs qui vérifie cette propriété. Cela signifie qu'ils sont tous divisibles par l'un des nombres premiers 2, 3, 5, 7 ou 11.
Concentrons-nous sur les 7 nombres impairs de cette liste (les pairs sont divisibles par 2) :
A, A + 2, A + 4, A + 6, A + 8, A + 10, A + 12.

– au plus 3 d'entre eux sont divisibles par 3 ;
– au plus 2 d'entre eux sont divisibles par 5 ;
– au plus 1 d'entre eux est divisible par 7 ;
– au plus 1 d'entre eux est divisible par 11.
Or, 3 + 2 + 1 + 1 = 7 et il y a 7 nombres.
On connaît donc précisément le nombre d'éléments de la liste impaire divisibles par chacun des nombres premiers et chacun de ces 7 nombres n'est divisible que par un des quatre nombres premiers.
Les 3 nombres divisibles par 3 ne peuvent être alors que A, A + 6 et A + 12.
Les 2 nombres divisibles par 5 ne peuvent être que A et A + 10, ou alors A + 2 et A + 12.
Dans tous les cas, l'un des nombres serait divisible par 3 et par 5, d'où l'impossibilité.

✉ *Jacques DEMOULIN (Paris) traite à fond le sujet. Rechercher les listes d'entiers consécutifs vérifiant la « propriété 12 » équivaut, nous dit-il, à rechercher celles qui sont divisibles par l'un au moins des nombres premiers de 2 à 11 (propriété P'_{11}), à savoir 2, 3, 5, 7, 11 et il va rechercher toutes les listes de 13 entiers consécutifs possédant cette propriété. Mettant pour cela tout entier n sous la forme $n = k \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + r = k \times 2310 + r$, il n'a plus qu'à rechercher les entiers dont le reste dans la division par 2310 a la propriété P'_{11}. On peut même ramener cette recherche à celle des entiers inférieurs à la moitié de 2310 puisque si r vérifie (P'_{11}), 2310 – r aussi. Aussitôt dit, aussitôt fait : les deux premières listes sont :*
• L1 : 114, 115, ..., 126, donnée comme exemple dans la solution,
• L2 = 2310 – L_1 : 2184, 2185, ..., 2196.
Les autres listes recherchées se déduisent de celles-ci en ajoutant à leurs composants un même multiple de 2310. Et ce n'est pas tout ! Suit un long exposé très argumenté décrivant, preuves à l'appui, la génération de toutes les listes de « propriété p ». On y trouve en particulier ce tableau donnant pour les différentes valeurs du nombre premier p la longueur l de la liste maximale d'entiers consécutifs de propriété p :

p	*2*	*3*	*5*	*7*	*11*	*13*	*17*	*19*	*23*	*29*	*31*	*37*	*41*	*43*	*47*	*53*	*59*
l	*1*	*3*	*5*	*9*	*13*	*21*	*25*	*33*	*37*	*45*	*57*	*61*	*73*	*81*	*85*	*93*	*105*

On peut dire que ce lecteur possède bien son sujet ! Saluons ici sa compétence et la passion avec laquelle il l'exprime.

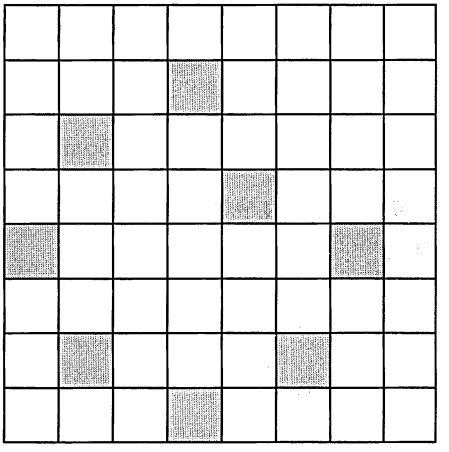
Graphes & algorithmes

Chapitre 4

421. Le circuit de la tour

Problème n°301 du 26/11/02

Encore un problème de tour sur un échiquier ! L'échiquier d'aujourd'hui a été ravagé par un cavalier brutal qui a creusé des trous profonds dans huit des cases (grisées sur le dessin).



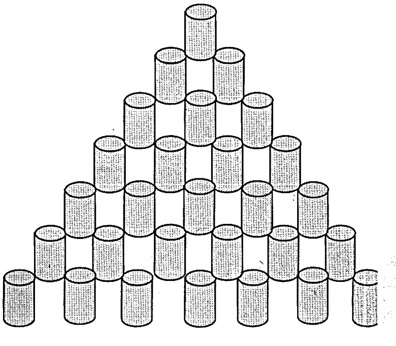
Une tour désire parcourir les cases restantes à sa façon, se déplaçant le long des lignes ou des colonnes, jamais en diagonale, en passant une fois et une seule dans chacune des 56 cases, et en finissant sur sa case de départ.

Peut-elle y parvenir ?
Si oui, tracez un circuit possible de la tour.

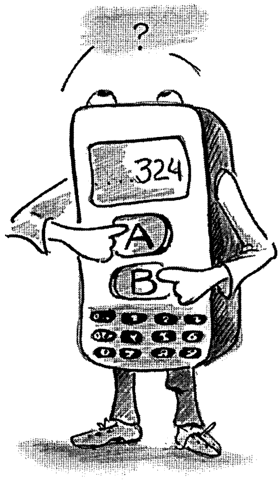
422. Le chamboule-tout

Problème n°306 du 31/12/02

Le « Chamboule-tout » de la fête foraine est constitué de piles de boîtes, agencées comme sur le dessin. Les joueurs visent une boîte à l'aide d'un projectile. En tombant, elle entraîne évidemment avec elle dans sa chute toutes celles qui reposaient sur elle.



Quel nombre maximum de boîtes peut-on abattre en deux coups sur un chamboule-tout de 7 piles ?
Est-il possible, sur un gigantesque chamboule-tout de moins de 2003 piles, de « dégommer » 2003 boîtes d'un coup ?



423. La machine à créer des nombres

Problème n°311 du 04/02/03

C'est une drôle de machine. Il suffit de lui donner le début : trois nombres, puis de la laisser faire. La machine créera une liste ininterrompue de nombres en respectant toujours la même règle : elle prend les trois derniers éléments de la liste, elle multiplie entre eux les deux derniers, elle rajoute 1, elle divise par le premier des trois. Le résultat est mis en fin de liste, et elle recommence avec les trois derniers nombres de la liste.

Ainsi, si on lui donne le début de séquence 2, 5, 3, elle calcule le nombre suivant, 8, de la façon suivante : $\frac{5 \times 3 + 1}{2} = 8$, puis encore le suivant, 5, car $\frac{3 \times 8 + 1}{5} = 5$, puis le suivant $\frac{41}{3}$, puis $\frac{26}{3}$, puis $\frac{215}{9}$, etc.

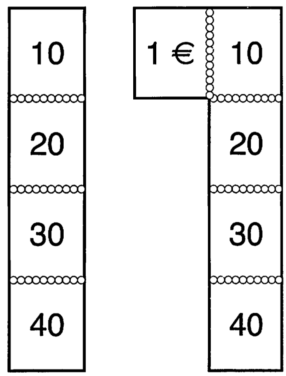
Avec le début 1, 2, 3, elle trouve successivement 7, 11, 26, 41, 97, ...

Tous les nombres de la liste sont-ils des entiers ?

424. La bande des quatre

Problème n°316 du 11/03/03

Toujours à l'affut de nouvelles idées, *La Poste* vient d'éditer une bande de quatre vignettes recto verso présentant sur les deux faces le même dessin assorti d'une valeur (10 cents, 20 cents, 30 cents et 40 cents).



De combien de façons peut-on superposer les quatre vignettes en pliant cette bande selon les pointillés ?

Devant le succès de l'initiative, une nouvelle série est éditée. Cette fois, une cinquième vignette, portant la valeur 1 euro, est rajoutée, mais elle est reliée à la bande des quatre par un des grands côtés de la vignette de 10 cents.

De combien de façons peut-on superposer les cinq vignettes en pliant cette bande selon les pointillés ?

425. Rencontres du troisième type

Problème n°321 du 15/04/03

Sur une planète de mutants, les habitants (en nombre total invariable, car ils sont immortels et ne se reproduisent pas) sont tantôt aventuriers, tantôt bourgeois, tantôt cinglés. La simple rencontre de deux êtres de types différents les fait muter en êtres du troisième type.
Le dernier recensement fait apparaître un nombre grandissant de cinglés.

À quelle condition sur les effectifs de chaque catégorie se peut-il que la planète ne compte plus, un jour, que des cinglés ?

426. Les quarante voleurs et la balance

Problème n°326 du 19/05/03

Une bande de quarante voleurs en proie à d'interminables querelles intestines décide de se donner une hiérarchie. Il est convenu que le plus lourd d'entre eux sera le chef et le deuxième (par ordre décroissant de poids) son adjoint. Une immense balance à deux plateaux est placée au milieu de leur caverne. Les quarante candidats monteront par deux sur la balance (un sur chaque plateau) selon une procédure mise au point par un mathématicien de rencontre, un certain Ali Baba.

En combien de pesées au plus sera-t-on certain d'avoir déterminé les deux voleurs les plus lourds (il n'y a jamais égalité de poids entre deux voleurs)?

On s'avise alors qu'il faut aussi désigner un second adjoint, qui sera le voleur de troisième poids.

En combien de pesées au plus sera-t-on certain d'avoir déterminé les trois voleurs les plus lourds ?

427. Casino privé

Problème n°331 du 24/06/03

Un groupe d'amis se réunit pour une partie de cartes. Pour commencer, on distribue à chacun le même nombre de jetons. Lors de chaque coup, le sort désigne le «banquier» qui jouera contre tous les autres (représentés par l'un d'entre eux). Chaque joueur (en dehors du banquier) mise un jeton.
Si le banquier gagne, il empoche toutes les mises. Dans le cas contraire, il «paye» un jeton à chacun des joueurs. Si un joueur n'a pas assez de jetons pour «payer», il ne peut devenir banquier. Si un joueur n'a plus de jeton, il est éliminé du jeu.
À la fin de la soirée, un seul joueur a été éliminé, Alain. Babette, à qui il restait douze jetons quand Alain a été éliminé, soit moitié moins que Charlotte, a terminé la soirée avec vint-trois jetons de plus que Charlotte.

Combien les amis étaient-ils au début de la partie ?

428. La tombola du club

Problème n°336 du 29/07/03

Pour participer à la tombola de ce club de football, les supporters ont payé 5 € pour avoir le droit de tirer un papier dans une urne. Chacun gagne la somme inscrite sur le papier.
L'organisateur a déposé dans l'urne autant de papiers que de participants à la tombola. Il a inscrit les gains dessus de telle sorte que tous les gains soient différents et non nuls.
De plus, si on prend deux papiers quelconques, deux cas peuvent se produire :
– la somme S des deux gains marqués dessus est inférieure (ou égale) à 5 € et il existe forcément un troisième papier permettant de gagner exactement la somme S.
– ou bien la somme des deux papiers est supérieure à 5 €.

L'organisateur prétend qu'avec ce système, plus de la moitié des mises sont remboursées. Est-ce toujours vrai ?

429. La planche de timbres

Problème n°341 du 02/09/03

La Poste a édité une planche (rectangulaire) de 2000 timbres identiques.

Dans une entreprise qui vient d'acquérir cette planche, l'employé chargé de l'expédition du courrier doit isoler les 2000 timbres. Il dispose d'un long et puissant massicot permettant de découper toute longueur de manière rectiligne. Il peut superposer autant d'épaisseurs qu'il le souhaite. Mais il s'interdit de plier la planche de timbres ou les sous-planches formées.

En combien de découpes, au minimum, parviendra-t-il à isoler les 2000 timbres ?
Et s'il avait le droit de plier la planche ?

430. Les trois urnes et le magicien

Problème n°346 du 07/10/03

Un magicien dispose d'un paquet de 32 cartes numérotées de 1 à 32, ainsi que de trois urnes de couleurs différentes dans lesquelles il dispose les 32 cartes selon une répartition dont il a le secret. Ainsi, la carte 1 est placée dans l'urne bleue, la carte 2 dans l'urne blanche, la carte 32 dans l'urne rouge.
Puis il se retourne, et demande à un spectateur de choisir deux urnes, de tirer une carte de chacune des deux urnes et d'annoncer la somme des deux nombres qui y sont inscrits. Le magicien, toujours sans se retourner, annonce alors la couleur des deux urnes dans lesquelles les cartes ont été puisées.

Quel est le contenu de chacune des urnes ?

431. La machine à tricoter des nombres

Problème n°351 du 11/11/03

D'abord, on configure la machine en entrant dans son réservoir les « mailles », une suite de nombres entiers (positifs ou négatifs) choisis une fois pour toutes. Elle est alors prête à l'emploi. À partir de tout nombre X appelé « maille flottante », la machine va permettre de tricoter un nouveau nombre :
• elle prend la première maille ;
• elle la multiplie par X et ajoute au résultat la deuxième maille ;
• elle multiplie le résultat par X et ajoute la troisième maille ;
• elle multiplie le résultat par X et ajoute la quatrième maille et ainsi de suite jusqu'à la dernière étape où ;
• elle multiplie le résultat précédent par X et ajoute la dernière maille.
Le résultat final est le nombre tricoté.

Ainsi, sur notre machine, le nombre tricoté avec la maille flottante 1 est 2.

Le nombre tricoté avec la maille flottante 7 peut-il être un carré parfait ?

432. Les terriers surpeuplés

Problème n°356 du 23/12/03

Dans cette forêt vivent 135 lapins, qui logent à un ou plusieurs dans les nombreux terriers qui peuvent les accueillir. Bien qu'aimant la vie en société, ils décident un jour qu'il ne faut pas confondre proximité et promiscuité. Tous les terriers surpeuplés, c'est-à-dire contenant plus de 15 lapins, feront donc l'objet d'une mesure d'évacuation, à raison d'un terrier surpeuplé par jour.
Tous les lapins d'un terrier évacué doivent alors aller se loger dans des terriers différents les uns des autres qu'ils choisissent totalement au hasard.
« Quel que soit leur choix, affirme Jeannot, le plus âgé d'entre eux, viendra le jour où il n'y aura plus de terrier surpeuplé ».

Jeannot a-t-il raison ? Et si la forêt était occupée par 136 lapins ?

433. Croissance 2004

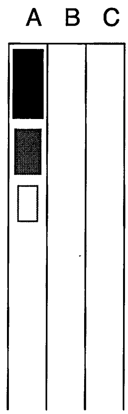
Problème n°357 du 27/01/04

Une population d'insectes a un rythme de croissance effrayant : au premier janvier 2004, elle comptait 2004 individus. Au 2 janvier, ce nombre était de 4009 (le double plus un). Au 3 janvier, il était de 12028 (le triple du nombre précédent, plus un). Chaque jour de janvier, la population s'avère celle de la veille multipliée par le quantième du mois et augmentée de 1.
En février, le principe est le même, mais avec un accroissement de deux unités au lieu d'une : ainsi, la population du 1er février est celle du 31 janvier augmentée de deux, la population du 2 février le double de celle du premier février plus deux, et ainsi de suite jusqu'au 29 février où elle est égale à 29 fois celle du 28 février plus deux. En mars, même principe, mais on ajoute 3, en avril on ajoute 4, etc. En décembre, on ajoute 12.
Ces insectes ont l'habitude de voler en formations de 13 individus. Quand leur nombre n'est pas un multiple de 13, ils s'arrangent pour que le nombre d'insectes isolés soit le plus petit possible.

Combien d'insectes seront-ils isolés au soir du 31 décembre 2004 ?

434. La limousine de la famille Ours

Problème n°365 du 24/02/04



Dans la famille Ours, on a trois voitures : une limousine pour Monsieur Ours, une voiture moyenne pour Madame Ours et une petite pour Ourson Junior. Mais on n'utilise qu'un des trois garages à chaque saison : A pour l'hiver, B pour la mi-saison, C pour l'été.
Monsieur Ours, très maniaque, tient à ce que les voitures, qu'elles soient deux ou trois dans un des garages, soient toujours garées avec la plus petite vers la sortie du garage et la plus grosse au fond.
À chaque changement de saison, on place les voitures dans le nouvel emplacement, mais en respectant toujours la règle de rangement (même pendant le temps d'un transfert).

Combien de manœuvres doit-on faire au minimum pour déplacer les trois voitures ?

Quelques années plus tard, la famille Ours s'est agrandie, mais le rite n'a pas varié. Les voitures des parents et des sept oursons doivent toujours être garées de la plus grande (au fond) vers la plus petite (vers l'extérieur), même pour des manœuvres.

Combien de manœuvres doit-on effectuer au minimum pour déplacer les neuf voitures ?

435. Quadrichromie

Problème n°371 du 06/04/04

Les œuvres de ce peintre à la mode, intitulées « quadrichromie » et suivies d'un numéro et de sa signature, sont de conception très simple. Dans un canevas immuable formé de 8 rectangles alignés et numérotés 1 à 8, il colorie chaque zone rectangulaire en bleu (cyan), rouge (magenta), jaune ou noir. Chaque couleur est utilisée deux fois, et jamais dans deux rectangles adjacents.

Combien d'œuvres différentes, au maximum, pourra-t-il signer « quadrichromie » ?

1	2	3	4	5	6	7	8

436. Faites la queue, comme tout le monde !

Problème n°376 du 11/05/04

16 personnes (munies d'un numéro d'attente de 1 à 16) font la queue devant le guichet de la poste. La première personne a mal rempli son formulaire, elle est renvoyée en fin de queue par le guichetier. Tout se passe bien pour le deuxième client qui s'en va satisfait, mais le troisième est à son tour relégué au bout de la file. Pas de problème pour le quatrième, mais le cinquième est prié de revoir sa copie. Et ainsi de suite... Un client sur deux, même quand il s'est déjà présenté, doit refaire la queue.

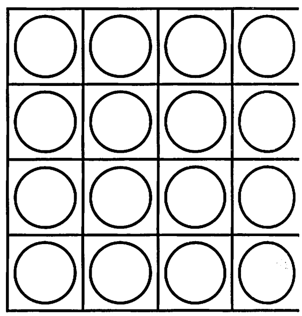
Quel est le numéro d'ordre du client qui quittera en dernier le bureau de poste ?

Et s'il y avait au départ une file d'attente de 100 personnes ?

437. Les pions bicolores

Problème n°381 du 15/06/04

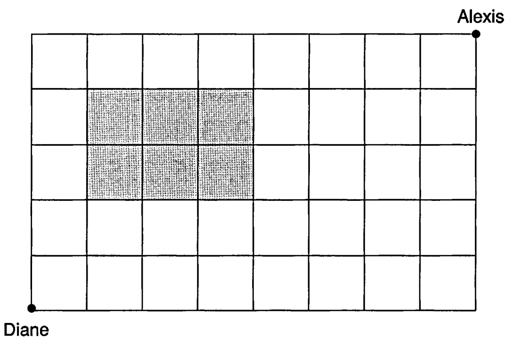
Sur un damier 4 × 4, sont posés 16 pions réversibles (une face blanche, une face noire).
Un joueur retourne les pions selon la règle suivante : à chaque coup, il est obligatoire de retourner 3 pions en même temps, et pas n'importe lesquels, puisqu'ils doivent se suivre sur une même rangée (ligne ou colonne). Au départ du jeu, tous les pions présentent leur face blanche.



Est-il possible de parvenir à la position symétrique où tous les pions présentent leur face noire ? Si oui, en combien de coups au minimum ?

438. Les plus courts chemins

Problème n°86 du 20/07/04



Diane et Alexis habitent dans une ville où les voies de circulation sont disposées selon un quadrillage parfait (chaque «bloc» est un carré de 100 m de côté).
Pour se rendre chez son copain par l'un des chemins les plus courts, Diane parcourt donc 1300 mètres. Elle ne traverse jamais le square (représenté en gris), réputé mal fréquenté, mais n'hésite pas à emprunter les rues qui le longent.

Combien de chemins différents Diane peut-elle emprunter pour se rendre sans détour ches Alexis ?

439. Les trois sœurs

Problème n°391 du 24/08/04

Trois sœurs, Aline, Béatrice et Caroline sont invitées chez des amis, à 75 km de leur domicile. Elles possèdent bien une motocyclette, mais une seule, limitée, qui plus est, à deux places et à 30 km/h.
Aline est la seule à posséder son permis moto. Béatrice est une adepte du fond et court invariablement à 10 km/h tandis que Caro peut marcher d'un bon pas 6 km/h, mais déteste courir.

Partant en même temps de leur domicile, en combien de temps, au minimum, peuvent-elle parvenir chez leurs amis ?

440. Intercalez la somme

Problème n°396 du 28/09/04

Tout commence, à l'**étape 0**, par la suite (de deux nombres) : **1, 1**.
Etape 1 : entre les deux nombres, intercalez leur somme : 1, **2,** 1.
Etape 2 : entre chaque couple de nombres consécutifs de cette nouvelle suite, intercalez la somme : 1, **3,** 2, **3,** 1.
Encore une étape ? 1, **4,** 3, **5,** 2, **5,** 3, **4,** 1.

Combien de nombres aurez-vous écrits à l'issue de l'étape 10 ?

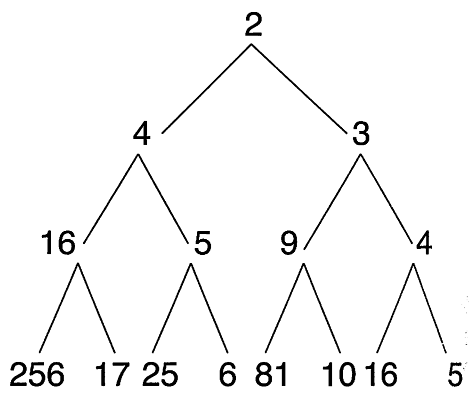
Quelle sera alors la somme de tous ces nombres ?

441. Généalogie

Problème n°401 du 02/11/04

Dans la famille «Nombre», le patriarche a pour prénom «Deux».

Première génération : «Deux» donne naissance à deux enfants prénommés «Quatre» et «Trois».
Deuxième génération : «Quatre» donne naissance à deux enfants prénommés «Seize» et «Cinq», tandis que «Trois» donne naissance à deux enfants prénommés «Neuf» et «Quatre».
Et ainsi de suite : à chaque génération, chaque «Nombre» donne naissance à deux enfants qu'il prénomme du patronyme de son carré et de son successeur.



Est-il possible que deux «Nombre» de la même génération portent le même prénom ?

442. Les deux meilleurs

Problème n°406 du 07/12/04

64 joueurs s'inscrivent à un tournoi de tennismath. Le tennismath se joue à 1 contre 1. Sa hiérarchie est impitoyable en ce sens que le meilleur joueur l'emporte toujours, et que le jeu est « transitif » : si A est meilleur que B et B meilleur que C, alors A sera meilleur que C.

Les organisateurs ont prévu 2 beaux prix, et ils désirent que les deux meilleurs en bénéficient, sans toutefois que le tournoi dure trop longtemps.

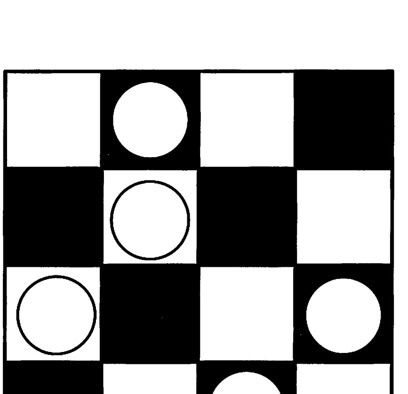
Combien doivent-ils faire disputer de matches au minimum et comment doivent-ils s'organiser pour être certains de connaître les deux meilleurs à l'issue du tournoi ?

443. Corvée de balayage

Problème n°411 du 11/01/05

On dispose un nombre N de pions sur un damier 4 × 4, au plus un par case.
Un balayage horizontal consiste à ramasser tous les pions d'une ligne, un balayage vertical tous ceux d'une colonne.

Pour quelle valeur maximum de N est-on sûr d'éliminer tous les pions en deux balayages horizontaux et deux verticaux ?



444. Le festin de l'araignée

Problème n°416 du 15/02/05

Cinq trous sont disposés dans un mur, de façon que les distances de deux quelconques d'entre eux ne soient jamais identiques. Dans chacun, une araignée veille.
Au matin, chacune des araignées sort de son trou, se dirige vers le trou le plus proche et y reste un bon moment dans l'espoir d'y trouver de la nourriture.

