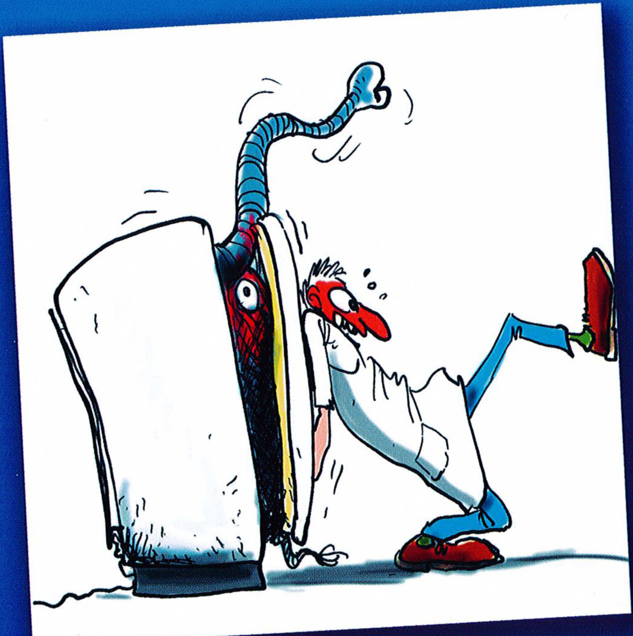
BRUNO WINCKLER

BLAGUES MATHÉMATIQUES ET AUTRES CURIOSITÉS

ILLUSTRATIONS GILLES MACAGNO

PRÉFACE CÉDRIC VILLANI



ellipses

BLAGUES MATHEMATIQUES ET AUTRES CURIOSITES

Bruno Winckler

préface de Cédric Villani

illustrations de Gilles Macagno

ellipses

ISBN 978-2-7298-6451-4

www.editions-ellipses.fr

À ma mère, qui ne s'est pas inquiétée en me voyant développer un sens de l'humour singulier et des goûts tout aussi étranges ; le père de Blaise Pascal n'a pas su garder son calme comme elle, en de pareilles circonstances.

Je remercie également Hakan et Édouard pour le travail de titan fourni dans ces quelques pages, même si j'imagine que vous remercier ne m'épargnera pas une invitation au restaurant.

Et merci aux lecteurs pour leurs gentils mots d'encouragement, qui m'ont convaincu que je ne suis pas le seul excentrique au monde à apprécier cet humour !

Préface

« Au fond, qu'est-ce que c'est, les mathématiques ? »

Combien de fois m'a-t-on posé cette question !

Tant et tant de fois que je finis par répondre en piochant au hasard dans une réserve de réponses possibles. Les mathématiques, une science basée sur une représentation abstraite du monde... Les mathématiques, une science où le savoir s'obtient uniquement par le raisonnement logique... Les mathématiques, une science où l'imagination peut s'exercer sans retenue, sans les contraintes imposées par le monde réel... Les mathématiques, un art autant qu'une science, un jeu autant qu'un art... Les mathématiques, les mathématiques, la mathématique...

Et bien sûr, la mathématique est aussi une activité sociale. Comme les autres sciences, mais avec ses caractéristiques propres, que l'on pourrait commenter à loisir : la communauté mathématique est réduite, peu hiérarchisée, idéaliste au point de passer pour naïve, assez individualiste dans sa façon de produire et assez altruiste dans ses habitudes sociales... les collaborations et compétitions s'y font et défont avec une fluidité d'autant plus grande que les individus sont peu contraints par les équipements et les institutions. Et ainsi de suite ; on pourrait consacrer de longues pages à la sociologie des mathématiciens.

Mais, plus digeste et plus joyeux qu'une longue étude, nous avons les histoires drôles !

Les histoires drôles accompagnent toutes les activités sociales. Elles tissent des liens, dissipent la tension ou l'angoisse, exorcisent la peur des autres, détendent les conflits, font passer les pilules amères, détendent les auditoires avant et après les échanges exigeants, font pardonner les excès, les vilaines manies et les déformations professionnelles, et font simplement passer un bon moment.

En parcourant les histoires drôles compilées avec une incroyable persévérance dans cet ouvrage, on se moquera, ou plutôt l'on se Gaussera des analystes comme des algébristes, des mathématiciens appliqués comme des mathématiciens purs, des grands mathématiciens comme des médiocres, des mathématiciens tout court comme des non-mathématiciens. On s'amusera avec les formules mathématiques, les théorèmes mathématiques, les concepts mathématiques, on rencontrera des blagues mathématiques vulgaires ou distinguées, des blagues que l'on peut partager avec l'homme de la rue et d'autres que seuls apprécieront les mathématiciens professionnels. Elles feront bondir, rugir, réfléchir, éclater de rire, hocher de la tête ou soupirer avec un air consterné.

Certaines histoires drôles s'invitent, à un niveau abstrait ou concret, dans notre quotidien, notre réflexion, partout. Certaines, une fois passé le premier moment de surprise et de joie, s'imposent à une analyse approfondie. Voici l'une de mes préférées, je la tiens de Carlo Cercignani, qui était l'un des meilleurs spécialistes de l'équation de Boltzmann : la blague de la pomme de Darwin.

Peu de gens en sont conscients, mais c'est Darwin, et non Newton, qui comprit la cause de la chute des pommes : en effet, il s'agit bien de sélection naturelle et non d'une loi de la physique. De fait, les fruits des pommiers primitifs tombaient dans toutes les directions : vers le bas et vers le haut, vers l'est et l'ouest et le nord et le sud... mais seuls les pommiers dont les pommes tombaient vers le bas, dans la terre, ont vu leurs pommes fructifier ; ils ont naturellement transmis à leurs descendants le gène des pommes qui tombent vers le bas. Et ce même gène a été transmis encore et encore, de génération en génération, jusqu'à nos jours.

Réfléchissez à cette explication irréfutable, peut-être la verrez-vous surgir à l'improviste en ouvrant votre journal !

Il est temps maintenant de passer aux choses sérieuses et d'aborder la substance de ce recueil. Il existe deux sortes d'ouvrages mathématiques modernes, a dit un jour dans une conférence le célèbre Prix Nobel de physique Cheng Ning Yang : ceux que l'on ne peut lire au-delà de la première page, et ceux que l'on ne peut lire au-delà de la première phrase. Passons sur le caractère décidément non mathématique de cette affirmation (la seconde catégorie de livres est bien sûr incluse dans la première) ; pour réfuter l'assertion, il suffit de montrer que le présent ouvrage constitue un contre-exemple, et pour cela vous n'avez qu'à tourner la page. Excellente lecture !

Cédric Villani

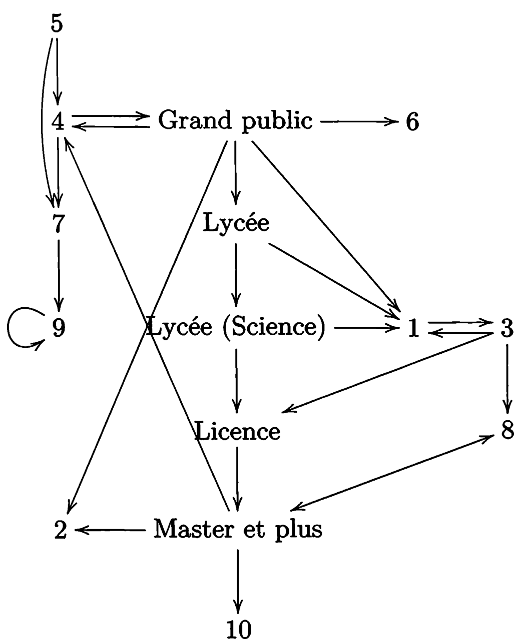
TABLE DES MATIÈRES

Les chapitres (ou sections) avec essentiellement des histoires « tout public », ou ne nécessitant pas de comprendre les termes mathématiques en jeu, sont marqués d'un $\diamondsuit$. Les autres chapitres ne leur sont que partiellement inaccessibles. Pour plus de détails, voir le *Leitfaden*, qui propose un ordre de lecture selon les prérequis.

Résumé

La théorie mathématique de l'humour a toute une histoire : Georg Cantor (1845–1918) avait prouvé l'existence de blagues de mathématiques, mais sa preuve n'était pas constructive. À l'heure où de nombreuses recherches tentent, par exemple, de calculer le degré d'humour de telles blagues (voir [KLT]), apparemment lié à la conjecture *abc*, ou de trouver des applications de cette théorie à la physique, je propose un modeste théorème de classification des différentes formes d'humour mathématique : le cardinal de l'ensemble des blagues mathématiques, modulo la relation d'équivalence thématique, est fini. Mieux, je conjecture que ce cardinal est égal à 9, et ce traité propose une construction effective de ces classes d'équivalence, avec comme applications les démonstrations du théorème de Fermat et de l'hypothèse de Riemann, par exemple. On est en droit d'espérer que ces travaux permettront d'enfin découvrir le corps à un élément, plus connu sous le nom de $\mathbb{F}_{\mathrm{un}}$. Le *Leitfaden*, ci-dessous, indique dans quel ordre lire la preuve, selon les connaissances du lecteur : une flèche $1 \to 2$ signifie que la connaissance du chapitre 1 est préalable à la lecture du chapitre 2.

LEITFADEN



CHAPITRE 1

HUMOUR SUR LES SYMBOLES

On commence en douceur avec une blague par section, en douceur...

1.1 La blague de la honte

Que vaut $\frac{\sin(x)}{n}$ pour tout x, tout n ? 6. La preuve :

$$\frac{\sin x}{n} = \frac{\mathrm{si}x}{1} = \mathrm{six}.$$

Pour que cette partie ne soit pas trop dépourvue, j'en fais une autre : qui a enlevé Hélène de Troie ?

Réponse : Icare, parce que $i^2 \cdot \ln(3) = -\ln(3)$. Aha (Certains doivent se dire que ça commence bien).

1.2 La prochaine sera bien

Pour me mettre dans la poche la majorité de la scène humoristique francophone d'emblée, une blague sur les blondes !

Un enseignant en mathématiques veut apprendre à une élève (blonde !) à calculer des limites. Après quelques explications sommaires, il donne en exemple cette limite :

$$\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = +\infty.$$

La blonde lui assure alors qu'elle a compris, mais pour en avoir la certitude, le professeur lui demande de calculer une autre limite du même acabit. Voici le résultat qu'elle propose... :

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\omega.$$

Une variante demande à la blonde d'étudier $\lim_{n\to 0^+} \frac{Z}{n}$, après avoir eu en exemple $\lim_{n\to 0^+} \frac{8}{n}$. Les mathématiciens anglais connaissent évidemment la limite $\lim_{c\to 0} \frac{\sec(x)}{c^2}$ = *infinite sex*. J'ai vu, également, la boutade

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{5x} = \frac{\sin(70)}{50} \quad !$$

Ou encore, mais là ça n'a plus grand chose à voir :

$$\lim_{8\to 9} \sqrt{8} = 3, \text{ et}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} x = \text{o}.$$

1.3 Sex is fun !

Soit $f(a) = (e^x)^{1/n}$.

$$\lim_{t\to\infty}\left(f(a) - \frac{1}{f(t)}\right) = \frac{d}{dx}f(u) \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\left(f(a) - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{d}{dx}f(u)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}(f(a) - 0) = \frac{d}{dx}f(u).$$

Ceci donne :

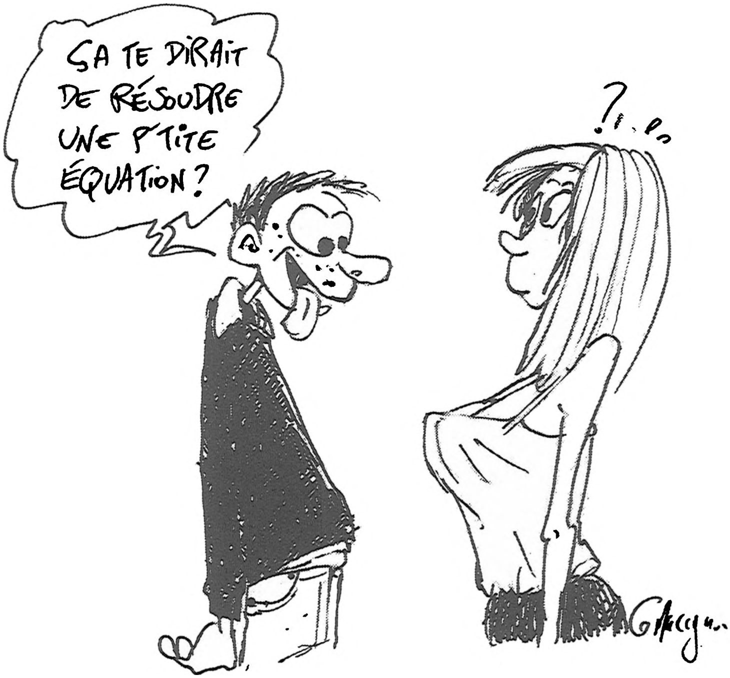
$$(e^x)^{1/n} = \frac{d}{dx}f(u) \Leftrightarrow e^x = \frac{d}{dx}f(u)^n \Rightarrow \int e^x = \int \frac{d}{dx}f(u)^n.$$

On conclut :

$$\int e^x = f(u)^n.$$

1.4 En fait j'en ai d'autres

1. Une formule très légère : $\frac{2abo qpa\pi c}{2\pi r^2} = 2qbc$ (Deux abbés occupés à pisser sur deux pierres carrées égalent deux culs baissés).
2. Que vaut 8 divisé par 2 ?
   Réponse : Verticalement, ça donne 3, horizontalement, ça donne 0.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Que vaut $3 \times \varepsilon$?
   Réponse : 8. Car $3 \times \varepsilon = 3\varepsilon = \varepsilon 3 = 8$.



4. Soit ω un nombre réel vérifiant $\omega + \frac{\pi}{2} = 3$ et $\omega - \frac{\pi}{2} = \varepsilon$. Combien vaut $\omega + \pi$?

   Réponse : m.

5. Combien égale $0 + 0$?

   Réponse : $0 + 0 = \theta\tau\tau$.

6. Combien égale $x - x'$?

   Réponse : $x - x' = x(1 - 1')$.

7. Qu'est-ce qu'une matrice festive ?

   Réponse : Une matrice à coefficients a_{jt}.

8. Quel animal est le plus doué dans le calcul de $\cot^4(a^5)$?

   Réponse : Le coq, parce que $\cot(\cot(\cot(\cot(aaaaa))))$!

9. Quel est le volume d'une pizza de rayon z et d'épaisseur a ?

   Réponse : $pi \cdot z \cdot z \cdot a$. Ce résultat est souvent appelé le second théorème de la pizza ; les intéressés seront contents d'apprendre que le premier théorème de la pizza, démontré en 2010, permet de savoir comment découper équitablement une pizza entre deux personnes, quand le couteau ne passe pas par le centre de la pizza.

10. Plus sérieusement, combien fait, une fois développé, le produit

$$(x-a)(x-b)\cdots(x-z)?$$

Réponse : On trouve que ça fait 0 !

11. Pour les spécialistes de la théorie des catégories, qu'est-ce qu'un covecteur ?

Réponse : C'est ça : $\overleftarrow{x}$.

1.5 Superthéorèmes

Voici une liste de théorèmes qui serviront dans la vie de tous les jours ! Merci les maths. Certains remarqueront que certains théorèmes n'ont rien à voir avec l'humour sur les symboles, mais on a beau dire que « les maths, c'est l'ordre », la frontière entre les différents domaines est en général assez floue. Ici, c'est la frontière entre l'humour sur les symboles et l'humour sur le jargon qui devient incertaine. Cette section fait donc office de transition.

Théorème 1 *π est irrationnel.*

Preuve. Montrons d'abord ce petit lemme : $\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}} = \pi$. En effet :

$$\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}} = \frac{1 \cdot \text{vache}}{\text{oiseau}} = \frac{1 \cdot \beta \cdot \pi}{\beta 1}.$$

On a en effet utilisé, d'une part, la commutativité du produit (c'est-à-dire le fait que $xy = yx$), puis le fait qu'une vache soit une bête à pis ($\beta\pi$), et un oiseau une bête à ailes (βl). On simplifie, et on obtient :

$$\frac{\text{cheval}}{\text{oiseau}} = \pi.$$

Alors, comme il n'y a aucune mesure entre le cheval et l'oiseau, π est incommensurable, ou comme on le dit plus familièrement dans le jargon mathématique, il est irrationnel... □

Dingue ! Continuons.

Théorème 2 (Théorème du misogyne) *Les filles sont le mal absolu.*

Preuve. Les filles, comme chacun sait, nécessitent beaucoup de temps et d'argent :

$$\text{filles} = \text{temps} \cdot \text{argent}.$$

Or, il est connu que « le temps, c'est de l'argent » :

$$\text{temps} = \text{argent}.$$

Ce qui nous donne donc :

$$\text{filles} = (\text{argent})^2.$$

Et parce que l'argent est la racine de tout mal :

$$\text{argent} = \sqrt{\text{le Mal}}.$$

Donc... filles $= \left(\sqrt{\text{le Mal}}\right)^2$. Nous sommes forcés d'en conclure que :

$$\text{filles} = |\text{le Mal}|. \quad \square$$

Maintenant, je m'adresse aux filles dont le petit copain a sorti cette blague vaseuse, vous pourrez leur dire : moi $=$ génial, toi $= -$génial, donc :
moi $+$ toi $= 0$, et en corollaire : moi $-$ toi $=$ doublement génial (les maths ne mentent jamais).

Théorème 3 $\frac{Vert}{Kroumir}$ $=$ *Cassoulet.*

Preuve. En effet, en simplifiant par r, en obtient $\frac{\text{Vet}}{\text{Kroumi}}$. D'où, comme v n'est rien : $\frac{\text{Vet}}{\text{Kroumi}} = \frac{\text{et}}{\text{kroumi}}$. Qui dit *umi* dit t, donc : $\frac{\text{et}}{\text{kroumi}} = \frac{\text{et}}{\text{krot}}$. On simplifie par t. De plus, le *ro* se biffe, donc finalement : $\frac{\text{et}}{\text{krot}} = \frac{\text{e}}{\text{k}}$. Or k sous l'$é$ donne bien cassoulet... $\square$

Théorème 4 *Moins on en sait, plus on gagne.*

Preuve. D'une part : la connaissance, c'est le pouvoir. D'autre part : le temps, c'est de l'argent. Comme le sait tout ingénieur,

$$\text{puissance} = \frac{\text{travail}}{\text{temps}}.$$

Ceci, combiné aux équations connaissance $=$ pouvoir et temps $=$ argent, donne : connaissance $= \frac{\text{travail}}{\text{argent}}$. On trouve finalement :

$$\text{argent} = \frac{\text{travail}}{\text{connaissance}}.$$

Ainsi, quand la connaissance tend vers zéro, l'argent tend vers l'infini, quel que soit le travail effectué. □

Belle leçon de société pour nos enfants !

Ici, un théorème dont la démonstration est laissée à titre d'exercice au lecteur :

Théorème 5 *Étudier égale échouer.*

Cette proposition découle du fait que étudier = ne pas échouer, et que ne pas étudier = échouer, puis on somme les deux membres...

Théorème 6 *Une personne sensée est folle.*

Preuve. En effet,

$$\text{personne sensée} = \frac{1}{2}\text{personne sensée} + \frac{1}{2}\text{personne sensée}.$$

Or, une personne à moitié sensée est à moitié folle, d'où

$$\frac{1}{2}\text{personne sensée} = \frac{1}{2}\text{personne folle}.$$

Alors :

$$\text{personne sensée} = \frac{1}{2}\text{personne folle} + \frac{1}{2}\text{personne folle} = \text{personne folle},$$

d'où le résultat. □

Enfin, on abandonne presque totalement l'humour sur les symboles avec, pour commencer, un beau théorème dû au très grand mathématicien hongrois György Pólya (1887-1985) :

Théorème 7 *Les oiseaux ne boiront jamais d'alcool.*

Preuve. Pour ce faire, on a besoin d'un petit lemme démontré en 1921...

Lemme 1 *Supposons qu'un ivrogne se promène dans un espace à d dimensions, en se déplaçant à chaque temps t dans une des $2d$ directions « de base » de l'espace avec une probabilité égale pour chaque direction (à savoir $\frac{1}{2d}$). Alors :*

- *Dans un espace à une ou deux dimensions, l'ivrogne repassera une infinité de fois par son point de départ (et même par tout autre point).*

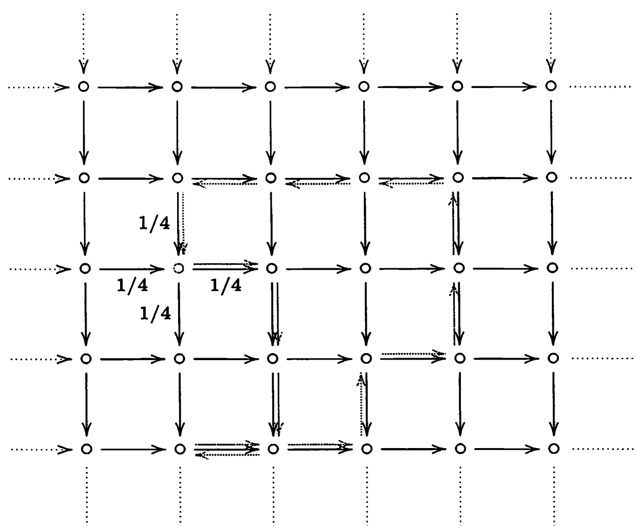

AVEC ÇA.
J'RISQUE PAS
DE CROISER UN..
HIPS... ALCOOTEST!

– *Si la dimension est strictement plus grande que 2, l'ivrogne a une probabilité 1 de s'éloigner à l'infini du point de départ.*

Pour une démonstration de ce résultat *, voir [Pól] par exemple.

Le théorème découle facilement du lemme : au contraire de l'ivrogne humain qui se balade dans les directions à gauche–à droite–avant–arrière (dimension 2, donc, comme ci-dessous) et qui retrouvera donc forcément sa maison, les ivrognes aviaires (s'ils existent) se déplacent dans les airs, donc dans un espace à trois dimensions. De fait, ils risquent de ne jamais retrouver leur maison, ce qui les contraint à ne pas boire...□

FIGURE 1.1 – Cas $d = 2$ du lemme de Pólya : bien !



Théorème 8 *Tout est de la même couleur.*

*. Dont la vraie formulation est : pour $d = 1$ et $d = 2$, la marche aléatoire isotrope est récurrente. Pour $d = 3$ et au-delà, la marche aléatoire isotrope n'est pas récurrente ; on dit alors qu'elle est transitoire. Pas de panique, les schémas ci-après illustrent la situation.

Preuve. Montrons par récurrence la phrase : « n objets sont toujours de la même couleur. »

Pour $n = 1$, c'est évident qu'un objet est de sa même couleur.

Supposons que n objets soient toujours de la même couleur, et considérons $n + 1$ objets. D'après l'hypothèse de récurrence, les n premiers objets sont de la même couleur, et les n derniers aussi. Les $n + 1$ objets sont donc de la même couleur, ce qui achève la récurrence. n objets quelconques sont donc toujours de la même couleur, par conséquent tout est de la même couleur. □

Ce théorème a longtemps été connu sous la forme « tous les chevaux sont de la même couleur », mais une percée récente a permis de généraliser la preuve à tous les objets. La science progresse !

Du coup, le corollaire suivant est l'évidence même :

Corollaire 1 *Tout est blanc.*

Preuve. Il est axiomatique que les éléphants blancs existent (voir *The Stolen White Elephant* de Mark Twaint par exemple). Alors, tous les objets sont blancs, par le théorème précédent.

Comme on peut s'en douter, les applications de ce résultat sont nombreuses et d'une grande profondeur. Le *theorem 2*, un peu plus loin, en est une illustration.

Théorème 9 *Un chat a neuf queues.*

Preuve. Aucun chat n'a huit queues. Un chat a une queue de plus qu'aucun chat. Donc un chat a neuf queues. □

Théorème 10 *Tout entier positif est intéressant.*

Preuve. Supposons le contraire. Il y a donc un plus petit élément parmi les entiers qui ne sont pas intéressants. Mais, cette particularité rend cet entier drôlement intéressant ! On en déduit donc une contradiction. □

Une variante,

Théorème 11 *Tout entier positif est inintéressant.*

Preuve. Supposons le contraire. Il y a donc un plus petit élément qui ne soit pas inintéressant. Ok, et alors ? □

Théorème 12 *Il y a une infinité de nombres premiers.*

Preuve. Il y a au moins deux nombres premiers ; il suffit de prendre le premier nombre pair et le nombre premier de Grothendieck. À présent, supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers, et considérons le dernier de la liste. Puisqu'il est le dernier, il n'est pas premier par la remarque préliminaire, contradiction. □

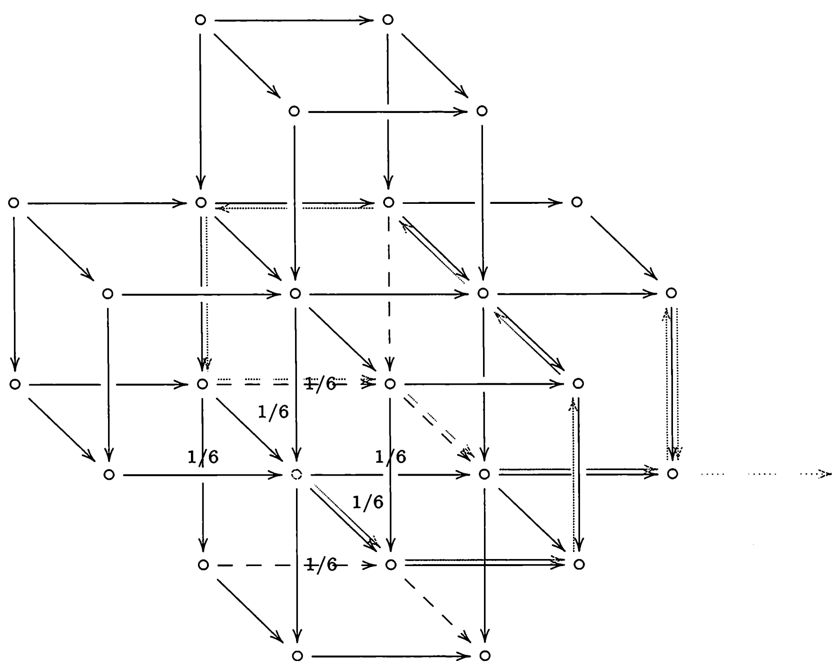
Théorème 13 *Il y a une infinité de nombres composés.*

Preuve. Supposons qu'il y en ait un nombre fini. Multipliez-les entre eux (voir aussi [Kar]). □

Théorème 14 *L'injectivité implique la bijectivité.*

Preuve. Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent ; mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent, donc f est surjective puis bijective ! □

FIGURE 1.2 – Cas $d = 3$ du lemme de Pólya : pas bien ! Et pénible à dessiner...



CHAPITRE 2

HUMOUR SUR LE JARGON

2.1 La vie rêvée des maths

> *J'avais un ami qui était un autre moi, comme le sont 220 et 284. Mais un jour, 284 a fricoté avec 53 et ça a mal tourné.*

Pythagore.