Est-il possible qu'elles se retrouvent à nouveau toutes les cinq dans cinq trous différents ?

Et s'il y avait au départ six trous et six araignées ?

445. L'onde verte

Problème n°421 du 22/03/05

L'avenue de la République comporte quatre carrefours espacés successivement dans le sens Sud-Nord de 600 m, 400 m et 500 m et dont les feux sont parfaitement synchronisés : en partant du premier carrefour au moment où le feu passe au vert, et en roulant à 40 km/h, on bénéficie de « l'onde verte », c'est-à-dire que le feu passe au vert dès qu'on arrive à chaque carrefour.
Le cycle de feux, d'une durée totale d'une minute, est le même aux quatre carrefours. La durée du feu vert est calculée de telle sorte qu'un automobiliste dépassant, même légèrement, la vitesse limite de 50 km/h se heurte obligatoirement à un feu orange ou rouge à l'un des carrefours.

Quelle est la durée du feu vert ?

Dans le sens Nord-Sud, les choses sont moins idéales puisque l'excès de vitesse est possible. Un automobiliste peut encore franchir les quatre carrefours en ne rencontrant que des feux verts à une vitesse constante de l'ordre de 50 km/h.

Dans quelle fourchette précisément doit être comprise cette vitesse ?

446. La feuille d'émargement

Problème n°426 du 26/04/05

Les 130 participants à cette compétition portent des numéros de 1 à 130. En arrivant sur les lieux, ils inscrivent leurs numéros dans les cases successives de la feuille d'émargement, dans l'ordre où ils se présentent. Ainsi, les 10 premiers nombres sont les suivants :

103	21	8	14	99	110	31	5	66	43	

Les 130 premières cases sont ainsi remplies, aucun concurrent ne manquant à l'appel. Une fois le départ donné, le préposé à la feuille d'émargement, désœuvré, imagine la procédure suivante : il raye les deux premiers nombres et écrit leur somme (il dispose d'une calculatrice) dans la première case disponible, à la suite du dernier. Il raye alors les deux premiers nombres non rayés et écrit encore leur somme dans la première case disponible. Il recommence ainsi pendant un bon moment… jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux nombres. Il les raye et inscrit leur somme dans la case suivante.

Quel est ce dernier nombre ? Quelle est la somme de tous les nombres inscrits (rayés ou non) sur la feuille d'émargement ?

447. Le jeu des 30 pions

Problème n°431 du 31/05/05

Alpha et Bêta sont des stratèges de première force, ils ne commettent jamais d'erreur. Ils viennent d'inventer un jeu qui se joue avec 30 pions qu'ils disposent sur une table. Alpha choisit un nombre de pions de son choix (au moins 1, au plus 15) et l'ôte de la table. C'est alors à Bêta de jouer, puis à Alpha, puis à Bêta et ainsi de suite…
Chaque joueur enlève à son tour un nombre de pions de son choix, au moins 1 et au plus un de plus que le nombre que vient d'enlever son adversaire au tour précédent. Le vainqueur est celui des joueurs qui a ôté le dernier pion.

Qui sera déclaré vainqueur ? Si c'est Alpha, combien de pions doit-il enlever à son premier tour de jeu ? Si c'est Bêta, quelle doit être sa stratégie ?

448. Les quatre objets et la balance

Problème n°436 du 05/07/05

Les quatre objets sont bien reconnaissables, et s'ils pèsent tous autour du kilogramme, deux quelconques d'entre eux n'ont pas la même masse. Votre mission, si vous l'acceptez : donner la liste de ces quatre objets, du plus léger au plus lourd, parmi les 24 ordres possibles. Pour vous aider, vous disposez d'une balance à deux plateaux, qui, lors de chaque pesée, penchera du côté de l'objet le plus lourd.

À l'issue de combien de pesées, au minimum, êtes-vous sûr(e) de pouvoir ordonner les quatre objets ?
Les choses se corsent : vous disposez toujours de quatre objets, mais certains d'entre eux peuvent avoir des masses identiques.
Combien y a-t-il cette fois de situations possibles ? À l'issue de combien de pesées, au minimum, êtes-vous sûr(e) de pouvoir indiquer dans laquelle des situations on se trouve ?

449. La ronde des pions

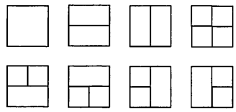
Problème n°441 du 09/08/05

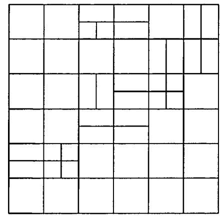
Autour de cette grande table circulaire, sont creusées 32 alvéoles numérotées (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) de 1 à 32. Au début de la ronde, dans chaque alvéole, se trouve un pion portant le numéro de l'alvéole (position 1). À chaque tour, les pions avancent simultanément. Chaque pion avance toujours du même nombre d'alvéoles, celui qui est indiqué sur son numéro de pion. Il peut naturellement y avoir à un instant donné plusieurs pions dans la même alvéole. La ronde se termine après la position 32. Lors du mouvement suivant cette dernière position, chacun se retrouvera à sa position initiale (position 33 = position 1).
Lors de la ronde, chaque pion s'enrichit à chaque position d'1 € par pion (lui compris) sur son alvéole.
Lors de la ronde, chaque fois qu'une alvéole accueille un pion, elle s'enrichit d'1 $.

Quel sera le pion le plus riche ? Combien aura-t-il d'euros ?
Quelle sera l'alvéole la plus riche ? Combien aura-t-elle de dollars ?

450. À la manière de Paul Klee

Problème n°446 du 13/09/05





Pour réaliser un tableau « à la manière de Paul Klee », dessinez d'abord un quadrillage régulier 6 × 6, puis, divisez certains carreaux en deux, en trois ou en quatre, selon l'un des modèles ci-contre. Vous devez alors colorier les cases du quadrillage irrégulier ainsi formé à l'aide de trois couleurs : bleu foncé, bleu clair et gris. Attention, deux cases qui se touchent par plus qu'un sommet ne doivent pas être de la même couleur !

Le coloriage est-il toujours possible ? Dans le cas du tableau ci-contre, quel est le nombre minimum de cases que vous devrez colorier en gris ?

451. Le jeu du partage

Problème n°451 du 18/10/05

Des amis se retrouvent un soir chez l'un d'entre eux pour jouer au « jeu du partage », un jeu très simple qui se joue à l'aide d'un ordinateur programmé pour afficher aléatoirement deux nombres. Les participants (ils sont entre dix et trente) s'installent autour d'une grande table dont les places sont numérotées.
On fixe le nombre de coups, on paramètre le logiciel et la partie peut commencer. Chacun contribue (une fois pour toutes) à la cagnotte en misant la même somme* et n'a plus rien devant lui.
Puis le programme informatique affiche les numéros de deux des joueurs : ces derniers se partagent la cagnotte (chacun en prend la moitié). On relance le programme : les deux nouveaux joueurs désignés se partagent leurs avoirs (si l'un d'eux n'avait rien devant lui, il reçoit la moitié de ce que possède l'autre). On recommence autant de fois qu'on l'a décidé au départ. Chaque fois, les deux joueurs concernés mettent leurs avoirs en commun et se les partagent. À la fin de la partie, coïncidence étonnante, chacun a récupéré exactement sa mise de départ.

Combien les joueurs étaient-ils ce soir là ? (*) Le groupe d'amis a pris l'habitude de miser 102,40 €, car cette somme se partage aisément en deux de nombreuses fois.

452. Les 1 000 jetons

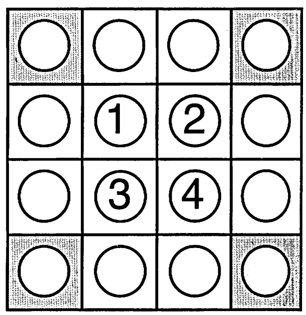
Problème n°456 du 22/11/05

Un jeu compte 1 000 jetons portant des numéros séquentiels à trois chiffres, allant de 000 à 999.
Le fabriquant veut les répartir dans 50 boîtes, numérotées elles aussi, de telle sorte que chaque jeton soit dans une boîte dont le numéro (à deux chiffres) est obtenu en supprimant exactement un chiffre du numéro du jeton (sans en changer l'ordre).

Est-ce possible ?
Si oui, comment fera-t-il ?

453. Loto-ku

Problème n°461 du 29/11/05



Au jeu de Loto-Ku, on n'utilise que quatre types de jetons marqués 1, 2, 3 ou 4.
Les joueurs tirent des jetons et les posent sur leur grille selon une unique règle : tout carré de 2 cases sur 2 doit contenir un exemplaire de chaque type de jeton.
Le vainqueur est le premier à remplir complètement sa grille en respectant la règle.

Les enfants jouent avec des grilles 4 × 4.
Le plus observateur d'entre eux remarque qu'à la fin de la partie, sur la grille du vainqueur figurent toujours quatre jetons différents aux quatre coins (cases grises),

Est-ce obligatoire ?

Les adultes jouent avec des grilles 6 × 12.

La constatation reste-t-elle vraie pour de telles grilles ?

454. Les cent cartes

Problème n°466 du 31/01/06

Sur les faces de cent cartes, on a inscrit les entiers de 1 à 100.

Un magicien les mélange, puis en retourne 25, qu'il place en carré (cinq lignes et cinq colonnes).
Il demande alors à un spectateur de déplacer les cartes de chaque ligne de manière à les classer par ordre croissant, de la gauche vers la droite.
Il demande ensuite à un deuxième spectateur de déplacer les cartes de chaque colonne de manière à les classer par ordre croissant, de haut en bas.

C'est là qu'il faut l'applaudir. Car, malgré le dérangement, les cinq lignes sont encore classées par ordre croissant sans avoir besoin d'y toucher.

Pourquoi la performance du magicien n'est-elle pas si extraordinaire ?

455. La recette du sept

Problème n°471 du 07/07/06

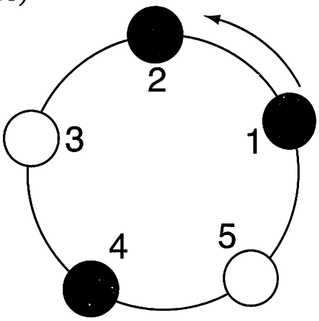
Prenez un nombre entier, par exemple 46732. Amputez-le de son chiffre des unités, il reste 4673.
Soustrayez alors le double du chiffre des unités enlevé :
$4673 - 2 \times 2 = 4669$
Recommencez avec le nouveau nombre :
$466 - 2 \times 9 = 448$
Et encore, jusqu'à obtenir un nombre à 2 chiffres :
$44 - 2 \times 8 = 28$
Ce nombre est un multiple de 7 ? C'est que le nombre de départ l'était : effectivement, $46\,732 = 7 \times 6\,676$.

Pourquoi cela marche-t-il ?
Sauriez-vous imaginer, dans le même esprit, une « recette du treize » ?

456. En noir et blanc

Problème n°476 du 11/04/06

Des pions réversibles (une face blanche, une face noire) sont posés sur cinq cases numérotées de 1 à 5.
Un «coup» consiste à partir d'une case, dans le sens indiqué par la flèche, et à retourner les pions un à un, dans l'ordre, jusqu'à la transformation d'un pion blanc en pion noir.
À partir de la position indiquée sur le dessin, on joue 5 coups, en partant successivement de la case 1, puis de la 2, de la 3, de la 4 et enfin de la 5.

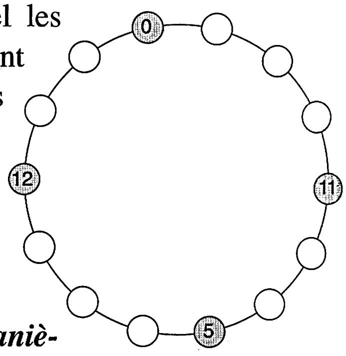


Quelle position des 5 pions retrouve-t-on à l'arrivée ?
Peut-on prévoir le résultat des cinq coups, quelle que soit la position de départ ?

457. La roue de la fortune

Problème n°481 du 23/05/06

Une «roue de la fortune» est un cercle sur lequel les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 sont rangés de manière que la différence entre deux nombres voisins soit 3, 4 ou 5.



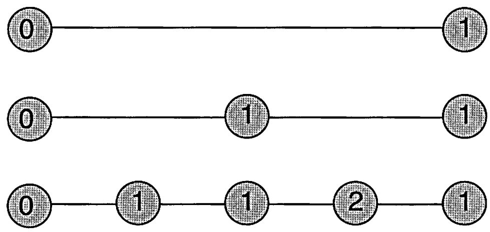
Complétez la figure ci-contre pour qu'elle représente une roue de la fortune.

Peut-on ranger les nombres de 0 à 9 sur un cercle de manière qu'ils vérifient la même propriété ?

458. Les jetons

Problème n°486 du 27/06/06

Étape 0 : Posez les jetons 0 et 1 aux deux extrémités d'un segment.
Étape 1 : Posez au milieu de chacun des deux segments un nouveau jeton où figure la somme des jetons présents à ses extrémités.
Étapes suivantes : Posez au milieu de chacun des segments délimités par des jetons un nouveau jeton où figure la somme des jetons présents à ses extrémités.



Quelle est la somme des jetons posés après l'étape 8 ?

459. Un jeu d'enfant !

Problème n°491 du 01/08/06

Deux enfants disposent d'un cube de carton blanc et d'un crayon de couleur chacun (le premier a un crayon rouge, le deuxième un crayon bleu).
à tour de rôle, chacun colorie dans sa couleur trois arêtes du cube. Celui qui réussit à colorier les quatre arêtes d'une même face a gagné.

Le premier joueur a-t-il une stratégie gagnante ?

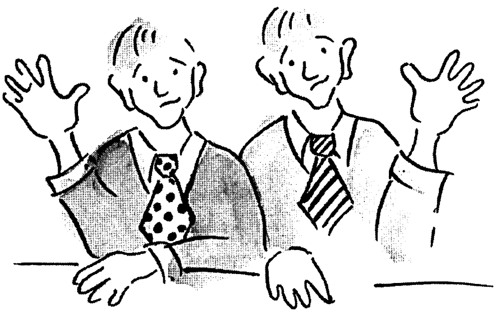
460. Kitoudouble

Problème n°496 du 05/09/06

Le jeu de Kitoudouble se joue seul. Il comporte des cartes «double» et une carte «quitte».

Le joueur part avec un capital de 30 jetons, en mise un nombre de son choix et retourne la première carte du paquet. Si c'est la carte «quitte», il a perdu sa mise, si c'est une carte «double», il gagne le nombre de jetons misés. Il recommence tant qu'il reste des cartes dans le paquet.

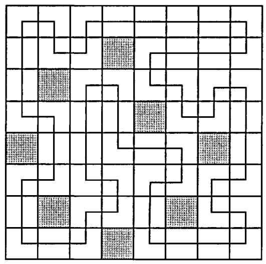
Le joueur veut être certain, en choisissant convenablement ses mises, et quel que soit l'ordre des cartes, de terminer avec une certaine somme appelée objectif.



S'il y a en tout deux cartes (une «quitte» et une «double»), quel est l'objectif maximum que le joueur peut être sûr d'atteindre ?
Et l'objectif maximum avec trois cartes (une «quitte» et deux «double») ?
Quel est l'objectif maximum que le joueur peut être certain d'atteindre avec quatre cartes (une «quitte» et trois «double») ?

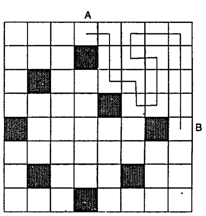
Graphes & algorithmes SOLUTIONS

421. Le circuit de la tour

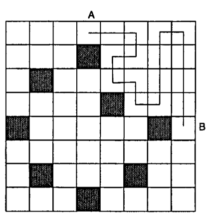


Voici l'un des circuits possibles de la tour.

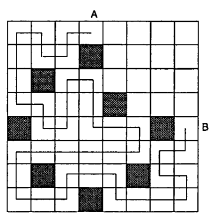
☒ *Christian ROMON (78420 Carrières sur Seine) et Jean BOURLES (Bruxelles) élargissent le problème et proposent tous deux une recherche systématique de toutes les solutions. Partant du principe qu'il n'y a que deux façons de joindre les points A et B, « par le Nord » (dessins N1 et N2), et deux « par le Sud » (dessins S1 et S2), auxquelles on ajoute leurs symétriques par rapport à la diagonale (d) : N'1, N'2, S'1, S'2, leur combinaison fournit 16 solutions, ou 8, à une symétrie près par rapport à (d).*



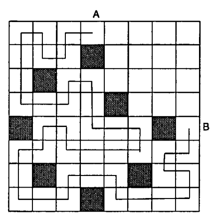
N1



N2



S1



S2

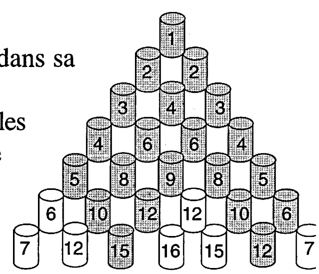
422. le chamboule-tout

On peut renverser 21 boîtes (en grisé sur le dessin) **en heurtant la troisième et la sixième boîte de la rangée du bas.**

On ne pourra jamais faire tomber 2003 boîtes d'un coup.

On a représenté sur chaque boîte le nombre de boîtes qu'elle entraîne dans sa chute.

On remarque que les nombres inscrits sur chaque diagonale sont les multiples des entiers successifs. 2003, nombre premier (il n'a pas de diviseur autre que 1 et lui-même), ne pourra apparaître qu'en ligne 2003.



☒ *Guy CHATY (Paris) fait remarquer que « les boîtes abattues d'un coup sont représentées par un parallélogramme et leur nombre est le produit de ses côtés » ; Michel MENGUAL propose, pour renverser un maximum de 21 boîtes sur un empilement de sept étages, de faire tomber les deux boîtes adjacentes à celle du milieu, et Christian ROMON fait, lui, une recherche systématique du nombre de boîtes renversées après un ou deux impacts.*

423. La machine à créer Des nombres

Tous les nombres de la liste sont des entiers.

On le montre en remarquant que chaque nombre de la liste est obtenu en multipliant par quatre celui qui le précède de deux rangs et en retranchant de ce produit celui qui le précède de quatre rangs. Ce résultat s'établit mathématiquement en utilisant une démonstration «par récurrence», c'est-à-dire de proche en proche.

⊠ *Tous les lecteurs intervenus sur ce sujet ont voulu aller plus loin : C. BROERE (La Haye) calcule jusqu'à quinze termes de la suite, avec différentes valeurs initiales, J-L . FOULLEY expose une relation donnant chaque terme de la suite en fonction seulement des deux qui le précèdent :* $\begin{cases} u_{2p+1} = 2 \times u_{2p} - u_{2p-1} \\ u_{2p} = 3 \times u_{2p-1} - u_{2p-2} \end{cases}$,

P. MAES (91210 Draveil) donne d'intéressantes précisions entre autres sur d'autres séquences de trois nombres conduisant à des suites entières. Il cite par exemple 2, 1, 1 et 3, 2, 1 ou 2, 2, 2. C. ROMON donne une démonstration exhaustive de la formule liant un termes aux précédents et B. TREPS (Paris) reste sur une interrogation : quelles conditions doivent satisfaire les trois premier éléments de la suite pour que tous les suivants soient des entiers? *M. DAVID (74200 Thonon les Bains), à travers une recherche très poussée, y répond en grande partie en précisant que si le premier terme de la suite est 1, les seuls cas où la suite est formée d'entiers sont : 1, 1, 1 ; 1, 1, 2 ; 1, 2, 3 ; 1, 2, 1 ; 1, 3, 2 et bien sûr leurs permutations.*

424. La bande des quatre

Il y a 8 façons de superposer les quatre vignettes.

On peut les dénombrer en faisant la liste des ordres possibles (10-20-30-40, 10-20-40-30, 10-30-40-20, 10-40-30-20, 20-10-30-40, 20-10-40-30, 30-10-20-40, 30-20-10-40).

Il est à remarquer que chaque permutation se lit aussi dans l'autre sens : ainsi, l'ordre 40-30-20-10 correspond-il à la même façon de plier que 10-20-30-40.

Il y a 40 façons de superposer les cinq vignettes.

Pour chaque façon de plier la bande des quatre, on dispose de cinq positions pour la vignette d'un Euro (classique problème d'intervalle !). D'où le résultat : 5 × 8 = 40.

⊠ *Christian ROMON fait remarquer que, dans le cas de cinq vignettes, il n'y a 40 superpositions possibles que si l'on a le droit de « froisser » la vignette de 1€ pour l'insérer entre deux autres. Si tel n'est pas le cas, il ne reste que 35 possibilités.*

425. Rencontres du troisième type

La population peut se réduire à des cinglés si la différence d'effectif entre les aventuriers et les bourgeois est un multiple de 3 (et si la population ne se réduit pas à un des deux premiers types).

Lors d'une «rencontre», deux cas peuvent se produire :

– les effectifs des populations d'aventuriers et de bourgeois diminuent conjointement d'une unité ;

– l'une diminue d'une unité tandis que l'autre s'accroît de deux unités.

La différence ne bouge pas, ou varie de trois unités. Elle ne pourra devenir nulle que si c'était déjà au départ un multiple de 3.

Réciproquement, si cette différence est un multiple de 3 au départ, on pourra toujours s'arranger pour que les deux effectifs deviennent égaux. Par exemple, pour des effectifs $(a, a + 3x, c)$, on passe à $(0, 3x, c + 2a)$ par a confrontations d'aventuriers et de bourgeois, puis à $(x, x, c + x + 2a)$ par x confrontations de bourgeois et de cinglés, enfin à $(0, 0, c + 2a + 3x)$ par x confrontations d'aventuriers et de bourgeois. On peut remarquer que l'ordre des confrontations étant indifférent, on peut, si on «manque» de cinglés, au lieu d'opérer complètement la deuxième phase, alterner des confrontations de la deuxième phase et de la troisième phase.

⊠ *Solution simple de C. ROMON.*

426. Les quarante voleurs et la balance

Il faudra au plus quarante-quatre comparaisons pour déterminer les deux plus lourds et quarante-neuf pour déterminer les trois plus louds.

• Joute 1 (pour désigner le chef) : on fait monter les voleurs deux à deux sur la balance selon une procédure comparable à un tournoi par élimination. On s'arrange pour qu'il en reste trente-deux à l'issue du premier tour en exemptant vingt-quatre voleurs de ce tour. Il en reste ensuite seize à l'issue du deuxième tour, huit à l'issue du troisième, quatre à l'issue du quatrième, deux à l'issue du cinquième et un à l'issue du sixième : le chef ! Trente-neuf comparaisons ont eu lieu jusque là (autant que de voleurs éliminés).

• Joute 2 (pour désigner le sous-chef) : ce dernier fait forcément partie des six voleurs éliminés par le chef lors de la première joute (cinq si le chef a été exempté du premier tour). Cette joute se déroule dans un ordre bien précis : Arsène, éliminé au premier tour par le chef, rencontre Bonnie, éliminé au deuxième tour. Le vainqueur rencontre Clyde éliminé au troisième tour. Le vainqueur rencontre Dalton, éliminé au quatrième tour, etc... jusqu'à trouver le plus lourd des six : le premier adjoint, déterminé en cinq (ou quatre) comparaisons.

• Joute 3 : on cherche qui n'a été battu par personne d'autre que le premier adjoint. Le troisième poids se trouve parmi les voleurs éliminés par le premier adjoint lors de l'une des deux premières joutes. Si l'adjoint est Arsène, il y a donc cinq postulants, si c'est Bonnie, il y en a éventuellement un de plus (le voleur éliminé par Bonnie lors de la première joute). Si c'est Clyde, les postulants sont les deux voleurs éliminés par Clyde lors de la première joute et les quatre éliminés par Clyde dans la deuxième joute. Et ainsi de suite : dans chaque cas, le nombre de voleurs éliminés dans la première joute augmente, celui des voleurs éliminés dans la deuxième joute diminue, le total reste au plus six ! Cinq comparaisons, au plus, seront nécessaires.

⊠ *Remarques clairvoyantes de Philippe BLONDEL (92190 Meudon) et Michel SZWARCBAUM (Paris), dénombrement établi par récurrence pour C. ROMON. Certains lecteurs cependant ont pu ne pas tenir compte de l'ordre très particulier dans lequel s'est déroulée la deuxième joute.*

427. Casino privé

Il y avait six joueurs au début de la partie.

Lors de chaque coup, s'il y a N joueurs, et si le banquier gagne, il ramasse (N – 1) jetons tandis que les autres en perdent 1. C'est le contraire si le banquier perd. Dans tous les cas, la différence de fortune entre deux joueurs varie d'un multiple de N.

• Jeu à N joueurs : la différence de fortune entre Alain et Babette passe de 0 (au début) à – 12 quand Alain est éliminé. C'est que 12 est un multiple de N.

• Jeu à (N – 1) joueurs : la différence de fortune entre Babette et Charlotte passe de – 12 (après l'élimination d'Alain) à + 23. C'est que 35 est multiple de (N – 1).

Parmi les nombres au moins égaux à 3, seul N = 6 vérifie ces deux conditions.

⊠ *C. ROMON cite un exemple de déroulement de la partie :*

banquier	A	B	C	D	E	F
	12	12	12	12	12	12
A perd	7	13	13	13	13	13
A perd	2	14	14	14	14	14
C gagne	1	13	19	13	13	13
C gagne	0	12	24	12	12	12
B gagne 7 fois	-	40	17	5	5	5

428. La tombola du club

Pour un nombre pair de joueurs, il est toujours vrai que plus de la moitié des mises sont remboursées. Ce n'est pas forcément le cas avec un nombre impair de joueurs.

• S'il y a un nombre pair $2n$ de petits papiers, classons les gains du plus grand G_1 au plus petit G_{2n}. Alors, pour $i \leq n$, on peut écrire $G_i < G_i + G_{2n} < G_i + G_{2n-1} < \ldots < G_i + G_{2n+1-i}$
Si $G_i + G_{2n+1-i} \leq 5$, toutes ces sommes correspondraient à des gains, et on aurait mis en évidence i gains plus grands que G_i. Or, il n'en existe que $i - 1$ (les valeurs G_1 à G_{i-1}).
Donc $G_i + G_{2n+1-i} > 5$ et en groupant les gains deux à deux, on constate que leur moyenne est plus grande que 2,5 et donc que plus de la moitié des mises sont remboursées.

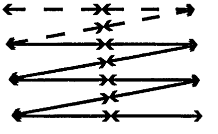
• S'il y a un nombre impair $2n + 1$ de joueurs, le raisonnement précédent s'applique à tous les couples de gains $G_i + G_{2n+2-i}$, mais pas au gain médian G_{n+1}. On peut alors montrer que $G_{n+1} > 2{,}5$ si $n \geq 2$. Il existe alors un seul cas ou le gain médian peut faire baisser la moyenne, le cas $n = 1$. Ainsi, avec trois joueurs, on pourrait imaginer trois papiers sur lesquels sont marqués les nombres 1,35 €, 2,35 €, 3,70 €.

⊠ *C'est à Max DAUCHET (Paris) qu'on doit l'étude et la démonstration complète du cas n impair.*

429. La planche de timbres

• Il faudra au minimum 12 découpes, et même 11 découpes si l'une des dimensions de la planche est une puissance de 2 (16 × 125 ou 8 × 250 ou 4 × 500 ou 2 × 1000 ou 1 × 2000).
Dans chaque sens (longueur et largeur), on fera n découpes s'il y a 2^n timbres selon cette dimension, *(n + 1)* découpes si le nombre de timbres selon cette dimension est compris entre $(1 + 2^n)$ et 2^{n+1}. On ne peut faire mieux car une découpe multiplie au plus par deux le nombre de «morceaux». Ainsi, le nombre de découpes est-il le suivant selon la forme de la planche :

Dimensions	Nombre de découpes
2000 × 1	11 + 0 = 11
1000 × 2	10 + 1 = 11
500 × 4	9 + 2 = 11
250 × 8	8 + 3 = 11
125 × 16	7 + 4 = 11
400 × 5	9 + 3 = 12
200 × 10	8 + 4 = 12
100 × 20	7 + 5 = 12
50 × 40	6 + 6 = 12
25 × 80	5 + 7 = 12



• Dans le cas où on peut plier la planche, 4 découpes suffisent ! Et même moins pour une planche 2 × 1000 (3 découpes) ou 1 × 2000 (2 découpes) ! Voir figure ci-dessus.
Il suffit, avant la première découpe, de plier la planche selon le schéma ci-contre. On formera, après le coup de massicot central, des planches de largeur 1 ou de largeur 2 qu'un seul coup de massicot ramènera à la largeur 1. On fait alors de même selon l'autre dimension.

430. Les trois urnes et le magicien

1 est dans l'urne bleue, 32 dans la rouge, les nombres de 2 à 31 dans la blanche.
On remarque : 32 (rouge) + 1 (bleue) = 2 (blanche) + 31, ce qui impose 31 dans la blanche.
Puis 32 (rouge) + 2 (blanche) = 31 (blanche) + 3 : 3 est dans l'urne blanche ou rouge.
• Si 3 est dans l'urne rouge, on montre succcessivement que :
5 = 2 (blanc) + 3 (rouge) = 1 (bleue) + 4 , d'où 4 est dans l'urne bleue.
7 = 3 (rouge) + 4 (bleue) = 2 (blanche) + 5, d'où 5 dans l'urne blanche

9 = 5 (blanche) + 4 (bleue) = 3 (rouge) + 6, d'où 6 dans l'urne rouge...
Et ainsi de suite, on montre que les nombres sont alternativement dans les urnes bleue, blanche, rouge, bleue, blanche, rouge,... et ainsi de suite. 30 serait dans la rouge, 31 dans la bleue, 32 dans la blanche, ce qui est contradictoire.
• Donc 3 est dans l'urne blanche.
Alors, aucun nombre autre que 32 ne peut être dans l'urne rouge. En effet, si N < 32 est dans l'urne rouge, 2 (blanche) + N (rouge) = 1 (bleue) + (N + 1) impose (N + 1) dans la bleue. 3 (blanche) + N (rouge) = 2 (blanche) + (N + 1) (bleue) est alors contradictoire.
Aucun nombre autre que 1 ne peut être non plus dans la bleue. En effet, si N > 1 est dans la bleue, N (bleue) + 31 (blanche) = (N – 1) + 32 (rouge), donc (N – 1) rouge, ce qui est contradictoire avec la remarque précédente.
– Si le total est 33, le magicien annoncera : « urnes bleue et rouge »
– Si le total est supérieur à 33, le magicien annoncera « urnes blanche et rouge »
– Si le total est inférieur à 33, il annoncera « urnes blanche et bleue ».

⊠ *François ROUSSEAU (78000 Versailles), trouvant que le disposition proposée va être éventée trop rapidement, propose une répartition moins visible :*
• *les multiples de trois + 1 dans l'urne bleue,*
• *les multiples de trois + 2 dans l'urne blanche,*
• *les multiples de trois dans l'urne rouge.*
Ainsi, à l'annonce de la somme, il suffit de connaître son reste dans la division par trois pour identifier les urnes.

431. La machine à tricoter des nombres

Il n'est pas possible de tricoter un carré parfait avec la maille flottante 7.

7 ayant le même reste que 1 dans la division par 6, le nombre tricoté par 7 aura également le même reste que celui tricoté par 1 dans la division par 6 (les étapes de la machine à tricoter, qui ne sont que des additions et des multiplications, ont le même effet sur ce reste).
Le nombre tricoté par 7 aura donc 2 pour reste dans la division par 6.
Or, les seuls restes possibles des carrés d'entiers dans la division par 6 sont 0, 1, 3 et 4.

⊠ *On peut aussi, comme l'a fait C. ROMON, étudier les restes des nombres « tricotés » dans la division par 3.*

432. Les terriers surpeuplés

Avec 135 lapins, la situation finira forcément par se stabiliser.
Mais pas obligatoirement avec 136.

• Imaginons que chaque matin, tous les habitants d'un même terrier se disent mutuellement « bonjour ». Si les n habitants d'un terrier surpeuplé émigrent dans n terriers contenant respectivement $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ lapins, le nombre de « bonjour » échangés le lendemain matin aura :

– diminué de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (au moins égal à 120, puisque $n \geq 16$) ;

– augmenté de $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$, (au plus égal à 135 – 16 = 119).
Ce nombre, diminuant strictement, finira forcément par se stabiliser, sous peine de devenir négatif.
• En revanche, avec 136 lapins, on peut imaginer une errance illimitée des lapins, si, par exemple, la disposition du premier jour est 16, 15, 14, ..., 3, 2, 1 et si les lapins du terrier évacué investissent en priorité les terriers déjà occupés.

⊠ *Solution très détaillée de C. ROMON.*

433.Croissance 2004

12 insectes seront isolés au soir du 31 décembre.

Le 26 décembre, le nombre d'insectes est un multiple de 26 plus 12. Il admet donc 12 pour reste dans la division par 13.

Le 27 décembre, le nombre d'insectes admet le même reste que 27 × 12 + 12 dans la division par 13, soit celui de 1 × 12 – 1, soit 11.

Le reste au 28 décembre est celui de 28 × 11 + 12, soit 2 × 11 – 1, soit 8.

Le reste au 29 décembre est celui de 29 × 8 + 12, soit 3 × 8 – 1, soit 10.

Le reste au 30 décembre est celui de 30 × 10 + 12, soit 4 × 10 – 1, soit 0.

Enfin, le reste au soir du 31 décembre est celui de 31 × 0 + 12, soit encore **12**.

434. La limousine de la famille Ours

7 manœuvres sont nécessaires pour 3 voitures (voir schéma), 511 pour 9 voitures.

• Plus généralement, si d_n déplacements sont nécessaires pour n voitures, pour en déplacer $n + 1$ il faudra d_n déplacement pour passer les n premières voitures de A en B, un de plus pour amener la dernière voiture en C et d_n autres pour amener les n voitures de B en C. Ainsi, la relation $d_{n+1} = 2d_n + 1$, permet de déduire que $d_n = 2^n - 1$.

	A	B	C
	G M P		
1	G M	P	
2	G	P	M
3	G		M P
4		G	M P
5	P	G	M
6	P	G M	
7		G M P	

435. Quadrichromie

864 œuvres différentes obéissent à la règle de construction des «quadrichromie».

En appelant A la première couleur rencontrée, B la deuxième, C la troisième, D la quatrième, les possibilités sont :

AB – A – B – CDCD	1
– C – B – DCD	2
– D – B – CD	3
– DC	4
C – BD	5
– DB	6
– C – A – BDCD	7
– CDBD	8
– D – B – CD	9
– DC	10
– C – BD	11
– DB	12
– B	13 à 18 obtenues en échangeant A et B dès le milieu de 7 à 12
– D – A …	19 à 24 : les 6 permutations de BCD
– B …	25 à 30 : les 6 permutations de ACD
– C …	31 à 36 : les 6 permutations de ABD

Il ne reste plus qu'à remplacer A, B, C, D par les 24 permutations possibles des 4 couleurs.

Résultat : 24 × 36 = 864.

⌧ *Gilles DUPIN (Paris) résout le problème par dénombement ensembliste en utilisant la formule de Poincaré, qui donne le cardinal d'une réunion d'ensembles. Il en fait même une généralisation à un canevas formé de 2n cases colorié avec n couples de couleurs.*

436. Faites la queue, comme tout le monde !

Avec 16 personnes, le numéro 1 quittera le bureau le dernier.

Ce résultat est vrai plus généralement si le nombre de personnes est une puissance de 2.

Avec 100 personnes, c'est le numéro 73 qui quittera le bureau en dernier.

L'idée est de savoir quel sera le premier de la file d'attente lorsqu'il restera un nombre de clients qui est une puissance de 2, soit 64. À ce moment, 36 personnes auront été libérées et 36 reléguées. Le premier de la liste est bien le numéro 73.

437. Les pions bicolores

Il est impossible de retourner tous les pions.

Pour le prouver, numérotons les cases de l'échiquier à l'aide des trois chiffres successifs 0, 1, 2, et appelons B_0, B_1, B_2 le nombre de pions présentant leur face blanche et situés sur les cases de numéros respectifs 0, 1 et 2. Au départ, ces nombres sont égaux à 6, 5 et 5.

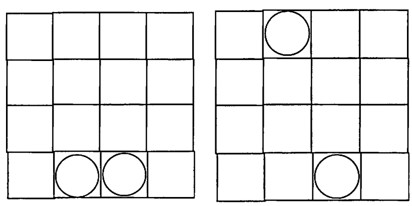
0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2
0	1	2	0

Chacun des 16 coups possibles permet de retourner un pion situé sur une case portant chaque chiffre. Les nombres B_0, B_1, B_2 augmentent ou diminuent donc d'une unité lors de chaque coup, ce qui signifie que les différences entre ces nombres gardent la même parité. La différence entre B_0 et B_1 étant impaire au départ, elle restera impaire.

B_0 et B_1 ne peuvent être simultanément nuls !

⌧ *On peut, comme le suggère C. ROMON, aller plus loin et identifier les pions non retournés dans quelques cas particuliers :*

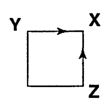
- *S'il n'en reste qu'un, il est nécessairement à un des quatre coins ;*
- *S'il en reste deux, ils sont nécessairement, aux rotations près, dans les positions du dessin.*



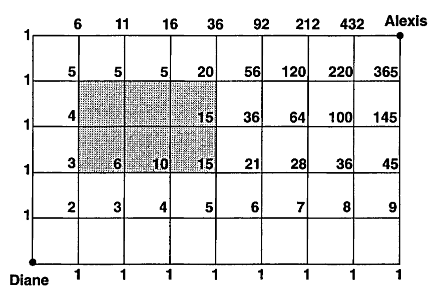
438. Les plus courts chemins

Diane peut emprunter 797 chemins différents.

L'idée consiste à remarquer qu'on ne peut parvenir à un nœud X que par deux nœuds Y et Z. Le nombre de chemins arrivant en X est alors la somme du nombre de chemins arrivant en Y et du nombre de chemins arrivant en Z.



On construit selon ce modèle un graphe sur lequel on inscrit, à chaque nœud, la somme des nombres inscrits sur les nœuds qui y mènent.



Le nombre de façons de parvenir jusqu'à Alexis est 432 + 365 = 797.

⌧ *Solution très détaillée de Antoine WEHENKEL (Luxembourg).*

439. Les trois sœurs

Le trajet a duré 4 heures 30.
Dans un premier temps, t, Aline prend Caro à l'arrière tandis que Béa se met à courir.
Au kilomètre $30t$, elle dépose sa sœur qui continue de son meilleur pas, et retourne à la rencontre de Béa qu'elle rejoint au temps $3t/2$ et au kilomètre $15t$ (puisque la moto va trois fois plus vite que Béa).
Pendant ce temps, Caro, qui a parcouru $3t$ kilomètres à pied, est au kilomètre $33t$.
La deuxième partie du trajet dure un temps s, au bout duquel les 3 sœurs arrivent en même temps chez leurs amis. s est donc à la fois égal à $(75 - 33t)/6$ et à $(75 - 15t)/30$.
On en déduit $t = 2$ heures, et donc $s = 1$ heure 30.
Le trajet total a duré 4 heures et 30 minutes.

☒ *Solutions optimales de M. MENGUAL et C. ROMON.*

440. Intercalez la somme

À l'issue de l'étape 10, 1025 nombres auront été écrits, nombres dont la somme est égale à 59050.

• Pour trouver le nombre X_n d'éléments de la suite à l'issue de l'étape n, on remarque que s'il existe X_n éléments, il y aura $X_n - 1$ intervalles. Le nombre d'éléments à l'issue de l'étape $(n + 1)$ sera donc : $X_{n+1} = X_n + (X_n - 1)$, ce qui peut s'écrire : $X_{n+1} - 1 = 2\,(X_n - 1)$
La suite $(X_n - 1)$ est une suite *géométrique de raison 2* qui prend la valeur 1 pour $n = 0$.
On a donc $(X_n - 1) = 2^n$ et donc $X_{10} = 2^{10} + 1$.
• Si Y_n est la somme des éléments de la suite à l'issue de l'étape n, on voit qu'on lui ajoute lors de l'étape $(n + 1)$ des éléments obtenus en faisant intervenir chaque nombre deux fois, à l'exception des « 1 » extrêmes qui n'interviennent qu'une fois. On peut donc écrire :
$Y_{n+1} = Y_n + (2\,Y_n - 2)$, ce qui peut s'écrire : $Y_{n+1} - 1 = 3\,(Y_n - 1)$.
La suite $(Y_n - 1)$ est une suite *géométrique de raison 3* qui prend la valeur 1 pour $n = 0$.
On a donc $(Y_n - 1) = 3^n$ et donc $Y_{10} = 3^{10} + 1$.

☒ *Solution très détaillée de Sébastien BIOULAC (Paris)*

441. Généalogie

Deux « Nombre » de la même génération ne porteront jamais le même prénom.

Si pour la première fois à la génération n, deux de ces personnes portent le même prénom, l'un des deux serait un « carré », a^2, l'autre un « successeur » $b + 1$. On aurait alors $a^2 = b + 1$.
On remonte aux générations précédentes. La lignée dont descend b ne peut que contenir des « successeurs » tant qu'on n'a pas atteint le carré précédant a^2, soit $(a - 1)^2$. Elle mettra pour ce faire $(2a - 2)$ générations. Pendant ce temps, la lignée dont est issu a, même en progressant par « successeurs », sera remontée en seulement $(a - 2)$ générations jusqu'au patriarche, et $a - 2 < 2a - 2$!

Génération n	a^2	$b + 1$
Génération n–1	a	b
	au plus $a - 2$ générations	au moins $2a - 2$ générations
Génération 0	2	$(a - 1)^2$

☒ *Bonne solution de C. ROMON et quelques remarques astucieuses d'un lecteur anonyme comme « Il n'est guère possible qu'il se trouve deux nombres égaux sur la même ligne puisque l'opération " successeur " supprime les divisibilités du nombre auquel elle s'applique alors que l'opération " carré " maintient ces divisibilités ». Ce dernier indique en plus qu'on peut classer les nombres d'une même ligne par ordre croissant en allant du plus grand nombre d'opérations « successeur », qu'il nomme a vers le plus grand nombre d'opérations « carré » qu'il nomme p. En cas d'égalité de ces deux nombres d'opérations, classer les opérations p suivant* *leur proximité de la fin des opérations comme dans l'exemple de l'énoncé :*

aaa	*paa*	*apa*	*aap*	*ppa*	*pap*	*app*	*ppp*
5	*6*	*10*	*16*	*17*	*25*	*81*	*256*

On visualise, par un tel classement, que deux nombres de la même ligne sont toujours distincts.

442. Les deux meilleurs

68 matches seront nécessaires et suffisants pour désigner les deux premiers.

• Les organisateurs procèdent d'abord comme dans un tournoi par élimination directe : trente-deuxièmesde finale, seizièmes, huitièmes, quarts, demi-finales et finale. Le meilleur est ainsi désigné au bout de six tours (et donc de 63 matches).

• Il reste alors six prétendants à la deuxième place, les six joueurs battus par le meilleur. Ils s'affrontent en cinq matches (trois matches éliminatoires, puis entre deux des vainqueurs une demi-finale dont le gagnant dispute la finale contre le troisième vainqueur). Le gagnant de ce mini-tournoi empoche le deuxième prix.

⊠ *C. ROMON décrit explicitement dans le cas général de 2^n joueurs l'algorithme qui permet de sélectionner en un minimum de coups les deux meilleurs joueurs. Cela se passe en n rounds :*

• *1^{er} round : On joue 2^{n-1} parties, en répartissant au hasard les joueurs par binômes. Ceci permet de sélectionner 2^{n-1} joueurs provisoirement de rang 1 et 2^{n-1} joueurs provisoirement de rang 2.*

• *2^e round : On joue 2^{n-2} parties, en répartissant au hasard les joueurs par binômes. Ceci permet de sélectionner 2^{n-2} joueurs provisoirement de rang 1, 2^{n-2} joueurs provisoirement de rang 2 (les perdants du 2^e round et les perdants du 1^{er} round contre les gagnants du 2^e) et 2^{n-2} joueurs de rang 3 (les perdants du 1^{er} round contre les perdants du 2^e).*

• *k^e round : On joue 2^{n-k} parties, en répartissant au hasard les joueurs par binômes. Ceci permet de sélectionner 2^{n-k} joueurs provisoirement de rang 1, $k \times 2^{n-1}$ joueurs provisoirement de rang 2 (chacun de ceux qui ont été battus directement pendant les k rounds par l'un des 2^{n-k} joueurs de rang 1) Tous les autres joueurs ont un rang inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire qu'ils ont été battus par des joueurs eux-mêmes battus par d'autres.*

• *n^e round : On joue une partie entre les deux derniers vainqueurs de rang 1, qui détermine le grand vainqueur du tournoi. Il reste alors n joueurs de rang 2, ceux que le grand vainqueur a successivement battus dans les n matches qu'il a joués. Tous les autres joueurs sont de rang inférieur, c'est-à-dire qu'ils ont été battus par un joueur qui a lui-même été battu ensuite par un autre joueur.*

Le gagnant en second du tournoi est parmi les n joueurs de rang 2 qui à ce stade ne se sont pas encore affrontés. En adoptant la règle de ne jamais faire rejouer un perdant, on obtient le gagnant au bout de n – 1 parties au minimum.

Le nombre total de parties jouées est donc :

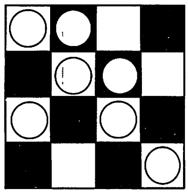
$2^{n-1} + 2^{n-2} + ..2^2 + 2 + 1 + (n-1) = (2^n - 1) + (n-1) = \mathbf{2^n + n - 2}$ ***parties.***

Précision supplémentaire de notre lecteur : on peut généraliser ce calcul à un nombre N de joueurs qui n'est pas une puissance de 2, à condition de compter fictivement des joueurs (faibles, qu'on ne fera pas jouer) pour atteindre la puissance de é supérieure. Si par exemple $2^{r-1} < N \leq 2^r$, il faudra $(N-1) + r - 1 = \mathbf{N - r - 2}$ parties pour connaître les deux premiers. (N remplace le 2^{n-1} de la formule précédente puisqu'on ne joue pas les parties fictives).

La description de cet algorithme met encore mieux en évidence le caractère minimal du nombre de matches, propriété qu'ont pu contester certains lecteurs dont on ne peut que louer le souci du détail.

443. Corvée de balayage

En deux balayages horizontaux et deux verticaux, on est sûr de pouvoir éliminer six pions.
Mais il existe des configurations de 7 pions impossibles à éliminer.



• En effet, avec 6 pions, le balayage des deux lignes les plus remplies éliminera au moins quatre pions.
Les deux pions, au maximum, qui restent, seront éliminés en au plus deux balayages verticaux.
• En revanche, avec 7 pions, on peut imaginer des configurations où six des pions sont regroupés sur un carré 3 × 3, deux par ligne et deux par colonne, et le septième à l'intersection de la quatrième ligne et de la quatrième colonne. Il faudra bien deux balayages horizontaux et deux verticaux pour éliminer les six premiers, et le septième restera sur son carreau.

> ⌧ *C. ROMON, en expliquant comment toute configuration à 6 pions peut être balayée, détaille particulièrement pourquoi il n'existe aucune configuration à 6 pions comptant moins de 4 pions sur tous les groupes possibles de 2 lignes.*

444. Le festin de l'araignée

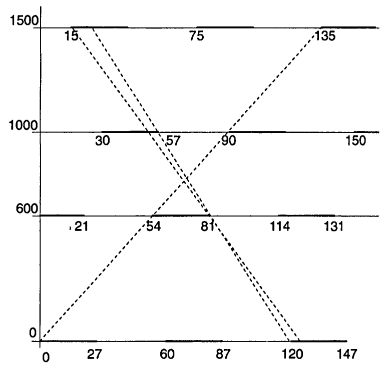
Les cinq araignées ne peuvent pas se retrouver dans cinq trous différents.
En effet, trions par ordre décroissant les distances parcourues par les araignées : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$.
Donnons le numéro 1 à l'araignée qui a parcouru la distance a, le numéro 2 à celle qui a parcouru la distance b, et ainsi de suite jusqu'au numéro 5 à l'araignée qui a parcouru la distance e.

• Si $a > b$, le trou A dont est partie l'araignée 1 restera vide. Car si une araignée parvenait en A, le trou dont elle partirait serait le plus proche à atteindre pour l'araignée 1.
• Si $a = b$, les araignées 1 et 2 échangent leurs places, et on recommence le raisonnement avec les trois araignées restantes.
• Si $c > d$, le trou C dont est partie l'araignée 3 restera vide.
• Si $c = d$, les araignées 3 et 4 échangent leurs places, et le trou E dont est partie l'araignée 5 restera vide.

Avec six araignées, en revanche, il pourrait y avoir échange des araignées 2 par 2.