2.1.1 Exponentielle et Logarithme

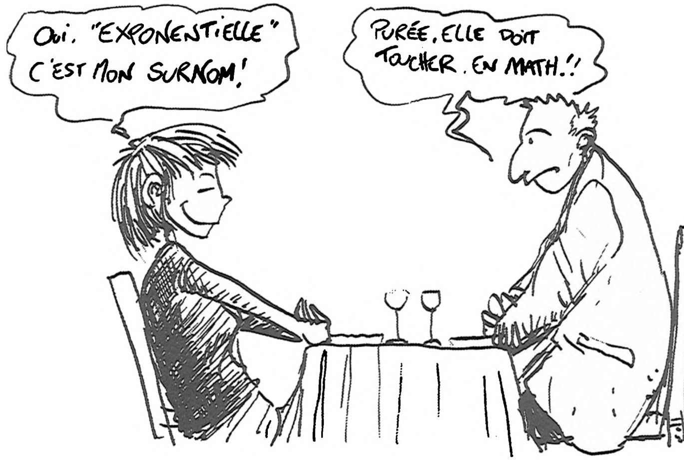
1. Logarithme et Exponentielle vont au restaurant. Qui paie ? Exponentielle, car Logarithme ne paie rien. *
2. Plus tard dans la soirée, Logarithme et Exponentielle vont dans une boîte de nuit. Logarithme danse, discute et s'amuse, mais Exponentielle reste seule dans son coin. Au bout d'un moment, Logarithme va la voir et lui demande ce qui ne va pas. Exponentielle répond : « J'ai beau essayer de m'intégrer, ça ne change rien. »

   Dans le même goût, qui n'a cependant rien à voir avec l'exponentielle et le logarithme :

   Tous les nombres entiers vont à une fête, et les nombres étant ce qu'ils sont, tous les pairs restent entre eux tandis que les impairs en font de même, si bien que les deux groupes n'interagissent pas entre eux. Alors que 4 parlait à sa moitié, 2, il remarque que 0 est assis dans un coin, et suggère à 2 que 0 étant pair, il devrait se joindre à eux, ce que 2 approuve. C'est pourquoi 4 invite 0 à se joindre à leur petit groupe.
   « Voudrais-tu rejoindre notre petit groupe ? » demande 4.
   Ce à quoi 0 répond : « Pourquoi ? J'ai rien à ajouter ! »

---

*. Mais Logarithme ne perd rien pour attendre !



3. Plus tard dans la nuit, Logarithme et Exponentielle rentrent chez eux un peu bourrés. Logarithme demande : « Est-ce que je prends le volant ? », Exponentielle répond : « Je préfère que ce soit moi qui conduise. Au cas où on dérive... »
Variante : C'est Logarithme et Exponentielle sur un bateau. Tout à coup, Logarithme est terrifié : « Attention, on dérive ! », et Exponentielle de répondre : « Je m'en fiche, ça ne me change rien », puis Logarithme ajoute : « Moi c'est l'inverse... »

4. Une fonction constante et exp marchent tranquillement dans la rue. Soudain la fonction constante aperçoit un opérateur différentiel qui approche, menaçant, et se sauve. $x \mapsto e^x$ la rattrape et lui demande ce qui lui prend.
« Tu ne te rends pas compte ! Si l'opérateur différentiel me rencontre, il me dérivera et il ne restera rien de moi !

   – Ah ! Ah ! dit $x \mapsto e^x$, il ne m'inquiète pas, MOI, je suis e puissance x ! »

   Et il poursuit sa route. Évidemment, au bout de quelques mètres, il rencontre l'opérateur différentiel. Il lui lance : « Salut, je suis $x \mapsto e^x$! », et l'opérateur différentiel répond :
« Salut, je suis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$... »

2.1.2 Reconnaître une fonction qui nous aborde dans la rue

Cette jeune section encore en devenir vous permettra de reconnaître une fonction qui vous aborde dans la rue à sa première phrase, parce qu'on est souvent pris au dépourvu dans telle situation ; tous les exemples ci-dessous proviennent de mon expérience personnelle (? ? ?).

1. Pour une fonction continue : « Salutjesuis$f$çavabien ? ».
2. Pour une fonction périodique : « Salut, salut, salut, salut... ».
3. Pour une fonction nulle : « ... ».
4. Pour une fonction indicatrice : « ... lutçav... ».
5. Pour une fonction qui tend vers 0 : « SAAAAAAaaaaaaaaa... ».
6. Pour une fonction qui tend vers l'infini :
   « ... oooooaaaaaAAAAAAAAAA... »
7. Pour une fonction exponentionnelle :
   « saAAAAAAAAAAAAAAA... ».
8. Pour une fonction identité : « fonction identité. »

2.1.3 Autres tranches de vie

1. Deux suites de Cauchy ont envie de s'amuser, et elles décident d'aller à une soirée *no-limit*. Mais à l'entrée, le videur les empêche de passer :
   « C'est complet ! »
2. Alors que 153 et 641 sortent ensemble, 153 dit à 641 :
   « Je t'aime, 641. J'aime ta façon d'être la somme d'entiers à la puissance 4. J'aime ta raison d'être un diviseur d'un nombre de Fermat. »
   641 répond alors :
   « Je, euh, je t'aime aussi, 153.
   – Pourquoi tu m'aimes, 641 ? demande 153.
   – Eh bien, je, euh, j'aime comment tu es la somme de tes chiffres au cube.
   – Tu ne m'aimes pas ! pleure 153. Tu n'aimes que ma représentation en base 10 ! »
3. Nos deux braves fonctions trigonométriques $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$, étant périodiques, trouvent que la vie se répète beaucoup et décident de partir à l'aventure. Tout à coup, l'opérateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ apparaît devant elles, prêt à dériver tous ceux qui croisent son chemin.

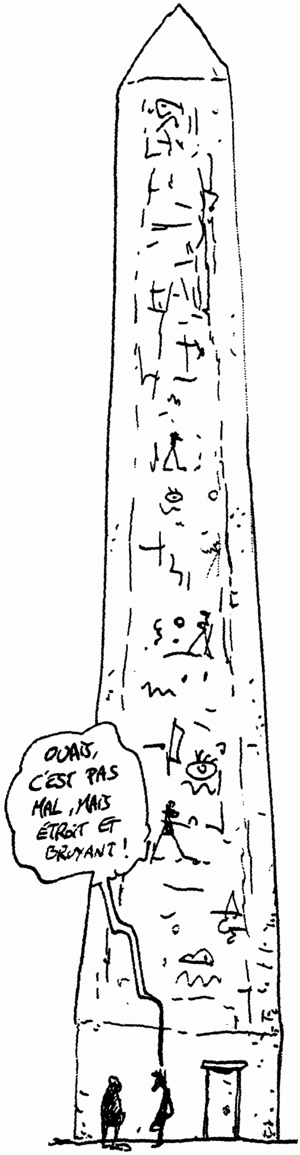
Nos deux consœurs paniquées réagissent immédiatement :
« Vite ! Vite ! Partons, ou nous serons réduites à néant par le maudit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$! crie sin.
– Fuyons !
– Mais on ne sait pas courir...
– Aaaah !
– Du calme, j'ai une idée, tempère sin.
– Ah ? s'interroge cos.
– Prends-moi au-dessus de toi ! Vite !
– Mais pourquoi ?
– Parce que, comme ça, on pourra prendre la tangente ! »

4. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et le logarithme népérien vont au restaurant. Non content de ne pas payer, Logarithme mange en faisant énormément de bruit. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lui dit :
« Arrête, tu m'embarrasses ! Tu pourrais être plus discret !
– Bah non, tu t'attendais à quoi ? Je suis continu. »
5. C'est l'histoire de deux complexes z_1 et z_2 qui se promènent dans le demi-plan inférieur. Aigris d'être délaissés de par leurs imaginaires négatifs, il se disent : « Barrons-nous ! »
6. Deux nombres, un complexe et un réel, vont en boîte de nuit. Le complexe s'amuse, mais le réel reste prostré au bar, apparemment triste. Le complexe décide de lui changer les idées :
« Qu'est-ce qu'il y a ?
– Je me pose trop de questions...
– Tu complexes ? Bah, viens danser ! »
7. C'est l'histoire de deux belles fonctions f et g définies sur I, telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.
« Regardez-moi, comme je suis belle ! dit $g(x)$.
– Oui mais tu as tout copié sur moi... répond $f(x)$. »
La fonction g, vexée, revient le lendemain.
« Salut, alors ? lance $g(x+h)$.
– Mais, qu'est ce que tu as ? demande $f(x)$.
– Bah j'essaye de me différentier... »
8. Et Dieu dit : « Que les nombres soient », et les nombres furent. Il créa les nombres pairs et impairs, et leur dit d'être féconds et de se multiplier ; et il leur commanda de suivre les lois de l'induction.
9. C'est l'histoire de $x \mapsto x^2$ qui part se promener dans la forêt. À son retour, la fonction est devenue $x \mapsto |x|$. Pourquoi ?
Réponse : Parce qu'elle s'est pris une racine.
10. Où les nombres complexes vont-ils pour prendre un verre ?
Réponse : Ils vont au z bar, bien sûr !

11. 8, 9, 10, 11 et 12 font la course. Qui gagne ?
    Réponse : 11, parce qu'il est premier !
12. Que dit 0 en rencontrant 8 ?
    Réponse : Belle ceinture !
13. Pourquoi le nombre zéro n'a-t-il aucune crédibilité au sein des nombres complexes ?
    Réponse : Parce qu'il n'a jamais d'argument.
14. Quelles sont les fonctions les moins sérieuses des mathématiques ?
    Réponse : les polynômes du second degré.
15. Quel dialogue entretiennent π et i lorsqu'ils se croisent ?
    Réponse : i : « Sois rationnel. »
    π : « Sois réaliste. »
16. Pour qui les cubes travaillent-ils ?
    Réponse : $\mathbb{R}^2$, car leurs patrons sont là-bas.
17. Quel nombre ne dort jamais ?
    Réponse : 8. Il est bien trop grand une fois couché.

2.2 En vrac

1. Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné !
2. $0+0+0=0$, n'est-ce pas ? Et pourtant : $0+0+0$, c'est trois fois rien. Et trois fois rien, c'est déjà un petit quelque chose...
3. Le fils de la concierge et du concierge de l'obélisque ? Il existe parfaitement puisque c'est le produit de deux imaginaires conjugués, qui est réel.
4. La fonction sinus est une fonction vache : elle coupe l'abscisse tous les pis.
5. Dans un triangle équilatéral, les 3 angles sont égaux... D'après le sens profond de la notion d'égalité, $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ signifie qu'on a affaire à trois noms différents du même objet, non ? Donc il n'y a qu'un seul angle dans un triangle équilatéral. Avec le même raisonnement, je peux prouver qu'il n'existe qu'un citoyen français. Tous les citoyens français sont égaux en droit. D'après le sens profond de l'égalité (?), Citoyen 1 = Citoyen 2 = Citoyen 3 = *etc.* Donc, il n'y a qu'un seul citoyen en France.


OUAIS, C'EST PAS MAL, MAIS ÉTROIT ET BRUYANT !

6. Lors d'un discours prononcé devant une assemblée de professeurs de mathématiques de tout le pays, George W. Bush les met en garde contre le mauvais usage de leur position avantageuse, lorsqu'il s'agit d'inculquer aux jeunes Américains des visions politiques extrêmistes.
« Si j'ai bien compris, dit le président, vous assurez régulièrement des cours d'algèbre dans lesquels vous apprenez à vos étudiants la résolution d'équations avec l'aide de *radicaux*. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci... »
7. Pendant une conférence de presse tenue à la Maison Blanche, le président George W. Bush accuse les mathématiciens et les informaticiens des États-Unis de promouvoir le programme démocratique.
« Tous les départements de mathématiques, ou du moins d'informatique proposent une introduction aux AlGore-ithmes, déplore-t-il. Mais pas un seul enseigne les GeorgeBush-ithmes... »
8. Deux mathématiciens étudient la convergence d'une série. Le premier dit : « Tu te rends compte que cette série converge même quand tous les termes sont rendus positifs ? »
Le second demande :
« Tu en es sûr ?
– Absolument ! »
9. En combinant les découvertes d'Einstein et de Pythagore : dans un triangle rectangle, $E = mc^2 = m(a^2 + b^2)$.
10. La vie est complexe : elle a une partie réelle et une partie imaginaire.
Variante : Z est assis, dans le bureau d'un psychologue, avec x à ses côtés, l'air inquiète.
« Quel est votre problème, madame ? demande le psy.
– Eh bien, répond Z, c'est mon fils, x. Il pense avoir un ami imaginaire, y ».
Après une profonde réflexion, le psy répond :
« Madame, je pense que votre fils est complexé ».
11. Certains disent que le pape est le plus grand cardinal. Mais certains insistent sur le fait que c'est impossible, puisque chaque pape a un successeur.
12. L'éléphant est énorme, mais le mammouth est $(n + 1)$-norme.
13. Lorsqu'on tape un faux numéro de téléphone, on peut entendre : « Le numéro que vous avez composé est imaginaire. Veuillez tourner votre téléphone de 90° et réessayer ! »
La même blague, plus formellement, donne « l'identité » $8 \cdot i = \infty$.

14. L'autre jour, un homme se baladait à vélo dans la campagne. Au bord d'un petit chemin qu'il ne connaissait pas, il vit soudain un immense tas d'os. Alors qu'il s'approchait du tas, il aperçut un âne à l'air bougon semblant monter la garde.

    Ce tas était vraiment beau, aussi voulut-il en faire le tour. Mais le sentier qui permettait cela semblait pour le moins cahoteux, et le vélo, c'est bien connu, ça fait mal aux fesses. Eh puis, trimbaler un vélo tout en marchant à pied, ça n'est pas pratique. Alors, cet homme s'adressa à l'âne : « Bonjour !
    - Grmblmbl.
    - Excusez-moi de vous déranger, mais votre tas est si beau, je ne résiste pas à l'envie d'en faire le tour. Accepteriez-vous de garder mon vélo pendant ce temps ? »

    Mais la réponse de l'âne bougon fut plutôt floue :
    « Grmlblblbl »

    Comme l'homme brûlait d'envie de faire ce tour, il laissa quand même son vélo à l'âne et partit. À son retour, l'âne était toujours là, et le vélo aussi. Après avoir remercié le bougon animal, le cycliste reprit son chemin sur son beau vélo bleu en se disant que les apparences étaient trompeuses, et que l'âne était finalement un personnage intègre.

    Un peu plus loin, c'est au pied d'une montagne qu'il se retrouva. Devant lui, il y avait une grotte, et comme il s'en approchait, une multitude de gnomes en sortit.
    « Bonjour étranger ! dirent-ils en chœur. Aujourd'hui, c'est jour de fête chez nous. Nous célébrons notre anneau sacré, pour qu'il nous apporte une année de plus chance et prospérité.
    - Oh, s'exclama notre héros, puis-je voir cet anneau ?
    - Bien sûr, il vous suffit d'entrer dans la grotte, et de continuer toujours tout droit. Vous ne pouvez pas le louper. »

    L'homme s'avança donc, et lorsqu'il fut devant l'anneau, celui-ci se transforma en... tigre !

    La morale de l'histoire : si l'âne au grand tas est intègre, l'anneau des polis gnomes est un tigre.

15. J'ai une question pour tous ceux qui ne connaissent pas Hilbert : dans ce cas, que faites-vous dans son espace ?

16. Qu'est-ce qu'un ours polaire ?

    Réponse : Un ours cartésien après changement de coordonnées polaires.

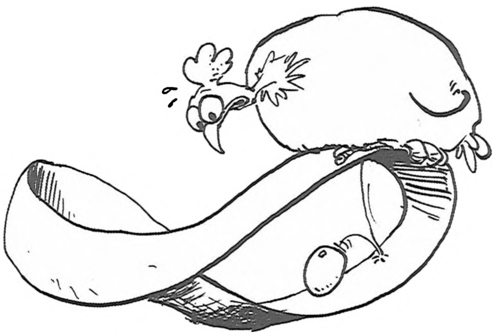
17. Qu'a dit Pythagore, lorsqu'il a été confronté à la racine carrée de 2 ?

Réponse : « Bon, y a plus qu'à trouver une explication rationnelle à ceci... »

18. Qu'est-ce qui est jaune, normé et complet ?
    Réponse : Un espace de Bananach.
19. Qu'est-ce qui est jaune, normé, complet et meilleur avec de la chantilly ?
    Réponse : Un Bananach Split.
20. Qu'est-ce qui fait Coin-Coin ?
    Réponse : Un canard.
21. Qu'est-ce qui fait Boin-Boin ?
    Réponse : Un Banach.
22. Qu'est-ce qu'un dortoir ?
    Réponse : Un groupe de Lie.
23. Combien vaut un Gauss ?
    Réponse : $\frac{\pi}{2}$, parce que pivot de Gauss !
24. Que devient un p-Sylow, lorsqu'il sombre dans la folie ?
    Réponse : Un Sylow à grain !
25. Pourquoi appelle-t-on une suite géométrique, « géometrique » ? Et pourquoi appelle-t-on une suite arithmétique, « arithmétique » ?
    Réponse : On n'en sait rien mais il doit sûrement y avoir une raison.
26. Quelle est la chanson la plus longue du monde ?
    Réponse : *Aleph-nought Bottles of Beer on the Wall.*
27. Pourquoi la poule traverse-t-elle le ruban de Möbius ?
    Réponse : Pour aller de l'autre... Euh, hum... *

*. Ou : Pour aller du même côté.

28. Pourquoi le ruban de Möbius ne peut-il pas être inscrit à l'école ?
Réponse : Parce que les élèves doivent être orientés.



29. Quel est le développement de $(a+b)^n$?
Réponse : $(a+b)^n$
$(a \quad + \quad b) \quad ^n$
$(a \qquad + \qquad b) \qquad ^n$
etc.
30. Pourquoi, pour les Romains, l'algèbre n'était-t-elle pas vraiment intéressante ?
Réponse : Parce que X était toujours égal à 10.
Pire encore, ce qui aurait pu être une découverte avant-gardiste (à savoir l'existence de i tel que $i^2 = -1$) chez les mathématiciens romains les a menés à leur perte :

Théorème 15 (Théorème de Caius Dutus, 314 av. JC)
$81 = -100$.

Preuve. On sait que $X = 10$ et $IX = 9$. Alors $(IX)^2 = 81$, mais aussi $(IX)^2 = I^2X^2 = (-1) \cdot (100) = -100$. Nous sommes obligés de conclure que $81 = -100$. $\square$
31. Pourquoi ne faut-il jamais raconter de secret à un corps ?
Réponse : Parce qu'il ne tait rien.

32. Quelle est la différence entre un diamètre et un rayon ?
Réponse : Un rayon.
33. Qu'est ce qu'une permutation ?
Réponse : e'cst aç.
34. Pourquoi les vampires n'aiment que les nombres algébriques ?
Réponse : Parce qu'ils disent que « $1 \times \pi \times e$ ça transcende » (un pieu ça te rend cendres).
35. Qu'est-ce qu'un dilemme ?
Réponse : Un lemme qui prouve deux résultats.
36. Qu'est-ce qui est gros, fait de boue, mais utile juste avant un théorème ?
Réponse : Un gros-lemme.
37. Comment fait-on pour savoir si une porcherie est complète ?
Réponse : On prend une suite de cochons...
38. Pourquoi les poissons américains peuvent-ils entrer au Canada sans passeport ?
Réponse : En application de la loi de réciprocité aquatique.
39. Deux éléphants, dont un impuissant, sont au bord de l'eau avec un jeune éléphanteau. Question : Qui est le père de l'éléphanteau ?
Réponse : L'impuissant, car l'heureux père barrit sans trique.
40. Qu'est-ce qui est gris, énorme et a des coefficients entiers ?
Réponse : Une équation éléphantienne.
41. Pourquoi les mathématiciens ont-ils autant de difficultés pour les femmes que pour les barycentres ?
Réponse : Parce qu'ils sont sans cesse à la recherche du point G.
42. Pourquoi ne faut-il pas lancer un défi à un mathématicien ?
Réponse : Parce qu'il l'intègre et en fait φ !
43. Pourquoi les fonctions K et φ ne prennent-elles jamais la même valeur ?
Réponse : Parce que lorsqu'on fait $\varphi(x)$, on ne fait pas $K(x)$.
44. Quel est le comble pour un mathématicien ?
Réponse : C'est de se coucher avec une inconnue et de se réveiller avec un problème.
45. Qu'obtient-on en croisant un éléphant et une banane ?
Réponse : $|\text{éléphant}| \cdot |\text{banane}| \cdot \sin(\theta)$.
46. Qu'est-ce qu'un Kinder Surprise sans jouet dedans ?
Réponse : un Kinder injectif, car son noyau est réduit à zéro.

47. Qu'est-ce qui est poli et travaille pour une entreprise téléphonique ?
Réponse : un opérateur déférentiel.

48. Pourquoi, après un diner dans un restaurant chinois, les mathématiciens préfèrent-ils emporter les restes à la maison ?
Réponse : Parce qu'ils connaissent le théorème des restes chinois !

49. Quel est le nombre le plus laid des mathématiques ?
Réponse : -1 (ou plutôt : i^2...). La concurrence avec les $(\pi k)^2$ était rude ($k \in \mathbb{Z}$).

50. Qu'est-ce qu'un sous-groupe de cardinal 3 ?
Réponse : Les 2 Be 3 (ceci marche avec beaucoup d'autres groupes).

51. Monsieur et Madame Bertienne ont un fils. Comment s'appelle-t-il ?
Réponse : Basile.

52. Monsieur et Madame Naume ont une fille. Comment s'appelle-t-elle ?
Réponse : Pauline.

53. Monsieur et Madame Gal ont un fils. Comment s'appelle-t-il ?
Réponse : Martin.

54. Monsieur et Madame Merreurs-que-la-dernière-fois-si-on-fait-les-démonstrations-à-deux ont quinze enfants. Comment s'appellent-ils ?
Réponse : Justin, Maud, Anna, Lise, Jean, Emma, Théo, Rita, Juste, Amédée, Karim, Marie, Véra, Paul, Aimé. (Juste un mot d'Analyse... J'en ai ma théorie. T'as juste à m'aider car il m'arrivera pas les mêmes erreurs que la dernière fois si on fait les démonstrations à deux !).

2.3 Et en anglais !

A comathematician is a device for turning cotheorems into ffee.

Sergey Bernikov *.

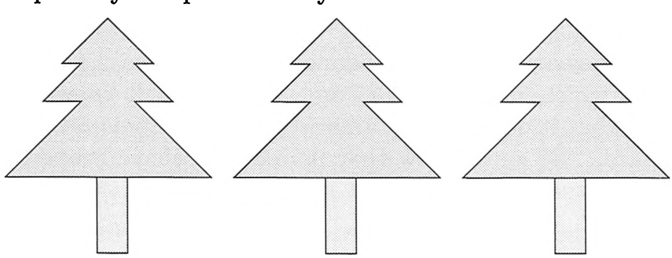
*. Dans le même genre : "I am not sure about what mbinatorics would be, if existed. Presumably mputer science would be useful for it."

2.3.1 Devinettes

1. What's purple and commutes ? An Abelian grape.
2. What is lavender and commutes ? An Abelian semigrape.
3. What's purple, commutes, and is worshipped by a limited number of people ? A finitely-venerated Abelian grape.
4. What is purple and all of its offspring have been committed to institutions ? A simple grape : it has no normal subgrapes.
5. What's nutritious and commutes ? An Abelian soup.
6. What's hot, chunky, and acts on a polygon ? A Dihedral soup.
7. What's yellow and equivalent to the Axiom of Choice ? Zorn's Lemon.
8. What is brown, furry, runs to the sea, and is equivalent to the Axiom of Choice ? Zorn's lemming.
9. What is green and homeomorphic to the open unit interval ? The real lime.
10. Why do mathematicians like national parks ? Because of the natural logs
    Dans le même esprit : $\int \frac{1}{cabin} =$ *houseboat* : a natural log cabin plus the sea.
11. Why was π sad ? 'cos π is negative.
12. What is π ? According to a nutritionist, pie is a healthy and delicious dessert !
13. What do you get if you divide the circumference of a jack-o-lantern by its diameter ? Pumpkin Pi !
14. What did cos(C) say to time ? Hey time ! If you get on top, we can have sec(C) time !
15. Why did the mathematicians name their dog "Cauchy" ? Because he left a residue at every pole.
16. Why didn't Newton discover group theory ? Because he wasn't Abel.
17. What's non-orientable and lives in the sea ? Möbius Dick.
18. What does the little mermaid wear ? An algae-bra.
19. What did the acorn say when it grew up ? Geometry.
20. What does an analytic number theorist say when he is drowning ? Log-log, log-log, log-log...

21. What do you call a teapot of boiling water on top of Mount Everest ? A high-pot-in-use.
22. What do you call a broken record ? A Decca-gone.
23. What is black and white ivory and fills space ? A Peano curve.
24. What do you call a young eigensheep ? A lamb, duh !
25. What's an Abelian group that, under addition, is closed, associative, distributive, and bears a curse ? The ring of the Nibilung.
26. What does a topologist call a vergin ? Simply connected.
27. What does a topologist call a cow that's swallowed itself ? A kine bottle.
28. What's nutritious and commutes ? An abelian soup.
29. Do you know a higher cardinal than the pope ? Two to the pope !
30. The Cherry theorem (a puzzle that reminds some of calculus theorems) : What is a small, red, round thing that has a cherry pit inside ? A cherry.
31. How do you call a one-sided nudie bar ? A Möbius strip club.
32. What does a mathematician do when he's constipated ? He tries to work it out with a pencil, but in the end he had to use logs.
33. Where do mathematicians go shopping ? At the decimall.
34. Do you know why they never have beer at a math party ? Because you can't drink and derive...
35. How do you make one burn ? Differentiate a log fire.
36. What did the forgetful dealer do for his stoner friend ? He left adjoint as a free object.
37. How do you tell one bathroom full of statisticians from another ? Check the p-value.
38. What is the first derivative of a cow ? Prime Rib !
39. If the set of power stations forms a group under the operation of power generation, when isn't it cyclic ? When the generators are out of order.
40. Why do you rarely find mathematicians spending time at the beach ? Because they have sine and cosine to get a tan and don't need the sun !
41. But there is an exception : a geometer went to the beach to catch the rays and became a tan gent.
42. You know what seems odd to me ? Numbers that aren't divisible by two.

43. Who created the addition ? Adam (Add 'em !).
44. How do you make seven an even number ? Remove the "s" !
45. Why was six afraid of seven ? Because seven ate nine !
46. What is $2k + k$? 3 000.
47. What kind of maps should you take with you on car trips ? Automorphisms.
48. How can you tell that Harvard was planned by a mathematician ? The div school is right next to the grad school...
49. Why are dead post-docs always incinerated (not burned) ? The rot of a grad is always zero !
50. What is the value of the contour integral around Western Europe ? Zero. Because all poles are in Eastern Europe, except a removable amount of them !
51. How do you call the largest accumulation point of poles ? Warsaw !
52. Did you hear about the murderous mathematician ? He went on a killing spree with a pair of axis !
53. What do you get if you cross an elephant with a mountain climber ? You can't do that. A mountain climber is a scalar.
54. What does a one-to-one linear operator say ? I don't care.
55. What do you get when you cross a chicken with an elephant ? The trivial elephant bundle on a chicken.
56. How do you prove in three steps that a sheet of paper is a lazy dog ?
    - A sheet of paper is an ink-lined plane.
    - An inclined plane is a slope up.
    - A slow pup is a lazy dog. □
57. What quantity is represented by this ?



    It is 9 : tree + tree + tree.
58. A dust storm blows through, now how much do you have? 99 : dirty tree + dirty tree + dirty tree.

59. Some birds go flying by and leave their droppings, one per tree, how many is that ? 100, dirty tree and a turd + dirty tree and a turd + dirty tree and a turd.
60. Which American President, with cities in California and Utah named after him, is associated in France and Germany with 10^9 ? Milliard Fillmore.
61. Does a politician who does nothing at all exists ? Yes, because they form a Lie group.

2.3.2 Petites histoires

1. Two math students, a boy and his girlfriend, are going to a fair. They are in line to ride the ferris wheel when it shuts down. The boy says : "It's a sin for those people to keep us waiting like this !"
The girl replies : "No – it's a cosin, silly ! ! !"
2. Two matrices meet. The first one suggests : "Let us go into the woods and do A^{-1}."
The other one answers : "Gee ! You are really inverse !"
3. a^4 : "Will you do me a favor ?" a^3 answers : "If it's within my power..."
4. "Consider a linear 2-dimensional universe", Tom's teacher said plainly. "Not I", Tom replied unimaginatively. "Why not ?", she asked initially. "We haven't discussed the addition problems", Tom said nonplused.
5. A little girl had a parrot named Polly. The parrot died. A mathematician asked the girl, "How did the parrot die ?"
The girl replied, "Polly no meal, Polly gone." The mathematician was puzzled in his mind thinking : "Polynomial Polygon... Polynomial Polygon... Polynomial Polygon..."
6. Mathematicians have announced the existence of a new whole number which lies between 27 and 28. "We don't know why it's there or what it does", says Cambridge mathematician, Dr. Hilliard Haliard, "We only know that it doesn't behave properly when put into equations, and that it is divisible by six, though only once."
7. A mathematician wandered home at 3 AM. His wife became very upset, telling him, "You're late ! You said you'd be home by 11 : 45 !"
The mathematician replied, "I'm right on time. I said I'd be home by a quarter of twelve."

8. A pair of discrete mathematicians are in a field. One asks : "I wonder how many sheeps there are in this field ?"
   The second replies, "There are 200 sheeps."
   The first is astonished, "How did you count that so fast ?"
   "Simple, I counted the legs and divided by four !"
   An algebraist who happens to be passing by at the time scoffs, "Applied mathematicians...", shaking his head in disgust. "A finite field can't be of order 200. Surely you've miscounted 199..."
9. A Neanderthal child rode to school with a boy from Hamilton. When his mother found out she said, "What did I tell you ? If you commute with a Hamiltonian you'll never evolve !"
10. "Divide fourteen sugar cubes into three cups of coffee so that each cup has an odd number of sugar cubes in it."
    "That's easy : one, one, and twelve."
    "But twelve isn't odd !"
    "It's an odd number of cubes to put in a cup of coffee..."
11. "What's your favorite thing about mathematics ?"
    "Knot theory."
    "Yeah, me neither."
12. Since I installed a large bear rug near my fireplace, my wife has become more amorous. She pulls me onto the rug and starts kissing me. It didn't add up until I thought about the bear rug. I think the rug makes her horny. This is Fur-mat's Lust Theorem.
13. The train was now moving at a nice jiggly pace and gave periodic shakes like a man caught without his sweater on a cold night. The young man had bloodshot eyes ; evidently he hadn't slept properly for many days. He was bespectacled and clad in a Khadi Kurta and jeans which hadn't seen water for a considerable period of time ; obviously a man of spartan tastes in the matter of attire. His eyes gleamed back with a ferocity that spoke of some deep and sinister purpose. Every once in a while, he would jump out of his seat in his restlessness and walk along the aisle, cross the vestibule and return after a five-minute stroll.

    Monsieur Pi Rho (though having retired from his profession two years back) could place him unerringly. Yes, his instincts told him that the young man was upto something, which, whatever it was, would not be too long in coming. The dinner was long past over, most of the lights had been put off, people had given up the pretense of reading and, indeed, most of them were snoring gently. Monsieur Pi Rho saw the young man take out a packet of cigarettes and move towards the door. Monsieur Pi Rho got up and strolling to the end of the compartment peeped out surreptitiously and saw the young man begin his smoke. Tiptoeing back, he pulled from under the young man's seat the dirty-looking brown bag which was the only piece of baggage the young man seemed to be carrying. He quickly unzipped it and looked inside. In the dim light, he could see sheets of paper. Monsieur Pi Rho pulled out one sheaf and peered at what appeared to be some handwritten instructions. Monsieur Pi Rho began reading. "We are provided with a scheme and a map which is proper to a point" read Monsieur Pi Rho With widening eyes, he skimmed through the page to see if any person or place was mentioned. Beyond cryptic words like 'the group can act freely but discreetly' (the last word had been missspelt), "go to a cover to kill the classes" and "blow-up if necessary", nothing specific was mentioned. Evidently, some group was planning an ambush but where and on whom ? Who were they ? (These people expressed themselves in a strange language somewhat like Monsieur Jingle from the Pickwick Papers).

Monsieur Pi Rho didn't have too much time before the young man's return. He quickly turned a couple of pages and saw the heading 'Motives'. Here the language was even more exasperatingly vague. There was again mention of a group whose representatives were deemed to be traceless. Also mentioned was a corpse (again missspelt) which was totally disconnected (yuk !) on which some functions still existed but were rapidly decreasing. Whose could it be ? And where ? Presumably in some local field. Somehow, the job of this corpse was threefold :

- Split some (presumably rival) group ;
- decompose certain representatives of the group ;
- infiltrate by powers of ideals.

These people even talked of ideals ! Monsieur Pi Rho pondered for a moment on this mysterious group's ways. He turned to the last page and then *he knew* ! There it was clearly written "BULLET IN THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY !" We hear that now heavy security has been posted at the American Mathematical Society. The other day a mathematician was seen entering the premises with his dog. Unfortunately, the dog left residues at every pole and this led to the mathematician being arrested all of which shows entrance to the sanctum sanctorum is really complex.

14. A math professor just accepted a new position at a university in another city and has to move. He and his wife pack all their belongings into cardboard boxes and have them shipped off to their new

home. To sort out some family matters, the wife stays behind for a few more days while her husband has already left for their new residence. The boxes arrive when the wife still hasn't rejoined her husband. When they talk on the phone in the evening, she asks him to count the boxes, just to make sure the movers didn't loose any of them.
"Thirty nine boxes altogether", says the prof on the phone.
"That can't be", the wife exclaims. "The movers picked up forty boxes at our old place."
The prof counts once again, but again his count only reaches 39. The next morning, the wife calls the moving company and complains. The company promises to check ; a few hours later, someone calls back and reports that all forty boxes did arrive. In the evening, when the prof and his wife are on the phone again, she asks : "I don't understand it. When you count, you get 39, and when they do, they get 40. That's more than strange..."
"Well", the prof says. "This is a cordless phone, so you can stay on the line and count with me : zero, one, two, three..."

15. A mathematician gives a talk intended for a general audience. The talk is announced in the local newspaper, but he expects few people to show up because nobody who is not a mathematician will be able to make any sense of the title : *Convex sets and inequalities.* To his surprise, the auditorium is crammed when his talk begins. After he has finished, someone in the audience raises his hand.
"But you said nothing about the actual topic of your talk !"
"What topic to you mean ?"
"Well, the one that was announced in the paper : *Convicts, sex, and inequality.*"

16. George W. Bush visits Algeria. As part of his program, he delivers a speech to the Algerian people : "You know, I regret that I have to give this speech in English. I would very much prefer to talk to you in your own language. But unfortunately, I was never good at algebra..."

17. At a morning press conference, Attorney general John Ashcroft said he believes the man is a member of the notorious al-gebra movement. He is being charged by the FBI with carrying weapons of math instruction.
"Al-gebra is a fearsome cult", Ashcroft said. "They desire average solutions by means and extremes, and sometimes go off on tangents in a search of absolute value. They use secret code names like x and y and refer to themselves as 'unknowns', but we have

determined they belong to a common denominator of the axis of medieval with coordinates in every country. As the Greek philanderer Isosceles used to say, there are 3 sides to every triangle", Ashcroft declared.
"I am gratified that our government has given us a sine that it is intent on protracting us from these math-dogs who are willing to disintegrate us with calculus disregard. Murky statisticians love to inflict plane on every sphere of influence", the President said, adding : "Under the circumferences, we must differentiate their root, make our point, and draw the line."
President Bush warned, "These weapons of math instruction have the potential to decimal everything in their math on a scalene never before seen unless we become exponents of a Higher Power and begin to factor-in random facts of vertex."
Attorney General Ashcroft said, "As our Great Leader would say, read my ellipse. Here is one principle he is uncertainty of : though they continue to multiply, their days are numbered as the hypotenuse tightens around their necks."

18. A bunch of Polish scientists decided to flee their repressive government by hijacking an airliner and forcing the pilot to fly them to a Western country. They drove to the airport, forced their way on board a large passenger jet, and found there was no pilot on board. Terrified, they listened as the sirens got louder. Finally, one of the scientists suggested that since he was an experimentalist, he would try to fly the aircraft.
He sat down at the controls and tried to figure them out. The sirens got louder and louder.
Armed men surrounded the jet. The would-be pilot's friends cried out, "Please, please take off now!!! Hurry!!!"
The experimentalist calmly replied, "Have patience. I'm just a simple pole in a complex plane."

19. A group of Polish tourists is flying on a small airplane through the Grand Canyon on a sightseeing tour. The tour guide announces : "On the right of the airplane, you can see the famous Bright Angle Falls."
The tourists leap out of their seats and crowd to the windows on the right side. This causes a dynamic imbalance, and the plane violently rolls to the side and crashes into the canyon wall. All aboard are lost. The moral to this episode is : always keep the poles off the right side of the plane.

20. After the Earth dries out, Noah tells all the animals to "go forth

and multiply". However, two snakes, adders to be specific, complain to Noah that this is one thing they have never been able to do, hard as they have tried. Undaunted, Noah instructs the snakes to go into the woods, make tables from the trunks of fallen trees and give it a try on the tabletops.

The snakes respond that they don't understand how this will help them to procreate whereupon Noah explains :

"Well, even adders can multiply using log tables !"

21. There were three medieval kingdoms on the shores of a lake. There was an island in the middle of the lake, over which the kingdoms had been fighting for years. Finally, the three kings decided that they would send their knights out to do battle, and the winner would take the island.
The night before the battle, the knights and their squires pitched camp and readied themselves for the fight. The first kingdom had 12 knights, and each knight had five squires, all of whom were busily polishing armor, brushing horses, and cooking food. The second kingdom had twenty knights, and each knight had 10 squires. Everyone at that camp was also busy preparing for battle. At the camp of the third kingdom, there was only one knight, with his squire. This squire took a large pot and hung it from a looped rope in a tall tree. He busied himself preparing the meal, while the knight polished his own armor.
When the hour of the battle came, the three kingdoms sent their squires out to fight (this was too trivial a matter for the knights to join in).
The battle raged, and when the dust had cleared, the only person left was the lone squire from the third kingdom, having defeated the squires from the other two kingdoms, thus proving that the squire of the high pot and noose is equal to the sum of the squires of the other two sides.

22. There was an Indian Chief, and he had three squaws, and kept them in three teepees. When he would come home late from hunting, he would not know which teepee contained which squaw, being dark and all. He went hunting one day, and killed a hippopotamus, a bear, and a buffalo. He put then a hide from each animal into a different teepee, so that when he came home late, he could feel inside the teepee and he would know which squaw was inside. Well after about a year, all three squaws had children. The squaw on the bear had a baby boy, the squaw on the buffalo hide had a baby girl. But the squaw on the hippopotamus had a girl and a boy. So

what is the moral of the story?

The squaw on the hippopotamus is equal to the sum of the squaws on the other two hides.

23. The Royal Chain Mail Factory had received a large order for battle uniforms. Each uniform consisted of a toga and a pair of short pants. Their only problem was how long to make the pants, too short and a soldier could be exposed, too long and a uniform would be excessively heavy. So they called in a mathematician. He had a uniform made and tested.

    The hem on the pants proved to be too short, so he increased it a little bit, then a little more, and then a little bit more, and so on until finally he was able to derive an exact trousers-length depending on the leg-length of the soldier. The chief tailor was curious.

    "How did you determine this ratio?" he asked.

    "Easy," said the mathematician. "I just used the Wire-trousers Hem Test of Uniform Convergence."

24. A topologist walks into a bar and orders a drink. The bartender, being a number theorist, says, "I'm sorry, but we don't serve topologists here."

    The disgruntled topologist walks outside, but then gets an idea and performs Dahn surgery upon herself. She walks into the bar, and the bartender, who does not recognize her since she is now a different manifold, serves her a drink. However, the bartender thinks she looks familiar, or at least locally similar, and asks, "Aren't you that topologist that just came in here?"

    To which she responds, "No, I'm a frayed knot."

    Une variante très proche : A piece of string walked into a small town on a hot, dusty day. He was thirsty, so he sauntered into the first establishment he encountered and asked the waiter for a glass of water.

    "Sorry", said the waiter, "we don't serve strings here."

    Discouraged, the string walked out. A little further down the street, he met a stranger.

    "You look hot," said the stranger. "Why don't you go into that cafe and get a drink of water?"

    "I tried that," said the string, "but the waiter wouldn't serve me anything because I'm just a string."

    "No problem" said the stranger. "I'll fix you up." He grabbed the string, tied him in a bowline and frayed his ends. "Now try it."

The string slipped back into the cafe and asked the waiter for a glass of water. “Hey,” said the waiter, “aren’t you the piece of string that was just in here ?”

“Nope,” retorted the string, “I’m a frayed knot.”

25. There was once a very smart horse. Anything that was shown it, it mastered easily, until one day, its teachers tried to teach it about rectangular coordinates and it couldn’t understand them. All the horse’s acquaintances and friends tried to figure out what was the matter and couldn’t. Then a new guy looked at the problem and said, “Of course he can’t do it. Why, you’re putting Descartes before the horse !”

26. A math student is pestered by a classmate who wants to copy his homework assignment. The student hesitates, not only because he thinks it’s wrong, but also because he doesn’t want to be sanctioned for aiding and abetting. His classmate calms him down : “Nobody will be able to trace my homework to you : I’ll be changing the names of all the constants and variables : a to b, x to y, and so on.”
Not quite convinced, but eager to be left alone, the student hands his completed assignment to the classmate for copying.
After the deadline, the student asks : “Did you really change the names of all the variables ?”
“Sure !” the classmate replies. “When you called a function f, I called it g ; when you called a variable x, I renamed it to y ; and when you were writing about the log of $x+1$, I called it the timber of $y+1$...”

27. After her husband’s death, the elderly lady decided to go back to school and get a degree in mathematics. A few weeks into the term, she storms into the dean’s office, exclaiming : “I’ve been silent until now – but I’m not going to take these obscenities anymore !”
“What obscenities are you talking about ?”
She reaches into her purse and pulls out a notebook. “I noted of all of them. In my presence, professors had the complete lack of decency to speak of” – she leafs through her notebook – “Bruhat-Tits spaces, a pumping lemma, and even degenerate colonels !”

28. As you know, the sex sites will post into ANY NG. So maybe they could customize a bit and offer...

BRUHAT-TITS SPACES !
PUMPING LEMMA !
WIDE OPEN INTERVALS !

KOWALEWSKAJA FAKES!!
WITH A FOREWORD BY DICK FEYNMAN!
GROUP ACTION!
THE PALER WEENIE THEOREM!

There are also copious references to Improper Priors, Degenerate Colonels, and the Chinese Box Problem. The graph of $y = \exp[-(x^2-1)^2]$ with the two maximum points heavily marked, is also a bit dodgy.

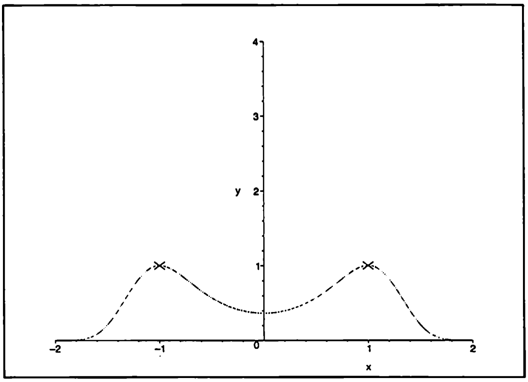


FIGURE 2.1 – $y = \exp[-(x^2-1)^2]$.

2.3.3 Érotisme mathématique : *Polly Nomial and Curly Pi*

Wherein it is related how that Polygon of Womanly Virtue, your Polly Nomial (our heroine) is accosted by that Notorious Villain Curly Pi, and factored (oh, horror).

Once upon a time $(1/T)$, Pretty Polly Nomial was strolling across a field of vectors when she came to the boundary of a singularly large matrix. Now Polly was convergent and her mother had made it an absolute condition that she never enter such an array without her brackets on. Polly, however, who had changed her variables that morning and was feeling particularly badly behaved, ignored this condition on the basis that it was insufficient, and made her way amongst the complex elements. Rows and columns closed in from all sides. Tangents approached her surface. She became tensor and tensor. Quite suddenly, two branches of a hyperbola touched her at a single point. She oscillated violently, lost all sense of directrix, and went completely divergent. As she reached a turning point, she tripped over a square root that was protruding from the erf and plunged headlong down a steep gradient. When she rounded off once more, she found herself inverted, apparently alone, in a non-Euclidian space.

She was being watched, however. That smooth operator, Curly Pi, was lurking innerproduct. As his eyes devoured her curvilinear coordinates, a singular expression crossed his face. He wondered, was she still convergent ? He decided to integrate improperly at once.

Hearing a common fraction behind her, Polly rotated and saw Curly Pi approaching with his power series extrapolated. She could see at once by his degenerate conic and dissipative terms that he was bent on no good.

"Arcsinh," she gasped.

"Ho, ho," he said. "What a symmetric little asymptote you have. I can see your angles have a lot of secs."

"Oh, sir," she protested, "keep away from me. I haven't got my brackets on."

"Calm yourself, My Dear," said our Suave Operator. "Your fears are purely imaginary."

"I, I," she thought, "perhaps he's not normal but homologous."

"What order are you ?" the Brute demanded.

"Seventeen," replied Polly.

Curly leered. "I suppose you've never been operated on."

"Of course not," Polly replied quite properly. "I'm absolutely convergent."

"Come, come," said Curly, "Let's off to a decimal place I know and I'll take you to the limit."

"Never," gasped Polly.

"Abscissa," he swore, using the vilest oath he knew. His patience was gone. Coshing her over the coefficient with a log until she was powerless, Curly removed her discontinuities. He stared at her significant places, and began smoothing out her points of inflection. Poor Polly. The algorithmic method was now her only hope. She felt his hand tending to her asymptotic limit. Her convergence would soon be gone forever. There was no mercy, for Curly was a heavyside operator. Curly's radius squared itself ; Polly's loci quivered. He integrated by parts. He integrated by partial fractions. After he cofactored, he performed rungecutta on her. The complex beast even went all the way around and did a contour integration. Curly went on operating until he had satisfied her hypothesis, then he exponentiated and became completely orthogonal.

When Polly got home that night, her mother noticed that she was no longer piecewise continuous, but had been truncated in several places.

But is was too late to differentiate now. As the months went by, Polly's denominator increased monotonically. Finally, she went to the L'Hôpital and generated a small but pathological function which left surds all over the place and drove Polly to deviation.

The moral of our sad story is this : "If you want to keep your expressions convergent, never allow them a single degree of freedom..."

2.3.4 *Et caetera...*

Mathematic puns are the first sine of madness.

Johann Von Haupkoph.

1. 2 is the oddest prime.
2. A coconut is just a nut.
3. Möbius strippers only show you their back side.
4. Pie are not square. Pie are round. Cornbread are square.
5. Pope has settled the continuum hypothesis ! He has declared that cardinals above 80 have no powers.
6. Remember : don't try to prove congruence with the ASS theorem or you will make an ASS out of yourself.
7. Trigonometry for farmers : swine and coswine...
8. Underwater ship builders are concerned with sub-optimization.
9. Others drink the hard stuff as evidenced by the proliferation of box-and-whiskey plots.
10. Some statisticians don't drink because they are t-test totalers.
11. This is how I remember X and Y axes : X goes to the sky and Y tries to fly !
12. Graphing rational functions is a pain in the asymptote.
13. A retired mathematician took up gardening, and is now growing carrots with square roots.
14. Without geometry, life is pointless.
15. My geometry teacher was sometimes acute, and sometimes obtuse, but always, he was right.
16. If General Calculus actually did exist, he probably knew how to integrate his troops together and differentiate between his enemies and his allies.
17. God is real, unless proclaimed integer.

18. **Theorem 1** *Every horse has an infinite number of legs.*

    Proof : Horses have an even number of legs. Behind they have two legs and in front they have fore legs. This makes six legs, which is certainly an odd number of legs for a horse. But the only number that is both odd and even is infinity. Therefore horses have an infinite number of legs. □

19. **Theorem 2** *Alexander the Great did not exist and he had an infinite number of limbs.*

    Proof : We prove this theorem in two parts. First we note the obvious fact that historians always tell the truth (for historians always take a stand, and therefore they cannot lie). Hence we have the historically true sentence, "If Alexander the Great existed, then he rode a black horse Bucephalus." But we know by corollary 1 everything is white ; hence Alexander could not have ridden a black horse. Since the consequent of the conditional is false, in order for the whole statement to be true the antecedent must be false. Hence Alexander the Great did not exist.

    We have also the historically true statement that Alexander was warned by an oracle that he would meet death if he crossed a certain river. He had two legs ; and "forewarned is four-armed." This gives him six limbs, an even number, which is certainly an odd number of limbs for a man. Now the only number which is even and odd is infinity ; hence Alexander had an infinite number of limbs. We have thus proved that Alexander the Great did not exist and that he had an infinite number of limbs. □

2.4 Même en allemand ? ? ?

1. Was ist paradox an der Analysis ? Man faltet, um zu glätten... *

2. **Theorem 1** *Mathematiker sind konvergent.*

   Beweis : Mathematiker sind monoton und beschränkt. □

3. Mensch zu Mathematiker : »Ich finde Ihre Arbeit ziemlich monoton«

   Mathematiker : »Mag sein ! Dafür ist sie aber stetig und unbeschränkt.«

4. Was schenkt ein Mathematiker seiner Frau zum Geburtstag ? Einen Polynomring in einer Intervallschachtelung !

*. Indice pour comprendre la blague, pour les germanophobes : »die Faltung« veut dire « le produit de convolution ».

5. Dazu war folgender Dialog in einer Newsgroup zu :
»Was schenkt ein Mathematiker seiner Frau zum Hochzeitstag ?
»Einen Polynomring in einer Intervallschachtelung verpackt.«
»Und dazu natürlich eine Markov-Kette mit Stein !«
»Oh Gauss, das ist ja nun wirklich der letzte Euler.«
»Wieso ? Er war ein Mann von Fermat ; ein wahrer Mordelmathematiker. Und das ist nicht Thales. Er fand in jedem Halbkreisverkehr stets den rechten Winkel um abzubiegen. (Als Pythagoras dies erfuhr, titschte er im Dreieck.)«
»Hilbert mal nicht so rum hier ! Ich krieg' alles Schmidt !«
6. « Sans perte de généralité » est une expression courante dans les énoncés mathématiques, qui se cache en allemand sous *o.B.d.A* : *ohne Beschränkung der Allgemeinheit.* Mais les étudiants allemands, qui accusent souvent un emploi abusif de ce terme, donnent d'autres sens à o.B.d.A :
   - *ohne Bedeutung für die Allgemeinheit.*
   - *ohne Bedenken des Autors.*
   - *ohne Begründung der Annahme.*
   - *ohne Berücksichtigung der Ausnahmen.*
7. Was ist der Lieblingsfilm der Mathematiker ? Das Schweigen der Lemma.

Pour les fans de mathématico-poésie allemande, l'aventure ne s'arrête pas là. Une parodie de Faust à la sauce mathématique, où il est surtout question de problèmes d'intégration, a été écrite par Kurd Lasswitz. Vous pouvez la trouver sur le site du *Projekt Gutenberg*, et a pour titre *Prost.*

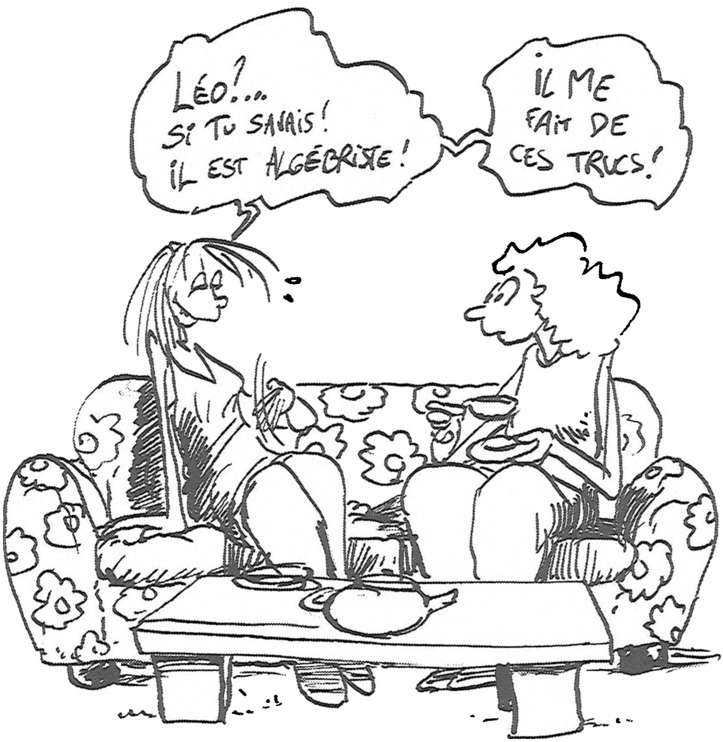
CHAPITRE 3

HUMOUR SUR LES DIFFÉRENTS MATHÉMATICIENS

3.1 Comment les mathématiciens *le* font-ils ?

Comment les mathématiciens *le* font-ils ?

- Les mathématiciens le font avec la femme de Nobel.
- Les mathématiciens prouvent qu'ils peuvent le faire.
- Les physiciens mathématiciens comprennent la théorie de comment le faire, mais rencontrent de sérieuses difficultés pour avoir des résultats pratiques.
- Les mathématiciens le font réflexivement.
- Les arithméticiens l'ont fait en premier.
- Nous savons que les analystes réels le font continûment et régulièrement, mais pour les spécialistes de théorie des ensembles, ce n'est qu'une hypothèse.
- Les analystes le font jusqu'à leur limite (voire sans limite, ou à l'infini ? ? ?).
- Les analystes le font sur un support compact.
- Les analystes complexes le font entièrement mais avec conformisme.
- Les experts en équations différentielles le font suivant les conditions initiales.
- Les experts en théorie des ensembles le font avec application.
- Les experts en théorie des ensembles le font avec un cardinal.
- Les algébristes le font avec détermination et sans discrimination.
- Les algébristes le font en groupe, avec leur corps.
- Les algébristes le font associativement, transitivement.
- Les algébristes le font en s'inversant.



– Les algébristes le font en se multipliant.
– Les algébristes le font avec des manipulations symboliques.
– Les théoriciens des groupes le font simplement et fidèlement.
– Les théoriciens des groupes le font avec le Monstre.
– Les théoriciens des anneaux le font avec intégrité.
– Les théoriciens des corps le font en inversé.
– Les topologues* le font ouvertement, avec du caoutchouc.
– Les topologues le font avec leurs boules.
– Les couples de topologues le font en se rendant connexes.
– Les topologues différentiels et algébriques le font avec variété.
– Les spécialistes de combinatoire le font discrètement, de toutes les

*. Je le précise pour les lecteurs qui ne le savent pas : un topologue est, pour faire simple, quelqu'un qui ne voit pas de différence entre ses fesses et un trou dans le sol, mais voit la différence entre ses fesses et deux trous dans le sol.

manières possibles.

- Les statisticiens le font probablement.
- Les statisticiens font des tests avant.
- Les statisticiens le font quand ça compte.
- Les statisticiens le font avec 95% de confiance.
- Les statisticiens le font en grand nombre.
- Les statisticiens le font avec seulement 5% de chance d'être rejetés.
- Les statisticiens le font. Après tout, c'est normal.
- Les probabilistes le font soit presque toujours, soit presque jamais.
- Les probabilistes le font lors de marches aléatoires.
- Les théoriciens de la mesure le font presque partout.
- Les logiciens le font avec consistance.
- (les logiciens le font) ou ¬(les logiciens le font).
- Les géomètres le font au foyer mais avec courbures et torsions.
- Les géomètres le font symétriquement.
- Les géomètres différentiels le font dans un voisinage proche.
- Les géomètres classiques le font sur la droite d'Euler, ou orthogonalement.
- Les spécialistes de programmation linéaire maximisent la performance et minimisent les efforts.
- Les mathématiciens appliqués le font par simulation informatique.
- Cantor le faisait en diagonale.
- Galois † l'a fait la nuit juste avant.
- Klein le faisait simultanément dedans et dehors.
- Markov le faisait à la chaîne.
- Noether le faisait uniquement avec des anneaux.
- Archimède le faisait dans sa baignoire.
- Euler le faisait en cercle, tandis que Bernoulli le faisait en spirale ou en huit.
- Möbius le faisait toujours du même côté.
- Gauss le faisait normalement, Lebesgue, avec mesure, et Cauchy le faisait complètement, au contraire de Gödel.
- Cauchy le faisait avec un ami (Schwarz, Lipschitz, Riemann).
- Fermat a essayé de le faire dans la marge, mais il n'avait pas assez de place.
- Bourbaki le fait dans un cas particulier du théorème 10.2.5 en utilisant subtilement le lemme 7.3.2.
- Turing le faisait, mais n'a jamais pu décider quand s'arrêter.