445. L'onde verte

Le feu vert dure 27 secondes.



Sur le diagramme ci-contre, les distances (en mètres) parcourues à partir du premier carrefour sont en ordonnées, le temps (en secondes) en abscisses. Le trait oblique croissant en pointillés correspond à l'onde verte.
Les segments horizontaux épais représentent la durée du feu vert à chaque carrefour.
L'automobiliste ne peut pas, par aileurs, parcourir les 1500 mètres en moins de 108 secondes (vitesse limitée à 50 km/h), ce qui impose au feu vert de durer au maximum 27 secondes (135 – 108).
Dans l'autre sens, la vitesse minimum pour ne pas être arrêté est d'environ 49,09 km/h.
La vitesse maximum pour ne pas être arrêté par les feux est d'environ 55,38 km/h.
Mais attention, la vitesse maximum pour ne pas être arrêté par la police est de 50 km/h.

• Le trajet à vitesse minimum sera obtenu en partant au temps 15 du quatrième carrefour et en passant à la limite (temps 81) au deuxième carrefour, soit 900 m en 66 secondes.
• Le trajet à vitesse maximum sera obtenu en passant au temps 81 du deuxième carrefour et dès le passage au vert (temps 120) au premier carrefour, soit 600 m en 39 secondes.

⊠ *Merci aux lecteurs pour leur remarque : dans le sens Nord-Sud, la vitesse maximale que nous avions initialement prévue était légèrement supérieure, mais ne prenait pas en compte le fait que passer le troisième carrefour au temps 57 et arriver au premier au temps 120 obligerait à passer le second au feu rouge, ce qui ne se fait pas !*

446. La feuille d'émargement

• Le dernier nombre est 8515.

à chaque étape, la somme des nombres non rayés ne varie pas, puisqu'on remplace deux nombres par leur somme. Cette somme était au départ la somme des 130 premiers entiers, elle le reste. Il s'agit de 130 × 131 / 2, c'est-à-dire le produit 131 × 65, soit 8515.

• La somme des nombres est 68266.

Au total, 259 nombres auront été écrits : les 130 premiers et les 129 rajoutés par le préposé (à chaque étape, il reste un nombre non rayé de moins que précédemment, il faut donc 129 étapes pour qu'il ne reste plus qu'un nombre non rayé).

Pour calculer la somme de tous ces nombres, commençons par la fin : le dernier nombre est 8515, mais c'est la somme des deux qui le précèdent, eux-mêmes sommes des quatre qui les précèdent, eux-mêmes sommes des huit qui les précèdent, et ainsi de suite...

Le total est donc égal à :

8515 (le dernier) + 8515 (les 2 précédents) + 8515 (les 4 d'avant) + 8515 (les 8 qui les précèdent) + 8515 (les 16 d'avant) + 8515 (32 nombres) + 8515 (64 nombres) + 8515 (128 nombres) +...

À ce stade, nous avons totalisé 8 × 8515 pour les 255 derniers nombres. Il faut leur ajouter les quatre premiers : 103, 21, 8 et 14. Total : 8 × 8515 + 146 = 68266.

447. Le jeu des 30 pions

Alpha peut gagner en enlevant 10 pions.

Il reste donc 20 pions et c'est à Bêta de jouer.

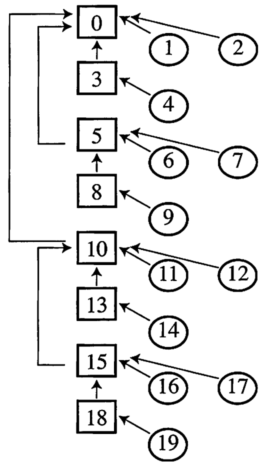
Le tableau ci-contre indique la stratégie d'Alpha selon le nombre de pions que lui laisse son adversaire à chaque tour de jeu.

• Si le nombre de pions laissé par Bêta est dans une case ovale, Alpha fera en sorte de laisser à Bêta le nombre indiqué dans la première case rectangulaire disponible (ce sera toujours possible en enlevant un ou deux pions).

• Si Bêta laisse un nombre (autre que 10) situé dans une case rectangulaire, Alpha fera en sorte de laisser à Bêta le plus grand multiple de 5 disponible (vous constaterez que c'est toujours possible).

• Enfin, si Bêta laisse 10 pions, ce qui ne sera possible qu'à son premier coup, Alpha pourra les ôter et remporter la partie.

Sans entrer dans les détails, indiquons que cet arbre a été construit à partir de la fin en divisant les situations – symbolisées par le couple (r, j) du nombre de pions restants et du nombre de pions qui vient d'être joué – entre situations gagnantes et perdantes pour le joueur qui y est confronté.



Dans ce diagramme, les flèches représentent le coup que doit jouer Alpha selon le nombre de pions laissé par Bêta. Ainsi, la flèche qui va de 17 à 15 signifie que si Bêta lui laisse 17 pions, Alpha doit en ôter 2 pour en laisser 15.

☒ *La palette des méthodes est large et certaines sont originales. A. CAROUGE (17740 Sainte Marie de Ré) résout le problème à partir de la proposition, qu'il démontre : le joueur qui reçoit un plateau d'un multiple de 5 jetons et qui ne peut jouer que 1, 2, 3 ou 4, a perdu. C. ROMON, lui, dresse la liste de l'ensemble des situations perdantes reçues, sous la forme (p, q) où p est le nombre de pions qu'on laisse au joueur et q le nombre de pions enlevé par l'autre joueur. La situation reçue au départ par Alpha étant (30, 14), il conclut qu'elle est gagnante et donne le seul coup gagnant possible.*

448. Les quatre objets et la balance

On peut classer en cinq pesées les quatre objets du plus léger au plus lourd. Si deux objets peuvent être de même masse, il y a 75 configurations. 5 pesées seront encore suffisantes.

• Avec des objets de masses différentes, on commence par effectuer les trois pesées suivantes :
Pesée 1 : A > B
Pesée 2 : C > D
Pesée 3 : A > C (on compare les deux objets les plus lourds des deux premières pesées, et on nomme à ce moment les objets : A le plus lourd des deux, C l'autre, B celui qui a été comparé à A, D le dernier).
Pesée 4 : B et D. – Si B < D, l'ordre est BDCA
– Si B > D, on complète par la pesée BC pour conclure entre DCBA et DBCA

Le nombre 5 est optimum, car avec 4 pesées, on ne pourrait discriminer que 2^4 situations, soit 16 alors qu'il y en a 24.

• Si des masses peuvent être égales, on dénombre, outre les 24 situations précédentes, 36 situations où exactement deux objets ont même masse et les deux autres sont différentes, 6 situations où deux objets ont même masse et les deux autres également, 8 situations où trois objets ont même masse, 1 situation où les quatre objets ont même masse. Total : 75 situations.

• Curieusement, la même suite de pesées que dans le premier cas va les départager.
En effet, si, parmi les quatre premières pesées, il y a une égalité, on se ramène à départager 3 objets (on élimine l'un des objets de même poids). Les trois comparaisons possibles de ces trois objets permettent de conclure. Et s'il n'y a pas d'égalité lors des quatre premières pesées, on conclut à BDCA si B < D ou bien la cinquième pesée sera nécessaire pour conclure entre DCBA, DBCA ou D, B = C, A.

449. La ronde des pions

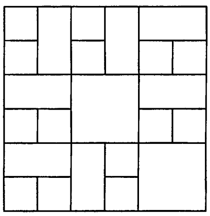
Tous les pions auront la même somme : 112 €
La plus riche des alvéoles sera la numéro 32 avec 112 $.

• Un pion y se retrouve à la position n dans la même case qu'un pion x si la différence $(nx - ny)$ est un multiple de 32 : (*) $n\,(y - x) = 32\,k$
– Si n est impair, ce n'est possible que si $y = x$.
– Si n est pair, tout dépend de la décomposition de n en facteurs premiers :
On remarque tout d'abord que $32 = 2^5$; on pose $n = 2^a \times m$, où m est impair.
La relation (*) sera vérifiée chaque fois que $|y - x|$ sera de la forme $2^{5-a} \times r$, où r est entier, ce qui donne 2^a valeurs possibles pour r, puisqu'on doit avoir : $1 \leq y \leq 32$.
Il y a donc 2^a pions y (en incluant x), qui seront dans la même case que x lors de la position $n = 2^a \times m$.
Or m peut prendre toute valeur impaire, soit une valeur sur deux si $a \neq 5$, comprise entre 1 et 2^{5-a}, c'est-à-dire 2^{4-a} valeurs .
Donc, le nombre d'Euros gagné par le pion x sur ces cases $n = 2^a \times m$ est $2^a \times 2^{4-a}$, soit 16.
En totalisant sur toutes les valeurs de a (de 0 à 4), cela donne : 80 euros, auxquels il faut ajouter les 32 € de la position 32 ($n = 5$), où les 32 pions sont dans l'alvéole 32. Le résultat ne dépendant pas de la valeur de x, on peut affirmer que tous les pions seront nantis de 112 €.

• D'après l'étude précédente, les 16 alvéoles impaires accueilleront 1 pion lors des positions impaires et aucun lors des positions paires. Elles seront créditées de 16 \$.
Les 8 alvéoles de la forme 2 m (avec m impair) accueilleront 1 pion lors des 16 positions impaires, 2 pions lors des 8 positions 2 k (avec k impair), et aucun lors des autres positions.
Elles seront créditées de 32 \$.
De même, les 4 alvéoles de la forme 4 m auront 48 \$, les 2 alvéoles de la forme 8 m auront 64 \$, l'alvéole 16 aura 80 \$, et l'alvéole 32 aura 112 \$.

450. À la manière de Paul Klee

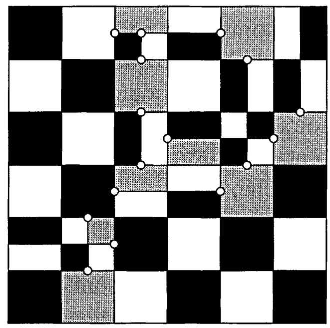
Un tel coloriage n'est pas toujours possible.



Ci-contre à gauche, un morceau de grille impossible à colorier.

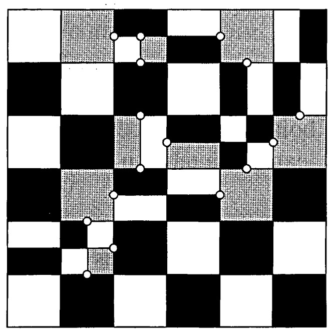
Le nombre minimum des cases grises du tableau est 9.

Le dessin ci-contre à droite en montre un coloriage avec 9 cases grises. Les 16 petits ronds sont forcément sommets d'une case grise. On montre qu'il doit y avoir au moins une case grise pour deux de ces points. Il pourrait donc, théoriquement, n'y avoir que 8 cases grises, mais pour des raisons de parité, une case supplémentaire est nécessaire.



Ce problème est adapté de la finale du 19e championnat de France des jeux mathématiques. Si vous voulez participer au 20e (2005 – 2006), rendez-vous sur le site www.poleditions.com, rubrique championnat.

✉ *Nous avions initialement présenté une solution avec 10 cases grises minimum mais il n'a pas échappé à la perspicacité de nos lecteurs qu'il existe une solution à 9 cases grises. Merci à Daniel GRILLOT (30400 Villeneuve les Avignon), Guy PAILLOTIN (91600 Savigny-sur-Orge), Roger PROTEAU (94210 La Varenne Saint Hilaire) et à C. ROMON de nous l'avoir signalé. Ce dernier justifie même son choix en découpant au préalable le carré en 7 zones indépendantes possédant chacune une case grise, ce qui fait déjà 7 cases grises minimum. Par ailleurs, pour pouvoir colorier le reste en deux couleurs, il faut que le tour des cases grises isolées ait un nombre pair de cases, d'où la nécessité d'ajouter deux cases grises supplémentaires.*
Le dessin de D. GRILLOT est un peu différent :



451. Le jeu du partage

Les amis sont au nombre de 16.

Considérons la fraction de la cagnotte possédée par chaque joueur à un instant donné. Elle est de 0 ou de 1/2 après le premier coup. Au coup suivant, elle vaut 0, 1/2 ou 1/4. A chaque coup, la fraction possédée par un joueur est la demi-somme de deux des fractions.possédées au coup précédent. Dans chacune de ces opérations, le dénominateur reste une puissance de 2. Si les N joueurs se retrouvent à l'arrivée avec la fraction de cagnotte 1/N, c'est que N était une puissance de 2.
La seule puissance de 2 comprise entre 10 et 30 est 16.

452. Les 1000 jetons

Le fabriquant numérotera ses boîtes de façon que la différence des deux chiffres inscrits sur la boîte soit paire.

En effet, il y a 10 numéros à deux chiffres égaux, 16 dont la différence des chiffres est 2, 12 dont la différence des chiffres est 4, 8 dont la différence des chiffres est 6, 4 dont la différence des chiffres est 8. Soit en tout 50 numéros de boîtes répondant à cette spécification.

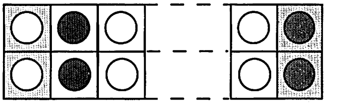
Pour n'importe lequel des 1000 numéros de jetons, la différence de deux des chiffres est un nombre pair, car l'une des différences est la somme des deux autres : il ne peut donc pas y avoir trois différences impaires.

Ainsi, chaque jeton pourra aller dans au moins une des 50 boîtes.

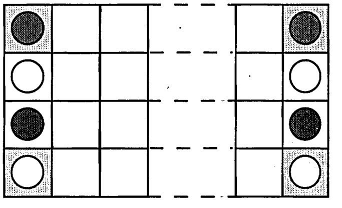
453. Loto-ku

Quand les dimensions de la grille sont paires, le vainqueur possède toujours quatre jetons différents aux quatre coins de sa grille

• On commence par le démontrer sur une grille $2 \times 2n$.



La règle impose que les tranches verticales de deux jetons se répètent de deux en deux (les deux jetons blancs, puis les deux jetons noirs, puis les blancs, les noirs...). Les quatre cases grises contiennent donc les quatre différents jetons, présents dans le premier carré à gauche.



• On raisonne alors sur les tranches horizontales de deux lignes. En vertu de ce qui précède, les quatre pions aux extrémités de deux lignes consécutives sont différents.

Ainsi, si aux extrémités de la ligne 2 on trouve deux des pions, on trouve les deux autres à la fois aux extrémités de la ligne 3 et à celles de la ligne 1, tandis que les pions extrêmes de la ligne 4 sont aussi ceux de la ligne 2, qui sont donc différents de ceux de la première ligne.

On recommence en rajoutant deux nouvelles lignes, et ainsi de suite...

454. Les cent cartes

Après réarrangement des colonnes, les lignes restent toujours ordonnées.

Choisissons pour cela deux lignes et deux colonnes quelconques après le tri des lignes.

L'extrait du tableau est alors :

$a \quad A \qquad$ où $a < A$

$b \quad B \qquad$ où $b < B$

Réordonnons alors les colonnes. Quatre cas sont possibles.

• $a < b$ et $A < B$. Rien ne bouge et les lignes sont bien ordonnées.

• $a > b$ et $A > B$. Les deux lignes s'échangent et restent ordonnées.

• $a < b$ et $A > B$. L'extrait de tableau devient $\begin{matrix} a & B \\ b & A \end{matrix}$

Or, $a < b < B$ et $b < B < A$. Les lignes sont encore ordonnées.

• $a > b$ et $A < B$. L'extrait de tableau devient $\begin{matrix} b & A \\ a & B \end{matrix}$

Or, $b < a < A$ et $a < A < B$. Les lignes restent encore ordonnées.

Or, le tri complet des colonnes revient simplement à itérer suffisamment de fois la manipulation précédente. Le tri croissant des lignes reste donc toujours vrai.

455. La recette du sept

Pour justifier la recette du sept, il suffit de constater que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- $10\ A + u$ est un multiple de 7
- $10\ A + u - 21u$ est un multiple de 7
- $10\ (A - 2u)$ est un multiple de 7
- $A - 2u$ est un multiple de 7.

De la même façon, voici une suite d'équivalences avec 13 :

- $10\ A + u$ est un multiple de 13
- $10\ A + u + 39\ u$ est un multiple de 13
- $10\ (A + 4u)$ est un multiple de 13
- $A + 4u$ est un multiple de 13.

D'où la « recette du treize » :

Prenez un nombre entier. Amputez-le de son chiffre des unités. Ajoutez le quadruple du chiffre des unités enlevé. Recommencez avec le nouveau nombre, et ainsi de suite…

Si, quand vous arrivez à un nombre de 2 chiffres, c'est un multiple de 13, c'est que le nombre initial l'était aussi.

⌧ *Chacun y est allé de sa petite recette, trouvant parfois la nôtre trop lente.*

- *Pour la recette du 7, Pierre ANDRE (57070 Metz) propose de multiplier par 2 le nombre des centaines et de l'ajouter au nombre de deux chiffres restant.*
- *Pour la recette du 13, on peut, nous dit-il, au choix multiplier par 9 le nombre des centaines et l'ajouter au nombre de deux chiffres restant ou le multiplier par 4 et faire la différence avec le nombre de deux chiffres restant.*

Pierre GAILLARD (38240 Meylan) juge sa recette plus rapide : il ajoute au nombre C de centaines le triple du nombre B de deux chiffres restant, partant du principe que si $A = 100 \times C + B$, alors $A = 100 \times C + 300 \times B - 299 \times B = 100 \times (C + 3 \times B) - 23 \times 13 \times B$ a même reste que $100 \times (C + 3 \times B)$ dans la division par 13. Ainsi, si A est multiple de 13, $C + 3 \times B$ aussi et réciproquement.

Jean-François PABION (69140 Rillieux la Pape) et C. ROMON, inquiets quant au signe du nombre finalement obtenu suggèrent de considérer la valeur absolue de la différence dans . la recette du 7. Si on se restreint aux seules valeurs positives de cette différence, disent-ils, on risque de ne pas pouvoir atteindre un nombre à deux chiffres, dont la divisibilité par 7 est plus lisible. J-F. PABION propose également une généralisation à d'autres critères de divisibilité. Voici son argumentation :

- *Si $A = 10 \times D + U$, calculons $A^* = |D - k \times U|$, où k est un entier positif.*
- *Comme $10 \times A^* = |A - (10 \times k + 1) \times U|$, si d est un diviseur de $10 \times k + 1$, alors :*
- *Il revient au même de dire que d divise A et qu'il divise A^*.*
- *D'où la perspective de critères de divisibilité pour de nouveaux nombres, que nous résumerons dans le tableau suivant :*

k	$10 \times k + 1$	*Pour savoir si $A = 10 \times D + U$ est divisible par :*	*Il faut calculer :*
1	*11*	*11*	$D - U$
2	$21 = 3 \times 7$	*3, 7 ou 21*	$D - 2 \times U$
…	…..	…..	…..
9	$91 = 7 \times 13$	*7, 13 ou 91*	$D - 9 \times U$

456. En noir et blanc

Dans tous les cas, on retrouve la position de départ, à une exception près : si tous les pions sont blancs au départ, auquel cas ils sont noirs à l'arrivée.

On peut (mais c'est fastidieux) le montrer en étudiant les 32 situations possibles de départ.

Pour les spécialistes : on peut utiliser un codage binaire de la situation de départ S = $a_5a_4a_3a_2a_1$, où a_i désigne le pion placé sur la case i, un pion blanc étant codé par 0 et un pion noir par 1.

Ainsi, la situation de départ du dessin est codée par S = 01011, qui, en système binaire, désigne le nombre 11.

On montre alors, en travaillant « modulo 31 », c'est-à-dire en ne gardant que le reste de la division par 31, que le coup numéro 1 ajoute 1, le coup numéro 2 ajoute 2, le coup numéro 3 ajoute 4, le coup numéro 4 ajoute 8, et enfin que le coup numéro 5 ajoute 16. On a ainsi au total ajouté 31, ce qui, modulo 31, nous ramène à la position de départ.

Application à l'exemple :

01011 (= 11) devient

01**100** (= 12 soit 11 + 1) qui devient

011**1**0 (= 14 soit 12 + 2) qui devient

10010 (= 18 soit 14 + 4) qui devient

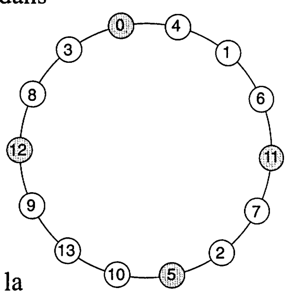
1**1**010 (= 26 soit 18 + 8) qui devient

01011 (= 11, soit 26 + 16 = 42 modulo 31).

457. La roue de la fortune

• Voici la seule façon de compléter la figure pour obtenir une roue de la fortune.

• Il n'est pas possible de placer les nombres de 0 à 9 autour d'un cercle dans les mêmes conditions.



En effet, sur une telle roue, le 0, comme le 8, ne peuvent avoir comme voisins que les nombres 3, 4 et 5, ce qui impose une disposition $a - 0 - b - 8 - c$, où a, b, c sont les nombres 3, 4 et 5.

Mais le 9 et le 1 ne peuvent avoir comme voisins que les nombres 4, 5 et 6, donc chacun possède au moins un voisin parmi les deux nombres 4 et 5. D'où le schéma :

$9 - a - 0 - 3 - 8 - c - 1$, où a et c sont les nombres 4 et 5.

Le deuxième voisin de 1 et de 9 ne peut être que 6. C'est là que réside la contradiction, car la présence de 6 entre 1 et 9 fermerait la ronde sans qu'on y ait placé 2 et 7.

⌧ *Bonne solution de René BROCAS (93380 Pierrefitte).*

458. Les jetons

La somme S_8 des nombres après l'étape 8 sera $\frac{1 + 3^8}{2}$, soit 3281.

Plus généralement, en dehors des extrémités, un nombre inscrit sur un jeton à l'étape n se retrouvera à l'étape $n + 1$ trois fois dans la somme des nombres : une fois sur le même jeton, une fois en ayant contribué à la formation du jeton situé à sa gauche et une fois en ayant contribué à la formation du jeton situé à sa droite.

Le « 1 » et le « 0 » situés aux extrémités ne contribueront à la somme que deux fois.

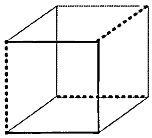
On a donc la relation : $S_{n+1} = 3\ S_n - 1$, qui s'écrit : $S_{n+1} - \frac{1}{2} = 3\,(S_n - \frac{1}{2})$

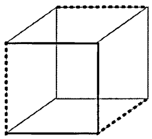
Donc $S_n - \frac{1}{2}$ est une suite géométrique de raison 3, et comme $S_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

on en déduit la forme générale $S_n = \frac{1 + 3^n}{2}$.

459. Un jeu d'enfant !

Le deuxième joueur peut toujours empêcher le premier de gagner.





Il est possible, en effet, de bloquer les 6 faces en coloriant 3 arêtes.
8 configurations « totales » permettent de le faire.
Chaque arête intervient dans 2 de ces configurations. Les trois traits de crayon du premier joueur bloquent donc au plus 6 configurations « totales ».
Il en reste toujours 2 de disponibles pour le deuxième joueur.
Ci-contre, un début de partie.
Le premier joueur a joué (en traits pleins). Le deuxième lui oppose (en pointillés) l'une des 2 configurations totales encore à sa disposition (diagramme du haut et diagramme du bas). Quand on vous disait que c'était un jeu d'enfant !

460. Kitoudouble

• Avec 2 cartes, l'objectif maximum est 40 jetons.
Le joueur part avec le capital C et mise m jetons ; deux cas peuvent se produire :
– il tire la carte « quitte », perd ses m jetons, et peut miser tout ce qui lui reste sur le dernier coup, pour terminer avec $(2C - 2m)$ jetons.
– il tire la carte « double », gagne m jetons, et ne mise rien sur le deuxième coup où il est sûr de perdre, pour terminer avec $(C + m)$ jetons.
Le joueur a intérêt à ce que m soit grand dans le deuxième cas, petit dans le premier. L'objectif maximal qu'il est sûr d'atteindre est obtenu quand il y a égalité des capitaux finaux, autrement dit quand $2C - 2m = C + m$, soit quand $m = C/3$. L'objectif atteint est alors $4C/3$.
• Avec 3 cartes, l'objectif maximum est 60 jetons.
Le joueur part avec le capital C, et mise m jetons ;
– s'il tire la carte « quitte », il perd ses m jetons, mais peut miser chaque fois son « tapis » sur les deux derniers coups, pour terminer avec $(4C - 4m)$ jetons.
– s'il tire la carte « double », il gagne m jetons et se retrouve dans la position à 2 cartes avec un capital de $(C + m)$ jetons. D'après le raisonnement précédent, son meilleur objectif est 4/3 du capital $(C + m)$. Pour optimiser la somme qu'il est sûr d'atteindre, il reste à égaler les capitaux finaux, ce qui est obtenu pour $m = C/2$. L'objectif atteint est alors 2C.
• Avec 4 cartes, l'objectif maximum est 96 jetons.
Le joueur part avec le capital C et mise m jetons ;
– s'il tire « quitte », il pourra miser trois fois son tapis pour terminer avec $(8C - 8m)$ jetons.
– s'il tire « double », il se retrouve dans la position à 3 cartes avec un capital de $(C + m)$ jetons. D'après le raisonnement précédent, son meilleur objectif est alors le double de son capital, soit $(2C + 2m)$. Il reste à égaler les capitaux finaux, ce qui est obtenu pour $m = 3C/5$. L'objectif atteint est alors $16C/5$.