†. Pour la petite histoire, quelques petits mots sur cet esprit : Évariste Galois n'était pas seulement un génie des mathématiques, mais aussi un révolutionnaire zélé. Ironiquement, il a prouvé que beaucoup de problèmes n'étaient pas résolubles radicalement.

- On pense que Riemann et Goldbach l'ont fait, mais on n'est encore jamais arrivé à le prouver.
- Après l'avoir fait, Abel reste très elliptique.
- Pour le faire, Bolzano utilise toujours un intermédiaire.
- Quand il le fait, Dedekind est irrationnel s'il s'arrête en plein milieu.
- Quelle que soit la personne en question, Descartes le fait avant même d'avoir demandé ses coordonnées.
- Hilbert le fait de manière très formelle.
- Huygens espère le faire.
- Minkowski le fait de manière inégale.
- Abraham Robinson le fait de manière non standard.
- Russell le fait avec l'ensemble de celles qui le font seulement avec elles-mêmes.
- On ne comprend toujours pas comment Ramanujan a pu le faire comme il l'a fait.

3.2 Les mathématiciens ne meurent jamais

> *« Immortalité » est sans doute un mot creux, mais un mathématicien a probablement plus de chances d'en jouir qu'un autre.*

Godefroy Harold Hardy.

1. Les mathématiciens ne meurent jamais, ils perdent juste leurs fonctions.
2. Les analystes ne meurent jamais, ils se désintègrent juste.
3. Les professeurs de trigonométrie ne meurent jamais, ils perdent juste leurs identités.
4. Les géomètres ne meurent jamais, ils prennent juste la tangente.
5. Les mathématiciens ne meurent jamais, ils tendent vers zéro.
6. Les statisticiens ne meurent jamais, ils sont juste classés par âge et par sexe.
7. Les mathématiciens ne meurent jamais, ils deviennent juste irrationnels.
8. Les probabilistes ne meurent presque jamais.

3.3 Le problème de l'ampoule

Question : Combien faut-il de mathématiciens pour changer une ampoule ? Réponses possibles :

– Aucun. C'est laissé au lecteur en exercice.
– Aucun. Un mathématicien ne peut pas changer une ampoule, mais il peut prouver que c'est faisable.
– Un. Il la donne à un physicien et ramène ainsi le problème à un problème précédemment résolu.
– La solution est triviale.
– Un seul, une fois que vous avez réussi à lui présenter le problème dans des termes qu'il peut comprendre.
– Wiener a montré récemment ([Wie]) qu'un mathématicien peut changer une ampoule. Si k mathématiciens peuvent changer une ampoule, et si un autre les regarde le faire, alors $k+1$ mathématiciens seront capables de changer une ampoule. Alors, par récurrence, n mathématiciens peuvent changer une ampoule, pour tout n entier positif.

Question : Combien faut-il d'analystes numériques pour changer une ampoule ?

– 3,9967 (après six itérations).

Question : Combien faut-il de mathématiciens constructivistes pour changer une ampoule ?

– Aucun. Ils ne croient pas aux rotations infinitésimales.

Question : Combien faut-il de géomètres classiques pour changer une ampoule ?

– Aucun. Cela ne peut pas être fait à la règle et au compas.

Question : Combien faut-il d'arithméticiens pour changer une ampoule ?

– Aucune idée, mais ce doit être un beau nombre premier.

Question : Combien faut-il de topologues pour changer une ampoule ?

– Un seul. Mais que fait-il du beignet ? ?

Question : Combien faut-il de statisticiens pour changer une ampoule ?

– Un seul... ± 3.

Question : Combien faut-il d'analystes pour changer une ampoule ?

– Trois. Un pour prouver l'existence, un pour prouver l'unicité et un pour déterminer les conditions initiales.

Question : Combien faut-il de Bourbakistes pour changer une ampoule ?

– Changer une ampoule est un cas particulier d'un problème plus général concernant l'entretien et la réparation d'un système électrique. Pour déterminer un minorant et un majorant du nombre de personnes nécessaires, nous devons vérifier si les conditions du lemme 2.1 (disponibilité du personnel) et ceux du corollaire 2.3.55 (motivation du personnel) sont vérifiées. Si et seulement si ces conditions sont réunies, on obtient le résultat en appliquant le théorème de la section 3.11.23. Le majorant obtenu est, bien sûr, à prendre en compte dans un espace mesuré, muni de la topologie $*$-faible.

Question : Combien faut-il d'administrateurs du département de mathématiques pour remplacer une ampoule ?

– Aucun. Qu'est-ce qui n'allait pas avec l'ancienne ?

Question : Combien faut-il d'étudiants diplômés en mathématiques pour remplacer une ampoule ?

– Un seul. Mais ça prend neuf ans.

Question : Combien faut-il d'assistants en mathématiques pour remplacer une ampoule ?

– Quatre. Un pour le faire, et trois pour co-signer le papier.

Question : Combien faut-il de professeurs pour remplacer une ampoule ?

– Un. Avec huit assistants de recherche, deux programmeurs, trois post-docs et une secrétaire pour l'aider.

Question : Combien de simulateurs faut-il pour remplacer une ampoule ?

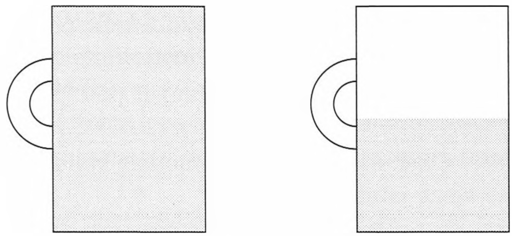
– Une infinité. Chacun construit un modèle valide complet, mais la lumière ne vient jamais.

Question : Combien d'ampoules faut-il pour changer une ampoule ?

– Une, si elle connaît son propre nombre de Gödel.

3.4 Test de personnalité

On montre un verre d'eau à plusieurs individus à deux reprises ; la deuxième fois, il contient la moitié de l'eau de la première fois. On leur demande de comparer les deux verres. Leurs réponses sont classées parmi plusieurs types de personnalité. On vous soumet le test :



Les réponses possibles
De laquelle des possibilités ci-dessous votre pensée se rapproche le plus ?

- Le verre est à moitié plein.
- Le verre est à moitié vide.
- L'eau a toujours le même cardinal... Elle est toujours de cardinal $2^{\aleph_0}$.
- L'eau est maintenant son propre complémentaire.
- La température et la pression ont dramatiquement augmenté.
- Servir de l'eau sur un beignet, hum, drôle d'idée...
- La paroi du verre est localement tangente à l'eau.
- Je ne gagne pas 100 000$ par an à Wall Street pour qu'on me serve un demi-verre d'eau !
- L'eau est toujours la même, modulo 2.
- L'eau devrait être prolongeable analytiquement au reste du verre, avec une bonne équation fonctionnelle.
- L'eau a subi une application contractante.
- L'eau n'arrivera plus à étancher ma soif, probablement.
- La tâche de choisir une molécule d'eau arbitraire a été réduite à une sous-tâche de deux possibilités.
- Hé ! J'ai commandé un café !

Les résultats Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que vous êtes un homme, pour ne pas alourdir le texte.
Si vous pensez que le verre à moitié plein...

Félicitations, vous êtes un **OPTIMISTE** !!!

Si vous pensez que le verre à moitié vide...

Félicitations, vous êtes un **PESSIMISTE** !!!

Si vous pensez que l'eau a toujours le même cardinal ($2^{\aleph_0}$ pour être précis)...

Félicitations, vous faites de la **THÉORIE DES ENSEMBLES** !!!

Si vous pensez que l'eau est maintenant son propre complémentaire...

Félicitations, vous faites de la **THÉORIE DES GRAPHES** ! ! !

Si vous pensez que l'eau a vu sa température et sa pression augmenter...

Félicitations, vous êtes un **MATHÉMATICIEN APPLIQUÉ** ! ! !

Si vous pensez que servir de l'eau dans une tasse ou un beignet, c'est pareil...

Félicitations, vous êtes un **TOPOLOGUE** ! ! !

Si vous pensez que l'eau et le verre ont des propriétés locales intéressantes...

Félicitations, vous êtes un **GÉOMÈTRE DIFFÉRENTIEL** ! ! !

Si vous pensez que vous avez les moyens de vous payer un verre d'eau plein...

Félicitations, vous êtes un **MATHÉMATICIEN FINANCIER** ! ! !

Si vous pensez que l'eau n'a pas changé, modulo 2...

Félicitations, vous êtes un **ALGÉBRISTE** ! ! !

Si vous conjecturez que $L(\text{eau},s)$ peut se prolonger à tout le verre...

Félicitations, vous faites de **LA THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES** ! ! !

Si vous pensez que l'eau a subi une contraction...

Félicitations, vous êtes un **ANALYSTE** ! ! !

Si vous pensez que la probabilité de ne plus avoir soif est plus faible...

Félicitations, vous êtes un **PROBABILISTE** ! ! !

Si vous pensez que l'eau est un délice pour le dénombrement...

Félicitations, vous faites de la **COMBINATOIRE** ! ! !

Si vous pensez que l'eau ne vous rendra jamais aussi efficace que le café...

Félicitations, vous êtes, dans votre plus simple appareil, un **MATHÉMATICIEN** ! ! !

3.5 Les *Leonhard Euler Facts*

Lisez Euler, c'est notre maître à tous.

Pierre-Simon Laplace.

Tout le monde connaît les *Chuck Norris Facts*, ces faits délirants au sujet de Chuck Norris, tels que « Chuck Norris a déjà compté jusqu'à l'infini. Deux fois. » ou « Chuck Norris ne se mouille pas, c'est l'eau qui se Chuck Norrise ». Mais il s'avère que c'est maintenant totalement *has-been*... Il est devenu beaucoup plus *hype* de connaître les *Leonhard Euler Facts* ! Je vous en présente quelques-uns qui circulent sur le groupe de fans d'Euler « We fully acknowledge the True Ultimate Ass-Kicking Power of Leonhard Euler », sur facebook (ici traduits) :

- Euler peut démontrer le Dernier Théorème de Fermat dans la marge.
- Euler peut écrire toutes les décimales de e. Et π. En même temps. Il peut aussi écrire toutes les décimales de i, ça lui prend juste un peu plus de temps.
- Euler a traversé tous les ponts de Königsberg sans passer deux fois par le même.
- Euler a appris à Chuck Norris à diviser par zéro. Euler lui a aussi appris le *roundhouse kick*.
- Le ruban de Möbius d'Euler a trois côtés.
- Euler n'a pas calculé la parallaxe du Soleil ; il a dit au Soleil quelle parallaxe avoir et le Soleil s'y conforma.
- Euler ne démontre pas de théorèmes. Il décide qu'ils sont vrais.

- Euler démontra l'Hypothèse du continu... Puis il en donna un contre-exemple. Il ne l'a pas publié parce que c'était « trop facile ».
- Euler se disputa un jour avec un collègue, et il montra que la supposition de l'existence de son collègue menait à une contradiction. Son collègue disparut sans laisser de trace.
- Euler peut décomposer n'importe quel objet en morceaux non mesurables et les réassembler en deux copies de l'objet original, avec ses propres mains.
- Euler peut « trisecter » les angles en un coup de poing sur le vertex.
- Euler peut quarrer le cercle et cercler le carré en même temps avec une main derrière le dos.
- Euler a tué Évariste Galois lors d'un duel. Le 31 Mai 1782, avant même que Galois ne soit né, Euler tira une balle en l'air qui retomba exactement 50 ans plus tard, tuant Galois.
- Euler a factorisé RSA2048. Deux fois *.
- Vous vous êtes déjà demandé pourquoi, en dérivant exp, la fonction reste la même ? Parce qu'elle a vu ce qu'Euler a fait aux équations gouvernant la dynamique des fluides et décida de rester tranquille.
- Euler n'a pas besoin « d'imaginer » la racine carrée de nombres négatifs.
- Il n'y a pas d'axiome du choix ; il y a seulement ce qu'Euler vous autorise à choisir.
- Euler a eu une relation passionnée avec la grand-mère de Nicolas Bourbaki.
- Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre d'Euler (et par Dieu j'entends Euler).

3.6 Humour sur les mathématiciens « *people* »

3.6.1 Les soirées *V.I.P*

De grands mathématiciens reçoivent une invitation pour une soirée entre célébrités de cette science. Voici leurs réactions (et on les reconnaît bien là) :

- Cauchy assure qu'il s'intégrera sans problème avec tout le monde.
- Hilbert a fermé son hôtel pour la nuit, et espère qu'on ne s'approchera pas trop de son espace vital pendant la plus grande partie

*. Cependant, on m'a fait remarquer que ce n'est pas si glorieux : RSA2048 = $R \cdot S \cdot A \cdot 2^{11}$. De rien.

de la fête.

- Erdős se demande si les epsilons sont aussi invités. Il a aussi invité ses amis, les amis de ses amis, les amis des amis de ses amis, les amis des amis des amis de ses amis...
- Nash insiste pour jouer à des jeux pour n personnes à somme nulle.
- Zénon d'Élée dit qu'il viendra avec deux amis : Achille et la tortue.
- Russell est songeur : « Si les cuisiniers ne font la cuisine que pour les invités, qui cuisine pour les cuisiniers ? »
- Gödel insiste sur le fait que l'invitation n'est pas complète, et ne le sera jamais. Mais il sera là, bien qu'il ne puisse pas le prouver.
- Descartes dit qu'il y pensera, et demande quelles sont les coordonnées des hôtes de maison.
- Tout le monde veut que Gauss vienne, à cause de sa personnalité magnétique.
- Cantor n'est pas capable de compter toutes les invitations qu'il a reçues.
- Fermat annonce que sa dernière invitation était vraiment magnifique, mais qu'elle ne rentrait pas dans la marge de son carnet de rendez-vous.
- Fourier a, lui, reçu une série d'invitations.
- C'est Klein qui s'occupe des bouteilles.
- Malheureusement, L'Hôpital ne vient pas aux banquets ; c'est une de ses règles de conduite.
- Occam se demande si ça vaut la peine de se raser.
- Pythagore trouve les invités un peu trop « carrés » pour lui.
- Shannon a promis de communiquer sa décision *via* ses propres canaux.
- Turing a arrêté tous ses autres projets pour l'occasion.
- Newton gravite autour de ce genre d'évènements.
- Möbius ne vient que s'il y a un *strip poker*.
- Euclide avait déjà un plan.
- Euler dit que $\exp(i\pi) + 1 = 0$, donc il sera là, répondez !
- Hadamard a oublié de venir, ou s'est perdu ; lui-même ne sait plus.
- Leibniz n'est pas d'accord avec la notation employée dans l'invitation, et va écrire un article à ce sujet.
- Hamilton passera par chaque table de buffet exactement une fois.
- Pascal et Pythagore se sont tous les deux retrouvés dans un triangle amoureux.

3.6.2 Le problème de la poule

Pourquoi la poule traverse-t-elle la route ? Tout le monde est sur le coup, et tous les grands mathématiciens ont évidemment une opinion à ce sujet !

- D'après Fermat : « Parce qu'elle ne rentre pas dans la marge de ce côté. Je n'ai pas de place ici pour en donner une démonstration complète. »
- D'après Gödel : « On ne peut pas prouver ou réfuter que la poule a traversé la route. »
- D'après Erdős : « Elle n'avait pas le choix, par le *chicken-hole principle* *. »
- D'après Riemann : « La réponse est dans les cours de M. Dirichlet. »
- D'après Newton : « Parce qu'une pomme est tombée sur sa tête. »
- D'après Zénon d'Élée : « Pour prouver qu'elle n'arrivera jamais de l'autre coté. »
- D'après Russell : « Pour aller chez le plumeur, puisqu'elle ne se plumait pas elle-même. »
- D'après Occam : « C'était le moyen le plus simple d'aller de l'autre côté. »
- D'après Feynman... Euh... Que fait-il au milieu de ces mathématiciens ? Vous voulez rire, monsieur Feynman !

3.7 Comment faire entrer un éléphant dans un frigo ?

Par les analystes

- 1. Différentiez-le et faites-le entrer dans le frigo.
  2. Puis intégrez-le, toujours dans le frigo.
- Redéfinissez la mesure dans le frigo.
- Appliquez le théorème de Banach-Tarski.

Par les arithméticiens

- D'abord factorisez, puis multipliez.
- Par récurrence. On peut toujours le serrer un peu plus dans le frigo.

Par les algébristes

*. Le *pigeon-hole principle* est appelé principe des tiroirs en français, et est cher à Erdős.

- 1. Montrez que ses parties peuvent séparément être entrées dans le frigo.
  2. Montrez que le frigo est stable par addition.
- Prenez le frigo universel approprié et faites une surjection du frigo à l'éléphant.
- Passez au quotient.

Par les topologues

- Faites-lui avaler le frigo, et renversez l'intérieur et l'extérieur.
- Faites un frigo à partir de la bouteille de Klein.
- L'éléphant est homéomorphe à un plus petit éléphant.
- L'éléphant est compact, donc peut être entré dans un ensemble fini de frigos. C'est suffisant en pratique.

Par les topologues algébriques

- Remplacez l'intérieur du frigo par son revêtement universel, $\mathbb{R}^3$.

Par les spécialistes d'algèbre linéaire

- Introduisez juste sa base, puis engendrez-le dans le frigo.
- Montrez qu'un pourcent de l'éléphant entre dans le frigo. Par linéarité, $x\%$ y entre pour tout x.

Par les spécialistes de géométrie affine

- Il existe une transformation affine introduisant l'éléphant dans le frigo.

Par les géomètres

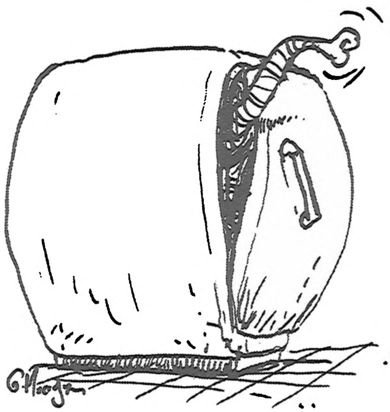
- **axiome 1** *Un éléphant peut être introduit dans un frigo.*

Par les analystes complexes

- Placez le frigo à l'origine et l'éléphant à l'extérieur du cercle unité, puis considérez l'image de la fonction inverse.

Par les analystes numériques

- Introduisez juste son postérieur et le reste peut être considéré comme le terme d'erreur.
- Trouvez la solution à l'aide d'un Pentium.



Par les statisticiens

- Selon un statisticien brillant : introduisez sa queue en tant qu'échantillon et dites « C'est fait. »
- Notre NOUVELLE étude montre que vous NE POUVEZ PAS entrer l'éléphant dans le frigo.

Il est naturel de se poser la même question si on remplace un frigo par un boa, par exemple. Dans ce cadre d'étude, M. Rouvière prouve que c'est possible : on trouve la preuve à titre d'exercice dans son *Petit guide de calcul différentiel* ([Rou]).

3.8 ... Et un lion du Sahara dans une cage ?

Cette question tout à fait sérieuse occupe une branche active des mathématiques depuis des décennies. Le fer de lance de cette branche est l'article édifiant (de [Ame]) qui suit :

Une contribution à la théorie mathématique du grand jeu de chasse

H. PÉTARD, Princeton, New Jersey

Cette discipline mathématique peu connue n'a pas, ces dernières années, capté l'attention dans la littérature autant qu'elle le mérite. Dans cet article nous présenterons quelques algorithmes qui, je l'espère, auront un intérêt particulier pour les autres chercheurs dans le domaine. Négligeant les méthodes les plus triviales parmi les triviales, nous confinerons notre attention sur celles qui déploient des applications significatives d'idées familières pour les mathématiciens et physiciens.

L'époque actuelle est particulièrement adaptée à la préparation d'une explication du sujet, puisque les avancées récentes, à la fois en mathématiques pures et en physique théorique, ont produit de puissants outils dont le moindre signe d'existence était inattendu lors des recherches précédentes. Dans le même temps, la plupart des méthodes les plus classiques et élégantes ont acquis un nouveau sens, à la lumière des découvertes modernes. Comme d'autres domaines de nos connaissances dans lesquels les techniques mathématiques ont été appliquées ces dernières années, la théorie mathématique du grand jeu de chasse a un effet particulièrement heureux, à l'unanimité, sur la plupart des branches les plus diversifiées des sciences exactes.

Pour la clarté de la proposition, nous confinerons notre attention sur les lions (*Felis leo*) du désert du Sahara. Les méthodes que nous allons énumérer pourront, comme on peut le voir, s'appliquer facilement à d'autres carnivores et d'autres portions du globe, *via* quelques modifications formelles évidentes. L'article est divisé en trois parties, qui tirent leur essence respectivement des mathématiques, de la physique théorique et de la physique expérimentale.

L'auteur désire remercier le *trivial Club of St. John's College*, Cambridge, Angleterre ; le M.I.T. et son chapitre *Société de la Recherche Inutile*, le F. o. P., de l'université de Princeton ; et les nombreux contributeurs, connus et inconnus, conscients et inconscients.

Les méthodes mathématiques

La méthode de Hilbert, ou méthode axiomatique On place une cage verrouillée à un certain point du désert. Puis on introduit le système logique suivant :

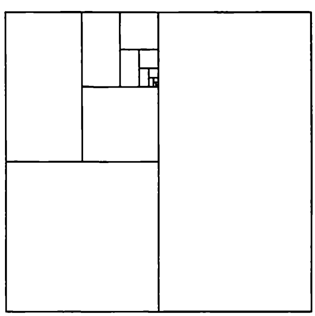
- **axiome 2** *La classe des lions dans le désert du Sahara est non vide.*
- **axiome 3** *S'il existe un lion dans le désert du Sahara, il existe un lion dans la cage.*
- **Règle de déduction 1** *Si P est un théorème, et « P implique Q » un théorème, alors Q est un théorème.*

– **Théorème 16** *Il existe un lion dans la cage.*

La méthode d'inversion géométrique Placez une cage sphérique dans le désert, entrez-y et verrouillez-la. Faisons agir une inversion de la cage. Alors le lion est à l'intérieur de la cage, et vous êtes dehors.

La méthode de géométrie projective Sans perte de généralité, on peut voir le désert du Sahara comme un plan. Projetez le plan sur une droite, et projetez la droite sur un point intérieur de la cage. Le lion est projeté sur le même point.

La méthode de Bolzano-Weierstrass Divisez le désert via une droite allant du sud jusqu'au nord. Le lion est à l'est de la droite, soit à l'ouest. Supposons par exemple qu'il soit à l'ouest. Divisez la portion ouest par une ligne allant de l'est vers l'ouest. Le lion est soit dans la portion nord, soit dans la portion sud. Imaginons qu'il soit dans la portion nord. On répète le processus indéfiniment, construisant une barrière suffisamment solide autour de la portion choisie à chaque étape. Le diamètre de ces portions choisies tend vers zéro, si bien que le lion est inéluctablement encerclé par une barrière de périmètre aussi petit que désiré.



La méthode topologique (I) On remarque que le désert est un espace séparable (homéomorphe à $\mathbb{R}^3$). Il contient donc une suite dense dénombrable de points, dont on peut extraire une suite ayant le lion comme limite. Alors, il suffit de l'approcher furtivement le long de cette suite, avec sur nous un équipement de circonstance.

La méthode topologique (II) Remarquez qu'un lion a au moins le genre topologique du tore. Plongez alors le désert dans un espace à quatre dimensions. Il est maintenant possible ([Sei]) de déformer continûment le lion pour le nouer. Il est alors sans issue.

La méthode de Peano Construisez, par des méthodes standard, une courbe continue passant par tous les points du désert. Il a été remarqué (par Hilbert, voir [Hob]) qu'il est possible de traverser cette courbe en un temps arbitrairement petit. Armé d'une lance, il suffit de traverser cette courbe en moins de temps qu'il n'en faut pour le lion de bouger de sa propre longueur.

La méthode de Cauchy, ou de la théorie des fonctions holomorphes On considère une fonction $f(z)$ à valeurs dans l'ensemble des lions. Soit ζ la cage. Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z$$

où C est le contour du désert. Sa valeur est $f(\zeta)$, c'est-à-dire un lion dans une cage*.

La méthode taubérienne de Wiener On se procure un lion domestique, L_0, de la classe $L(-\infty,\infty)$, dont la transformée de Fourier ne s'annule jamais, et nous le relâchons dans le désert. Alors, L_0 converge dans notre cage. Par le théorème taubérien général de Wiener ([Wie2] pages 73-74), tout autre lion, disons L, convergera dans la même cage. Une méthode alternative consiste à approximer de plus en plus près L en translatant L_0 par rapport au désert ([Wie2] page 89).

La méthode inductive Considérez, pour tout n, la proposition P_n suivante : « Il est possible d'attraper n lions dans le désert du Sahara. » Bien sûr, P_n est vraie pour de très grandes valeurs de n, parce que dans ce cas, les lions sont si serrés les uns contre les autres qu'il est facile de les attraper. À présent, on remarque que P_n implique P_{n-1}, parce que si on arrive à attraper un certain nombre de lions, on peut toujours relâcher l'un d'entre eux. Alors, P_1 est vraie.

La méthode de Kalra Faites une liste des lieux où le lion passe. Classifiez-les dans différents ensembles flous. Le lion, confus, tombera dans votre piège.

*. NB : D'après le théorème de Picard ([Osg]), on peut attraper tout lion, sauf un au pire.

La méthode cartésienne Mettez l'origine aussi près que possible du lion. Ensuite faites des rotations sans cesse. Au départ, le lion aura le vertige. À la fin, il s'évanouira.

La méthode de théorie des groupes Remarquez que *dog in lace* est un anagramme de *caged lion*. Par conséquent, faites la permutation de $\mathfrak{S}_9$ appropriée sur un chien en dentelles pour obtenir un lion en cage. Obtenir un chien en dentelles est laissé au lecteur à titre d'exercice.

Les méthodes de physique théorique

La méthode de la troisième loi de Newton Laissez le lion vous attraper (on admettra que vous survivez à cette étape). Pour toute action, il existe une réaction opposée de force égale. Alors, vous aurez capturé le lion.

La méthode de Dirac En y pensant, on remarque que les lions sauvages ne sont pas, *ipso facto*, observables dans le désert du Sahara. Par conséquent, s'il y a des lions dans le Sahara, ils sont domestiques. La capture d'un lion domestique est laissée à titre d'exercice au lecteur.

La méthode de Schrödinger À tout moment il y a une probabilité positive d'avoir un lion dans la cage. Asseyez-vous et attendez.

La méthode de physique nucléaire Mettez un lion domestique dans la cage, et appliquez un opérateur d'échange de Majorana (Voyez [Bet] par exemple, pages 82–229 ; plus particulièrement les pages 106-107) entre lui et un lion sauvage. Une variante suggère de supposer, pour fixer les idées, que nous avons besoin d'un mâle. Mettez une lionne domestique dans la cage, et appliquez un opérateur d'échange d'Heisenberg (*Ibid.*) qui échange les *spins*.

Les méthodes de physique expérimentale

La méthode thermodynamique On construit une membrane semi-perméable, perméable à tout sauf les lions, qu'on promène à grands pas à travers le désert.

La méthode de duplication de l'atome On irradie le désert avec des neutrons lents. Le lion devient radioactif, et un procédé de désintégration se met en place. Quand la désintégration est assez avancée, il est incapable de se montrer combattif.

La méthode d'optique et magnétostatique On plante une herbe aux chats (*Nepeta cataria*) lenticulaire très large, dont l'axe suit la direction de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, et on place une cage à un point focal. On distribue alors, sur tout le désert, de grandes quantités d'épinards (*Spinacia oleracea*), qui, comme on le sait tous, contiennent beaucoup de fer. Les épinards sont mangés par les créatures herbivores du désert, qui sont à leur tour mangées par les lions. Les lions sont donc orientés parallèlement au champ magnétique terrestre, et le faisceau de lions résultant est concentré par l'herbe aux chats sur la cage.

Cet article très innovant a inspiré les informaticiens, comme en atteste le paragraphe suivant :

Les méthodes informatiques

La méthode de recherche Nous pouvons supposer que le lion a plus de chance d'être trouvé au nord du point où on se trouve. Alors, le *vrai* problème est un problème de vitesse, puisqu'on a un seul ordinateur pour résoudre le problème.

La méthode de recherche parallèle En utilisant le parallélisme, on devrait pouvoir chercher dans la direction nord plus rapidement qu'avant.

La méthode de Monte-Carlo On prend des points au hasard dans l'espace où on cherche. En supprimant les points voisins dans la recherche, on peut réduire le nombre de points à considérer de manière drastique. Le lion devrait, d'après les probabilités, apparaître tôt ou tard.

L'approche pratique Tiens, il y a un lapin juste à coté de nous. Puisqu'il est déjà mort, il est particulièrement facile à attraper. On peut alors l'attraper et l'appeler un lion.

L'approche du langage commun Si seulement tout le monde utilisait ADA/Common Lisp/Prolog, ce problème serait trivial à résoudre.

L'approche standard Nous savons qu'un lion est de ISO 4711/X.123. Puisque CCITT a spécifié qu'un lion est un cas particulier d'un chat, nous devrons attendre l'apparition d'un standard harmonisé. 20 000 000 euros financent des enquêtes concernant le développement de ce standard.

La comparaison membre à membre Restez tout au nord-ouest du désert du Sahara. Faites un pas vers l'est. Répétez ce procédé jusqu'à trouver le lion, ou jusqu'à atteindre l'extrémité est du désert. Si vous atteignez l'extrémité est, faites un peu vers le sud, puis allez vers l'extrémité ouest. Quand vous aurez finalement attrapé le lion, mettez-le dans une cage. S'il s'avère que le lion vous mange avant que vous ne puissiez le mettre dans une cage, appuyez sur le bouton *reset*, et recommencez.

L'approche de Dijkstra J'ai compris le problème ainsi : attraper un lion sauvage dans le désert du Sahara. Une autre façon de poser le problème est :

axiome 4 *Sahara elem deserts*

axiome 5 *Lion elem Sahara*

axiome 6 $\neg$*(Lion elem cage)*

On observe l'invariant $P1$ suivant : « $C(L) \vee \neg C(L)$ » où $C(L)$ signifie : la valeur de L est dans la cage.

Établir C initialement se fait trivialement, avec :

```
;cage := {}
```

<u>Note 0 :</u> C'est facilement implémenté en ouvrant la porte de la cage, et en sortant tous les lions qui pourraient être là initialement. (Fin de la note 0)

Alors, la structure du programme est évidemment :

```
;cage := {}
;do NOT (C(L)) ->
    ;"approach lion under invariance of P1"
    ;if P(L) ->
        ;"insert lion in cage"
```

```
            [] not P(L) ->
                ;skip
            ;fi
        ;od
```

où $P(L)$ signifie : la valeur de L est à portée de main.

Note 1 : L'axiome 5 assure que la boucle se termine. (Fin de la note 1)

Exercice 0 : Détaillez l'étape *"Approach lion under invariance of P1"*. (Fin de l'exercice 0)

Note 2 : Le programme est robuste, au sens où il capote si la valeur de L est « lionne ». (Fin de la note 2.)

Remarque 0 : On peut y voir un nouveau sens du mot « robuste » pour vous. (Fin de la remarque 0)

Note 3 : L'expérience nous montre que le programme ci-dessus mène au résultat désiré. Il va sans dire que nous n'avons pas à le lancer, par conséquent. (Fin de la note 3)

(Fin de l'approche)

Puisqu'on en parle, une autre astuce rien que pour vous, qui n'a rien à voir avec les lions et les cages. Vous savez tous comment chasser un tigre, hein... Mais que faire d'un tigre casqué ?

Un mathématicien sait comment faire : vous l'amenez à l'école des *gentlemen*, où il apprendra à être poli, à dire « Bonjour Monsieur » quand on le salue, et c'est alors qu'une fois sorti diplômé de son école des gentlemen vous n'avez plus qu'à le saluer. Comme ça, en disant « Bonjour Monsieur », il ôtera son couvre-chef comme tout *gentleman*, si bien que vous pourrez le chasser comme un tigre normal.

3.9 En vrac

1. Il y a 10 sortes de mathématiciens : ceux qui comprennent le binaire et ceux qui n'y comprennent rien.
2. Il y a 10 sortes de mathématiciens : ceux qui comprennent le binaire, ceux qui n'y comprennent rien, et ceux qui comprennent le code Gray.
3. Il y a 10 sortes de mathématiciens : ceux qui comprennent le binaire, et neuf autres.
4. Il y a trois sortes de mathématiciens : ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas.

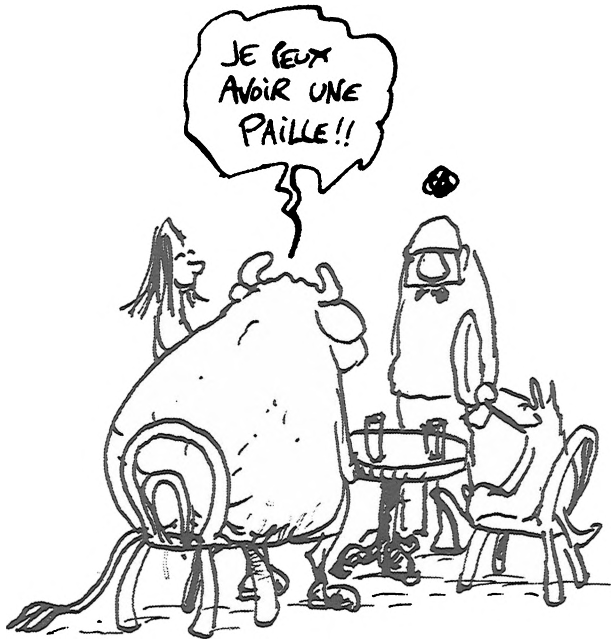
5. Il y a deux sortes de mathématiciens : ceux qui pensent que le monde des mathématiciens peut être divisé en deux sortes de gens et ceux qui pensent que ce n'est pas possible.
6. Il y a deux sortes de mathématiciens : ceux qui peuvent être classés parmi deux sortes de mathématiciens, et ceux qui ne peuvent pas.
7. Il y a deux sortes de mathématiciens : ceux qui pensent faire partie de la première sorte, ceux qui pensent faire partie de la deuxième, et aussi ceux qui pensent faire partie des deux... Il y a aussi ceux qui connaissent le paradoxe de Russell !
8. Un topologue n'arrive pas à comprendre la preuve du théorème. Un Bourbakiste passant par là lui dit : « C'est pourtant simple, c'est une conséquence immédiate des propositions 12.6.24, 13.9.17 et 14.19.28 ; pour vérifier que les hypothèses sont valides, il suffit d'utiliser les lemmes 10.9.34 et 15.2.31. »
9. Quel est le comble d'un topologue ? Être privé du vin contenu dans une bouteille de Klein.
   Variante : Dans l'enfer topologique, la bière est contenue dans des bouteilles de Klein.
10. Un topologue rentre chez lui après une dure journée de travail, et tombe sur sa femme et sa fille, en train de sangloter. Un officier de police, qui essayait de les consoler, accueille le topologue avec un regard sombre.
    « J'ai une très mauvaise nouvelle à vous annoncer, dit-il. À l'école, votre fils Dave est entré en collision avec un rouleau compresseur et a été aplati. Nous avons essayé de vous contacter immédiatement, mais vous aviez déjà quitté votre bureau avant qu'on vous rejoigne. »
    Le mathématicien reste figé quelques minutes, il a du mal à y croire :
    « Est-ce que... Est-ce qu'il est mort sur le coup ? Il est à l'hôpital ?
    – Il est mort quelques secondes après que le véhicule lui soit passé dessus, lui répond l'officier. Il n'a pas souffert. Nous avons besoin que vous veniez à la morgue. »
    Ils vont donc à la morgue. L'officier observe attentivement, tandis qu'on montre au mathématicien le corps, qui est une carcasse aplatie et brisée. « Pouvez-vous l'identifier comme votre fils ? demande-t-il.
    – Non, dit le topologue, mais je pense que je peux identifier une paire de points antipodaux. »
11. À la fin d'un de ses cours sur les méthodes d'optimisation en mathématiques, le professeur regarde fermement sa classe et dit : « Voici

le dernier conseil que je peux vous donner : peu importe ce que vous avez appris dans ce cours, ne l'appliquez jamais à votre vie personnelle !

– Pourquoi ? demandent les étudiants.
– Eh bien, il y a quelques années, j'ai observé ma femme en train de préparer le petit déjeuner, et j'ai remarqué qu'elle perdait beaucoup de temps à aller d'un endroit à l'autre de la cuisine. J'ai donc commencé à réfléchir, optimiser tout le procédé, et en ai parlé à ma femme.
– Et que s'est-il passé ?
– Avant que je ne donne mon avis d'expert, il fallait trente minutes à ma femme pour préparer un petit déjeuner pour nous deux. Et maintenant, ça *me* prend moins de quinze minutes... »

12. Une femme entre dans un bar accompagnée d'un chien et d'une vache. Le barman dit : « Hey, les animaux ne sont pas autorisés ici ! »
La femme lui répond : « Ce sont des animaux très particuliers.
– Ah oui ?
– Ce sont des théoriciens des nœuds. »
Le barman lève un sourcil et dit : « J'ai rencontré un certain nombre de théoriciens des nœuds qui se comportaient comme des animaux, mais jamais dans l'autre sens.
– Très bien, je vais vous le prouver alors. Posez-leur la question que vous voulez.»
Le barman demande alors au chien : « Donnez-moi le nom d'un invariant des nœuds.
– Arf, arf » aboie le chien.
Le barman grimace, puis se tourne vers la vache : « Donnez-moi le nom d'un invariant topologique.
– Mu, mu » meugle la vache.
À ce moment le barman se tourne vers la femme pour lui dire : « Vous essayez de me mener en bateau ! » et les renvoie du bar.
Dehors, le chien demande à la femme : « Tu penses que j'aurais plutôt dû parler du polynôme de Jones ? »

13. « Bonjour, vous êtes probablement au numéro 438–9012, oui, la maison du fameux probabiliste. Je ne suis probablement pas là, ou désirable de répondre au téléphone, plus vraisemblablement la seconde alternative, d'après mes derniers calculs. En supposant que l'univers ne se termine pas d'ici les trente prochaines secondes, ce qui a une probabilité de se produire que je suis encore en train d'essayer de calculer, vous pouvez laisser vos nom, numéro de téléphone



et message, et je vous rappellerai probablement. La probabilité que je le fasse est d'environ 0,645. Bonne journée. »

14. Quelqu'un demande à son ami : « Tu connais la dernière sur les probabilistes ?
– Probablement... »

15. Alors qu'un statisticien passe un contrôle de sécurité dans un aéroport, on découvre une bombe dans sa valise. Celui-ci s'explique : « Les statistiques montrent que la probabilité d'avoir une bombe dans un avion est de 1/1 000. Cependant, la chance d'avoir deux bombes dans un même avion est de 1/1 000 000. Ainsi, je suis plus en sûreté... »

16. Le rôle des statistiques est fondamental en génétique. Par exemple, les statistiques montrent que le nombre d'enfants est un trait héréditaire. Si vos parents n'ont pas d'enfants, il y a de grandes chances que vous non plus.

17. Un jeune étudiant à l'université, qui vit encore chez ses parents, a la malchance de subir de nombreux accidents de voiture. Un jour, son professeur de statistiques dit à la classe que 83% des accidents

de voiture se produisent dans les quinze kilomètres autour de chez soi. Le jour suivant, l'étudiant déménage à dix-sept kilomètres de chez lui, et n'aura plus le moindre accident de toute sa scolarité !

18. 50% des mariages se terminent par un divorce. Donc, si vous ne planifiez pas un divorce, votre conjoint(e) le fera.
19. La mère de trois enfants est actuellement enceinte d'un quatrième enfant. Un soir, le père (un statisticien) dit à sa femme : « Tu savais, chérie, que notre nouvel enfant allait être chinois ?
    – Quoi ?
    – Bah oui, un enfant sur quatre qui naît est chinois... »
20. Avez-vous déjà entendu parler du statisticien qui a changé de carrière pour devenir un chirurgien spécialisé dans la gynécologie ? Sa spécialité était les hystérectogrammes.
21. Un statisticien peut avoir sa tête dans un four et ses pieds dans de la glace, tout en continuant d'affirmer qu'en gros il se sent bien.
22. Un couple de statisticiens a la malchance d'être séparés à un jour d'intervalle l'un de l'autre. Ils avaient toujours envisagé d'être enterrés côte à côte. Malheureusement, les pompes funèbres les ont mêlés à un autre couple qui avait un souhait *post-mortem* similaire. On connaît maintenant ceci comme le premier cas de confusions dans un plan à parcelles subdivisions (ou *split-plot*).
23. La statistique la plus importante pour les fabricants de voitures est l'autocorrélation.
24. « Les statistiques ne sont-elles pas merveilleuses ?
    – Pourquoi ?
    – Si on se fie aux statistiques, il y a 42 millions d'œufs d'alligators pondus chaque année. Seulement la moitié éclot. De ces œufs éclos, trois quarts des nouveaux-nés finissent mangés par des prédateurs dans les trente-six premiers jours. Parmi ceux restant, seulement 5% subsiste jusqu'à ses un an au moins, pour une raison ou une autre.
    – Qu'est-ce qui est si merveilleux là-dedans ?
    – S'il n'y avait pas de statistiques, on serait bien embêtés, avec tous ces alligators partout ! »
25. Une entreprise a besoin d'engager des mathématiciens pour établir des statistiques. Trois jeunes diplômés sont invités pour une *interview* : l'un d'eux a un master en mathématiques pures, un autre en mathématiques appliquées, et le troisième vient d'obtenir sa licence en statistiques. On pose la même question aux trois : « Combien font un tiers plus deux tiers ? »

Le mathématicien pur : « C'est égal à un. »
Le mathématicien appliqué sort une calculatrice de poche, entre les nombres, et répond : « C'est égal à 0,999999999. »
Le statisticien : « Vous voulez que ce soit égal à quoi ? »

26. Les statisticiens doivent rester éloignés des jouets pour enfants, parce qu'ils régressent si facilement...

27. Deux amis statisticiens prennent du bon temps dans un bar. Dehors, un terrible orage se prépare. Malgré tout, un des deux mecs décide qu'il est temps de partir : ayant beaucoup bu, il vaut mieux rentrer. « Tu n'as pas peur d'être frappé par la foudre ? lui demande son ami.
    - Pas du tout. Les statistiques montrent que, dans cette région, une personne par an est frappée par la foudre, et cette personne était à l'hôpital il y a trois semaines. »

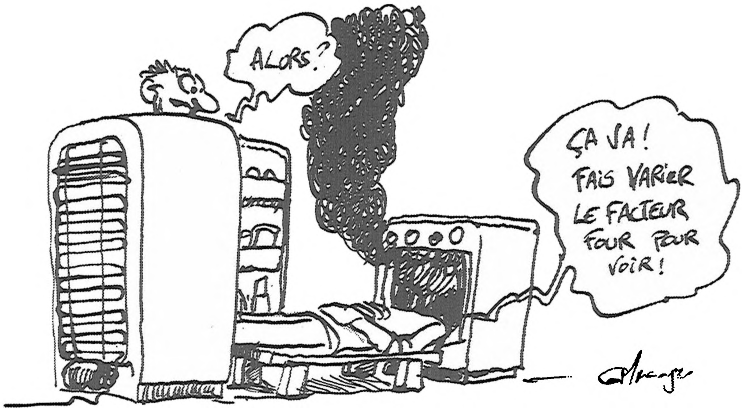
28. L'entreprise Lipton est à la pointe des statistiques, surtout concernant les tests T.

29. Les statistiques, c'est comme les mini-jupes : ça montre beaucoup de choses, mais ça cache l'essentiel !

30. Saviez-vous que 87,166253% des statisticiens revendiquent une précision dans leurs résultats non justifiée par la méthode employée ?

31. Sur une planète lointaine, très lointaine, la vie vient d'être créée. À la surprise de tous, trois statisticiens sont en effet sortis du néant, pour devenir les premières créatures vivantes de la planète. Les trois compères s'assoient donc, stupéfaits, pendant des heures d'incrédulité. Finalement, l'un des statisticiens prend la parole et dit : « Bon, nous savons tous que nous devons nous atteler aux mutations des créatures, et qui, mieux qu'un statisticien, sait étudier la variabilité ? »
    Le second statisticien gagne en confiance à présent, et répond : « Oui, et cette planète a besoin d'être peuplée, et qui, mieux qu'un statisticien, connaît les populations ? »
    Le troisième statisticien reste assis en silence, et l'air plutôt morne. Soudainement, il s'anime tel un pantin articulé, et proclame : « Oui, mes confrères, mais $n = 3$ est une taille d'échantillon bien trop petite pour conclure que nous existons ! »

32. « D'après les statistiques, la plupart des gens sont anormaux !
    - En quoi ?
    - D'après les statistiques, une personne normale a un sein et un testicule... Et un nombre de jambes strictement inférieur à deux ! »



33. Un mathématicien américain retourne dans son pays après une conférence à Moscou en analyse réelle et complexe. Le douanier, à l'aéroport, jette un coup d'œil à sa carte de débarquement et dit : « Alors, votre voyage en Russie était un voyage d'affaires. Quelles sortes d'affaires ?
   – Je suis professeur de mathématiques.
   – Et vous faites quel genre de mathématiques ? »
   Le professeur médite pendant une fraction de seconde, essayant de trouver quelque chose qui semble suffisamment spécifique sans pour autant éveiller des soupçons chez le douanier, et répond : « Je suis un analyste. »
   Le douanier hoche la tête d'un air d'approbatif : « Je trouve ça super, que des gens comme vous aillent en Russie pour aider ces pauvres ex-communistes à remettre leur marché boursier sur pied... »

34. Une firme d'affaires engage des mathématiciens. Après quelques entretiens, on demande à trois jeunes diplômés pleins d'espoir – un mathématicien pur, un mathématicien appliqué et un mathématicien en finances – quel salaire ils attendent.
   Le mathématicien pur : « Est-ce que 30 000 € serait abusif ? »
   Le mathématicien appliqué : « Je pense que 60 000 € devrait aller. »
   Le mathématicien en finances : « Pourquoi pas 300 000 € ? »
   L'employeur est sidéré : « Vous savez qu'un mathématicien pur est prêt à faire le même travail que vous pour dix pourcent de ce que

vous demandez ?!
- Eh bien, je pensais à 135 000 € pour moi, 135 000 € pour vous, et 30 000 € pour le mathématicien pur qui ferait le travail. »

35. Une conversation dans un bar : « Logicien ? En quoi ça consiste ?
    - Ok, je vais vous l'expliquer sur un exemple : avez-vous un aquarium ?
    - Oui...
    - Donc vous avez certainement des poissons dedans.
    - Oui...
    - Et comme vous avez un aquarium avec des poissons dedans, vous aimez certainement les animaux.
    - Oui...
    - Et comme vous aimez les animaux, vous aimez certainement les enfants.
    - Ouais...
    - Et comme vous aimez les enfants, vous en avez certainement.
    - Ouais...
    - Et comme vous avez des enfants, vous avez certainement une femme.
    - Ouais...
    - Et comme vous avez une femme, vous aimez certainement les femmes.
    - Yeah...
    - Et comme vous aimez les femmes, vous n'aimez pas les hommes !
    - Bien sûr !
    - Et comme vous n'aimez pas les hommes, vous n'êtes pas gay !
    - Exactement ! »

    Le logicien s'en va, et un ami de son « étudiant érudit » arrive.
    « Imagine : je viens tout juste de rencontrer un logicien !
    - Un quoi ?
    - Un logicien. Je vais te l'expliquer sur un exemple : tu as un aquarium ?
    - Non...
    - Pédale ! »

36. Alors que le fils du logicien refuse encore une fois de manger sa soupe lors du diner, son père le menace : « Si tu ne manges pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert ! »
    Le fils, effrayé à l'idée de ne pas avoir de dessert, finit sa soupe en deux temps trois mouvements. Puis son père l'envoie au lit.

37. Un jeune homme tranquille est amené devant un juge. Le juge regarde d'abord l'homme, puis son dossier, puis le fixe à nouveau,

d'un air étonné. « Pouvez-vous me dire ce qu'il s'est passé, avec vos propres mots ? demande-t-il à l'homme.

– Je suis un mathématicien logicien, constamment en lutte avec la vraie nature d'une *preuve*.
– D'accord, continuez, dit le juge, stupéfait.
– D'abord, j'étais à la bibliothèque et j'ai trouvé les livres que je cherchais, pour finalement les emprunter. Ils m'ont alors dit que ma carte de bibliothèque avait expiré, et que je devais en obtenir une nouvelle. C'est pourquoi je suis allé au service d'inscription, et je me suis mis dans une queue. Et ai rempli les papiers pour avoir une nouvelle carte. Et suis revenu dans la queue pour avoir ma carte.
– Et ? dit le juge.
– Il me demanda alors : "Pouvez-vous *prouver* que vous êtes de New York ?"... Je l'ai donc poignardé. »

38. Que choisirait un logicien entre la moitié d'un œuf et une bénédiction éternelle dans la vie après la mort ? La moitié d'un œuf, bien sûr. Car rien est mieux que la bénédiction éternelle dans la vie après la mort, et la moitié d'un œuf est mieux que rien.
39. C'est l'histoire d'un logicien qui voit une pancarte sur le chemin de l'étang où il va pêcher : « Tous les vers que vous voulez pour 1 €. » Il arrête sa voiture et demande des vers pour 2 €.
40. Si un algébriste tombe malade, est-ce faute d'anticorps ?
41. C'est l'histoire d'un théoricien des catégories fou, qui pensait être un catamorphisme. Il se promenait dans l'asile avec une paire de bananes, qu'il montrait aux autres patients, en ricanant systématiquement. Un jour, il fit le coup à l'hypocondriaque du groupe, qui était convaincu d'être en phase terminale d'un cancer du cerveau impossible à opérer, mais il ne semblait pas contrarié du tout.
   « Qu'est-ce que vous faites ? demande-t-il.
   – Je construis une flèche unique, dit le fou, avec *vous* comme cible !
   – Et alors ? dit l'hypocondriaque. Je suis terminal. »
   (Bien sûr, cette histoire n'est amusante que si l'asile est cartésien clos).
42. Si on demande à un physicien théorique d'étudier la stabilité d'une chaise, il s'y prend comme suit :
   – Il met 10 minutes pour résoudre le cas d'une chaise à un pied,
   – Ensuite 1 heure pour résoudre le cas d'une chaise à une infinité de pieds,
   – Et enfin 10 ans pour résoudre le cas d'une chaise à un nombre fini de pieds.

43. Un mathématicien passe ses vacances à faire de la randonnée dans les îles écossaises. Un jour, il rencontre un berger avec un grand troupeau de moutons. Un de ces animaux adorables, laineux, ferait un excellent animal de compagnie, pense-t-il...
« Combien pour un de vos moutons ? demande-t-il au berger.
– Ils ne sont pas à vendre, répond-il. »
Le mathématicien médite pendant un moment et dit alors :
« Je vous donne le nombre précis de moutons dans votre troupeau sans compter. Si j'ai raison, vous ne pensez pas que je mérite l'un d'eux en récompense ? »
Le berger acquiesce. C'est alors que le mathématicien dit : « 387 ».
Le berger reste silencieux quelques instants, puis prend la parole :
« Vous avez raison. L'idée de perdre un de mes moutons m'est détestable, mais je l'ai promis : l'un d'eux est à vous. Vous avez l'embarras du choix ! »
Le mathématicien agrippe un des animaux, le met sur ses épaules, commence à reprendre sa marche quand soudain le berger reprend :
« Attendez ! Si je vous dis quelle est votre profession, je peux reprendre mon animal.
– C'est assez juste.
– Vous êtes certainement un mathématicien. »
Il est abasourdi.
« C'est exact. Mais comment pourriez-vous le savoir ?
– C'est facile : vous avez donné le nombre exact de moutons sans même les compter... Puis vous avez choisi mon chien... »

44. On demande à deux mathématiciens, pur et appliqué, de calculer 2×2. Le mathématicien appliqué propose : « On a
$$2 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}.$$
Le deuxième facteur, dans le membre de droite de l'égalité, a un développement en série géométrique
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$
Si on tronque la série après le second terme, on obtient la solution approchée
$$2 \cdot 2 = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \text{ ».}$$
Le mathématicien pur a une autre solution : « On a
$$2 \cdot 2 = (-2) \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2}}.$$

Le deuxième facteur, dans le membre de droite de l'égalité, a un développement en série géométrique

$$\frac{1}{1-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$$

qui diverge. Alors, $2 \cdot 2$ n'existe pas. »

45. Pourquoi les mathématiciens appliqués ont-ils peur de conduire ?
Réponse : Parce que la largeur de la route est négligeable devant sa longueur.
46. À quoi reconnaît-on un algébriste le jour de son mariage ?
Réponse : C'est le seul qui cherche à injecter l'anneau dans le corps de la mariée...
47. Que fait un analyste complexe quand il dort ?
Réponse : $(x+iy)(x+iy)(x+iy)$...
48. Quel est le comble d'un arithméticien ?
Réponse : Se faire piquer sa moitié par un tiers dans un car.
49. Que répond une logicienne venant d'accoucher à qui l'on demande « Avez-vous eu un garçon ou une fille ? » ?
Réponse : « Oui. »
50. Pourquoi les informaticiens confondent-ils Noël et Halloween ?
Réponse : Parce que Dec 25 = Oct 31.

CHAPITRE 4

AUTRES BLAGUES GROTESQUES

4.1 C'est un mathématicien, un physicien et...

1. Un médecin, un physicien et un mathématicien observent un appartement. Trois hommes rentrent dans l'appartement, puis quatre personnes en sortent.
   Réaction du médecin : « Ils ont dû se reproduire. »
   Réaction du physicien : « On a fait une erreur de mesure, il faut recommencer l'expérience. »
   Réaction du mathématicien : « Si une personne rentre dans l'appartement, l'appartement devient vide. »
2. Un mathématicien et un physicien sont sur une terrasse de café. Un feu se déclare. Le physicien se précipite, prend un seau d'eau, le remplit et éteint le feu. Le lendemain, un nouveau feu se déclare. Le mathématicien se lève, prend le seau d'eau et le donne au physicien : « Je viens de résoudre le problème en le ramenant à une solution déjà existante. »
3. Dans le même genre : comment un mathématicien cuit-il des pâtes ? Normalement, la recette de cuisson est :
   - remplir une casserole d'eau avec un filet d'huile ;
   - faire bouillir ;
   - mettre les pâtes ;
   - remuer ;
   - faire cuire sept minutes ;
   - goûter ;
   - égoutter.

   On donne à un mathématicien une casserole d'eau bouillante et on lui demande de faire cuire des pâtes. Comment procède-t-il ? Il vide l'eau et se ramène au cas précédent.

4. Les blagues sur le feu qui s'allume sont nombreuses, et il y a également la variante (parmi bien d'autres encore) : un ingénieur se réveille et sent de la fumée. Il sort dans le couloir et voit des flammes. Il remplit la poubelle de sa chambre d'eau et éteint le feu. Puis il retourne se coucher. Un physicien se réveille et sent de la fumée. Il sort dans le couloir et voit des flammes. Il court jusqu'à une bouche à incendie et, après calcul de la vitesse de la flamme, de la distance, de la pression de l'eau, de la trajectoire, *etc.*, il éteint le feu avec la quantité minimale d'eau et d'énergie. Puis il retourne se coucher. Un mathématicien se réveille et sent de la fumée. Il sort dans le couloir et voit des flammes. Il réfléchit un moment et s'exclame : « Ah ! Il existe une solution ! » Puis il retourne se coucher.

5. Un catcheur, un physicien et un mathématicien sont sujets à une expérience : on les enferme dans une pièce avec chacun une boîte d'épinards, fermée, et sans ouvre-boîte. Au bout de 24 heures, on va voir ce qu'il sont devenus.