✉ *Didier MAILLARD (Paris) nous offre avec brion la solution générale sur un plateau. Avec n cartes, nous dit-il, les mises étant successivement les* x_i *pour i variant de 1 à n, exprimées en fraction du capital initial C avant que la carte n°i soit retournée si la carte « Quitte » (que nous nommerons Q) n'a pas été retournée auparavant. Dans ce cas,*

- *Au début de l'étape i,* $C = 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}$ *devient* $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} - x_i$ *si Q a été retournée,* $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_i$ *si Q n'a pas été retournée.*
- *Au début de l'étape i + 1, C devient* $2 \times (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} - x_i)$ *si Q a été retournée,* $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1} + x_i - x_{i+1}$, *si Q n'a pas été retournée.*

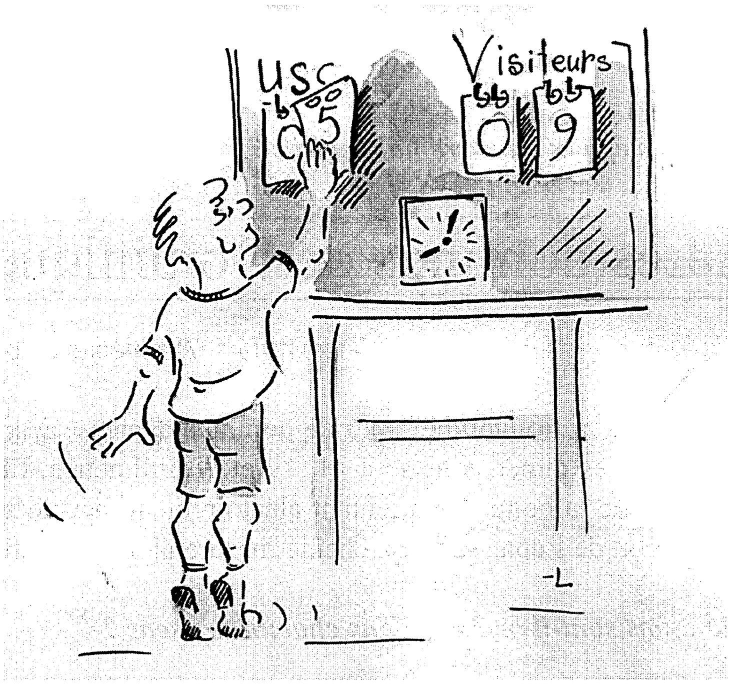
En écrivant l'égalité des capitaux finaux, il vient : $x_{i+1} = 4 \times (x_i - x_{i-1})$, *ce qui donne finalement :*

$$\begin{cases} x_i = 2^{i-1} \times \left(\dfrac{n-i}{n+i} \right) \\ \\ x_i = \dfrac{n-1}{n+1} \end{cases}$$

et correspond au capital maximum garanti de $W = 2^{n-1} \times (1 - x_1)$. *Cette formule permet non seulement de retrouver la solution proposée pour n = 2, 3 ou 4, mais d'étendre le résultat à un nombre quelconque de cartes. Jolie performance ! Son auteur compare en plus ce résultat à celui que donnerait la maximisation de l'espérance du capital, légèrement supérieur. Le rapport entre les deux atteindrait un maximum de 1,172 pour n = 4 et diminuerait ensuite. Le coût de la recherche d'une garantie est donc modéré…*

Défis numériques

Chapitre 5



461. Bonheur à trois

Problème n°302 du 03/12/02

La même année, M. et Mme Ducarré se sont rencontrés, se sont mariés, et ont adopté Daisy, une adorable tortue de mer. Ils vivent depuis un bonheur sans faille dans une petite préfecture de province. « J'ai fait une curieuse remarque sur nos âges », dit un jour M. Ducarré. « Si on ajoute les carrés des deux chiffres qui composent mon âge et le numéro de notre département, on retrouve mon âge. Mais ce qui est étonnant, c'est que c'est encore vrai pour toi, alors que tu es nettement plus jeune que moi : en ajoutant les carrés des deux chiffres qui composent ton âge et le numéro de notre département, on retrouve ton âge. »
– C'est absolument extraordinaire ! D'autant que c'est la même chose pour Daisy, qui est pourtant la plus vieille des trois. Si on ajoute les carrés des deux chiffres qui composent son âge et le numéro de notre département, on retrouve son âge ! Tu crois que si on avait un enfant, ce serait la même chose ?
– Non. Nos trois âges sont les seuls à avoir cette particularité».

Dans quelle ville les époux Ducarré habitent-ils ?

462. Les dominos de Dominique

Problème n°307 du 07/01/03

La jeune Dominique a trouvé une boîte de dominos anciens, ayant la forme de petits pavés dont les dimensions sont 41, 19 et 7 millimètres. Elle met bout à bout les 28 dominos de la boîte, les orientant aléatoirement dans le sens de la longueur, de la largeur ou de l'épaisseur. Sa chaîne mesure alors 90 centimètres.

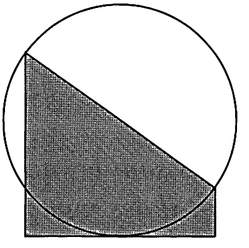
Combien de dominos sont-il orientés dans chacun des sens ?

Le lendemain, Dominique récidive. Elle met bout à bout des dominos, les orientant aléatoirement dans le sens de la longueur, de la largeur ou de l'épaisseur. Bien qu'elle n'ait pas placé tous les dominos, sa chaîne mesure encore 90 centimètres.

Combien de dominos sont-ils laissés pour compte ?

463. Du travail d'orfèvre

Problème n°312 du 11/02/03



Eloi, orfèvre de son état, a réalisé pour les Fêtes des bijoux de prix, chaque pièce, véritable œuvre d'art, étant unique. Ce sont des pendentifs faits de deux métaux précieux : un disque en argent est recouvert d'un trapèze rectangle en or dont le côté oblique, qui mesure 50 mm, constitue un diamètre du disque d'argent, la « hauteur » du trapèze étant « tangente » au disque.

Dans chaque bijou, toutes les dimensions sont des nombres entiers de millimètres (et l'aire un nombre entier de mm^2).

Combien l'orfèvre a-t-il réalisé, au maximum, de bijoux de dimensions différentes ?

464. Le nombre mystère

Problème n°317 du 18/03/03

Je suis un nombre entier de 5 chiffres.

Qu'on me multiplie par 3, par 4 ou par 9, on obtient un nombre formé des mêmes chiffres que moi et d'un zéro.
Mon dernier est un 3.

Qui suis-je ?

465. Octification

Problème n°322 du 22/04/03

Pour « octifier » un nombre entier dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9, on prend le complément à 8 de chacun de ses chiffres, et on en fait le produit. Ainsi, l'octifié de 36 est 10 : en effet, $(8 - 3) \times (8 - 6) = 10$.

Quels sont les nombres de deux chiffres qui sont leur propre octifié ?
Y a-t-il des nombres de trois chiffres qui vérifient la même propriété ?

466. La nappe à carreaux

Problème n°327 du 26/05/03

Une assiette plate (très plate) et circulaire (parfaitement circulaire) de 26 cm de diamètre est posée sur une nappe à carreaux sur laquelle est imprimé un fin quadrillage de 2 mm de côté.

Si on dispose au mieux l'assiette, quel nombre maximum de nœuds du quadrillage peut-on faire coïncider avec le bord de l'assiette ?

467. Quoi de « neuf » ?

Problème n°332 du 01/07/03

On part de zéro et on effectue une suite d'opérations parmi les deux seules autorisées :
– ajouter 9
– multiplier par 9.

Quel est le nombre minimum d'opérations nécessaire pour atteindre 999 ?
Parmi les multiples de 9 inférieurs à 1000, quel est celui qui nécessite le plus d'opérations ?

468. L'assemblée des nombres

Problème n°337 du 05/08/03

Au pays des nombres, on s'apprête à voter. Seuls sont éligibles les nombres s'écrivant avec 9 chiffres différents.

Les candidats « de droite » ont la particularité suivante :
- le nombre formé par leurs 9 chiffres de droite est divisible par 9
- le nombre formé par leurs 8 chiffres de droite est divisible par 8
  et ainsi de suite jusqu'à
- le nombre formé par leurs 2 chiffres de droite est divisible par 2

Les candidats « de gauche » ont, quant à eux, la particularité symétrique :
- le nombre formé par leurs 9 chiffres de gauche est divisible par 9
- le nombre formé par leurs 8 chiffres de gauche est divisible par 8
  et ainsi de suite jusqu'à
- le nombre formé par leurs 2 chiffres de gauche est divisible par 2

Quel est le doyen (le plus grand) et le benjamin (le plus petit) des nombres de droite ?
Quels sont les nombres de gauche ne contenant pas 0 ?
Y a-t-il des nombres à la fois de gauche et de droite ?

469. Un nombre de dix chiffres

Problème n°342 du 09/09/03

Prenez un entier de 5 chiffres. Elevez-le au carré. Retranchez-le nombre initial. ôtez encore 1. Votre résultat comporte maintenant exactement dix chiffres.

Peuvent-ils être tous différents ?

470. Qui s'étend sur la tente ?

Problème n°347 du 14/10/03

La fraction suivante, dans laquelle chaque chiffre a été remplacé par une lettre, ne se simplifie pas :

$$\frac{\text{ETEND}}{\text{TENTE}}$$

Si on effectue la division, les décimales du résultat défilent indéfiniment, mais périodiquement (ce sont les mêmes tous les sept chiffres). On trouve, 0,DDNABDB DDNABDB...

Saurez-vous reconstituer cette fraction ?

471. Les séries rivales

Problème n°352 du 25/11/03

Une grande rivalité oppose les deux nombres A et B.

A est la somme de la série « harmonique » (celle des inverses des nombres entiers) entre 1002 et 2003 :

$$A = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \frac{1}{1004} + \ldots + \frac{1}{2003}$$

B est la somme de la série « harmonique alternée » (celle des inverses des nombres entiers alternativement précédés de + et de –) entre 1 et 2003 :

$$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2002} + \frac{1}{2003}$$

Lequel de ces deux nombres est le plus grand ?

472. Digitalement vôtre

Problème n°357 du 30/12/03

Un nombre entier est « digitalement pair » si la somme des chiffres de son écriture décimale est paire. Ainsi, 13, bien qu'impair, est digitalement pair. C'est même le cas de ses 3 premiers multiples successifs puisque 26 = 2 × 13 et 39 = 3 × 13 sont aussi digitalement pairs.

Mais 52 = 4 × 13 ne l'est pas. Nous dirons que 13 est « digitalement pair d'ordre 3 ».

Trouver un nombre digitalement pair d'ordre 2002.

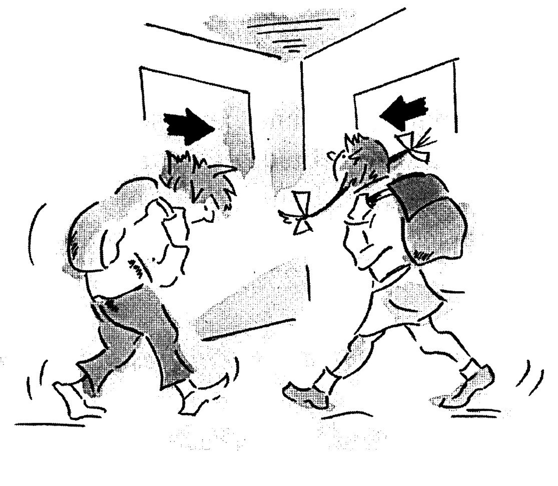
473. Retournement de situation

Problème n°358 du 03/02/04

Un entier N est le «retourné» d'un nombre P si son écriture décimale est formée des même chiffres, mais dans l'ordre inverse.

Sauriez-vous trouver un nombre de quatre chiffres dont le «retourné» est quatre fois plus grand que lui ?

Et un nombre de quatre chiffres dont le «retourné» est neuf fois plus grand que lui ?



474. Plus fort que la calculatrice

Problème n°366 du 02/03/04

Si vous entrez sur une calculatrice l'expression $10657^2 - 37 \cdot 1752^2$
elle vous restituera probablement un résultat fiable, la précision de la plupart étant en général comprise entre 10 et 12 chiffres significatifs.

Quel est ce résultat ?

En revanche, si vous entrez l'expression $10657^4 - 1369 \cdot 1752^4 - 74 \cdot 1752^2$,
vous devez vous attendre à des résultats fantaisistes qui varieront d'une calculatrice à l'autre, puisque vous dépassez largement la capacité de nombre d'entre elles.

Mais l'intelligence humaine est bien supérieure à la force brutale de la mémoire d'une calculatrice.

Soyez plus fort que la calculatrice et donnez le résultat de cette opération !

475. Le carré palindrome

Problème n°372 du 13/04/04

Un palindrome est une expression, mot ou nombre, qui se lit de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche. Ainsi, ARA, ELLE, ROTOR, ...sont des palindromes.
De même, les nombres 44, 575, 2332, etc.
121 (carré de 11) ou 12321 (carré de 111) sont à la fois palindromes et carrés.

Trouvez un nombre de six chiffres qui soit un palindrome et un carré parfait !

476. Les nombres aristocrates

Problème n°377 du 18/05/04

Il est très chic pour un nombre entier de ne s'écrire qu'avec des chiffres différents. Mais le *nec plus ultra* est d'avoir une écriture décimale qui comporte une fois et une seule chacun des chiffres de 1 à 9 (le zéro est jugé trop vulgaire). Ces nombres-là sont dits aristocrates.

Quel est le plus petit nombre aristocrate divisible par 11 ? Et le plus grand ?

477. Vide grenier

Problème n°382 du 22/06/04

Aujourd'hui, on déballe tout : chacun vide son grenier devant sa porte et vend qui ses poupées, qui ses collections, qui les meubles de sa grand-mère.

Zoé a mis en vente un étalage très disparate : d'anciennes cartes postales de collection, de vieux albums de bandes dessinées, des petites chaînes en or et, clou de la présentation, un vrai « Frigidaire » des années 50. Tout compris, cela fait 128 objets, qu'elle a tous vendus à l'unité, au même prix pour chaque objet du même lot (les cartes coûtent toutes le même prix, les livres sont tous vendus au même prix, etc.).

Les quatre prix sont des nombres entiers, tous différents, d'euros, mais, chose extraordinaire, chacun des quatre lots a rapporté la même somme ! Et il n'y a que ces quatre façons d'obtenir cette somme.

Combien Zoé a-t-elle vendu le réfrigérateur ?

478. Magique ?

Problème n°387 du 27/07/04

Ce carré est presque magique ! La somme des nombres inscrits dans les trois lignes et les trois colonnes est la même, c'est 12.

1	7	4
6	2	4
5	3	4

Faites maintenant le produit des nombres inscrits sur la première ligne : 28
Sur la deuxième ligne : 48
Sur la troisième ligne : 60
La somme des trois produits est 136.

Recommencez avec les colonnes. Les produits sont 30, 42 et 64.
La somme des trois produits est encore 136 !

Est-ce une coïncidence ?

479. Ôtez le chiffre du milieu !

Problème n°392 du 31/08/04

• Prenez un nombre de trois chiffres dont le chiffre du milieu est la somme des deux autres, par exemple 473. Enlevez-lui le chiffre du milieu, il reste 43.
Vous remarquerez alors que 43 est un diviseur de 473 (le quotient est 11).
• Il en est de même pour beaucoup de nombres se terminant par 0. Quelques exemples : 190 (quotient 19), 260 (quotient 13), 480 (quotient 12) ou 700 (quotient 10)...

Hormis ceux de ces deux catégories, quels sont les nombres entiers de trois chiffres tels qu'en leur enlevant le chiffre central, on trouve un divisur du nombre initial ?

480. Palindromes et porte-bonheur

Problème n°397 du 05/10/04

Un palindrome est un mot (ou un nombre) inchangé quand on le lit de gauche à droite ou de droite à gauche. Ainsi, ROTOR ou 3223 sont des palindromes.
On écrit tous les nombres palindromes de six chiffres, en acceptant même ceux qui commencent par zéro comme 018810. On effectue alors leur somme.

Cette somme est-elle un nombre porte-bonheur ?
(Tout multiple de 13 est appelé nombre porte-bonheur).

On convient cette fois que l'écriture d'un nombre ne peut commencer par 0. Il n'y a plus maintenant que 900 nombres palindromes à six chiffres. On effectue alors la somme de ces 900 nombres.

Cette somme est-elle un nombre porte-bonheur ?

481. Le bal de la marquise des Anges

Problème n°402 du 09/11/04

Au bal masqué de la Marquise des Anges, n'assistent que des anges ou des démons. Les anges, au nombre de 57, sont en majorité (on ne prend jamais assez de précautions), mais moins de deux fois plus nombreux que les démons.
Les anges, c'est bien connu, ne consomment habituellement que des boissons à l'orange (une consommation par ange), les démons que des boissons au citron (deux consommations par démon). Chaque consommation coûte un nombre entier d'Euros inférieur à 25.
Au dernier moment, la Marquise décide de faire l'inverse : chaque ange prendra une boisson au citron et chaque démon deux boissons à l'orange (il n'y a que les démons qui ne changent pas d'avis…). Cela coûtera au total 40 Euros de moins à la Marquise (il n'y a pas de petites économies, même pour les marquises).

Combien y avait-il de démons à la réception ?

482. Carrément carrés

Problème n°407 du 14/12/04

Un nombre entier comportant un nombre pair de chiffres peut se diviser en deux « tranches » demême longueur qu'on appellera « moitié gauche » et « moitié droite ». Il est dit « carrément carré » si c'est un carré et si en plus sa moitié droite et sa moitié gauche le sontaussi. 49 est par exemple un de ces nombres. On admet qu'une « moitié droite » peut commencer parun ou plusieurs « 0 », à condition de ne pas être entièrement nulle.

Trouvez tous les nombres carrément carrés de 2 chiffres, de 4 chiffres . Existe-t-il un moyen systématique de déterminer les nombres carrément carrés de 8 chiffres ? Et de 6 chiffres ?

Attention ! Si vous utilisez un programme informatique, vous êtes hors jeu !

483. Un nombre prodigieux

Problème n°412 du 18/01/05

Le nombre prodigieux s'exprime ainsi :
« Je suis un nombre entier de 7 chiffres, tous différents : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Le nombre formé par mes deux derniers chiffres (à droite) est divisible par 2, celui formé par mes trois derniers chiffres est divisible par 3, celui que forment mes quatre derniers chiffres est divisible par 4, mes cinq derniers chiffres forment un nombre divisible par 5, mes six derniers chiffres un nombre divisible par 6, et je suis moi-même divisible par 7. Qui suis-je ? »
« – Mais il y a plusieurs solutions !»
« – Exact, alors j'ajoute les renseignements suivants : le nombre formé par mes deux premiers chiffres (à gauche) n'est pas divisible par 2, celui formé par mes trois premiers chiffres n'est pas divisible par 3, celui que forment mes quatre premiers chiffres est divisible par 4, celui que forment mes cinq premiers chiffres... »
« – Cela suffit, je sais qui tu es ! »

Quel est le nombre prodigieux ?

484. Ananombres

Problème n°417 du 22/02/05

Prenez un nombre A de 3 chiffres (commençant éventuellement par 0).

Prenez un nombre B composé des 3 mêmes chiffres que A, mais pas forcément dans le même ordre.
Calculez leur somme A + B. Vous obtenez un *ananombre*.

765 est-il un ananombre ? Et 705 ? Et 775 ?

Parmi les nombres de 3 chiffres, lesquels sont des ananombres et lesquels ne le sont pas ?

485. Le match du 2 et du 3

Problème n°422 du 29/03/05

« – Je suis plus grand que toi d'une unité», dit le 3 au 2.
«– C'est vrai, mais mon carré est plus grand que toi d'une unité», répond le 2.
«– Mon carré à moi est plus grand que ton cube d'une unité», rétorque le 3.
À cet instant, le 2 se met à réfléchir longuement.

Peut-il inversement citer d'autres puissances de 2 qui dépassent d'une unité une puissance de 3 ?

486. Le baron

Problème n°427 du 03/05/05

« Misez un euro, tirez quatre cartes parmi les 14 de mon paquet, et si votre total est 99, je vous rends votre mise et je vous donne en plus 99 euros ! », annonce le bonimenteur.
Plusieurs badauds tentent leur chance, en vain.
« Il n'y a pas de secret, je vous montre les cartes », renchérit l'homme.
Et il retourne les valeurs 1, 9, 10, 11, 20, 21, 27, 28, 29, 37, 38, 46, 55, 63.
Il cache à nouveau les cartes, et fait tirer un « baron » (un complice), qui totalise effectivement 99 et remporte les 100 euros promis. Mis en confiance, les passants font cercle en attendant leur tour.

Quelles cartes le « baron » a-t-il tirées ?

Combien le bonimenteur devrait-il donner aux gagnants pour que le jeu soit équitable ?

487. Mémoire (pas) vive

Problème n°432 du 07/06/05

Alice a beau faire, elle oublie le mot de passe de son ordinateur. Alors, cette fois, elle décide qu'il sera très simple. Ce sera un nombre de 5 chiffres. Les deux premiers chiffres représentent le jour du mois où elle est née. Les deux chiffres suivants aussi, d'ailleurs. Quant au cinquième chiffre, il représente son mois de naissance, et il se trouve que c'est aussi le premier chiffre augmenté de 1.

Par curiosité, elle calcule le carré de son code et s'aperçoit qu'il est exactement formé des neuf chiffres de 1 à 9, mais dans un autre ordre, bien sûr.

Quelle est la date anniversaire d'Alice ?

488. Briseur de code

Problème n°437 du 12/07/05

Certaines techniques modernes de décryptage nécessitent de factoriser un nombre donné sous forme du produit de deux facteurs premiers (de tels facteurs n'admettent pas d'autre diviseur qu'eux-mêmes et 1). Lorsque le nombre est suffisamment grand, même les ordinateurs les plus puissants ne permettent pas une telle factorisation, ce qui rend le décodage quasi impossible sans autre information.

Nous allons vous transformer en briseur de code. Le nombre est 33 398 630 137. Il n'est pas si grand ! Un logiciel de calcul formel, disponible sur ordinateur ou même sur calculatrice, vous permettrait de le factoriser sans problème majeur. Seulement, voilà, dans le jeu que nous vous proposons aujourd'hui, vous n'avez droit qu'à une calculatrice « 4 opérations », qui n'est évidemment pas équipée d'un tel outil. Le problème devient difficile. Alors, nous vous fournissons une indication : multipliez le nombre par 73, cela vous aidera.

Saurez-vous briser le code dont la clé repose sur la factorisation de 33 398 630 137 ?

489. Famille nombreuse

Problème n°442 du 16/08/05

Cette famille compte cinq enfants qui, bien qu'il n'y ait eu qu'une seule naissance multiple, sont tous nés un premier janvier.
Au premier janvier 2006, la somme des cinq âges sera égale à leur produit.

Quels seront alors les âges des cinq enfants ?

490. Des entiers intéressants

Problème n°447 du 20/09/05

Un entier de n chiffres est dit « intéressant » si ;

– il est écrit avec les chiffres de 1 à n,
– son premier chiffre (à gauche) divise le nombre tout entier,
– son deuxième chiffre (à partir de la gauche) divise le nombre formé par ses $n-1$ premiers chiffres,
– son troisième chiffre divise le nombre formé par ses $n-2$ premiers chiffres, etc...
– jusqu'à son dernier chiffre (à droite) qui divise son premier.
Par exemple, 321 est « intéressant ». En effet, 3 divise 321, 2 divise 32 et 1 divise 3.

Quels sont tous les nombres intéressants de plus d'un chiffre et de moins de neuf chiffres ?

491. Nombres fréquentables

Problème n°452 du 25/10/05

Les membres de la secte des adorateurs du carré ne fréquentent que les nombres qui sont des carrés parfaits ou qui, à la rigueur, sont sommes de deux carrés. Pour tester la fréquentabilité d'un nombre, ils ont leurs recettes.

Ainsi, ils éliminent systématiquement de leurs fréquentations les nombres qui, lorsqu'on les divise par 4, donnent pour reste 3. Ils acceptent au contraire sans discuter le produit de deux nombres fréquentables.

Sauriez-vous justifier ces principes ?

2005 est-il un nombre fréquentable ?

492. Deux chiffres inconnus

Problème n°457 du 29/11/05

On vous l'affirme : le nombre qui, en numération décimale, s'écrit $x6y4$ est un carré parfait.

Quelles sont les valeurs possibles des chiffres x et y ?

Mais ce qui est curieux, alors, c'est qu'il en est de même pour le nombre fabuleux : $xx\ldots x6yy\ldots y4$, où les chiffres x et y sont chacun répétés 100 fois !

De quel entier le nombre fabuleux est-il le carré ?

493. Déferlement de uns

Problème n°462 du 03/01/06

Le nombre 1111...1 s'écrit avec 27 chiffres « 1 » (nous n'avons pas eu la patience de l'écrire jusqu'au bout).

Sauriez-vous montrer qu'il est divisible par 27 ?

Le nombre 1111...1 s'écrit avec 81 chiffres « 1 »

Sauriez-vous montrer qu'il est divisible par 81 ?

Trouver d'autres nombres ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 et divisibles par la somme de leurs chiffres.

494. Renversement de situation

Problème n°467 du 08/02/06

Prenez un nombre de quatre chiffres *abcd*.

Multipliez-le par 3.
Retranchez 16.
Vous trouvez alors son « retourné » *dcba*.

Quel était le nombre initial ?

495. Les nombres tricarrés

Problème n°472 du 14/03/06

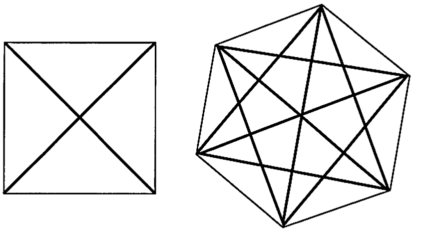
Prenez un nombre entier N (ne commençant pas par zéro) s'écrivant en système décimal à l'aide d'un nombre pair $2n$ de chiffres. Séparez-le en deux parties de n chiffres.
Si N, sa partie gauche et sa partie droite sont tous les trois des carrés parfaits, on dira que N est un nombre tricarré. Ainsi, 144 400 est un nombre tricarré puisque c'est le carré de 380 tandis que 144 est le carré de 12 et 400 le carré de 20.
On considèrera qu'un nombre dont la partie droite n'est formée que de zéros n'est pas tricarré

Quels sont les nombres tricarrés de 2 chiffres ? De quatre chiffres ? De six chiffres ?

Donnez un nombre tricarré de vingt chiffres.

496. Les nombres diagonaux

Problème n°477 du 18/04/06



On connaît les nombres « triangulaires », obtenus en additionnant les premiers entiers :
T1 = 1, T2 = 1 + 2 = **3**, T3 = 1 + 2 + 3 = **6**, T4 = 1 + 2 + 3 + 4 = **10**...
On connaît moins les nombres « diagonaux » : un nombre est qualifié de « diagonal » s'il existe un polygone convexe dont c'est le nombre de diagonales.
Sur le dessin ci-contre, on constate que **2** (nombre des diagonales d'un carré) est le plus petit nombre diagonal et que **9** (nombre des diagonales d'un hexagone) est lui aussi diagonal.

Quelle est la prochaine année dont le millésime sera un nombre diagonal ?

Un nombre peut-il être à la fois diagonal et triangulaire ?

497. Salaire hebdomadaire

Problème n°482 du 30/05/06

Alice travaille dur et ne prend que quelques jours de vacances par an. Son salaire hebdomadaire, exprimé en euro, est un nombre palindrome à trois chiffres.
Pour ceux qui l'ignoreraient, un palindrome est un mot qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche : LAVAL, 2772 ou SOS sont des palindromes.
Jusque là, rien de bien particulier. Mais ce qui l'est davantage, c'est qu'en multipliant son salaire hebdomadaire par 52, nombre de semaines de son année de travail, Alice trouve encore pour revenu annuel un nombre palindrome.

Combien donc Alice gagne-t-elle chaque semaine ?

498. Avoir la moyenne

Problème n°487 du 04/07/06

Prenez un nombre de trois chiffres différents et non nuls. On dit « qu'il a la moyenne » quand la moyenne des six nombres obtenus en permutant ses chiffres de toutes les façons possibles est justement le nombre de départ.

Quels sont tous les nombres de trois chiffres « qui ont la moyenne » ?

499. Les « nombres de personne »

Problème n°492 du 08/07/06

Un nombre entier strictement positif est appelé «nombre de Personne» si ni ce nombre, ni aucune de ses «anagrammes» (nombres obtenus en permutant ses chiffres) ne sont des multiples de 2, de 3, de 5 ni de 7.

Quel est le nombre maximum de chiffres différents de l'écriture décimale d'un « nombre de Personne » ?

500. Dyslexie multiplicative

Problème n°497 du 12/09/06

La petite Alice est dyslexique, mais elle a beaucoup de chance.

Ainsi, quand son professeur lui demande, ce jour-là, de multiplier deux nombres de deux chiffres, elle multiplie entre eux les nombres obtenus en inversant l'ordre des deux chiffres.
Et comme elle a beaucoup de chance, bien que les quatre chiffres soient différents, cela ne change rien au résultat !

Trouverez-vous toutes les multiplications possibles qui permettent de masquer la dyslexie d'Alice ?

Défis numériques SOLUTIONS

461. Bonheur à trois

Les époux Ducarré habitent Tulle, préfecture de la Corrèze (19).
Ils ont 32 et 53 ans, Daisy a 72 ans.

Si on appelle A et B les chiffres (dans l'ordre dizaines et unités) de l'âge d'un des personnages, et N le numéro du département, la relation $10\,A + B = A^2 + B^2 + N$ s'écrit aussi :
$A\,(10 - A) - B\,(B - 1) = N$.
A peut aller de 0 (peu probable) à 9.
$A\,(10 - A)$ prend les valeurs 0, 9, 16, 21, 24, 25, 24, 21, 16, 9.
De même, selon la valeur de B, $B\,(B - 1)$ prend les valeurs 0, 2, 6, 12, 20,... (au-delà, plus grand que 25).
Une seule différence est prise trois fois : 19.
$19 = 25 - 6$ (A= 5, B = 3) ;
$19 = 21 - 2$ (A = 3, B = 2) ;
$19 = 21 - 2$ (A = 7, B = 2).

⌧ *D'innombrables lecteurs ont proposé leur version des faits, signalant l'existence d'autres versions du problème. D'autres, dont Daniel BARTOUX (33000 Bordeaux), J.-Pierre CATTEAU (59160 Lomme), Jean DAZORD (69110 Ste-Foy les Lyon), Charles DE COENE (89130 Toucy), Claudette DUCEL (94210 La Varenne St-Hilaire), J.-M. GADAT (60140 Rosoy), Gérard NIN (Aix – Marseille), Pierre PELLOSO (75009 Paris), E. RENAUD (17000 La Rochelle), J. VERGE (75012 Paris), signalent quatre, ou même six âges possibles et ajoutant à l'énoncé un enfant ou un parent dont les âges ont les même propriétés que dans l'énoncé initial :*

- *Pour le département 04 : 24, 45, 64, 84 ans,*
- *Pour le 09 : 10, 11, 34, 74, 90, 91 ans,*
- *Pour le 16 : 20, 21, 80, 81 ans,*
- *Pour le 21 : 30, 31, 70, 71 ans,*
- *Pour le 24 : 40, 41, 60, 61 ans,*
- *Pour le 19 : 32, 53, 72 ans*

Mais seul le département 19 ne fournissait que trois âges possibles, selon la précision de l'énoncé.

462. Les dominos de Dominique

20 dominos sont orientés selon la longueur, 2 selon la largeur, 6 selon l'épaisseur.

Si les 28 dominos étaient orientés selon la longueur, on obtiendrait une chaîne de 1148 mm.
Il faut donc enlever un certain nombre x de fois 22 (i.e. 41 – 19) et un certain nombre y de fois 34 (i.e. 41 – 7) pour obtenir 248 (i.e. 1148 – 900).

$22x + 34y = 248$ s'écrit encore : $11x + 17y = 124$

En raisonnant en fonction du reste de la division par 11, on voit que y ne peut valoir que 6, et on en déduit que $x = 2$.

Lors de la deuxième manipulation, 19 dominos sont orientés selon la longueur, 6 selon la largeur, 1 selon l'épaisseur et il en reste 2.

On remarque d'abord que le nombre de dominos orientés selon la longueur est forcément compris entre 17 et 21 (sous peine de dépasser 900 mm ou au contraire de ne pas pouvoir atteindre cette longueur). Les simulations obtenues avec chacune de ces valeurs ne mènent à des solutions que pour 20 (en plaçant les 28 dominos) et pour 19 (en en utilisant 26).

✉ *Quelques lecteurs proposent leurs solutions, généralement sans originalité, si ce n'est Jacques GURAUD (91370 Verrières-le Buisson), qui nous offre une résolution graphique d'équations en nombre entiers.*

463. Du travail d'orfèvre

Il y a 5 dimensions possibles du trapèze d'or.

Si on appelle a et b les longueurs des bases du trapèze, on voit que leur demi-somme, matérialisée par le rayon du disque perpendiculaire à la hauteur du trapèze, est égale à 25 cm.

On en déduit (en appliquant Pythagore par exemple) que cette hauteur, en mm, est égale à $2\sqrt{ab}$, et que l'aire du trapèze d'or, exprimée en mm^2, est égale à $50\sqrt{ab}$.

Pour que les dimensions et l'aire soient entières, il faut (et c'est suffisant) trouver deux entiers a et b de somme 50, tels que le produit ab soit un carré parfait. C'est le cas pour 5 valeurs du couple (a, b) : $(1, 49)$; $(5, 45)$; $(10, 40)$; $(18, 32)$; $(25, 25)$. La dernière solution correspond à un rectangle.

✉ *Après quelques hésitations sur la notion « d'aire du bijou » (faut-il compter cercle et trapèze ou trapèze seul ?), les lecteurs optent pour l'aire du trapèze seul et donnent leurs résultats soit en s'aidant de la trigonométrie soit en utilisant le théorème de Pythagore.*
Bonnes contributions en particulier de Jean CHARLES (31120 Lacroix Falgarde), Philippe KAHN (92100 boulogne), Marcel DAVID (74200 Thonon les Bains).

464. Le nombre mystère

Je suis 76923. En me multipliant par 3, 4 et 9, on obtient 230769, 307692 et 692307.

D'après les chiffres des unités des trois multiplications, le nombre-mystère contient déjà, outre 3, les chiffres 2, 7 et 9. Par ailleurs, la somme de ses chiffres est aussi celle du nombre obtenu en le multipliant par 9 : en vertu de la « preuve par 9 », c'est un multiple de 9. Le cinquième chiffre est donc 6. Il ne reste plus que quelques esssais pour conclure.

✉ *P. KAHN (92100 Boulogne) et C. ROMON font fort justement remarquer que les propriétés du nombre-mystère persistent même si on le multiplie par 10 ou par 12. Ce nombre, disent-ils, a même l'insigne propriété que son produit par 13 vaut 999 999.*
C. ROMON donne en plus l'exemple du nombre 052631578947368421 qui, composé de dix-huit chiffres, a dix-huit permutations circulaires qui s'obtiennent en le multipliant par les nombres de 1 à 18.

465. Octification

24 est le seul nombre de deux chiffres égal à son octifié. Il n'y a pas de tel nombre à trois chiffres.

• Un nombre de deux chiffres égal à son octifié s'écrira : $(8 - a) \times (8 - b) = 10a + b$.

Soit : $ab - 18\,a - 9b + 64 = 0$, qui s'écrit : $(9 - a) \times (18 - b) = 98$.

Compte tenu des contraintes sur a et b, qui doivent être compris entre 0 et 8, et des seules factorisations de 98, qui sont 1 et 98, 2 et 49, 7 et 14, on n'a que la solution $18 - b = 14$ et $9 - a = 7$.

• Un nombre de 3 chiffres égal à son octifié sera au plus égal à 8 × 8 × 7 = 448. Son chiffre des centaines sera donc compris entre 1 et 4. On fait les 4 essais : aucun ne conduit à une solution.

466. La nappe à carreaux

En plaçant le centre de l'assiette sur un nœud, on peut faire coïncider 36 nœuds du quadrillage avec le bord de l'assiette.

En prenant pour unité l'amplitude du quadrillage (2 mm), le problème revient à chercher le nombre de façon d'obtenir 4225, carré du rayon 65, comme somme de deux carrés d'entiers (en vertu du théorème de Pythagore).

Or 4225 s'écrit de quatre manières différentes comme somme de deux carrés :

$4225 = 16^2 + 63^2$
$4225 = 25^2 + 60^2$
$4225 = 33^2 + 56^2$
$4225 = 39^2 + 52^2$

Sur un huitième de disques (privé des axes), on trouve donc 4 points du bord qui coïncident avec les nœuds du quadrillage. Par symétrie, puis rotations, ce nombre est multiplié par 8, soit 32 points auxquels il faut rajouter les quatre points des axes.

⊠ *Didier MAIXANDEAU (92600 Asnières) généralise le problème selon les valeurs du rayon de l'assiette.*

467. Quoi de « neuf » ?

Il faut ... 9 opérations au minimum pour atteindre 999.

+9, × 9, +9, +9, +9, × 9, +9, +9, +9.

Les nombres successivement atteints sont alors :

9, 81, 90, 99, 108, 972, 981, 990, 999.

Le nombre le plus long à atteindre est 720. Il faut au minimum 17 opérations :

+ 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9, × 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9, + 9.

468. L'assemblée des nombres

Le doyen des nombres de droite est 876351240. Le benjamin est 123567480.
Le seul nombre de gauche à ne pas contenir 0 est 381654729.
Il n'y a pas de nombre à la fois de gauche et de droite.

Le début du raisonnement consiste à remarquer que les nombres de droite se terminent par un multiple de 120 et que 9 est le chiffre inutilisé. Cela donne sept cas à envisager, et quelques essais à mener pour certains d'entre eux.

469. Un nombre de dix chiffres

Les dix chiffres ne peuvent être tous différents.

Si les dix chiffres d'un nombre B sont tous différents, la somme des chiffres de B est 45, et B est donc divisible par 9. Pour tout entier A, on va construire le reste de la division par 9 de A^2, $A^2 - A$, puis de $B = A^2 - A - 1$. Comme le montre le tableau ci-dessous, le reste de la division de B par 9 n'est jamais nul.

Reste de la division par 9 de	A	A^2	$A^2 - A$	$B = A^2 - A - 1$
	1	1	0	8
	2	4	2	1
	3	0	6	5
	4	7	3	2
	5	7	2	1
	6	0	3	2
	7	4	6	5
	8	1	2	1
	0	0	0	8

470. Qui s'étend sur la tente ?

La fraction était : $\frac{14183}{41841}$

Pour calculer cette fraction F, on la multiplie d'abord par 10 000 000.

Cela donne : $10\,000\,000 \times F = DDNABDB\,,DDNABDB\ DDNABDB\ldots$

$F = 0,DDNABDB\ DDNABDB\ldots$

Par différence : $9\,999\,999 \times F = DDNABDB$

Cela s'écrit : $9\,999\,999 \times ETEND = DDNABDB \times TENTE$.

La fraction F étant irréductible, TENTE est un diviseur de 9 999 999.

Or, 9 999 999 se décompose un produit de facteurs «premiers» sous la forme :

$9\,999\,999 = 3 \times 3 \times 239 \times 4649$ (ce n'est pas facile à trouver sans une calculatrice munie de calcul formel). TENTE est donc le produit de certains de ces quatre facteurs.

Compte tenu de son nombre de chiffres et de sa structure, ce ne peut être que :

$TENTE = 3 \times 3 \times 4649 = 41\,841$.

Il reste à trouver la valeur du «D». On a : $239 \times 1418D = DD8AB3B$.

Il vient clairement $D = 3$, et $F = 0,3389737\ 3389737\ldots$

✉ *Jean LEMARIE (92400 Courbevoie) et C. ROMON donnent des solutions «à la main» nécessitant assez peu de calculs. Pierre ALLARD (le Mans) et André MICHEL (69250 Montaney) donnent des programmes informatiques permettant d'arriver au résultat en quelques secondes.*

471. Les séries rivales

Les deux nombres sont égaux.

On part par exemple de B :

$$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2002} + \frac{1}{2003}$$

$$= 1 + (\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{3} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{5} + \ldots + (\frac{1}{2002} - \frac{1}{1001}) + \frac{1}{2003}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \ldots + \frac{1}{2003} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1001})$$

$$= \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \frac{1}{1004} + \ldots + \frac{1}{2003} = A$$

✉ *Philippe KAHN (92100 Boulogne) fait très justement remarquer qu'on obtiendrait un résultat identique avec toute série B de 2n−1 termes, les termes de A étant pris entre les rangs n et 2n − 1, comme par exemple les séries : $A = 1102^2 + 1003^2 + \ldots + 2003^2$ et $B = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - 2002^2 + 2003^2$.*

472. Digitalement vôtre

Le nombre 49930004993 est digitalement pair d'ordre 2002.

L'idée est de remarquer qu'un nombre de la forme A0A où les deux parties A sont séparées par des zéros (ou simplement accolées) est toujours digitalement pair. On va donc chercher un nombre de la forme N = A0A tel que tous ses multiples jusqu'à 2002N soient de la même forme, mais que ce ne soit pas le cas de 2003N où une retenue rendra le nombre digitalement impair.

On veut donc $N = (10^k + 1)$ A, k étant choisi de telle sorte que 2002N s'écrive en accolant deux fois le nombre B = 2002 A et que $2002\,A < 10^k < 2003\,A$.

2003 A commence donc par 1. Pour changer de parité, il faut une retenue à l'addition de 2003 A et de $2003\,A \times 10^k$. On pourrait donc s'arranger pour que 2003 A finisse par 9 (donc A par 3). En divisant 10^7 par 2002 et par 2003, on constate que 4993, compris entre les deux quotients, fait l'affaire.

✉ *Christian ROMON complète ce qu'il appelle « le bestiaire » des nombres digitalement pairs par : 50 030 005 003 ; 50 130 005 013 ; 99 860 009 986 ; 99 960 009 996 ; 100 060 010 006 ; 2 497 500 224 975 ; 249 850 024 985 ; 4 994 300 049 943 …*

473. Retournement de situation

2178 × 4 = 8712 et 1089 × 9 = 9801

• Si ABCD × 4 = DCBA, on voit que A = 0, 1 ou 2 sous peine que le produit par 4 dépasse 4 chiffres. Mais 4D se terminant par A, A est pair.

– A = 0 conduit à D = 0 ou 5 et à une impossibilité.

– A = 2 impose D = 3 ou 8 : Mais D ≥ 4A, d'où D = 8. 2BC8 × 4 = 8CB2

Pour que le produit par 4 ait 8 pour chiffre des milliers, B doit être inférieur ou égal à 2 et impair (pour cause de retenue 3). Donc B = 1. On en déduit C = 7 . On vérifie que le résultat convient.

• Un raisonnement analogue mène à la seule solution à quatre chiffres telle que le nombre « retourné » est 9 fois plus grand.

✉ *Calculs détaillés de Philippe KAHN (92100 Boulogne), C. ROMON et R . TOURNADRE.*

474. Plus fort que la calculatrice

Les deux opérations donnent pour résultat 1.

Pour la deuxième, on pose Y = 10 657 et X = 1752. On remarque alors que le résultat cherché R s'exprime sous la forme :

$R = Y^4 - 1369\,X^4 - 74\,X^2 = (Y^2 - 37\,X^2)(Y^2 + 37\,X^2) - 74\,X^2$.

Or, la calculatrice nous a donné : $Y^2 - 37\,X^2 = 1$, qu'on remplace dans l'expression de R :

$R = (Y^2 + 37\,X^2) - 74\,X^2 = Y^2 - 37\,X^2 = 1$

✉ *C. ROMON fait, à juste titre, remarquer que $\frac{10657}{1752}$ est la quatrième « réduite » de $\sqrt{37}$ puisque*

$$\sqrt{37} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}$$

par développement en « fraction continue », ce qui donne successivement pour valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{37}$:

$p_1/q_1 = 6$ puis $p_2/q_2 = 73/12$ puis $p_3/q_3 = 882/145$ puis $p_4/q_4 = 10657/1752$. Comme on peut démontrer par récurrence que $p_i^2 - 37q_i^2 = (-1)^i$, ceci achève de démontrer que $A = 1$ en prenant $i = 4$. C'est en élevant au carré l'égalité $p_4^2 = 37q_4^2 + 1$ qu'on obtient $B = 1$.
Philippe KAHN (92100 Boulogne) doit déjà, lui, faire preuve d'astuce pour faire calculer A par sa calculatrice, qui n'a que 8 chiffres significatifs. Il commence par transformer A en : $10657^2 - (36 + 1) \times 1752^2 = (10\,657 - 6 \times 1752) \times (10657 + 6 \times 1752) - 1752^2$.

475. Le carré palindrome

N = 698896, carré de 836, est le seul carré palindrome à six chiffres.
Le nombre cherché s'écrit $N = abccba$, soit $N = 100001a + 10010b + 1100c$.
On factorise par 11 : $N = 11 \times P$ où $P = 9091a + 910b + 100c$
P doit s'écrire $P = 11 \times Q$, où Q est un carré parfait.
En raisonnant sur les restes de la division par 11 de P, on trouve la condition nécessaire :
$5a + 8b + c$ doit être un multiple de 11. On pose alors $c = 11k - 5a - 8b$.
P s'écrit maintenant $P = 8591a + 110b + 1100k$, qu'on factorise aisément sous la forme :
$P = 11 \times (781a + 10b + 100k)$. Le nombre $Q = 781a + 10b + 100k$ doit être un carré.
Son chiffre des unités a ne peut être égal qu'à 1, 4, 5, 6 ou 9.
Son chiffre des dizaines a une parité fixée, une fois connu le chiffre des unités.
Quant à k, il est déterminé par le fait que $c = 11k - 5a - 8b$ est compris entre 0 et 9
• Voici le cas $a = 6$ entièrement traité. La discussion porte sur les deux derniers chiffres de $Q = 4686 + 10b + 100k$:
– 96 donne $b = 1$, et $k = 4$, Q = 5096 n'est pas un carré.
– 16 donne $b = 3$, et $k = 5$, Q = 5216 n'est pas un carré
– 36 donne $b = 5$, et $k = 7$, Q = 5436 n'est pas un carré
– 56 donne $b = 7$, et $k = 8$, Q = 5556 n'est pas un carré
– 76 donne $b = 9$, et $k = 10$. Q = 5776 est le carré de 76.Il vient $c = 8$ et **N = 698896, seule solution** car les cas $a = 1, 4, 5$ et 9 ne donnent rien.
⌧ *Bonne solution décrite de façon élémentaire par Luc BARRIA (64160 Serres Morlaas).*

476. Les nombres aristocrates

Le plus petit nombre aristocrate divisible par 11 est 123 475 869.
Le plus grand est 987 652 413.
Il faut savoir qu'un nombre est divisible par 11 si la différence entre la somme P de ses chiffres de rang pair et la somme I de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11. La somme des neuf chiffres, 45, étant impaire, la différence (P – I) l'est aussi et vaudra –11 ou +11.
La méthode consiste à partir du plus petit nombre aristocrate N = 123 456 789, et à permuter ses chiffres les plus à droite possible pour rendre le nombre divisible par 11.
Pour N, I = 25 et P = 20. Il faut donc diminuer la différence (I – P) de 16 ou l'accroitre de 6. La deuxième solution est la plus économique. Elle mène, après quelques essais, au résultat.
On remarque qu la suite des chiffres doit être croissante à l'intérieur de chaque catégorie (celle des chiffres de rang pair et celle des chiffres de rang impair), .
Une méthode similaire conduit au plus grand nombre cherché.