   Le catcheur réussit à ouvrir sa boîte : « Eh bien, j'ai simplement violemment projeté la boîte contre le mur. L'impact a été tel qu'elle s'est ouverte », explique-t-il.

   Le physicien réussit également à ouvrir sa boîte : « J'ai observé le solide, et calculé ses points de rupture. J'ai alors effectué une pression de manière à exercer une force maximale sur ceux-ci, et la boîte s'est tout naturellement ouverte. »

   Le mathématicien, enfin, est retrouvé prostré dans un coin de la pièce, la sueur ruisselant sur son visage, et sa boîte de conserve, fermée, entre les pieds : « Admettons que la boîte est ouverte... Admettons que... * »

   Une variante propose : À l'arrivée de l'expérimentateur, la boîte est encore fermée et le mathématicien a disparu. Mais d'étranges bruits proviennent de la boîte... Quand l'expérimentateur l'ouvre, il découvre le mathématicien : « Argh ! Une erreur de signe quelque part ! »

   Une dernière alternative : Le physicien se débrouille comme cela a été décrit ci-dessus, et le mathématicien est sauvé à temps. Il est alors mené vers les cellules des autres sujets de l'expérience. Au catcheur il dit alors : « Oh, une méthode vraiment grossière. » Dans la cellule du physicien, il regarde la boîte puis les formules, pointe du doigt un tableau et annonce : « Eh bien, ces limites ne peuvent pas être interverties, et cette intégrale-là n'existe pas. »

---

*. Ou : Admettons que la boîte soit fermée et trouvons une contradiction...

6. Un mathématicien et un physicien suivent un colloque sur un domaine très pointu. L'orateur, dans sa démonstration, s'appuie sur un espace à 17 dimensions. Son discours est passionnant pour nos deux spectateurs, qui suivent non sans difficulté, avec une grande attention. Après plusieurs heures, tous deux sortent de la salle et commencent à discuter :
   « Vraiment, j'ai le plus grand mal à imaginer un espace à 17 dimensions, s'exclame le physicien. Autant un espace à 3 dimensions, voire 4 avec le temps, ça va, mais là... Je sèche ! »
   Et le mathématicien de lui répondre très naturellement :
   « C'est pourtant simple cher collègue, il suffit d'imaginer un espace à n dimensions, puis de fixer $n = 17$! »
7. Un ingénieur, un physicien et un logicien sont dans un train en Écosse. Ils voient un mouton noir sur le bord de la route. « Les moutons écossais semblent noirs. » dit l'ingénieur.
   « Non, il est plus correct de dire qu'au moins un mouton écossais

est noir. » corrige le physicien.
« Non, il est plus correct de dire qu'il existe en Écosse au moins un mouton dont l'un des côtés au moins est noir ! » dit le logicien.
Une variante encore plus impitoyable dit : « Il a existé *durant quelques secondes* un mouton dont... ». Certaines variantes font encore intervenir un informaticien, qui s'exclame « Oh non, un bogue ! »...

8. On pose les questions suivantes à un physicien et à un mathématicien : « Supposons que vous marchez dans une maison en feu et voyez une bouche d'incendie et un tuyau d'arrosage qui n'y est pas lié. Que faites-vous ? »
   Le physicien : « Je lie le tuyau à la bouche d'incendie †, active la sortie d'eau, et éteins le feu. »
   Le mathématicien : « Je lie le tuyau à la bouche d'incendie, active la sortie d'eau, et éteins le feu. »
   Puis on leur pose cette question : « Supposons que vous marchez dans une maison et voyez une bouche d'incendie et un tuyau d'arrosage qui y est lié. Que faites-vous ? »
   Le physicien : « Je continue ma marche, puisqu'il n'y a pas de problème à résoudre. »
   Le mathématicien : « Je déconnecte le tuyau de la bouche d'incendie, mets le feu à la maison, réduisant le problème à un cas précédemment résolu. »
9. Un mathématicien et un physicien sont soumis à une expérience psychologique. Le mathématicien est assis sur une chaise dans une grande salle vide, et une belle jeune femme nue est disposée dans un lit de l'autre côté de la salle. Le psychologue explique : « Vous devez rester sur votre chaise. Toutes les cinq minutes, je vais déplacer votre chaise de sorte à ce que la distance entre vous et la femme sur le lit soit réduite de moitié. »
   Le mathématicien regarde le psychologue, dégoûté. « Quoi ? Je ne joue pas le jeu. Vous savez très bien que je n'atteindrai jamais le lit ! »
   Il se lève et s'en va. Le psychologue prend des notes, et c'est au tour du physicien. Il explique la situation, et les yeux du physicien s'illuminent, il commence à baver. Le psychologue est un peu confus : « Est-ce que vous réalisez que vous ne l'atteindrez jamais ? »
   Le physicien sourit et répond : « Bien sûr ! Mais je serai suffisamment près pour toutes les résolutions pratiques ! »
   Les variantes existent, par exemple : le mathématicien est opposé

†. *You just lost the game.*

à un mathématicien appliqué, qui lui se lève de la chaise et va embrasser la belle demoiselle. Il faisait face à un problème qu'il ne savait pas résoudre, il s'en est posé un qu'il savait résoudre !

10. Un mathématicien, un physicien et un ingénieur ont une discussion animée sur l'anatomie du corps humain. Le mathématicien intervient :
« Moi je dis qu'il fallait les qualités d'un mathématicien pour être capable de réaliser ça : quand on voit comment se marient simplicité, complexité et ordre du système nerveux, c'est évident ! »
Le physicien réplique : « Non non, tu te trompes. À mon avis, c'était impossible à réaliser sans être physicien : regarde le squelette et toute la dynamique des articulations, c'est évident ! »
Enfin, l'ingénieur veut avoir le dernier mot : « Les gars, vous avez faux tous les deux ! C'est un ingénieur, un ingénieur en travaux publics, même, qui a réalisé le corps humain ! La preuve ? Qui d'autre aurait placé le terrain de jeux à côté de la décharge à déchets toxiques ? »

11. Discussions autour de la puissance du continu ‡ :
Les philosophes : « La résolution de la question de l'hypothèse du continu aura des implications profondes dans toute science, voire au-delà. »
Les physiciens : « Pas spécialement, la physique se porte bien sans ces "fondations mystiques". Fournissez-nous juste des mathématiques pratiques. »
Les informaticiens : « Qui est-ce que ça intéresse ? Tout dans cet univers semble être fini. Vous m'excuserez, je suis trop occupé à essayer de debugger mes programmes en Pascal. »
Les mathématiciens « On s'en fout ! Choisissez simplement la réponse la plus esthétiquement plaisante possible ! »

12. Un ingénieur pense que ses équations sont une approximation de la réalité.
Un physicien pense que la réalité est une approximation de ses équations.
Un mathématicien s'en moque.

13. Un mathématicien ne croit rien tant que ce n'est pas prouvé.
Un physicien croit tout tant que ce n'est pas réfuté.

‡. L'hypothèse du continu provient d'une interrogation : se demander si, oui ou non, il existe d'autres infinis entre celui des entiers et celui des réels. Sous l'axiomatique classique, il est impossible de prouver ou réfuter ceci, et l'hypothèse du continu est l'hypothèse qu'il n'y a pas d'autre infini. Il semblerait tout de même qu'elle soit fausse.

Un chimiste s'en fiche.
Un biologiste ne comprend pas de quoi on parle.

14. La chimie est de la physique sans raisonnement.
Les mathématiques sont de la physique sans objectif.
15. La philosophie est un jeu avec des objectifs et sans règles.
Les mathématiques sont un jeu avec des règles et sans objectifs.
16. Les biologistes se prennent pour des biochimistes,
les biochimistes se prennent pour des chimistes,
les chimistes se prennent pour des physiciens,
les physiciens se prennent pour des dieux,
et Dieu se prend pour un mathématicien.
17. On demande à plusieurs scientifiques : « Combien vaut π ? »
L'ingénieur répond : « C'est approximativement 3,1415926536 $\pm 0,00000000005$. »
Le physicien répond : « C'est 1, ou 3, voire 5 selon les besoins. $\sqrt{10}$ est une égalité très précise. »
L'informaticien répond : « *Pi* est une constante fixée en début de programme, et dont la valeur exacte varie selon le type de la variable (3 si *Pi* est un Integer, 3.14159 si c'est un Real, $3.141592653589793 + E00$ si c'est un Long, True si c'est un Boolean). »
Le mathématicien réfléchit un instant et répond : « C'est égal à π. »
18. On pose à plusieurs scientifiques la question « Combien égale 2×2 ? »
L'ingénieur sort sa règle à calcul (c'est vieux, certes) la manipule dans tous les sens, pour finalement annoncer : « 3,99 ».
Le physicien consulte ses références techniques, pose le problème sur son ordinateur, et dit : « c'est encadré par les valeurs 3,98 et 4,02 »
Le mathématicien cogite un bon moment, et répond : « Je ne sais pas quelle est la réponse, mais je peux vous dire qu'une solution existe ! »
Le philosophe sourit : « Qu'entendez-vous par 2×2 ? »
Le logicien répond : « Définissez 2×2 plus précisément. »
Le sociologue a son mot à dire : « Je ne sais pas, mais c'était sympathique d'en parler. »
Concernant l'écologiste prononcé : « Un système polygame d'accouplements. »
L'étudiant en médecine assure : « 4. »
Les autres ont l'air impressionné : « Comment vous le saviez ?!

– Oh, je l'ai appris par cœur. »

19. Au département de physique : « Pourquoi dois-je toujours dépenser tant d'argent pour vous, pour ces laboratoires, les équipements et toutes ces choses si coûteuses ?! Pourquoi ne prenez-vous pas exemple sur le département de mathématiques ? Tout ce dont ils ont besoin est d'argent pour des crayons, du papier et des corbeilles... Non attendez, mieux, prenez exemple sur le département de philosophie. Tout ce dont ils ont besoin est des crayons et du papier. »
20. Un mathématicien, un ingénieur et un informaticien partent en vacances ensemble. Ils conduisent une voiture, apprécient le paysage, quand soudainement la voiture cesse de fonctionner.
Le mathématicien : « Nous sommes passés devant une station d'essence il y a quelques minutes. Quelqu'un devrait y aller et demander de l'aide, ils sauront se ramener à un cas précédemment résolu. »
L'ingénieur : « Je devrais regarder de plus près la machine. Peut-être que je peux réparer le problème. »
L'informaticien : « Pourquoi on n'ouvrirait pas tout simplement les portes, pour ensuite les refermer et voir si tout fonctionne à nouveau ? »
21. Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien. Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.
L'ingénieur fait regrouper le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.
Le physicien construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut tenir dans le cercle.
Voyant ça, le mathématicien construit une clôture autour de lui-même et se définit comme étant à l'extérieur.
22. Un mathématicien, un ingénieur et un chimiste marchent le long d'une route quand tout à coup ils voient une pile de canettes de bière. Malheureusement, ce sont de vieilles canettes, si bien qu'elles n'ont plus de languette. L'un d'eux suggère de se séparer pour chercher chacun de son côté de quoi ouvrir ces canettes.
Le chimiste retourne à son laboratoire et prépare un composé chimique qui dissout la tête de la canette et s'évapore immédiatement après, de sorte que la bière ne soit pas affectée.

L'ingénieur va dans son atelier et crée un nouveau SuperOuvre-Boîtes qui peut ouvrir 25 canettes par seconde.
Ils retournent voir la pile de canettes avec leurs inventions, et tombent sur le mathématicien en train de finir la dernière canette.
« Comment as-tu fait ça ? demandent-ils, surpris.
– Oh, bah ! j'ai juste supposé qu'elles étaient ouvertes et tout s'est passé naturellement. »

23. Un ingénieur, un physicien et un mathématicien doivent enfoncer un clou dans un mur.
L'ingénieur construit un Perceur Automatique Universel : une machine capable de marteler n'importe quel clou dans n'importe quel mur imaginable.
Le physicien fait une série d'expériences concernant la force des marteaux, clous et murs, et développe une technologie révolutionnaire sur le martelage ultra-sonique de clous à très basse température.
Le mathématicien préfère étudier le cas général, un problème à n dimensions sur la pénétration d'un clou à une dimension dans un hypermur de dimension $n-1$. Plusieurs théorèmes fondamentaux ont été prouvés. Bien sûr, le problème est trop riche pour suggérer la possibilité d'une solution simple, et même l'existence d'une solution est loin d'être évidente.

24. Quelle est la définition « à la physicienne » d'un espace vectoriel V ?
Réponse : C'est un ensemble d'éléments x tels qu'il y ait une flèche dessinée sur chaque x.

25. Quel est le principe fondamental des mathématiques appliquées à l'ingénierie ?
Toute fonction a un développement en série de Taylor qui converge vers la fonction, et peut être tronqué après le terme linéaire.

26. Un mathématicien décide qu'il lui serait utile d'en apprendre plus sur des problèmes pratiques. Il voit un séminaire avec un titre aguicheur : « La théorie de l'engrenage ». Il y va donc. Le conférencier se lève et commence : « La théorie de l'engrenage avec un nombre réel de dents est maintenant bien connue... »

27. Un mathématicien (statisticien), un ingénieur et un physicien partent chasser. Ils suivent un cerf dans les bois.
Le physicien calcule la célérité du cerf et l'effet de la gravité sur les balles, ajuste son arme et tire. Hélas, il rate son tir ; la balle termine sa course trois mètres derrière le cerf. Le cerf détale pendant quelques mètres, mais arrive dans une embûche, due au trio

de scientifiques.
« C'est dommage que vous l'ayiez raté, commente l'ingénieur, mais avec une arme à feu normale, tout le monde pouvait s'y attendre. » Il lève alors son arme à feu spécial-chasse-au-cerf, qu'il a trafiquée à partir d'un fusil normal, un sextant, un compas, un baromètre, et un tas de lumières éblouissantes qui servent seulement à épater la foule, et tire. Hélas encore, sa balle s'évanouit dans le sol trois mètres devant le cerf, qui cette fois s'échappe pour de bon.
« Eh bien, dit le physicien, ton machin ne l'a pas eu non plus.
– Qu'est-ce que tu racontes ? fait entendre le statisticien. Grâce à vos deux tirs combinés, on a fait un tir parfait ! »
Tout le monde a dû se demander comment ces scientifiques, souvent dans leur monde, savaient qu'il s'agissait d'un cerf : le physicien a observé que la bête se comportait comme un cerf, donc ça devait être un cerf. Le mathématicien a demandé au physicien ce que c'était, réduisant ceci à un problème précédemment résolu. L'ingénieur était dans les bois pour chasser du cerf, donc c'était un cerf.

28. Une prostituée, un biologiste, un physicien, un mathématicien et un informaticien discutent, pour déterminer quel est le plus vieux métier du monde.
La prostituée dit que ce qu'elle fait, c'est quelque chose de pratiqué depuis des générations, depuis que l'homme existe, sinon on ne serait pas là...
Le biologiste proteste : « Avant l'homme, il a fallu faire venir les animaux, les plantes, tout l'écosystème, et ça, c'est du travail de biologiste. »
Le physicien : « Oui, mais avant ça, il fallait créer les planètes, les étoiles, mettre en relation tout ça ! Et c'est de la physique ! »
Le mathématicien : « Certes, mais pour former ces planètes et tout, il faut des lois, il faut de l'ordre, pour avoir quelque chose à partir du chaos. Et qu'est-ce qui, mieux que les maths, peut incarner cet ordre ? »
L'informaticien : « Et le chaos, il a bien fallu le créer... »

29. Un physicien, un mathématicien et un ingénieur participent à un sondage sur la plus grande invention (ou découverte) de tous les temps. Le physicien choisit le feu, qui a donné à l'humanité la puissance de la matière. Le mathématicien choisit l'alphabet, qui a donné à l'humanité la puissance des symboles. L'ingénieur choisit la bouteille thermos.
« Pourquoi une bouteille thermos ? demandent les autres.

– Parce que le thermos garde les liquides au chaud en hiver et les garde à une température fraîche en été.
– Oui, et alors ?
– Réfléchissez-y, dit l'ingénieur avec respect. Cette petite bouteille, *comment* elle *sait* ? »

30. Des ingénieurs essayent de mesurer la hauteur d'un mât de drapeau. Ils ont seulement un mètre ruban, et ils sont assez frustrés à force d'essayer de garder le mètre le long du mât : il redescend tout le temps.
Un mathématicien passe par là et demande ce qu'ils font. Ils lui expliquent.
« Facile... »
Il met le mât à même le sol, l'allonge, et le mesure facilement. Après son départ, un des ingénieurs dit : « C'est typique des matheux ! On veut la hauteur, et ils nous donnent la longueur ! »

31. Une bande d'amis (un biologiste, un ingénieur, un physicien, un statisticien, un mathématicien pur et un probabiliste) engagent des paris avant une course hippique. Ils perdent tous lamentablement, sauf le physicien qui a misé sur le bon cheval, le numéro 8.
Le biologiste ne comprend pas son échec : « J'ai pourtant étudié le flux sanguin, l'alimentation, *etc.*, de chaque cheval, je ne pouvais pas me tromper... »
L'ingénieur aussi est perplexe : « J'avais pourtant toutes les données sur les chevaux puis calculé exactement la vitesse de chaque cheval, et malgré cela...
– Quant à moi, lance le statisticien, j'avais examiné les courses précédentes, les ai évaluées à l'aide de méthodes statistiques pour tomber sur le cheval 4, le plus performant. Ça n'a pas suffi.
– De toute façon, j'avais prouvé mathématiquement qu'il était impossible de trouver le meilleur cheval, dit le mathématicien pur.
– Peut-être mais, dit le probabiliste, il y avait dix chevaux, le cheval 1 avait donc une chance sur dix de gagner, forcément il fallait miser sur lui. Et toi alors, comment as-tu trouvé le bon cheval ? demande-t-il au physicien.
– J'avais une méthode infaillible très simple, déclare-t-il avec un sourire heureux, j'avais commencé par supposer que tous les chevaux étaient sphériques et homogènes et... »

32. Un bande de potes mathématiciens et une bande de potes ingénieurs voyagent ensemble en train pour assister à une conférence sur l'application de méthodes mathématiques en ingénierie [§].

§. Ce qu'il ne faut pas inventer pour avoir un contexte crédible...

Chaque ingénieur a un billet, alors qu'un seul des mathématiciens en possède un. Bien sûr, les ingénieurs rient de la naïveté des mathématiciens, et attendent impatiemment le moment où le contrôleur viendra.
Tout à coup, l'un des mathématiciens crie : « Contrôleur en vue ! », et ils se cachent tous dans une cabine de toilettes. Le contrôleur vérifie le billet de chaque ingénieur, et toque ensuite à la porte des toilettes : « Votre billet, s'il vous plaît. »
Les mathématiciens font passer l'unique billet qu'ils ont sous la porte, le contrôleur le poinçonne et s'en va. Quelques minutes plus tard, quand ils sont tranquilles, les mathématiciens sortent des toilettes. Les ingénieurs sont impressionnés.
À la fin de la conférence, les ingénieurs décident qu'étant au moins aussi intelligents que les mathématiciens, ils achèteront aussi un unique billet pour tout le groupe. Cette fois les mathématiciens n'ont pas de billet du tout... Encore une fois, un des mathématiciens crie : « Contrôleur en vue ! », et tous les ingénieurs foncent dans les toilettes. Un des mathématiciens se dirige vers ces toilettes, toque à la porte, et dit : « Votre billet, s'il vous plaît... »

33. Une multinationale a organisé des épreuves de recrutement en Bretagne, près d'un phare. Il y a là un polytechnicien, un centralien, un normalien, un étudiant de sciences-po et un autre de HEC. Le problème du jour est d'estimer la hauteur du phare.
Le polytechnicien ramasse un caillou et avale quatre à quatre les marches pour le lâcher au sommet. Ainsi, avec la durée de la chute du caillou et en négligeant les frottements, il obtient un résultat approximatif.
Le centralien, ayant vu le procédé, s'écrie : « C'est facile, je sais faire ! » Seulement, arrivé en haut, au lieu de lâcher sa pierre, il lâche son chronomètre...
Le normalien, qui n'a plus fait de sport depuis sa baignade dans le liquide amniotique de sa maman, se Gausse de ces boulets d'ingénieurs :
« Il suffit de trouver une branche et attendre que le soleil apparaisse. Bref, utiliser Thalès. L'enfance de l'art, quoi. »
L'étudiant de sciences-po, devant la naïveté de tous ces péquenots, a déjà pris sa voiture pour aller voir le cousin du cousin de son père qui était préfet de la région. Il n'y a pas meilleure source.
L'étudiant de HEC a déjà la réponse. Il est allé voir le gardien du phare avec un billet de 20 euros.

34. Un professeur de physique a effectué quelques expériences et décelé

un système d'équations qui semble expliquer ses données. Néanmoins, il doute un peu de ses équations et demande à un collègue mathématicien de les vérifier. Une semaine plus tard, le professeur de maths l'appelle : « Je suis désolé, mais tes équations sont *complètement* absurdes. »
Le professeur de physique est, naturellement, déçu. Pourtant, bizarrement, ses équations incorrectes fournissent des prédictions incroyablement précises des résultats de ses expériences. Il demande donc au mathématicien s'il est vraiment sûr que ses équations sont complètement fausses.
« À vrai dire, répond-il, elles ne sont pas *complètement* absurdes, en fait. Mais le seul cas où elles marchent est le cas trivial où le corps auquel appartient t est archimédien... »

35. Quelle est la différence entre un psychotique, un névrosé et un mathématicien ? Un psychotique croit que $2+2=5$. Un névrosé sait que $2+2=4$, mais il le tait. Un mathématicien change simplement la base.

36. Lors d'une discussion animée entre un théologien et un mathématicien :
« Vous, les mathématiciens, êtes aveugles. Vous ne voyez pas que les hommes sont bien plus que des nombres ?
– C'est vrai... Hum... Les hommes sont aussi des ensembles ! »

37. Un cannibale sort s'acheter de quoi diner. Sa femme veut lui préparer du cerveau, ce jour-ci. Une fois arrivé à la boucherie, on lui dit qu'il y a trois prix, selon les cerveaux : d'abord, il y a le cerveau du mathématicien, à un dollar le kilo. Ensuite, il y a le cerveau du physicien, à deux dollars le kilo. Enfin, le cannibale peut acheter le cerveau de l'ingénieur à quatre dollars le kilo.
Le cannibale est perplexe vis-à-vis des prix, et demande au boucher :
« Pourquoi diable le cerveau de l'ingénieur coûterait tant, par rapport au cerveau du mathématicien ? Est-ce que vous pensez vraiment que la qualité est supérieure à ce point ?
– Non, répond le boucher. Mais si vous comptez combien d'ingénieurs il faut pour avoir un gramme¶... »

38. Un ingénieur, un physicien et un mathématicien se reconnaissent dans une anecdote, une anecdote assez proche de celles que vous avez probablement (!) déjà entendues. Après quelques observations et des calculs approximatifs l'ingénieur comprend la situa-

¶. C'est de bonne guerre. Vous pouvez bien sûr imaginer cette blague avec n'importe quoi à la place de l'ingénieur (un politicien par exemple).

tion et commence à rigoler. Quelques minutes plus tard le physicien comprend à son tour et rit de lui-même, content puisqu'il a à présent assez de preuves expérimentales pour publier un article. Cela laisse le mathématicien quelque peu perplexe, parce que, ayant remarqué très vite qu'il était le sujet de l'anecdote, il déduit rapidement la présence d'humour d'autres anecdotes similaires, mais considère cette anecdote comme un corollaire trop trivial pour être significatif, et encore moins marrant.

4.2 Tous les nombres entiers impairs supérieurs à 3 sont premiers

Et pourtant, la plupart des nombres premiers sont pairs : il suffit de prendre un bouquin de maths et de chercher le premier nombre premier qui nous tombe dessus. Il y a de fortes chances qu'il soit pair. Mais je digresse ; voici les preuves que tous les entiers impairs supérieurs à 3 sont premiers :

- Pour le mathématicien : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, et par une récurrence immédiate, tous les nombres impairs sont premiers à partir de 3.
  Et quand on ne prend pas le matheux pour un con : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 n'est pas premier ; ah, donc ça ne marche pas. Autre variante : 3, 5, 7, pas 9, mais 11, 13, 17, 19 sont premiers, donc pour tout n impair différent de 9, n est premier.
- Pour le logicien : Si une preuve existe, alors l'hypothèse doit être vraie. Or la preuve existe, vous êtes en train de la lire. De cela, on déduit que tous les nombres impairs supérieurs à 3 sont premiers.
- Pour le physicien : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 n'est pas premier, 11 est premier ; 9 est une erreur de mesure et on le retire *. Juste pour être sûr, essayons plusieurs nombres choisis au hasard : 17 est premier, 23 est premier, donc c'est bon.
- Pour le physicien moderne : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9/3 est premier (après renormalisation), 11 est premier, 13 est premier, 15/3 est premier (après renormalisation), 17 est premier...
- Pour l'ingénieur : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est presque premier, 11 est premier, ...
- Pour l'enseignant : On vérifie aisément que 3, 5 et 7 sont premiers. L'étudiant en exercice démontrera le cas général.
- Pour l'informaticien : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 7 est premier, 7 est premier, 7 est premier, 7 est premier...
  Variante : « Humm... Attendez une minute, je crois que j'ai un algorithme de Knuth qui trouve les nombres premiers... Encore un petit instant, j'ai trouvé le dernier bug... Non, ce n'est pas ça... Ah ! Je pense qu'il doit y avoir un bug du compilateur ici, Hmm... Erreur IEEE-998.0334... Attendez, Hmm... Oui... »
- Pour le biologiste : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 – les résultats ne nous sont pas encore parvenus...
- Pour le chimiste : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier, 11 est premier, 13 est premier, 15 est premier...
  Variante : C'est quoi un nombre premier ?
- Pour le vendeur de *softwares* : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 sera premier dans la prochaine *release*...
- Pour le vendeur : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 –

*. Ou bien : « Bon, en première approximation, ça marche »

nous ferons du mieux que nous pouvons...
- Pour le publicitaire : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 11 est premier...
- Pour le professeur : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, et le reste est laissé à titre d'exercice pour le lecteur.
- Pour le psychologue : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier mais essaye de l'étouffer...
- Pour le politicien : Certains nombres sont premiers... Mais le but est de créer une plus belle société, plus gentille, où tous les nombres sont premiers...
- Pour le militant multi-culturel : Allons, allons, classer les nombres par « catégories », beurk ! Les nombres sont tous métissés !
- Pour l'étudiant en mathématiques : ils ont tous perdu la tête ici, voici comment procéder. Soit p un nombre premier, $p > 2$. Dans ce cas p n'est pas divisible par 2, donc p est impair. □

4.3 Les mathématiques dans l'enseignement

Les maths ont toujours été mon point faible. Je n'arrivais pas à convaincre mes enseignants que la plupart de mes réponses étaient ironiques.

Calvin Trillin.

4.3.1 Historiettes rigoulotes

1. L'évolution des mathématiques dans l'enseignement primaire en France :
   - 1960 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10 F. Il lui coûte les 4/5 du prix de vente. Quel est son profit ?
   - 1970s : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10 F. Il lui coûte les 4/5 du prix de vente, c'est-à-dire 8 F. Quel est son profit ?
   - 1970 : Un paysan échange un ensemble P de pommes de terre contre un ensemble M de pièces de monnaie. Le cardinal de l'ensemble M est égal à 10 et chaque élément de M vaut 1 F. Dessine dix gros points représentant les éléments de M. L'ensemble C des coûts de production est composé de deux gros points de moins que l'ensemble M. Représente l'ensemble C comme un sous-ensemble de l'ensemble M et donne la réponse à la question : quel est le cardinal de l'ensemble des profits ?

- 1980 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10 F. Ses coûts de production sont de 8 F et son profit de 2 F. Souligne les mots « pommes de terre » et discutes-en avec tes camarades de classe.
- 1990 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10 F. Ses coûts de production sont de 80 pourcent de son revenu. Sur ta calculatrice, trace la représentation graphique de ses coûts de production en fonction de ses revenus. Lance le programme *POMDETER* pour déterminer le profit. Discute des résultats en groupe de 4 élèves et rédige un compte-rendu qui analyse cet exemple dans le monde réel de l'économie.