477. Vide grenier

Zoé a vendu le réfrigérateur au prix de 93 euros.
Il n'y a que quatre façons d'obtenir le prix p du réfrigérateur :
1 fois p, p fois 1 (les cartes postales coûtent probablement 1 euro), l fois c et c fois l, où l et c sont

des nombres premiers égaux respectivement au prix d'un livre et d'une chaîne. Comme le produit lc est égal à p, le nombre d'objets est donc : $1 + l + c + lc = 128$, ce qui se factorise en : $(1 + l)(1 + c) = 128$, d'où les possibilités (en supposant l supérieur à 1 et inférieur à c) :

$1 + l$	l	c	$1 + c$
4	3	31	32
8	7	15	16

Seule la première ligne donne pour l et c des nombres premiers. Les cartes valent 1 euro, les livres 3 euros, les chaînes en or 31 euros et le Frigidaire 93 euros.

478. Magique ?

La somme des produits des lignes est égale à la somme des produits des colonnes dans tout « carré presque magique ».

On part de l'identité suivante que nous vous laissons le soin de vérifier :

$$abc = \frac{1}{6}\left[(a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 2(a^3+b^3+c^3)\right]$$

Dans un carré « presque magique » où toutes les lignes et les colonnes ont même somme S, cela donne :

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

$$abc + def + ghi = \frac{1}{6}\left[3S^3 - 3S(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2)\right.$$
$$\left. + 2(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3+i^3)\right]$$

L'expression étant symétrique, il est clair qu'elle est égale à $adg + beh + cfi$.

⊠ *Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble) imagine une simplification de calculs utilisant au mieux la symétrie par rapport à la diagonale. J. VIGNOLLES (31200 Toulouse) écrit, lui, le tableau carré sous la forme :*

$$\begin{matrix} 4 & 4+a & 4-a \\ 4 & 4+b & 4-b \\ 4 & 4+c & 4-c \end{matrix}$$

On évite ainsi le recours à une formule plus ou moins compliquée pour le calcul des produits par lignes et par colonnes.

479. Ôtez le chiffre du milieu !

Huit nombres répondent à la question. Il s'agit de 105, 108, 135, 192, 195, 225, 315 et 405.

Si un tel nombre s'écrit abc, il vérifie : $100a + 10b + c = M(10a + c)$,

ce qu'on peut écrire sous la forme : $10[b - (M - 10)a] = (M - 1)c$.

• En dehors des cas M = 11 (exclu), M = 16 et M = 6 traités ci-après, on voit que c ne peut prendre que la valeur 5 (puisque 0 est exclu par l'énoncé).

La relation devient : $2[b - (M - 10)a] = (M - 1)$.

Une discussion sur les valeurs de M permet de trouver les six solutions se terminant par 5.

• M = 6 conduit à la solution 108 et M = 16 à la solution 192.

⊠ *André GILLET (72000 Le Mans) nous fait parvenir un programme de calcul sur ordinateur permettant de résoudre ce problème.*

480. Palindromes et porte-bonheur

La somme de tous les palindromes à six chiffres est un nombre porte-bonheur.
Ce n'est pas le cas si on n'additionne que les palindromes ne commençant pas par 0.

• Un nombre palindrome s'écrira N = *abccba*.
– si $a \neq c$, on groupe N avec le nombre qui s'écrit *cbaabc*.
La somme des deux, égale à $1001 \times (abc + cba)$ est un multiple de 1001.
– Si $a = c$, N est lui-même un multiple de 1001 ($N = 1001 \times aba$).
Ainsi, la somme de tous les palindromes à six chiffres est un multiple de 1001, donc de 13 puisque $1001 = 7 \times 11 \times 13$.
• Si on exclut les nombres commençant par 0, il faut enlever de la somme précédente les nombres de la forme $0bccb0$ qu'on peut aussi écrire sous la forme $10010b + 1100c$.
Le premier terme, $10010b$, est multiple de 1001. Le second terme, $1100c$, intervient autant de fois qu'il y a de couples (b, c). b prenant 10 valeurs possibles et c toutes les valeurs de 0 à 9, la somme des seconds termes est égale à 11000 fois la somme des valeurs prises par c, c'est-à-dire la somme des entiers de 0 à 9, soit 45. 45×11000 n'étant pas un multiple de 13, la somme des palindromes ne commençant pas par 0 n'est pas un nombre porte-bonheur.

481. Le bal de la marquise des Anges

Il y avait 31 démons à la réception.

En appelant X le nombre de démons, a le prix d'une consommation à l'orange, b celui d'une consommation au citron, on a : $57a + 2bX = 57b + 2aX + 40$
Cela s'écrit alors : $(2X - 57)(b - a) = 40$
Il en découle que $2X - 57$ est un diviseur impair de 40, soit 1 ou 5.
1 est exclu car la différence de prix des boissons serait 40, bien supérieure au prix de chacune.
Il vient $2X - 57 = 5$, soit $X = 31$.

482. Carrément carrés

49 est le seul nombre carrément carré à 2 chiffres, 1681 (= 41^2) le seul à 4 chiffres.
2401 9801 (= 4901^2) est le seul nombre carrément carré de 8 chiffres.

• Un nombre K^2 carrément carré de 4 chiffres s'écrira : $K^2 = 100\,a^2 + b^2$ où a et b sont des nombresinférieurs à 10. K est lui-même supérieur à $10a$. Posons $K = 10a + c$. Le carré de c ayant le même chiffre des unités que le carré de b, on en déduit que $c = 10 - b$ (il est impossible que $c = b$ car $a \neq 0$ par hypothèse).
$K^2 = 100\,a^2 + b^2$ s'écrit donc : $(10a + 10 - b)2 = 100\,a^2 + b^2$. La relation se simplifie en :
$b\,(a + 1) = 5\,(2a + 1)$. Les nombres $(a + 1)$ et $(2a + 1)$ étant premiers entre eux, $(a + 1)$ divise 5. D'où l'unique solution pour $a = 4$ (et donc $b = 9$).
• Une démarche similaire mais plus délicate permet de trouver les carrément carrés de 8 chiffres.On part de : $K2 = 10000\,a^2 + b^2$ où a et b sont des nombres inférieurs à 100.
On pose $K = 100\,a + c$. On en déduit que : $(b - c)(b + c) = 200\,ac$. On n'oublie pas que a est au moins égal à 32 pour obtenir un vrai nombre de 8 chiffres. Cela ne laisse que peu de marge à la somme b + c qui s'avère ne pouvoir prendre que la valeur 100.
$(100a + 100 - b)^2 = 10000\,a^2 + b^2$ se simplifie en : $b(a + 1) = 50\,(2a + 1)$. Les nombres $(a + 1)$ et $(2a + 1)$ étant premiers entre eux, $(a + 1)$ divise 50.
a, au moins égal à 32, ne peut valoir que 49, d'où l'on déduit $b = 99$.
• Pour ce qui est des nombres carrément carrés de six chiffres, la liste de quatre initialement trouvée a été complétée à cinq nombres par les lecteurs et certains en ont fourni la justification (voir ci-dessous) :

$144\,400 = 380^2$, $225625 = 475^2$, $256\,036 = 506^2$, $324\,900 = 570^2$, $576\,081 = 759^2$.

☒ *Un nombre considérable de lecteurs a relevé le défi, non seulement de la recherche des nombres carrément carrés à 6 chiffres, comme nous l'avions demandé, mais en plus d'étendre cette quête à celle des « carrément carrés » à plus de six chiffres. Nous utiliserons dans les calculs qui vont suivre les mêmes notations que celles de la solution.*

Pour ce qui est des nombres carrément carrés à six chiffres, nous retiendrons essentiellement deux contributions :

- *Celle de C. GILORMINI (54600 Villers les Nancy), claire et concise : mettant $1000 \times a^2 = K^2 - b^2$ sous la forme $(K - b) \times (K + b)$, il remarque que $K - b$ et $K + b$ sont de même parité, pairs tous les deux car leur produit l'est, et pose $K - b = 2 \times x$ et $K + b = 2 \times y$. D'où $K = x + y$ et $b = y - x$ avec $x \times y = 250 \times a^2$. Ce produit étant divisible par 125, l'un au moins de x ou de y est divisible par 25. Compte tenu du fait que $10 \leq a \leq 31$, $0 \leq b \leq 31$ et $317 \leq K \leq 999$, on obtient que $143 \leq x \leq 499$, $159 \leq y \leq 515$ et $x \leq y \leq x + 31$. En distinguant les cas où c'est x qui est divisible par 25 et les cas où c'est y qui l'est, et en ne retenant que les valeurs de x donnant des valeurs entières de y, on obtient :*

x	*y*	*a*	*b =y – x*	*K= x + y*	*K^2*
225	*250*	*15*	*25*	*475*	*225 625*
250	*256*	*16*	*6*	*506*	*256 036*
375	*384*	*24*	*9*	*759*	*576 081*
180	*200*	*12*	*20*	*380*	*144 400*
270	*300*	*18*	*30*	*570*	*324 900*

- *Celle de Jean MOREAU de SAINT MARTIN (Paris)*

Ce lecteur, parti de l'égalité $(a \times \sqrt{1000^2}$ et procède par encadrements :

$1000 \times a^2 < K^2 < 1000 \times (a^2 + 1) < 1000 \times (a^2 + 1 + \dfrac{1}{4 \times a^2})$ qui, en encadrant $\sqrt{1000}$ entre

31,62 et 31,625, donne : $31{,}62a < K < 31{,}62a + \dfrac{a}{200} + \dfrac{16}{a}$.

Des opérations arithmétiques élémentaires permettent donc, en ne conservant que les valeurs pour lesquelles $K^2 - 1000 \times a^2$ est un carré, de dresser le tableau :

a	*$31{,}62 \times a$*	*$31{,}62a + \dfrac{a}{200} + \dfrac{16}{a}$ (arrondi)*	*K*
12	*379,44*	*380,84*	*380*
15	*474,30*	*475,45*	*475*
16	*505,92*	*507*	*506*
18	*569,16*	*570,14*	*570*
24	*758,88*	*759,67*	*759*

- *Dominique PASTRE (92130 Issy les Moulineaux) et Noël RENAUDIN (92100 Boulogne) ont eux aussi imaginé un bon algorithme de recherche, nécessitant cependant davantage de calculs.*

• *J. BERRARD (Paris) utilise une technique de recherche originale, s'appuyant sur une relation linéaire annexe entre a, b et c, soit* $30 \times a = K - b$*, qui conduit à* $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{K}{95}$*, de valeur commune 4, 5 ou 6, soit* $32 \times a = b + K$*, ce qui conduit à* $\frac{a}{8} = \frac{b}{3} = \frac{K}{253}$*, de valeur commune 2 ou 3.*
• *Il rejoint en cela Jacques DEMOULIN (78150 Le Chesnay) qui constate que les triplets a, b et K se répartissent en deux familles de triplets proportionnels.*
• *D'autres lecteurs, très intéressés eux aussi par le sujet, nous ont envoyé la bonne liste des nombres carrément carrés à six chiffres : M. ARRAOU (34500 Béziers), Jacques PITRAT (Paris), Mme Y. BAYET (Paris), Didier SCHNEIDER (51000 Chalons en Champagne), J-F. BARBIER (Paris)*
• *Bonnes contributions également de Jean DURUP (31000 Toulouse) et d'un lecteur anonyme qui, ne se considérant pas comme hors jeu, a quand même (si peu...) utilisé l'outil informatique. Il a osé le faire avec Excel et voici son schéma :*
1) Déterminer tous les carrés comportant 6 chiffres (tranche 317 – 683) : liste L1
2) Déterminer tous les carrés comportant 3 chiffres (tranche 10-31) : liste L2
3) Rechercher dans L1 sur les 3 premiers caractères la coïncidence avec L2
4) Vérifier que les 3 derniers caractères sont bien un carré.

Quant à rechercher les nombres carrément carrés à plus de six chiffres, plusieurs lecteurs s'y sont risqués :
• *Jacques DEMOULIN, dans un travail comme toujours très complet, non seulement recense tous les nombres* K^2 *à 10 chiffres* ($36\,050^2, 39\,845^2, 48\,700^2, 49\,964^2, 50\,281^2, 54\,075^2, 55\,973^2, 72\,100^2, 74\,946^2, 79\,690^2, 90\,125^2, 99\,928^2$)*, mais encore démonte la structure des nombres* K^2 *à 4p chiffres. Il en existe un seul pour p = 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, deux pour p = 4 ou 5. Les voici :*

$$K^2 = 4999|0001^2 = \underbrace{24990001}_{4999^2}|\underbrace{99980001}_{9999^2} \text{ ou}$$

$$K^2 = 3829|0001^2 = \underbrace{14661241}_{3829^2}|\underbrace{76580001}_{8751^2} \text{ pour 16 chiffres,}$$

$$K^2 = 49999|00001^2 = 2\underbrace{499900001}_{49999^2}|\underbrace{999800001}_{99999^2} \text{ ou}$$

$$K^2 = 33007|00001^2 = \underbrace{1089462049}_{33007^2}|\underbrace{6601400001}_{81249^2} \text{ pour 20 chiffres.}$$

• *Didier MAILLARD (Paris) esquisse une généralisation à la recherche des nombres* K^2 *dont le nombre de chiffres est multiple de 4,*
• *Alain MENARD (Paris) cherche, lui, du côté des nombres* K^2 *à 12 chiffres*
• *C. ROMON calcule explicitement la solution à 8 chiffres* (4901^2)*, celle à 12 chiffres* (499001^2) *et nous entraîne également du côté des deux solutions pour les nombres à 16 et à 20 chiffres.*

483. Un nombre prodigieux

Le nombre cherché est 3 564 120.

Appelons P le nombre prodigieux, (2) la condition sur les deux derniers chiffres, (3) celle sur les trois derniers chiffres etc.

Vu les conditions (2) et (5), P se termine par zéro.
D'après la condition (4), P doit se terminer par 20, 40 ou 60.
La condition (3) impose alors à P de se terminer par 120, 240, 360, 420 ou 540.
En appliquant les conditions (6) et (7), il ne reste que six possibilités :
3 564 120, 3 516 240, 6 351 240, 6 153 420, 6 231 540 et 6 531 420.
La condition (2) portant sur les deux premiers chiffres n'apporte rien.
En revanche, la condition (3) portant sur les trois premiers chiffres ne laisse plus que les trois possibilités : 3 564 120, 6 351 240 et 6 531 420.
Elles se réduisent à une avec la condition (4).

✉ *Amis lecteurs, pour ce problème que François ADRIEN (78000 Versailles) qualifie de « problème de tricot », aucune des six possibilités en jeu ne vous a échappé, mais beaucoup d'entre vous sont allés au-delà de la simple énumération en notifiant d'intéressantes remarques.*
*Pierre JEAN (13100 Aix en Provence) fait remarquer que 73 564 120 est divisible par 8, que 873 564 120 l'est par 9 et que **9** 873 564 120 l'est par 10, mais cette remarque amusante se justifie aisément.*
Joël LIRAND (86360 Chasseneuil du Poitou) remarque, lui, que les six nombres respectant les conditions (2), (3), (4), (5), (6) et (7) sont tous divisibles par 2, 3, 4, 5 et 6, ce qui est moins évident.

484. Ananombres

765 ou 705 sont des ananombres : 765 = 423 + 342 et 705 = 609 + 096.
775 en revanche n'en est pas un.
Plus généralement, parmi les nombres de 3 chiffres, sont d'office des ananombres :
– les nombres pairs (puisqu'on peut les écrire A + A) ;
– ceux qui s'écrivent Pbb, $Ib(b-1)$, où P désigne un chiffre pair et I un chiffre impair :
par exemple, 655 = 314 + 341, 765 = 387 + 378 ;
– ceux qui s'écrivent aPa, $aP(a-1)$, où P désigne un chiffre pair :
par exemple, 747 = 126 + 621, 685 = 293 + 392.
En dehors de ces nombres, il ne reste plus qu'une catégorie d'*ananombres* : ceux qui s'écrivent comme la somme d'un nombre et d'une de ses permutations circulaires. C = A + B, avec A = abc et B = bca.
On en déduit que $C = 101a + 110b + 11c = 2a + 11(9a + 10b + c)$.
Réciproquement, à partir d'un nombre N qui ne fait pas partie des trois premières catégories d'ananombres, on en déduit la procédure qui permet de vérifier si c'est un *ananombre*. On calcule d'abord le reste r de la division de N par 11.
– Si r est pair, on pose $r = 2a$, et on conclut que N est un *ananombre* s'il est plus grand que $101a$.
- Si r est impair, on pose $r + 11 = 2a$, et on conclut encore que N est un *ananombre* s'il est plus grand que $101a$.
En effet, dans les deux cas, on pourra sans problème identifier le multiple de 11 qu'est $(N-101a)$ au nombre $11(10b + c)$ pour trouver la valeur de b et c.

✉ *Ce problème, dont la solution d'origine était incomplète, nous a valu de nombreux courriers, dont une étude intéressante de M. Pierre Gaillard, de Meylan (38). Mais nous adressons toutes nos félicitations et nos remerciements à Madame Marie-Nicole Gras, du Bourg d'Oisans (38), qui nous a donné la solution parfaite ci-dessus permettant de reconnaître la somme de deux permutations circulaires.*

485. Le match du 2 et du 3

Outre $2^2 = 3^1 + 1$, seul $2 = 3^0 + 1$ répond à la question.

Aucune autre puissance de 2 ne dépasse d'une unité une puissance de 3.

Pour s'en persuader, il suffit de considérer le reste d'une puissance de 3 dans la division par 8.
C'est 1 si l'exposant est pair (1, 9, 81, 729... ont pour reste 1 quand on les divise par 8).
C'est 3 si l'exposant est impair (3, 27, 243... ont pour reste 3 quand on les divise par 8).
En ajoutant 1 à une puissance de 3, on ne trouve donc jamais un multiple de 8.
Or, hormis 1, 2 et 4, toutes les puissances de 2 sont des multiples de 8.

> ⊠ *Vous avez été nombreux, amis lecteurs, à répondre à notre appel : « Existe-t-il une puissance de 3 autre que 3 ou 9 qui dépasse d'une unité une puissance de 2 ? »*
>
> *Quelles que soient leur technique, toutes vos démonstrations sont correctement construites.*
>
> • *Certaines, reposant sur la parité de l'exposant, utilisent la sommation d'une suite géométrique [Marcel CHOQUET (Paris), Alain-Noël HENRI (26000 Valence), J. DEMOULIN (78150 Le Chesnay) Jean LEMARIE (92400 Courbevoie), C. MARION (89200 Avallon, ...), A. VALLON (78000 Versailles)], d'autres pas [Jean-Marc TEMURSON (38700 Corenc), P. LASCAUX (91800 boussy Syt Antoine), Michel FRANCOISE (86300 VADDIVIENNE), Didier HOLLEAUX (Paris)]*
>
> • *L'une d'elle utilise même la formule du binôme [Louis REMILLIEUX (74410 St Jorioz)].*
>
> • *Certaines sont effectuées par récurrence [Yves ARCHAMBAULT (Paris), Michel Wavresky (19100 Brive)].*
>
> • *D'autres se font par l'absurde ou à l'aide d'arguments d'analyse [Jean-Pierre DENOST (33320 Le Taillan – Midre)].*
>
> *Nous retiendrons les plus concises d'entre elles(C.M. CRUICKSHANH (Kingston, Angleterre), M. DESCOMBES (78600 Maisons- Laffitte, Jean DURUP (31000 Toulouse), Marie-Nicole GRAS (38520 Bourg d'Oisans), Jean MOREAU de SAINT MARTIN (Paris)]. Toutes font simplement référence au résultat précédemment énoncé, à savoir : « Seul 3^{2p} est égal à un multiple de 8 augmenté de 1 ». Ou p est impair et égal à 2k + 1 et alors $(3^{2k+1})^2 = 3^{4k+2} = 9 \times 3^{4k}$ = (multiple de 16) + 9, et $3^{4k+2} - 1$ ne peut pas être une puissance de 2. Ou p est pair et égal à 2k, et dans ce cas, $3^{2\times 2k} = (3^{2k})^2$ = [(multiple de 8) + 1]^2 = (multiple de 16) + 1. Cependant, $3^{4k} - 1$ est par ailleurs multiple de $3^4 - 1$, c'est-à-dire de 80, qui contient le facteur 5 et ne peut donc pas être une puissance de 2.*
>
> *Quelques lecteurs férus de théorie des nombres n'ont pas manqué de rappeler que ce problème est une version partielle de l'équation de Catalan : $x^n - y^m = 1$, où x, y, n et m sont des entiers et qu'il existe de la question une forme plus générale : « Si deux entiers consécutifs sont des puissances parfaites, ce sont 8 et 9. ». Conjecturée par Eugène Catalan en 1844, cet énoncé n'a été démontré complètement qu'en 2002.*

486. Le baron

Le « baron » a tiré 11, 21, 29, 38, seule combinaison de total 99.

Il y a une chance sur 1001 de tirer un tel total : le bonimenteur devrait donc payer 1000 euros en plus de la restitution de la mise pour que le jeu soit équitable.

• La façon la plus systématique de trouver la solution est d'utiliser la « preuve par 9 ».

Les restes des nombres dans la division par 9 sont 0 (pour 9, 27 et 63), 1 (pour 1, 10, 28, 37, 46 et 55), 2 (pour 11, 20, 29 et 38), enfin 3 pour 21.
La seule façon d'obtenir pour total des restes 0 ou 9 en quatre cartes est 2 + 2 + 2 + 3.
Parmi les quatre combinaisons correspondantes, la seule qui totalise 99 est 11 + 29 + 38 + 21.

• Or, le nombre de façons de tirer quatre cartes parmi 14 est $\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$, soit 1001.
Il y a donc une chance sur 1001 de gagner à ce jeu.

487. Mémoire (pas) vive

Alice est née un 27 mars. Son code est 27273

Désignons par X le code cherché.
• Première constatation : comme X^2 n'est formé que des chiffres de 1 à 9, X est compris entre 11 112 et 31 426. En particulier, le premier chiffre de X est 1, 2 ou 3.
• Deuxième constatation : la somme des chiffres de X^2 est 45, X^2 est multiple de 9, donc X est multiple de 3.
Si X – 1 s'écrit *xyxyx*, la somme des chiffres de X, $3x + 2y + 1$, doit être multiple de 3, donc $2y + 1$ aussi. Les seules possibilités pour y sont : 1, 4 ou 7.
Ainsi, les seuls codes possibles sont 11112, 14142, 17172, 21213, 24243, 27273, 31314.
Seul parmi eux 27273 a un carré composé des 9 chiffres (743 816 529).

488. Briseur de code

33 398 630 137 = 1 237 × 26 999 701

En multipliant N, le nombre à factoriser, par 73, on trouve 73 N = 2 438 100 000 001 ;
c'est-à-dire $73\ N = 243 \times 10^{10} + 81 \times 10^8 + 1$.
On reconnaît $3^5 = 243$ et $3^4 = 81$, ce qui amène à écrire : $73\ N = 300^5 + 300^4 + 1$.
On utilise alors la factorisation $X^5 + X^4 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X + 1)$ pour parvenir à :
$73\ N = (300^2 + 300 + 1)(300^3 - 300 + 1) = 90\ 301 \times 26\ 999\ 701$
Il reste à remarquer que parmi ces deux facteurs, c'est 90 301 qui est multiple de 73 :
90 301 = 73 × 1 237. D'où la factorisation de N.

> ✉ *C. ROMON fait remarquer avec humour que le code en question n'est pas très adapté puisqu'il est en réalité le produit de trois nombres premiers : 32 569 × 829 × 1237.*

489. Famille nombreuse

Les âges des enfants sont 1, 1, 1, 2 et 5 ans.

La somme $a + b + c + d + e$ des âges est inférieure à 5 fois l'âge e de l'aîné. L'égalité ne peut d'ailleurs avoir lieu que si tous les âges sont des entiers égaux, ce qui est impossible.
Mais la somme est aussi le produit *abcde*. En simplifiant par e, on constate que le produit des âges des quatre plus jeunes est strictement inférieurl à 5.
– Le produit 4 mène à : 1, 1, 1, 4, soit $7 + e = 4e$, e n'est pas entier (1, 1, 2, 2 est exclu, car il n'y a qu'une naissance multiple).
– Le produit 3 mène à : 1, 1, 1, 3, soit $6 + e = 3e$, $e = 3$ exclu pour la même raison.
– Le produit 2 mène à : 1, 1, 1, 2, soit $5 + e = 2e$, $e = 5$, unique solution.
(le produit 1 mène au cas impossible $4 + e = e$).

490. Des entiers intéressants

Les seuls nombres intéressants dont le nombre de chiffres est compris entre 2 et 8 sont : 321, 32541 et 34521.

– On montre rapidement qu'il n'y a pas de nombre intéressant de 2 chiffres ni de 4 chiffres.
– On élimine ensuite les nombres de 6 et 8 chiffres à cause de la place du 5.
– Le dernier chiffre divisant le premier, 321 est le seul nombre intéressant à 3 chiffres.
– Les nombres de 5 chiffres qui ne se terminent pas par 1 ne peuvent se terminer que par 2 et ont alors

pour premier chiffre 4 et pour troisième chiffre 5. Mais alors 41 ou 4351 devraient être divisibles par 3, ce qui n'est pas le cas. Il reste à étudier la situation • • 5 • 1. 1 étant impair, le premier chiffre doit être 3, ce qui mène à deux solutions.

– Un nombre intéressant de 7 chiffres aurait pour quatrième chiffre 5.

• S'il ne se termine pas par 1, il se termine par 2 (premier chiffre 4 ou 6) ou par 3 (premier chiffre 6). Or, 6 ne peut diviser le nombre total (la somme des chiffres n'est pas un multiple de 3).

Dans la configuration 4 x•5 • y 2, y est impair (le nombre est divisible par 4). Or, $y = 7$ impliquerait $x = 2$, déjà pris, et $y = 3$, impliquerait $x = 2$ ou 5, déjà pris aussi.

3 ni 6 ne pouvant être en deuxième position (la somme des 6 premiers chiffres n'est pas un multiple de 3), il reste à étudier les configurations 4735612 et 4765312 qui ne fonctionnent pas.

• S'il se termine par 1, le premier chiffre est impair et ne peut être 3 (le nombre n'est pas un multiple de 3). Il reste à étudier 7 • • 5 • • 1. Le deuxième chiffre ne peut être 3 (73 est premier) ni 4 ni 6 (74 ni 76 n'ont pas de diviseur à 1 chiffre). Ce ne peut être que 2, ce qui mène à 7 2 • 5 • 4 1 – impossible : le nombre formé par les 5 premiers chiffres n'est pas divisible par 3 ni 6 – ou à 7 2 • 5 • 6 1 – impossible : 723 n'est pas divisible par 4 ni 724 par 3.

– Il existe au moins un nombre intéressant de 9 chiffres, 329456781. Il en existe peut-être d'autres. Les découvrirez-vous ?

> ✉ *Nombre de lecteurs perspicaces ont magistralement prouvé qu'il n'existe aucun nombre « intéressant » de 7 chiffres : François ADRIEN (78000 Versailles), J. DEMOULIN (78150 Le Chesnay), Dominique Pastre (92130 Issy-les-Moulineaux), Jean PIGETVIEUX (38100 Grenoble), C. ROMON. Tous utilisent un argument de parité. Dans les nombres intéressants à 7 chiffres, s'ils existent, le 5 doit occuper la position centrale puisqu'il doit diviser un nombre terminé par 5. De plus, les couples de chiffres symétriques par rapport au chiffre central sont de même parité. En effet, comme chaque chiffre du couple divise un nombre qui se termine par l'autre chiffre,*
>
> *• Si l'un est pair, il doit diviser le nombre se terminant par l'autre, qui est alors pair.*
>
> *• Si l'un est impair, l'autre doit diviser le nombre qui se termine par cet impair ; il est donc nécessairement impair.*
>
> *Il faudrait donc au nombre intéressant de 7 chiffres un nombre pair de chiffres pairs, ce qui n'est pas le cas puisque les seuls possibles sont 2, 4 et 6.*
>
> *• Plus généralement, nous dit Bernard TRUFFAULT (44980 Ste-Luce-sur-Loire), si le nombre n de chiffres du nombre est impair ($n = 2p + 1$), le nombre « intéressant » va comporter p chiffres pairs et $p + 1$ impairs. Si $p > 1$, c'est un impair qui occupe la position centrale : il est précédé et suivi d'un même nombre de chiffres pairs, ce qui suppose que p soit pair ($p = 2 \times q$). Les seuls nombres intéressants de 5 chiffres ou plus auront donc obligatoirement $4 \times q + 1$ chiffres. Ce lecteur détiendrait par ailleurs un preuve (trop longue pour être citée ici) qu'il n'existe que deux nombres « intéressants » à 9 chiffres :* ***329 456 781****, que nous avions cité, et* ***968 751 243****, que d'autres nous ont également signalé.*

491. Nombres fréquentables

• Un carré a toujours pour reste 0 ou 1 dans la division par 4.

Un nombre fréquentable a donc pour reste 0, 1 ou 2 dans cette division, mais jamais 3.

• Si $(a^2 + b^2)$ et $(c^2 + d^2)$ sont deux nombres fréquentables, alors leur produit P s'écrit :

$P = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$P = (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2\,abcd)$

$P = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

P est bien somme de deux carrés.

• 2005 est un nombre fréquentable. $2005 = 5 \times 401$.

Or, $5 = 2^2 + 1^2$ et $401 = 20^2 + 1^2$ sont des nombres fréquentables.
En appliquant la méthode ci-dessus, on trouve la décomposition : $2005 = 41^2 + 18^2$ ou $2005 = 39^2 + 22^2$
NB : On sait depuis Fermat qu'un nombre premier est fréquentable si et seulement si en lui ajoutant 1, cela ne donne pas un multiple de 4. On peut alors juger de la fréquentabilité d'un nombre entier N en le développant en produit de facteurs premiers. On « oublie » ceux qui ont un exposant pair, et on ne considère que les facteurs premiers d'exposant impair. N sera fréquentable si et seulement si tous ces facteurs sont fréquentables.

492. Deux chiffres inconnus

$4624 = 68^2$ et $9604 = 98^2$ sont les seuls carrés parfaits de la forme $x\,6\,y\,4$.
On constate alors que $44\ldots4622\ldots24 = 66\ldots68^2$ (100 chiffres 6)
et $99\ldots9600\ldots04 = 99\ldots98^2$ (100 chiffres 9).

✉ *Si nous n'avions donné aucun détail dans la solution, nos lecteurs, eux, en donnent.*
Philippe KAHN (92100 Boulogne) et C. ROMON commencent tous deux par remarquer que 68^2 et 98^2 sont les seuls carrés parfaits de la forme $\overline{x\,6\,y\,4}$.
• Le premier lecteur tente de généraliser aux nombres 98, 998, …, c'est-à-dire de la forme $10^n - 2$; Les élever au carré donne $(10^n - 2)^2 = 10^{2n} - 4 \times 10n + 4$ qu'il met sous la forme $10^{n+1} \times (10^{n-1} - 1) + 6 \times 10^n + 4$, qui s'écrit : $\underbrace{99\ldots9}_{n-1\,fois}996\underbrace{00\ldots0}_{n-1\,fois}04$. Il fait pour la série 68, 668, 6668, … dont les nombres sont tous de la forme $\frac{2}{3}(10^p + 2)$ un calcul un peu différent. Leur carré vaut :

$$\frac{4}{9} \times (10^p + 2)^2 = \frac{4}{9} \times (10^{2p} - 10^{p+1} + 4 \times 10^p + 4) = \ldots$$

$$= \frac{4}{9}[10^{p+1} \times (10^{p-1} - 1)] + 6 \times 10^p + \frac{2}{9} \times 10^p + \frac{16}{9}$$

$$= \frac{4}{9}[10^{p+1} \times (10^{p-1} - 1)] + 6 \times 10^p + \frac{2}{9} \times (10^p - 1) + 4 = 10^{p+1} \times \underbrace{44\ldots44}_{p-1\,fois} + 6 \times 10^p + \underbrace{22\ldots22}_{p-1\,fois} + 4.$$

Le résultat s'écrit donc $\underbrace{44\ldots4}_{p-1\,fois}46\underbrace{22\ldots2}_{p-1\,fois}24$.

• Le second lecteur utilise, lui, une factorisation astucieuse du nombre $\overline{x\,6\,y\,4}$ dans le cas où c'est le carré d'un nombre terminé par 8 : $\overline{x\,6\,y\,4} = (10a + 8)^2$. Partant de $(10a + 8)^2 - 4$, il écrit : $(10a + 8)^2 - 4 = (10a + 8 + 2) \times (10a + 8 + 2) \times (10a + 8 - 2)$, d'où $(10a + 8) = 10 \times (a + 1) \times (10a + 6) + 4$. Le chiffre des dizaines de x6y, qui est égal à 6, est par ailleurs celui des unités de $a \times (a + 1)$, auquel on ajoute la retenue de $6 \times (a + 1)$. En dressant un tableau des valeurs possibles de ce chiffre pour a allant de 1 à 9, il n'obtient que deux fois la réponse 6, pour a = 6 et a = 9, qui donne bien le résultat annoncé. Il va même plus loin et étend ce résultat à un nombre a à plusieurs chiffres identiques.
Par exemple pour $a = \underbrace{66\ldots66}_{k\,fois}$;
Dans ce cas, $(a + 1)(10a + 6) = \underbrace{66\ldots67}_{k\,chiffres} \times \underbrace{66\ldots66}_{k+1\,fois} = \ldots = \underbrace{44\ldots4}_{k\,fois}46\underbrace{22\ldots2}_{k\,fois}2$.
Bonne réponse également de Antoine WEHENKEL (Luxembourg).

493. Déferlement de uns

11…1 (3^n chiffres « 1 ») est divisible par 3^n.

Posons $R_n = 1111…11$ (n chiffres).

• $R_3 = 111$ est visiblement divisible par 3 (la somme de ses chiffres l'est).

• De même, $R_9 = 111\ 111\ 111$ est divisible par 9.

• R_{27}, qui s'écrit en juxtaposant trois fois R_9, est égal au produit du multiple de 9 qu'est R_9 par 1 000 000 001 000 000 001, lui-même multiple de 3. Il est donc divisible par 27.

De proche en proche, on montre que le nombre qui s'écrit avec 3^n chiffres « 1 », produit de celui qui s'écrit avec 3^{n-1} chiffres « 1 » par un multiple de 3, est divisible par 3^n.

✉ *Ces nombres qu'on n'écrit qu'avec des 1, nommés « rep-units » parce qu'on répète l'unité, n'ont décidément pas fini de faire parler d'eux ! Chacun de vos courriers en montre une facette insolite et nous en donne une nouvelle propriété. En voici quelques exemples (nous noterons R_n le nombre écrit avec n chiffres « 1 ») concernant en particulier la divisibilité des R_n :*

• Si l'entier m divise l'entier n : $n = q \times m$, alors R_m divise R_n. En effet, R_n peut être considéré comme une juxtaposition de q nombres R_m, donc divisible par R_m.

• Tout entier p premier avec 10 admet des multiples sous forme de rep-units.

• Si R_n est multiple de n, alors n est multiple de 3.

• Si $m = R_n$ est multiple de n, R_m est multiple de m. Cela découle directement de la première propriété. Ainsi, comme $111 = R_3$, R_{111} est divisible par 111.

Ont contribué à énoncer et démontrer ces propriétés : A. BLANCHARD (13008 Marseille), Romain BROSSARD (Lyon), Denis HEMARD (59300 Valenciennes), Micheline LEMASURIER (94600 Choisy le Roi), Joseph UZAN (Paris).

Vous ne vous êtes pas arrêtés là ; d'autres encore, comme Dominique PASTRE (92130 Issy les Moulineaux), Jean-Louis POSS (13100 Aix en Provence) ou Albert DENIS (Paris) ont enrichi la collection de rep-units R_n divisibles par n. On peut tirer de leurs courriers d'abord que $3^n \times 111$ divise $R_{3^n \times 111}$, ensuite que $R_{3^n \times 37^p}$ avec n et p tous deux supérieurs à 1, est multiple de $3^n \times 37^p$ ou, dit sous une autre forme, si n est égal à $3^p \times 111^q$, alors R_n est divisible par n. La démonstration se fait en deux temps, en démontrant par récurrence sur q que si $n = 111^q$, R_n est divisible par n et ensuite par récurrence sur p la propriété complète.

494. Renversement de situation

Le nombre initial était 2006.

De l'égalité : $3 \times abcd - 16 = dcba$, on déduit que a est compris entre 1 et 3, et que d est nettement plus grand que a. On en déduit aussi la relation : $2999a + 290\ b = 70c + 997d + 16$.

En combinant ces deux contraintes et en regardant le chiffre des unités, on constate que seule convient la solution : $a = 2$ et $d = 6$.

Il reste alors $29b = 7\ c$, ce qui, avec la condition pour b et c de rester compris entre 0 et 9, n'a plus qu'une solution : $b = c = 0$.

495. Les nombres tricarrés

$49 = 7^2$ est le seul nombre tricarré de 2 chiffres. $16\ 81 = 41^2$ est le seul de 4 chiffres
En dehors de 144 400, les seuls tricarrés à 6 chiffres sont $225\ 625 = 475^2$, $256\ 036 = 506^2$, $576\ 081 = 759^2$ et $324\ 900 = 570^2$. 2499900001 9999800001 est un tricarré à 20 chiffres.

Si un carré $C = c^2$ s'écrit $\overline{AB}$, où $A = a^2$ est un carré de 10 chiffres et $B = b^2$ un carré de 10 chiffres au plus, on a l'équation (*) : $c^2 - b^2 = 10^{10}\ a^2$, avec les conditions :

$a > 31622$ (pour que le nombre ne commence pas par 0) et $0 < b < 100\ 000$.

Une approche du problème consiste à utiliser la théorie des « triplets pythagoriciens ».

Une autre considère l'équation (*) qui se factorise : $(c + b)\ (c - b) = 10\ 000\ 000\ 000\ a^2$.
On peut penser qu'on peut *a priori* distribuer de toutes les façons possibles les systèmes :
$c + b = x$
$c - b = y$
où le produit xy vaut 10 000 000 000 fois un carré, mais $x - y = 2b$ impose à cette différence de rester plus petite que 200 000 sans être négative ou nulle, ce qui ne laisse plus beaucoup de latitudes, d'autant que x et y doivent avoir même parité. Ainsi, $x = 10\ 000\ 000\ 000$ est exclu.
$x = 5\ 000\ 000\ 000$ conduit à :
$c + b = 5\ 000\ 000\ 000$
$c - b = 2\ a^2$,
a doit être cherché inférieur à 50 000, mais pas trop, car $2\ b = 5\ 000\ 000\ 000 - 2\ a^2$ doit être inférieur à 200 000. Seul, $a = 49\ 999$ convient (pour $b = 99\ 999$, $c = 4\ 999\ 900\ 001$ et le tricarré **2499900001 9999800001.**

⊠ *Cette énigme, une variante du problème n°407 (« Nombres carrément carrés »), n'a pas démotivé nos lecteurs, qui ont apporté, comme pour le précédent, de nombreuses contributions. Certaines fournissent une solution au problème (celles de Pierre GAILLARD (38240 Meylan) et de C. ROMON), d'autres en donnent une deuxième, comme celle de Pierre CARRE (Paris) mais certaines vont encore plus loin en prouvant qu'il n'en existe que deux. Jean-Pierre ANDRE (92130 Issy les Moulineaux) et Guy PAILLOTIN (91600 Savigny sur Orge) ont la même approche par encadrement pour limiter les recherches.*

• *Commençons, nous disent-ils, avec les notations de la solution donnée, par poser* $r = c - 10^5 \times a$.

• *La « condition tricarrée » donne* $10^{10}a^2 + b^2 = (10^5 a + r)^2$, *d'où on déduit l'inégalité :*

$$r \leq \frac{b^2}{2 \times 10^5 \times a} < 1{,}6.$$

• *La seule valeur possible de r est donc 1, d'où* $b^2 = 2 \times 10^5 \times a + 1$, *ce qui donne un nouveau minorant pour b :* $b^2 > 2 \times 105 \times 31622 > 79\ 526$.

• *Or* $(b - 1) \times (b + 1) = 2^6 \times 5^5 \times a$ *et comme* $b - 1$ *et* $b + 1$ *ne peuvent être tous deux divisibles par 5, l'un des deux est obligatoirement divisible par* $5^5 = 3125$ *et comme ils sont pairs, l'un d'eux est divisible par 6250. Les seules valeurs possibles pour b sont, à une unité près, les multiples de 6250 compris entre 79 526 et* 10^5. *Seuls deux d'entre eux donnent une valeur entière de a. On trouve en définitive :*

a	b	$c = 10^5 \times a + 1$
33 007	*81 249*	*3 300 700 001*
49 999	*99 999*	*4 999 990 0001*

Les seuls nombres tricarrés à vingt chiffres sont donc 10 894 620 496 601 400 001 et 24 999 000 019 999 800 001.

496. Les nombres diagonaux

La prochaine année « diagonale » est 2015.
Un nombre ne peut jamais être à la fois diagonal et triangulaire.

• Pour calculer le nombre D_n de diagonales d'un polygone convexe de n côtés, il suffit de remarquer que d'un sommet S partent $(n - 3)$ diagonales, puisque les seuls sommets qui ne sont pas joints à S par une diagonale sont S et ses deux voisins immédiats.

On obtient ainsi $n\,(n-3)$ diagonales, mais chacune d'entre elles a été compabilisée deux fois.

Ainsi, $D_n = \dfrac{n\,(n-3)}{2}$, c'est une fonction croissante de n.

Pour approcher 2006, on essaie $D_{64} = 1952$ et $D_{65} = 2015$ qui nous donnent la dernière année diagonale et la prochaine.

• Il y a une relation étroite entre nombres diagonaux et nombres triangulaires $T_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.
En effet, $n\,(n-3) = (n-2)\,(n-1) - 2$. En divisant par 2, cela donne :
$D_n = T_{n-2} - 1$.
Tout nombre diagonal est inférieur d'une unité à un certain nombre triangulaire.
Or, aucun nombre triangulaire n'est inférieur d'une unité à un autre nombre triangulaire.
Un nombre ne peut être à la fois diagonal et triangulaire.

497. Salaire hebdomadaire

Le revenu hebdomadaire d'Alice est 777 €.
Soit H ce revenu hebdomadaire (il s'écrit *aba*), et A son revenu annuel.
A est compris entre 5200 a et 5200 $(a + 1)$.
Par ailleurs, le premier chiffre c de A est égal au dernier chiffre, c'est le chiffre des unités de 2 a.
Cela nous permet d'éliminer la plupart des valeurs de a. Ainsi :
– Pour $a = 1$, $c = 2$ et 5 200 < A < 10 400, donc A ne peut avoir 2 comme premier chiffre.
– Pour $a = 2$, $c = 4$ et 10 400 < A < 15 600, donc A ne peut avoir 4 comme premier chiffre.
– Pour $a = 3$, $c = 6$ et 15 600 < A < 20 800, donc A ne peut avoir 6 comme premier chiffre.
– Pour $a = 4$, $c = 8$ et 20 800 < A < 26 000, donc A ne peut avoir 8 comme premier chiffre.
– Pour $a = 5$, $c = 0$, A ne peut être palindrome.
– Pour $a = 6$, $c = 2$ et 31 200 < A < 36 400, donc A ne peut avoir 2 comme premier chiffre.
– Pour $a = 8$, $c = 6$ et 41 600 < A < 46 800, donc A ne peut avoir 6 comme premier chiffre.
– Pour $a = 9$, $c = 8$ et 46 800 < A < 52 000, donc A ne peut avoir 8 comme premier chiffre.
Reste $a = 7$. $c = 4$ est compatible avec la double inégalité 36 400 < A < 41 600.
A > 40 000 impose à H d'être supérieur à 769. Les valeurs à essayer sont donc 777, 787 et 797. Seule la première conduit à un salaire annuel palindrome, 40 404 €.
(adapté du championnat international des jeux mathématiques, © POLE - FFJM).

498. Avoir la moyenne

Seuls les nombres 481, 518, 592 et 629 « ont la moyenne ».
Si le nombre s'écrit *abc*, on parvient à l'équation : $6\,(100\,a + 10\,b + c) = 222\,(a + b + c)$.
En simplifiant par 6, on obtient : $63\,a = 27\,b + 36\,c$,
qui se simplifie encore par 9 : $7\,a = 3\,b + 4\,c$, ou encore : $7\,(a - c) = 3\,(b - c)$.
On en déduit que la différence $(b - c)$ est un multiple de 7, ce qui, compte tenu du fait qu'il s'agit de chiffres compris entre 1 et 9, ne consuit qu'aux quatre solutions indiquées plus haut.

> ✉ *Si l'on oublie la consigne de ne considérer que les nombres de trois chiffres non nuls, on peut ajouter à la liste deux autres nombres : 307 et 407 nous dit Jacques POLGE (Paris).*

499. Les « nombres de personne »

L'écriture décimale d'un « nombre de personne » a au plus 3 chiffres différents.
• Les chiffres d'un nombre de personne ne peuvent être pairs (l'une de ses « anagrammes » serait multiple de 2) et ne peuvent être égaux à 5 (l'une des « anagrammes » serait multiple de 5).
En conséquence, l'écriture décimale d'un « nombre de personne » ne peut contenir plus de 4 chiffres

différents, 1, 3, 7 et 9.
• Ni 137, ni 139, ni 179, ni 379 ne sont des « nombres de personne » puisque leurs anagrammes respectifs 731, 931, 917, 973 sont divisibles par 7.
• Le nombre 1379 n'est pas non plus un « nombre de personne », il est divisible par 7.
De plus, parmi les restes des la division par 7 de ses anagrammes, on trouve tous les restes possibles : 0 (1379), 1 (1793), 2 (3719), 3 (1739), 4 (1397), 5 (1937) et 6 (1973).
• Si un nombre N comporte les 4 chiffres 1, 3, 7, 9 dans son écriture décimale, choisissons l'une de ses anagrammes A de la façon suivante :
– le bloc le plus à droite, D, comportera les quatre chiffres distincts.
– le bloc de gauche, G, éventuellement nul, comportera les chiffres intervenant plus d'une fois.
Ainsi, A = 10 000 G + D.
La division par 7 de 10 000 G a pour reste *r*.
On choisit D parmi les anagrammes de 1379 de sorte que sa division par 7 ait pour reste 7 – *r*.
A sera alors un multiple de 7. N n'est pas un « nombre de personne ».
L'écriture décimale d'un « nombre de personne » a bien au plus 3 chiffres différents.
Mais comme nous l'ont fait remarquer plusieurs lecteurs, 139 n'est pas un nombre de personne, puisque 931 est un multiple de 7. 1139, en revanche, est un nombre de personne comportant 3 chiffres différents : aucune de ses 12 anagrammes (1139, 1193, 1319, 1391, 1913, 1931, 3119, 3191, 3911, 9113, 9131, 9311) n'est un multiple de 2, de 5 ni de 7.
En résumé, s'il n'y a pas de « nombre de personne » de trois ni de quatre chiffres dont les chiffres sont tous différents, l'écriture d'un « nombre de personne » a au plus trois chiffres différents. 1139 en est un exemple.

✉ *Si les lecteurs attentifs nous ont signalé qu'il n'existait aucun « nombre de Personne » à trois chiffres tous différents, même pas 139 [Maurice BESNIER (Paris), D. BLONDEAU (44210 Pornic), André LANDESMAN (74300 Araches), R. MONNOT (35540 Balaruc les Bains), Roger PROTEAU (94210 la Varenne St Hilaire)] quelques-uns seulement nous ont signalé l'existence de tels nombres à trois chiffres différents... mais à quatre chiffres comme 1139 (Dominique PASTRE, 92130 Issy les Moulineaux, C. ROMON).*

500. Dyslexie multiplicative

Il existe 20 « multiplications pour dyslexique » (le professeur a pu poser la multiplication de gauche ou celle de droite) :
12 × 63 = 21 × 36
13 × 62 = 31 × 26
12 × 84 = 21 × 48
14 × 82 = 41 × 28
34 × 86 = 43 × 68
36 × 84 = 63 × 48
23 × 64 = 32 × 46
24 × 63 = 42 × 36
26 × 93 = 62 × 39
23 × 96 = 32 × 69
On part de la relation : $(10\,a + b)\,(10\,c + d) = (10\,b + a)\,(10\,d + c)$
Elle se simplifie en : $ac = bd$
Il y a 5 groupes de chiffres distincts qui répondent à la question :
1 × 6 = 2 × 3, 1 × 8 = 2 × 4, 3 × 8 = 4 × 6, 2 × 6 = 3 × 4, 2 × 9 = 6 × 3
Ce qui donne les 20 multiplications possibles.