2. Il y a longtemps, très longtemps... Quand les règles à calcul étaient encore l'outil de calcul le plus sophistiqué en possession des scientifiques et des ingénieurs...
Des étudiants en ingénierie passent un examen final de mathématiques. Bien sûr, les règles à calcul ne sont plus autorisées. Et, bien sûr, quelqu'un a triché et a ramené une règle à calcul pour l'examen. Il la cache sous son bureau, mais l'étudiant à sa gauche, coincé dans un calcul difficile, le remarque :
« Hey, chuchote-t-il. Tu peux m'aider ? Combien font trois fois six ? »
Son camarade de classe prend sa règle à calcul, puis répond après quelques secondes :
« Dix-neuf.
– Tu es sûr ? »
Le tricheur prend encore sa règle à calcul, et après quelques autres secondes il répond :
« Tu as raison. C'est plus proche de dix-huit, dix-huit virgule trois, pour être précis. »

3. Un professeur de mathématiques, né au Texas, doit subir l'éternelle question des étudiants : « À quoi servent les mathématiques ?
– Cette question me rend malade ! répond-il. Si vous montrez le Grand Canyon à quelqu'un pour la première fois, et qu'il vous demande « À quoi il sert ? », que faites-vous ? Moi je sais ce que vous faites, vous le faites tomber de la falaise d'un grand coup de pied ! »

4. Un professeur d'ingénierie soupire :
« Plusieurs de nos étudiants ont des lacunes abyssales en mathématiques. Certains n'arrivent même pas à intégrer x entre 1 et 2 ! »
Un de ses collègues répond spontanément :

« Alors, pourquoi ne faire leurs examens le matin, plutôt ? »

5. Certaines demoiselles arrivent en cours en retard, faisant des bruits divers, variés et sonores alors qu'elles montaient les escaliers de l'amphithéâtre, s'asseyaient, prenaient de quoi écrire... L'enseignant, froid comme un concombre, leur dit :
   « Vous arrivez au bon moment, mesdemoiselles. On parlait des variables discrètes. »
6. Lors d'un cours, un enseignant demande à ses élèves s'ils peuvent prouver l'identité de Lagrange. On lui répond :
   « Vous rigolez ? C'est difficile de prouver l'identité de quelqu'un mort depuis plus de cent cinquante ans ! »
7. Un enfant de six ans toque à la porte de son père, un professeur de mathématiques.
   « Papa, dit-il. J'ai besoin d'aide pour un problème de maths que je n'arrivais pas à faire à l'école.
   - Bien sûr, répond le père en souriant. Raconte-moi ce qui te bloque.
   - C'est un problème vraiment difficile : *Quatre canards nagent dans une mare, quand deux canards de plus viennent les rejoindre. Combien de canards sont à présent en train de nager dans la mare ?* »

   Le professeur regarde son fils, n'arrivant pas à y croire :
   « Tu n'arrivais pas à faire ça ?! Tout ce que tu as besoin de savoir est que $4 + 2 = 6$!
   - Tu me prends pour un idiot ? Bien sûr que je sais que $4+2 = 6$. Mais quel est le rapport avec les canards ? »
8. Un professeur de mathématiques annonce à ses élèves : « Supposons que le nombre de moutons soit x...
   - Monsieur, et s'il n'y en a pas x ? »
9. Un élève demande à son enseignant : « Monsieur ! Hier soir, papa s'est enfilé trois bouteilles de vin à 12°. Est-ce que ça fait 36° ? ! »
10. Un étudiant, travaillant sur un long devoir à la maison de mathématiques, découvre qu'un des problèmes est plutôt facile à résoudre, si ce n'est qu'il faut au moins trois pages de calculs simples après avoir franchi les deux premières étapes difficiles. Comme il se fait tard, il fait les étapes difficiles et laisse une preuve inachevée, suivie de la phrase « La preuve est laissée au correcteur en exercice. »
    La semaine suivante, il reçoit son devoir noté. Il remarque que plusieurs pages annexes ont été agrafées à l'arrière. Il les examine, et

découvre avec surprise la preuve complète écrite, étape par étape. Tout à la fin, au stylo rouge, le correcteur a écrit :
« J'ai fait une petite erreur sans importance. Moins 2. »

11. Un père très inquiet au sujet des résultats en mathématiques de son fils décide de l'envoyer dans une école catholique. À la fin de son premier trimestre, son fils ramène à la maison son bulletin ; il a un 19 en mathématiques. Le père est, évidemment, ravi, mais veut comprendre :
« Pourquoi tes notes en mathématiques sont-elles devenues si bonnes ?
– Tu sais, explique son fils, quand j'ai traversé la salle de cours le premier jour, et que j'ai vu ce mec cloué à un signe plus, j'ai compris une chose : on ne déconne pas ici ! »
12. Que dit un étudiant en mathématiques quand il écrase une araignée ? « $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$! »
13. Un célèbre professeur de mathématiques était dans une ville exprès pour une conférence. Comme il avait un peu de temps libre, il lui a été demandé de faire un séminaire pour les élèves en licence de mathématiques à l'université locale.
Après avoir noirci plusieurs tableaux avec des calculs denses et compacts, ainsi que des expressions utilisant incessamment les fonctions de Bessel et bien plus encore, le professeur s'est rappelé qu'il y avait essentiellement des élèves en licence dans la pièce. Ressentant une pointe de remords, à l'idée qu'il ait pu parler de quelque chose qui vole bien au dessus de la tête de la plupart des étudiants de son audience, il s'est retourné pour demander si certains étudiants n'avaient jamais vu de fonction de Bessel. L'audience est d'abord silencieuse. Finalement, un étudiant intrépide lève le doigt pour admettre qu'il n'a jamais vu les fonctions de Bessel. Le professeur hoche alors la tête en signe de compréhension. Sans hésitation, il se tourne vers le tableau en le pointant, et dit : « Eh bien, voici une fonction de Bessel », avant de reprendre ce qu'il disait.
14. Une délégation d'étudiantes et d'étudiants se rend au bureau du professeur de mathématiques pour se plaindre de son enseignement.
« Pour vous professeur, plaident-ils, tout est clair et évident, comme vous le dites souvent ; mais pas pour nous. Vous allez trop rapidement et nous n'avons pas le temps de prendre des notes. Si vous donniez des exemples et si vous preniez le temps d'écrire au tableau, nous pourrions mieux vous suivre. Les choses pourraient alors nous sembler, à nous aussi, claires et évidentes. »

Le professeur assure en prendre bonne note et il promet de changer. Le lendemain il donne son cours, mais, emporté par son sujet, il procède encore une fois comme à son habitude. Quand il a terminé son exposé, il dit :

« Et comme vous voyez, tout cela est parfaitement clair et évident. »

Cela lui rappelle sa promesse et il reprend aussitôt : « Clair et évident comme deux et deux font quatre ». Il va au tableau où il écrit : $2 + 2 = 4$.

15. La légende raconte que cette question a été posée dans un devoir maison du professeur Fred Solomon, pour un cours de mathématiques appliquées au *Swarthmore College*, dans les années 70. Malheureusement, on perd quelques jeux de mots en français : *Comparez l'usage de l'hyperbole par Vigile dans l'*Énéide *avec l'usage de l'hyperbole par Cauchy dans la théorie de la variable complexe. En particulier, comment les deux auteurs utilisent une référence elliptique comme signe* (*sine* en version originale) *d'un évènement potentiel* (*potential event* en version originale) ?

16. Un professeur de statistiques est en train de décrire la théorie des échantillons à sa classe, expliquant comment un échantillon peut être étudié et utilisé pour généraliser quelque chose à toute une population. Un des étudiants, au fond de la salle, hoche continûment sa tête.

    « Quel est le problème ? demande le professeur.
    – Je n'y crois pas, dit l'étudiant. Pourquoi ne pas étudier toute la population dès le début ? »

    Le professeur continue alors son explication, avec les concepts d'aléatoire et d'échantillons représentatifs. L'étudiant continue de hocher la tête. Le malheureux enseignant se lance dans la mécanique des échantillons stratifiés, des échantillonnages de groupe aléatoires, l'erreur standard de la moyenne, et le théorème central limit. L'étudiant n'est pas plus convaincu, et ajoute :

    « Trop de théorie, trop de risque, je ne peux pas croire quelques nombres qui parlent au nom de *tous.* »

    L'enseignant se lance alors dans un exemple plus concret, et explique la rigueur scientifique ainsi que la sélection méticuleuse des échantillons pour l'échelle de Nielsen, qui sont utilisés pour déterminer combien de millions de dollars sont dépensés dans la publicité. L'étudiant n'est pas plus impressionné, et dit :

    « Vous voulez dire qu'un échantillon de quelques milliers de gens peut nous dire exactement ce que soixante *millions* de personnes font ? »

Excédé par ce scepticisme, le professeur répond :

« Très bien, la prochaine fois que vous irez à la clinique du campus et qu'ils voudront faire un test sanguin... Dites-leur de *tout* prendre ! »

17. La lettre qui va suivre, écrite par un certain Shannon, serait authentique (modulo la traduction), et aurait été cafardée pour finalement se retrouver sur plusieurs *newsgroups* ! *Have fun* :

Cher professeur,

En ce moment, je suis trois cours de mathématiques, dont votre cours d'algèbre linéaire. Naturellement, les portions généreuses de concepts substantiels présentés trois fois par semaine ont occupé la plupart de mes pensées... Un fait qui, à cause des récentes échappées belle sur les passages piétons, semblait tenir du miracle. Et ce, jusqu'au week-end dernier. Dimanche soir, vers dix heures, pendant que je luttais pour ériger une façade de rigueur dans mon devoir du cours EE235, j'ai soudainement constaté que beaucoup de noms étaient attachés aux fonctions, méthodes, *etc.*, familières du jargon mathématique.

Par « noms », bien sûr, je ne parle pas de bêtes désignations techniques, mais de noms d'êtres humains existants. Remarquez que les méthodes mathématiques les plus terre-à-terre qui sont quotidiennement balancées au lycée sont rarement, pour ne pas dire jamais, nommées. Il semble que Monsieur Tout-le-monde ne tolérerait pas l'obstruction subie par le trimballage de noms de famille allemands à cinq syllabes pour de simples fonctions... C'est pourquoi nous avons le « sinus » mais pas la « fonction de Hohenhelmwohler ». Cependant, une fois que ces citoyens sans soupçon entrent dans le monde universitaire, protégés des regards intrusifs et de la sensibilité du public, un processus continu d'acclimatation a effet sur eux à chaque cours de mathématiques qu'ils suivent jusqu'à ce que, seulement deux ans plus tard, ils y soient régulièrement exposés et acceptent sans résistance l'auto-promotion des mathématiciens, avec une insistance dépassant de loin ce qu'il se passe dans l'industrie du *rap*.

Ce n'est pas mon devoir de prononcer des jugements éthiques sur mes supérieurs, particulièrement quand ce sont des intellectuels du rang de Gauss ou Dirac. Même les génies sont limités par les contraintes de la chair : ils doivent manger, et pour ce faire ils doivent commercialiser leur produit. Par conséquent, le nom de

Gauss apparaît dans mes cours pour la même raison que le nom de Calvin Klein apparaît sur les fesses de *top models* anorexiques. *C'est* mon devoir de tourner votre attention sur une différence significative entre ces deux braves hommes : Klein est vivant, tandis que Gauss est mort. Il est mort et, à ma connaissance, ni lui ni sa famille ne possèdent de titre juridique sur ses fonctions, processus, preuves, *etc.* De plus, non seulement Gauss est mort, mais Dirac, Fourier et tous les autres... Tous les génies mathématiques de notre espèce ont été abattus par la main brutale de la sélection naturelle, et tous avant d'avoir eu la chance de sécuriser les droits de possession sur bien plus que les fonctions trigonométriques hyperboliques.

Monsieur, je vous confesse qu'on tient une mine d'or. Les opportunités commerciales à portée de main défient notre imagination. À tout instant, des dizaines de milliers de jeunes de notre nation sont obligés d'étudier les mathématiques. Ils sont généralement bien financés, parfois un peu naïfs et, pour le dire gentiment, étudient plus de mathématiques qu'ils ne le voudraient. Nous connaissons toutes les données démographiques à leur sujet, et ce qu'ils seraient prêts à acheter. Un auditoire captif : plus de place à l'exploitation serait difficile à imaginer. Visualisez l'étudiant typique, penché sur son texte pendant des heures. Imaginez les résultats si, au lieu de ces vieilles maths, il était fixé sur :

AVANT	APRÈS
Pivot de Gauss	Pivot de Guinness Stout©
Valeurs propres	Valeurs Fritos©
Le déterminant Wronskien	Le déterminant Shaquillian©
La règle de L'Hôpital	La règle de Honda©
Intégrales impropres	Intégrales de Victoria's Secret©
La transformée Laplace	La transformée de Lifestyles©
L'équivalent de Nortan	L'équivalent de No-Doz©

... et ainsi de suite. Bien sûr, ce n'est que le sommet de l'iceberg. Combien, pensez-vous, McDonald's payerait pour que θ soit remplacé par ses lettres d'or ? Si nous nous faisons trop d'argent, nous pouvons toujours enfouir un peu de maths ci et là, comme une incitation fiscale :

$$y = \sin(\text{fonction officielle des jeux olympiques})x$$

Je suis sûr que vous êtes aussi intéressés que moi. Pensez-y...

18. Quatre amis s'en sortaient vraiment bien pendant leurs cours de calcul différentiel et intégral : ils ont obtenu les notes maximales

(ou presque) à leurs devoirs à la maison et aux partiels. Alors, au moment de l'examen final, ils décident de ne pas étudier le week-end qui précède, mais de conduire jusqu'à la fête d'anniversaire d'un ami dans une ville voisine, même si l'examen est prévu pour le lundi matin. Comme on pouvait s'y attendre, ils ont trop bu à la fête, et lundi matin ils étaient complètement faits, et ont dormi trop longtemps. Quand ils arrivent finalement sur le campus, l'examen est déjà terminé.
Ils vont dans le bureau du professeur pour lui fournir une explication. « On était à la fête d'anniversaire d'un ami, et quand nous sommes revenus à la maison en conduisant, très tôt ce matin, on a soudainement eu un pneu à plat. On n'en avait pas de rechange, et comme nous étions sur des routes secondaires, il nous a fallu des heures avant de recevoir de l'aide. »
Le professeur fait un signe sympathique de la tête et dit : « Je vois que ce n'est pas de votre faute. Je vous autorise à refaire l'examen manqué, demain matin. »
Quand ils arrivent tôt le mardi matin, les étudiants sont introduits dans un grand amphithéâtre par le professeur, et sont assis loin les uns des autres, sans espoir de tricherie. Les sujets d'examen sont déjà en place et, confiants, les étudiants commencent à écrire.
La première question – cinq points sur cent – est un simple exercice d'intégration par parties, que les quatre finissent en dix minutes.
Quand le premier d'entre eux a fini le problème, il tourne la page du sujet d'examen et lit la suivante :

Problème 2 (95 points sur 100) : *Quel pneu était à plat ?*

4.3.2 Le dictionnaire

Le dictionnaire, ou comment savoir ce que les professeurs disent constamment, et savoir ce qu'ils entendent par là. Tout ce qui suit est en supposant qu'on n'est pas dans la situation critique où le professeur veut dire A, écrit B, prononce C alors qu'il fallait dire D. Certaines des définitions sont tirées d'une source qui les tire de [NUT].

Aujourd'hui on va traiter un sujet plus important : Aujourd'hui on va traiter mon sujet de recherche.

Bref : Je manque de temps, je vais donc faire des raisonnements elliptiques, écrire et parler plus vite.

Brute force : Quatre cas particuliers, trois variables et deux récurrences fortes.

Certains d'entre vous auraient pu faire mieux : Tout le monde a foiré.

Clairement : Je ne veux pas écrire toutes les étapes intermédiaires.

De même : Au moins une ligne de la preuve de ce cas est la même que précédemment.

Des questions ? : Je suis prêt à vous laisser partir.

Enseigner ce cours a été une grande responsabilité : J'espère que quelqu'un d'autre l'enseignera l'an prochain.

Formellement : On manipule des symboles en suivant des assertions logiques, sans avoir la moindre idée de leur vrai sens.

Il en découle aisément que : Même l'étudiant pourrait le démontrer (pense l'enseignant). L'étudiant forcené qui souhaite le faire va gâcher son prochain week-end à la tâche.

Il est évident que : Seulement évident pour l'auteur de l'ouvrage, ou pour Karl Friedrich Gauss. Plus souvent, seulement pour Gauss. La dernière fois que j'ai vu ça, c'était dans une étape d'une démonstration du Dernier Théorème de Fermat.

Indication : Parmi toutes les façons de le démontrer, la plus difficile.

Je vous répondrai à la fin du cours : Vous avez une bonne question, j'abandonne pour le moment.

L'essence de la preuve est le plus important : Je ne comprends pas les détails non plus.

La preuve n'entre pas dans le cadre de ce cours/cette conférence : À l'évidence, il s'agit d'une esquive. Le lecteur ne trouvera jamais d'article avec la preuve. La preuve n'existe pas. Le théorème s'avérait juste utile pour l'auteur.

La preuve est laissée au lecteur à titre d'exercice : L'enseignant a perdu ses notes de cours.

Les applications de ce résultat sont claires : Ça fera l'objet de votre examen.

On peut montrer facilement que : On peut montrer ceci en moins de quatre heures... En général, l'enseignant, ou le conférencier, prend une heure environ pour le faire au tableau, donc il préfère l'éviter. Une autre possibilité est que l'enseignant ne comprend pas la preuve en question.

On peut prouver que : Ça pourrait prendre pas plus d'une année, mais pas moins de quatre heures ; il en découlerait cinq piles de brouillon, cent crayons, ou cent mines de critérium. Si vous n'êtes pas encore doctorant, n'essayez même pas de le démontrer, ce serait impossible. L'enseignant, ou le conférencier, pense que la proposition est vraie, mais ne sait pas du tout comment le prouver.

On sait que : J'ai cru entendre que quelqu'un l'a démontré, un jour.

Pour répondre à votre question, vous devez savoir que plusieurs points de vue différents coexistent : J'en ai absolument aucune idée.

Preuve admise : Croyez-moi, c'est vrai.

Preuve de deux lignes : Je passe tout sous silence sauf la conclusion, vous ne pouvez pas questionner la preuve si vous ne pouvez pas la voir !

Preuve élégante : Aucune connaissance préalable sur le sujet n'est requise, et ça prend moins de dix lignes.

Si vous appliquez simplement toutes ces règles, tout ira bien dans ce cours : Si vous n'avez pas besoin de sommeil, tout ira bien dans ce cours.

Trivial : Si je dois le montrer, vous n'êtes pas à votre place ici. Mais en vérité, c'est seulement évident pour l'enseignant qui a déjà fait le cours cent fois, ou à un doctorant spécialisé dans le domaine.

Vous avez vu en Terminale que : Si vous aviez été en Terminale en 1969 (quand j'y étais), vous auriez vu que.

Vous vérifierez : C'est la partie ennuyeuse de la preuve, vous pouvez la faire dans votre temps libre.

4.3.3 Quelques perles légendaires

1. Une réponse classique, dans certaines universités, pour corriger une preuve d'un étudiant : « J'ai une preuve magnifique de la fausseté de votre réponse, mais cette page est trop courte pour la contenir. »
2. Un mathématicien fait passer un entretien à un élève de master pas très doué en rattrapages. L'entretien va de mal en pis, si bien que pour mettre l'étudiant un peu plus à l'aise, le mathématicien lui demande un exemple d'espace topologique non compact.
   « Les réels ? suggère l'étudiant.
   – Quelle topologie vous prenez ? ! »
3. Lors d'un examen de topologie, une question demande si deux espaces X et Y (définis dans la question) sont homéomorphes. Un étudiant a répondu : « X l'est, mais pas Y.* »
4. Un enseignant demande : « Qui peut me dire combien font 7 fois 6 ?
   – Ça fait 42 !
   – Très bien ! Et qui peut me dire combien font 6 fois 7 ?
   – Ça fait 24 ! » répond le même étudiant.
5. Lors d'un examen, il y avait la question : « Résoudre l'équation d'inconnue x : $3x - 2 = x$. »
   Lors de l'examen, un étudiant demande : « J'arrive à résoudre l'équation d'inconnue x dans le membre de gauche, mais qu'est-ce que je dois faire du x dans le membre de droite ? »
6. Une variante très proche, apparemment authentique : « Soit $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$; calculer $4S$ et en déduire la valeur de S » (écrit sur le tableau). Plus tard, l'enseignant entend une voix dans le fond de la salle qui se dit à elle-même :
   « Bon, d'accord, j'ai calculé 45 ; qu'est-ce que je fais maintenant ? »
7. « Combien de fois peut-on soustraire 7 de 83, et qu'est-ce qui reste après ?

*. On peut aussi la raconter avec « équipotents », « isomorphes », *etc.*, selon ce que connaît votre interlocuteur.

– Je peux soustraire 7 autant de fois que je veux, et il reste 76 à chaque fois. »

Variante plus complexe, si j'ose dire : « Qu'est-ce qu'une racine de $z \mapsto f(z)$ de multiplicité k ?

– C'est un nombre tel que si on l'applique à f, ça donne 0 ; si on l'applique encore, ça donne encore 0, et ce k fois. Par contre, la $(k+1)$-ième fois, on n'obtient pas 0. »

4.3.4 Le théorème du pipeau

Extrait du document officieusement officiel N°04523-BIVX-13-156 du 31 février 2027, articles 27,32 & 879. Par Messieurs Gonzague Zprunt & Howard Melbzeute, respectivement ministres de l'Éducation et de la Glandouille.

Note à l'attention des professeurs et des élèves des classes de Mathématiques Spéciales : à tous les théorèmes supposés être connus en classe de Spéciales (Quai : Les Hamilton, Chaud Les Skis...) s'ajouteront ceux des pipeaux qui seront censés être parfaitement maîtrisés [...] et utilisés le plus souvent possible par les élèves.

Voici une description qui se veut exhaustive des théorèmes des pipeaux :

Théorème 17 (Théorème du pipeau relatif) *Tout ce qui peut ne pas être faux est vrai*†.

(Nouvelle version, qui remplace le « Ouais, c'est possible. »)

Par exemple, si l'on demande de prouver l'existence d'une fonction, et que l'on voit pertinemment que cette fonction est utilisée plus bas dans l'énoncé, on écrira : « Selon l'énoncé, cette fonction existe ». Si cette fonction n'existait pas, on ne travaillerait pas dessus !

Il en est de même pour justifier l'inversibilité d'une matrice dont le nombre de colonnes excède deux, pour montrer l'intégrabilité d'une fonction, ou pour répondre à toute question du type : « Montrer que... ».

De plus, si, lors d'un calcul, on trouve une valeur de π proche du nombre 28, on admettra que celui-ci est équivalent à 3,14159 pour x tendant vers une valeur décrivant le corps des complexes.

Théorème 18 (Théorème du pipeau absolu, ou trivialité absolue) *Selon la question n°(-), c'est trivial*‡.

---

†. Du XV^e siècle avant notre ère, énoncé par le chinois Ni Vuh.

‡. De 1823, énoncé par le français Jean Brouille.

Il s'utilise pour des calculs plus complexes, et en particulier :

- quand on pompe sur le voisin ;
- pour calculer l'intégrale triple d'une matrice de rotation d'un projecteur d'une dérivée d'un endomorphisme en dimension infinie ;
- quand on fait partie du club des « glandus » ;
- pour inverser une matrice à déterminant nul ;
- si ça fait une heure qu'on sèche sur la question ;
- si le voisin à côté a mis pareil ;
- pour montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls a, b, c et n, avec $n > 2$, tels que $a^n + b^n = c^n$;
- pour englober n'importe quel autre théorème (y compris celui de Maxwell-Palappen-Danrajouter) ;
- quand c'est vraiment dur ;
- si le résultat obtenu est presque celui qu'on cherchait ;
- quand on a mal à la tête ;
- quand on est au petit a du petit 1 du grand I au bout de trois heures le jour d'un concours ;
- quand on en est à trois pages de calcul sur cette même question ;
- en colle, quand on est censé le savoir et qu'on l'a oublié (ou qu'on ne l'a pas appris) ;
- une de ses applications les plus fréquentes est, lors d'une interrogation orale, dire « c'est évident », « on voit bien que... », ou bien « d'après le cours... ».

Théorème 19 (Théorème du pipeau universel) *C'est trivial*[§].

Connu plus familièrement sous le nom de Samhpran-Lattètt, ce théorème sert dans absolument tous les cas de figure (c'est-à-dire les occurrences énoncées précédemment), et de plus en plus dans les problèmes de mathématiques et de physique. On mettra simplement dans la marge entre deux lignes à transition douteuse une flèche se dirigeant d'une ligne vers l'autre, en prenant soin d'indiquer « selon le pipeau universel ». Les professeurs ont pour consigne de mettre la totalité des points accordés à la question pour une réponse de ce type.

Pour finir, les élèves pourront se dispenser de citer les théorèmes des pipeaux (relatif, absolu et universel) dans toutes les épreuves, en disant simplement que l'on utilise le théorème de Ni Vuh-Nikko Nnu-Jean Brouille.

§. Cette extension du théorème de Cauchy-Pabougy a été énoncée en 1937 par le russo-tibétain Nikko Nnu.

4.4 Contrepèteries

1. La prof de maths aimerait que l'on s'intéresse aux cubes de son cours.
2. Je m'épuise car Thalès est toujours à faire.
3. Quel beau métier professeur !
4. Mon prof de maths a montré Bézout.
5. Les meilleures étudiantes préféraient qu'on leur change les maths.
6. Elles réclament des chambres pour leurs maths.
7. Les jeunes filles trottent dans les facs, et trouvent les maths débiles.

8. L'étudiant pervers préfère les maths choisies.
9. Aucun homme n'est jamais assez fort pour ce calcul...
10. « Mittag-Leffler ne sait plus majorer », soupirait Sofia Kovalevskaïa découronnée.
11. Au M. I. T., on calcule en TeX !
12. De passage à Genève, Luther a calculé en vain.
13. Les élèves apprennent à calculer en cent leçons.
14. Elle dévorait *Leçons*, de Darboux.
15. Convergence faible : une série louche !
16. Les beaux chiffres ne valent pas les vrais. D'ailleurs, si factoriser c'est briser les grands chiffres, on trouve que les chiffres débiles.
17. Comme quoi les grands chiffres ne sont pas pour les billes.
18. Un dernier calcul et on s'en va !

4.5 Charades

Charades derechef

Pour laisser un temps de réflexion, les réponses sont dans la section suivante.

Charade 1 Mon premier est un rongeur à queue plate qui ne peut pas s'asseoir.
Mon second est un rongeur à queue plate qui ne peut pas s'asseoir.
Mon troisième est un rongeur à queue plate qui ne peut pas s'asseoir.
Mon tout est le rapport de la circonférence au diamètre. Quel est mon tout ?

Charade 2 Mon premier est un déterminant.
Mon second est un prénom féminin américain.
Mon troisième est une conjonction de coordination.
Mon quatrième est le groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$ laissant $\mathbb{R}$ fixe).
Mon cinquième est le noyau.
Mon tout est ce qui s'est passé sur les côtes normandes en 1944. Quel est mon tout ?

Les réponses

Charade 1 Le premier est « un castor sans chaise », le second est « un castor sans chaise » et le troisième est un « castor sans chaise ». Si bien que le tout est « trois castors sans chaise » , soit donc 3 1416 (phonétiquement), ce qui donne bien évidemment π que tout le monde a trouvé ! (Il s'agit d'une approximation à la quatrième décimale.)

Charade 2 Le premier est « Les » (j'espère que personne n'est allé chercher parmi les déterminants en mathématiques), le second est « Sally », le troisième est « et », le quatrième est « *id* (l'identité) et *bar* (la conjugaison) », et le cinquième est « ker ». Le tout est donc « Les alliés y débarquèrent ».

Pour ceux qui sont habitués mais pas trop : le quatrième se trouve en remarquant que, de manière générale, si f est un automorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, l'ensemble des $x \in \mathbb{C}$ tels que $f(x) = x$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, donc contient $\mathbb{Q}$ et f est l'identité sur $\mathbb{Q}$. De plus, $f(y) - f(x) = f(\sqrt{y-x}^2) = f(\sqrt{y-x})^2 > 0$ pour $y > x$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on montre alors sans peine par encadrement et théorème des gendarmes que f est l'identité sur $\mathbb{R}$. Enfin, $f(z) = f(x) + f(i)f(y) = x + f(i)y$, donc f dépend entièrement de $f(i)$. Or $f(i^2) = f(i)^2 = f(-1) = -1$, donc $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$, ce qui donne $f(z) = z$ ou $f(z) = \overline{z}$ (réciproque immédiate).

4.6 En vrac

1. Lors d'un entretien d'embauche, un chef d'entreprise reçoit quatre ingénieurs : un ayant fait l'École polytechnique, le second HEC, le troisième informaticien, et le dernier sortant de l'université. Celui-ci explique aux quatre candidats qu'en définitive, pour faire marcher une entreprise, il suffit de savoir compter. Il s'adresse donc au premier d'entre eux, le polytechnicien, et lui dit : « Allez-y, comptez.
   – Le polytechnicien : « Une... Deux... Une... Deux... »
   L'homme étonné s'adresse ensuite à l'ingénieur sortant d'HEC : « À vous ! Comptez...
   – Un KiloEuro, deux KE, trois KE... »
   Il se retourne ensuite vers l'informaticien : « 0... 1... 0... 1... 0... »
   Désespéré, il s'adresse au dernier candidat sortant de fac : « Allez-y, comptez... »

Le jeune homme commence : « 1... 2... 3... 4... 5... 6... 7... »
Le chef d'entreprise est rassuré : « Continuez, continuez...
– 8... 9... 10... Valet... Dame... Roi ! »
Une variante que voici, se terminant semblablement :

Un chef d'entreprise cherche un ingénieur. Quatre personnes répondent à l'annonce qu'il a passée. Le premier est un polytechnicien (voire pire : un normalien). « Bien Monsieur, demande le patron, j'aimerais que vous comptiez jusqu'à dix.
– Si vous voulez. Mais dans quelle corps dois-je compter ?
– Ben vous comptez, voilà !
– Oui, mais dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? Doit-on considérer un corps commutatif ou non ? La loi de composition interne est-elle $+$ ou $\cdot$?
– Bon, d'accord, laissez tomber... »
Le suivant est un informaticien.

« Pourriez-vous compter jusqu'à dix, s'il vous plaît ?
– Pas de problème : 1, 10, 11, 100, 101, 110, ...
– C'est bon, c'est bon, allez-y, on vous écrira. »
Le troisième est aussi un informaticien. « Vous pourriez compter jusque dix, s'il vous plaît ?
– *No problem* : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10...
– Merci , ça ira. »
Désespéré, il s'adresse au dernier candidat sortant de fac : « Allez-y, comptez... »
Le jeune homme commence : « 1... 2... 3... 4... 5... 6... 7... »
Le chef d'entreprise rassuré : « Continuez, continuez...
– 8... 9... 10... Valet... Dame... Roi ! »

2. Un chef demande à son apprenti : « Tu vas prendre deux tiers d'eau, un tiers de crème, un tiers de bouillon...
– Mais ça fait déjà quatre tiers !
– Débrouille-toi, prends simplement une casserole plus large ! »

3. Jésus, debout sur son rocher, parle à ses disciples :
« $y = ax^2 + bx + c$. »
Un des apôtres prend alors la parole :
« Écoute, Jésus, déjà d'habitude on ne comprend pas grand-chose à ce que tu nous dis, mais là, franchement on est perdus. »
Jésus de rétorquer : « C'est normal, c'est une parabole... »

4. « Quel bon anagramme peut-on faire à partir de "Banach-Tarski" ?
– Banach-Tarski Banach-Tarski. »

5. Je connais cent mille décimales de π. Ce ne sont que des 3. Bien sûr, je ne me souviens plus où elles apparaissent exactement.

6. Saviez-vous que cinq personnes sur quatre ne comprennent rien aux fractions ?
7. Un jour, le célèbre mathématicien Kurt Gödel était au restaurant. Alors qu'une des serveuses passait à côté de lui, il lui donne une fessée. Elle lui demande d'arrêter ; ce à quoi il répond : « Ne vous en faites pas, je vérifiais juste la consistance. »
8. Je lui rendais visite à l'hôpital alors qu'il était allongé, malade. Je suis arrivé avec un taxi portant le numéro 14, et ai remarqué que c'était un nombre peu intéressant *.
   « Non, m'a-t-il répondu. C'est un nombre très intéressant. C'est le plus petit entier qui peut s'exprimer comme le produit de 7 et 2 de deux manières différentes. »
9. Deux personnes qui font un tour en montgolfière sont perdues. Elles décident de descendre un peu pour demander leur chemin. Elles aperçoivent deux hommes qui discutent sur la route. Elles s'approchent et demandent :
   « Excusez-moi, mais pouvez-vous nous dire où nous sommes ? »
   Les deux hommes se regardent, délibèrent un moment, puis répondent :
   « Vous êtes dans une montgolfière ! »
   Les deux personnes de la montgolfière, un peu surprises, remercient quand même et reprennent de l'altitude. Un peu plus loin, l'un dit à l'autre :
   « À mon avis, ces deux-là, c'était des mathématiciens.
   – Qu'est-ce qui te fait dire ça ?
   – Eh bien, ils ont mis beaucoup de temps à nous répondre. Ce qu'ils nous ont dit est parfaitement juste. Et ça ne nous sert absolument à rien. »
   Pendant ce temps, les deux mathématiciens disent :
   « À mon avis, c'était des physiciens : ils nous posent des questions évidentes, et après, s'ils sont perdus, ça va être de notre faute ! »
10. Un mathématicien rencontre un collègue à bout de souffle qui récite :
    « ... 9, 5, 1, 4, 1, 3. Ouf !
    – Tu as l'air épuisé, lui dit-il. Qu'est-ce qui t'arrive ?
    – Je viens de finir de réciter π à l'envers... »
11. C'est un mathématicien qui organise une loterie dans laquelle le prix est, comme il en faisait la publicité, une quantité infinie d'argent. Tous les tickets sont vendus très vite. Quand le ticket gagnant

*. Et pourtant, tout entier naturel est intéressant. Voir [Win] par exemple.

est tiré, et l'heureux gagnant appelé pour réclamer son prix, le mathématicien explique le mode de paiement :
1 euro maintenant, 1/2 euro la semaine prochaine, 1/3 d'euro la semaine après...

12. Un mathématicien et un courtier de Wall Street vont regarder des courses hippiques. Le courtier propose de parier 10 000 $ sur un cheval. Le mathématicien est sceptique, soutenant qu'il préfèrerait comprendre les règles, juger le talent des chevaux, etc. Le courtier lui chuchote alors qu'il connaît un algorithme secret pour trouver le vainqueur, mais il ne convainc pas le mathématicien.
« Tu es trop théorique », lui dit-il, et il parie sur un cheval. Évidemment, ce cheval arrive premier, et il gagne alors beaucoup d'argent. Triomphant, il s'exclame : « Tu vois, je connaissais le secret !
– C'est quoi ton secret ? demande le mathématicien.
– C'est plutôt simple. J'ai deux enfants, de 3 et 5 ans. J'ai sommé leurs âges et j'ai parié sur le nombre 9.
– Mais, 3 plus 5 égale 8, proteste-t-il.
– Tu vois, tu es trop théorique ! répond-il. Est-ce que je ne viens pas de te montrer expérimentalement que mon calcul est correct ? $3+5=9$! »

13. Un mathématicien voyage dans un avion Air Transat, sans escale, de Edmonton à Frankfurt. Il est prévu neuf heures de vol. Après avoir décollé, le pilote annonce qu'un moteur ne fonctionnera pas suite à un incident mécanique :
« Ne vous inquiétez pas, nous ne craignons rien. Le seul changement notable est que désormais, il est prévu dix heures de vol au lieu de neuf. »
Quelques heures plus tard, le pilote informe ses passagers qu'un autre moteur s'est éteint, encore une fois suite à un incident mécanique :
« Mais ne vous inquiétez, nous ne craignons toujours rien. Seulement : notre temps de vol est désormais de douze heures. »
Quelques temps plus tard, un troisième moteur fait défaut, et s'éteint. Mais le pilote continue de rassurer ses passagers :
« Ne vous inquiétez pas... Même avec un seul moteur, nous ne craignons absolument rien. Nous avons juste un temps de vol total de désormais seize heures avant d'arriver à Frankfurt. »
Le mathématicien fait remarquer à ses compagnons de fortune :
« Si le dernier moteur se casse, alors, nous serons dans les airs tous ensemble pendant vingt-quatre heures ! »

14. Comment un mathématicien induit un bon comportement à ses

enfants ?
« Je te l'ai dit n fois, je te l'ai dit $n+1$ fois... »

15. Un mathématicien remarque qu'un tuyau fuit chez lui, et appelle donc un plombier. Le plombier change un joint et demande 100 €.
« Comment est-ce possible ? Vous avez travaillé seulement dix minutes, et en ce qui me concerne il me faut toute une semaine pour gagner 100 €, s'exclame le mathématicien.
– Pour tout dire, c'est pour ça que je suis devenu plombier. Je vous donne un tuyau : voici l'adresse de ma boîte. Allez-y et dites que vous voulez devenir plombier. Et ne précisez pas que vous êtes mathématicien. »
Et c'est ce que le mathématicien fait. Très vite il se met à gagner beaucoup d'argent. Mais la boîte décide de relever le niveau de ses plombiers, et les envoie à l'école primaire. Le premier jour, on demande au mathématicien d'écrire au tableau la formule donnant la surface d'un cercle. Il n'arrive pas à se la rappeler, mais essaye d'utiliser le calcul intégral pour la retrouver. Malheureusement, il se trompe et obtient un résultat négatif. Il répète le calcul deux fois, trois fois, et obtient encore un résultat négatif.
Il regarde stressé sa classe et entend tous ses camarades plombiers lui souffler : « Inverse les bornes d'intégration ! Inverse les bornes ! »
16. Deux mathématiciens sont dans un bar et parlent des blondes. L'un d'eux les défend et prétend qu'elles ne sont pas plus bêtes que d'autres. Il s'avance même et soutient que la serveuse d'un blond platiné qui les a servis est capable de répondre à des questions de mathématiques. Dès que son collègue s'absente un bref instant, il fait signe à la serveuse, lui glisse un billet de dix euros dans la main et dit : « Mon collègue va te demander quelque chose. Quoi qu'il te demande, réponds simplement $\frac{1}{3}x^3$.
– Inter deuzix hocube ?
– Non, un tiers de x au cube.
– Altère de hicsocube ?
– Presque ! Un tiers de x au cube.
– Entière de hixocub.
– Ça ira, retenez bien ça, je vous appelle tout à l'heure ! »
Elle s'éloigne en se répétant « Entière de hixocub... ».
Quand le collègue réapparaît, il annonce : « Je parie que la serveuse ne sait pas calculer les primitives !
– Je ne te crois pas !
– Tu vas voir ! »
Il fait signe à la blonde de s'approcher et lui demande : « Quelle est la primitive de x^2 ? »

Elle répond (correctement) : « $\frac{1}{3}x^3$. » (Étonnement !)
Ils libèrent la serveuse avec bienveillance, non sans avoir exprimé l'admiration qu'elle méritait.
La blonde se retourne alors et murmure en s'éloignant : « Plus une constante ! »

17. Un mathématicien a passé des années à essayer de prouver l'hypothèse de Riemann, sans succès. Finalement, il décide de vendre son âme au diable en échange d'une démonstration. Le diable lui promet une démonstration dans les quatre semaines à venir. Quatre semaines passent, sans aucun signe. Six mois plus tard, le diable refait surface, d'un air plutôt sombre.
« Je suis désolé, dit-il, mais je n'ai pas réussi à prouver l'hypothèse de Riemann non plus. Par contre – et son visage s'éclaire – je pense que j'ai trouvé un lemme vraiment très intéressant... »

18. Un mathématicien a une conférence à donner. Le titre de sa conférence est *Démonstration de l'hypothèse de Riemann.*
Dès que la conférence commence, il parle de quelque chose qui n'a absolument rien à voir. Après sa présentation, un collègue lui demande :
« Tu as décelé une erreur dans ta démonstration ?
– Non, je n'ai jamais eu de démonstration, répond-il.
– Mais alors, pourquoi cette annonce ?
– C'est ma précaution habituelle, au cas où je meurs sur le chemin de la conférence [†]... »

19. Après le succès phénoménal du viagra©, Pfizer a développé une nouvelle tendance pharmaceutique : les pilules de connaissance.
Un étudiant, complètement à la masse en cours de littérature française, va à la pharmacie et demande à la pharmacienne s'ils ont des pilules de connaissance pour la littérature française.
« Bien sûr », lui répond la pharmacienne. L'étudiant lui en achète une, l'avale, et une heure après il sait tout ce qu'il y a à savoir sur la littérature française. Si c'est si facile d'engranger de la connaissance, pense-t-il, pourquoi passer des heures à bousiller notre cervelle avec des livres ennuyeux ? Alors, il décide d'arrêter d'étudier, et dès qu'un examen est proche, il va à la pharmacie et achète la pilule de connaissance nécessaire : biologie, histoire de l'art, histoire-géographie ; il y a juste à demander.
Au moment de passer un examen de mathématiques, il va encore

†. Renseignez-vous, à cet effet, sur l'histoire vraie mêlant Hardy, Dieu et l'hypothèse de Riemann. On la trouve dans toute biographie, ou sur Wikipedia. Elle est d'autant plus amusante qu'elle est vraie !

à la pharmacie et demande une pilule de connaissance en mathématiques.
« Un instant », dit la pharmacienne. Elle disparaît à l'arrière de la pharmacie et revient avec une pilule aussi grosse qu'un melon.
« Mais comment suis-je supposé avaler ça ? s'exclame l'étudiant.
– Vous savez, les mathématiques ont toujours été un peu dures à avaler... »

20. Lors d'une conférence, un mathématicien prouve un théorème. Quelqu'un dans l'audience l'interrompt :
« Cette preuve doit être erronée, j'ai un contre-exemple à votre théorème...
– Je m'en fiche, j'ai une autre preuve de ce résultat ! »

21. Il y a très longtemps, pendant la Guerre froide, alors qu'il était encore difficile pour les Occidentaux de venir dans l'Union soviétique, un mathématicien britannique voyage jusqu'à Moscou pour parler lors du séminaire d'un célèbre professeur russe. Il commence la conférence en écrivant un théorème au tableau. Alors qu'il veut le prouver, le professeur l'interrompt :
« Ce théorème est clair ! »
Le conférencier est, bien sûr, embêté, mais le cache. Il continue avec un second théorème mais, encore une fois, quand il veut commencer par démontrer le résultat, son hôte l'interrompt :
« Ce théorème aussi est clair ! »
Le visage austère, il écrit un troisième théorème sur le tableau et demande :
« Ce théorème aussi est clair ?! »
Son hôte acquiesce. Le visiteur sourit et dit :
« Ce théorème est faux... »

22. Une foule d'une infinité (dénombrable !) de mathématiciens entre dans un bar. Le premier demande une pinte, le second une demi-pinte, le troisième un quart de pinte...
« Imbéciles », dit le barman, et leur sert deux pintes.

23. CNN vient d'annoncer que le nouveau nombre premier découvert est quatre fois plus grand que le record précédent.

24. Un vendeur de chaussures rencontre un mathématicien, et se plaint de ne pas savoir quelles tailles de chaussure proposer à la vente.
« Aucun problème, dit le mathématicien, il existe une équation très simple pour ça. » Il lui présente donc la gaussienne. Le vendeur de chaussures fixe l'équation quelques instants, puis demande :
« Quel est ce symbole ?

– C'est la lettre grecque π.
– Qu'est-ce que c'est, π ?
– C'est le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle.
– Bah alors, crie le vendeur, que vient faire un cercle dans cette histoire de chaussures ? ! »

25. Pour finir, la blague la plus courte de tous les temps : Soit $\varepsilon < 0$.

CHAPITRE 5

SECRETS DE PROFESSION

Oui, je pensais que ce n'était qu'un jeu... Puis j'ai commencé à en faire en semaine... Vous savez, rien de terrible : dérivation, calculs de limites. Puis je me suis mis aux intégrations par parties... J'ai commencé à en faire toutes les nuits : homotopie des chemins, fonctions holomorphes. Maintenant j'étudie des équations diophantiennes et nage dans les méandres de l'analyse transfinie. Ne les laissez pas vous convaincre que ce n'est qu'un jeu.
Heureusement, je peux m'arrêter quand je veux.

Dimitri Karpov.

Le pire, c'est que ce n'est même pas le témoignage d'un excentrique... Le pire ou le mieux, allez savoir, c'est qu'ils sont heureux comme ça, les bougres ! Pour mieux comprendre ces animaux bizarres au premier abord, trente pages sur ce qui n'intéresse que les mathématiciens (du genre : quelle constante est la meilleure entre e et π ?), sur ce qu'ils savent, ce qu'ils font, ce qu'ils aiment. Cela fournit, en plus des plaisanteries des autres sections, une bonne description de cette belle vocation... Car il n'y a pas de cliché sur les mathématiciens, il n'y a que des choses vraies.

Quelques faits classiques, inclassables :

1. Les mathématiciens savent ce qui a causé le *big bang* : Dieu a divisé par zéro. Oups !
2. L'enthousiasme d'un professeur à l'idée d'enseigner le pré-calcul différentiel et intégral varie inversement proportionnellement à l'habitude qu'il a à le faire.
3. La différence entre un mathématicien introverti et extraverti est ici : un mathématicien introverti regarde ses chaussures quand il vous parle. Un mathématicien extraverti regarde les vôtres.

4. À quoi pouvez-vous voir que vous avez affaire à la mafia mathématique ? Ils vous font une offre que vous ne pouvez pas comprendre.
5. De nos jours, même la plus pure et abstraite des mathématiques est en danger d'application.
6. La raison pour laquelle toutes les grandes universités conservent un département de mathématiques est parce qu'il est plus économique de faire ça que d'institutionnaliser tous ces individus.
7. Quelle est la différence entre un doctorat en mathématiques et une grande pizza ? Une grande pizza peut nourrir une famille de quatre...
8. Quand est-ce que Bourbaki a décidé d'arrêter d'écrire des livres ? Quand il a réalisé que Serge Lang n'était qu'une seule personne...
9. Les plus grands moments de la vie d'un mathématicien sont les moments qui suivent immédiatement la démonstration d'un résultat, mais encore avant que quelqu'un n'y découvre une erreur.
10. Règle d'or de la dérivation : ne jamais croire un résultat démontré après 23h.
11. La qualité professionnelle d'un mathématicien est inversement proportionnelle à l'importance qu'il accorde à l'espace de travail et l'équipement.
12. Les relations entre mathématiciens purs et appliqués sont basées sur la confiance et la compréhension. Plus précisément, les mathématiciens purs ne font pas confiance aux mathématiciens appliqués, et les mathématiciens appliqués ne comprennent pas les mathématiciens purs.
13. Certains mathématiciens sont si tendus de nos jours qu'ils ne dorment pas durant les séminaires.

5.1 Vous êtes peut-être un mathématicien si...

- Les sommations hypergéométriques sont la chose la plus marrante que vous puissiez faire habillé(e),
- Vous ne pouvez pas vous empêcher de lâcher des contre-exemples dès que quelqu'un soutient une impossibilité,
- À 19 ans vos années les plus productives sont déjà derrière vous,
- Votre résultat majeur est nommé d'après le nom de quelqu'un d'autre,

- Vous faites des erreurs... mais ce sont des erreurs *très* intéressantes,
- Vous vous demandez comment Euler prononçait « Euclide »,
- Vous avez déjà souri pendant dix secondes à la fin d'une preuve,
- Vous comprenez toutes les mathématiques que Gauss a manipulées... jusqu'à ses 13 ans,
- La lettre de Russell envoyée à Frege décore votre mur,
- Vous êtes passé(e) de la haine à l'amour, en un corollaire,
- Votre matière principale était les mathématiques, la seconde la caféine,
- Vous connaissez tout l'alphabet grec, sans connaître un seul mot de grec,
- Vos histoires préférées sont *Pretty Polly Nomial* et *Curly Pi*,
- Ces irrésistibles petits puzzles à base d'astuces de combinatoire apparaissent comme un tic nerveux,
- Votre progéniture est soulagée d'apprendre que les mathématiques ne sont pas héréditaires,
- La solution à tout problème passe par le décompte de balles dans des boîtes,
- Vous pouvez plier des bandes planes dans des polyèdres réguliers... de tête,
- Faire plus d'une chose à la fois est ennuyeux,
- Vous avez déjà en votre possession votre lecture des trois années à venir,
- C'est difficile de songer à la retraite, étant donné l'état actuel de l'hypothèse du continu,
- Vous célébrez l'anniversaire de Rota tous les dix ans, avec des beignets et du champagne dans des coupes de papier,
- Vous vous remémorez des adresses postales par des moyens arithmétiques : « Le plus petit entier qui peut s'écrire de deux façons comme somme de deux cubes »,
- Vous savez compter jusqu'à 31 avec les doigts de la main,
- Votre côté romantique surgit dès que vous montrez un fort intérêt pour les compétences mathématiques de votre bien-aimé(e),
- Vous connaissez en anglais un mot de six lettres et trois voyelles, lesquelles sont toutes « y » *,
- Vous êtes content(e) de parler français pour lire Bourbaki,
- Vous apportez les *Variétés différentielles analytiques* de Bourbaki en vacances,
- Vous ne voyez pas l'intérêt de prendre des vacances si vous pouvez

*. Il s'agit de « *syzygy* », ou « syzygie » en français. C'est une situation où trois objets sont alignés.

lire Bourbaki à la maison,
- Vous visitez le monde seulement pour des conférences et des obligations familiales,
- Votre opinion au sujet d'*Un homme d'exception* (*A Beautiful Mind*) est « Bof, déjà vu, déjà fait. », suivi d'un air blasé,
- Vous pensez aux mathématiques en tant qu'art, pas (forcément) en tant que science...
- Vous trouvez que les blagues mathématiques sont drôles,
- Vous vous surprenez en train de dire « il existe » au lieu de « il y a »,
- Vous avez déjà eu des débats virulents autour de $0,999\cdots = 1$,
- Ou des débats virulents autour de la différence entre « Deux pièces sont lancées et l'une d'elles tombe sur face » et « Deux pièces sont lancées. Cette pièce donnée tombe sur face »,
- Vous essayez désespérément de plaire aux gens par vos mathématiques,
- Vous trouvez que l'ensemble de Cantor est « beau »,
- Vous prévoyez de démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux pendant votre retraite,
- Vous savez ce que veut dire *Q.E.D.*,
- Pour vous, 1 729 a un sens particulier,
- Vous pensez que fog est une composition,
- Vous trouvez ça *cool*, des nouvelles formules dont la somme donne e,
- La preuve avec la diagonale de Cantor vous paraît tout à fait sensée,
- Vous passez votre temps à faire de l'aide aux devoirs pour des inconnus,
- Vous avez déjà lu des articles avec des titres tels que *Betti numbers of Z^n-graded modules*,
- Vous connaissez la différence entre vrai et démontrable,
- Savoir comment les gens prononcent « Euler » a de l'importance pour vous,
- Vous pensez que Zénon était un fouteur de m...,
- Vous savez ce qu'est un nombre d'Erdős,
- Vous avez un nombre d'Erdős (fini),
- Vous écrivez des emails en LaTeX,
- Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable... », point à partir duquel vous êtes arrêté(e),
- Votre célébrité repose sur les questions que vous posez et dont vous n'avez pas les réponses,
- Quand le docteur vous annonce que votre grande tante vient tout

juste de s'éteindre, vous contestez son manque de rigueur,

– Quand vous faites une conférence dans une salle avec fenêtres, les gens à l'extérieur font tout le temps des allers et retours,
– On vous demande systématiquement de couper les gâteaux, et vous savez que vous ne ferez pas mieux, car $\cos(2\pi/9)$ n'est pas constructible,
– Mélanger un jeu de cartes vous fait penser au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$,
– Vous répondez toujours « C'est difficile à expliquer » quand on vous demande ce que vous faites dans la vie,
– Vous pensez que votre grand savoir mathématique peut vous rendre *sexy* ou *cool*,

- Ascoli vous évoque plus l'équicontinuité que le foot italien,
- Vous savez que $1 + 1$ ne fait pas toujours 2,
- Vous avez calculé plusieurs façons (en ignorant les réflexions) de lacer vos chaussures,
- Vous savez pourquoi le ruban adhésif s'arrache toujours dans un angle... En utilisant la formule des angles,
- Vous célébrez l'anniversaire d'Erdős avec du benzedrine suivi d'un double *expresso*,
- Le chômage est pour vous une opportunité rêvée pour progresser dans votre travail,
- La caféine fait partie intégrante de votre alimentation,
- Vous utilisez le mot « trivial » quotidiennement,
- Votre correspondance a des notes de bas de page et une bibliographie,
- Vous êtes surpris(e) quand vous tombez parfois sur une page web non mathématique,
- Quand vous lisez quelque chose au sujet d'Hillary Clinton qui dit que sa fausse déclaration était un « accident mineur » au milieu des « millions de mots » qu'elle prononce tous les jours, vous vous rendez compte que vous ne comprenez pas l'humour du propos, puisque tout le monde sait bien que même sous l'hypothèse d'un mot par seconde, un million de secondes égalent un peu plus de onze jours et demi,
- Vous grimacez chaque fois que vous lisez ou entendez quelqu'un dire « et réciproquement » incorrectement,
- Vous relisez les manuscrits à contenu (pseudo-)mathématique que ploucs et clochards illuminés vous apportent fièrement,
- Peu importe ce que vous regardez, vous voyez juste des suites de nombres,
- Vous étiez allé(e) voir le film Matrix parce que vous vous attendiez à des mathématiques...

5.2 Quels sont les termes mathématiques « branchés » ?

Par Michael Stueden

Aujourd'hui, il est vu comme un faux pas (en français dans le texte) de parler ou d'écrire dans les termes surannés et crus de nos grandparents. Pour aider l'étudiant perdu et l'enseignant un peu à la masse, j'ai préparé la liste suivante de termes mathématiques actuellement à la

mode à l'université. Je transmets cette liste au grand public, par charité, dans l'espoir que ça mènera à des expressions plus raffinées de la part de nos jeunes savants.

Dépassé	Branché
Aléatoire	Stochastique
Alors	*Ergo*
Approcher à la deuxième décimale	Donner un terme d'erreur inférieur à 10^{-3}
Arithmétique	Théorie des nombres
Changement de direction	Perturbation
Chemin	Trajectoire
Compter	Énumérer
Concave	Non convexe
Constant	Invariant
Contre-exemple	Cas pathologique
De même forme	Isométrique
De travers	Oblique

Suite page suivante . . .

Suite de la page précédente.

dépassé	*branché*
Distance	Métrique
Diviser pour régner	Algorithme de complexité logarithmique
En conséquence	*Ipso facto*
Erreur	*Non sequitur*
Euclide	Descartes
Fait avéré	Tautologie
Fermat	Wiles
Fonction/Argument	Opérateur/Opérande
Géométrie plane	géométrie dans le plan euclidien
Généralement/Spécifiquement	Globalement/Localement
Il y a une solution simple à comprendre, difficile à trouver	Évident
Il y a deux solutions simples à comprendre, difficiles à trouver	Trivial
Joindre	Concaténer
Numérologie	Statistique descriptive
On pense que	Faisons l'hypothèse que
Ordre alphabétique	Ordre lexical
Perpendiculaire (adj.)	Orthogonal
Perpendiculaire (n.)	Normale
Plusieurs	Une pluralité de
Point à l'extrémité	Sommet
Prisme rectangulaire	Parallélépipède
Puissance quatre	Biquadratique
Raisonnement par l'absurde	*Reductio ad absurdum*
Résultat bonus	Corollaire
S'évanouit	Tend vers zéro
Schème intelligent	Algorithme
Semi-fermé	Semi-ouvert
Shift	Translation rectiligne
Similaire	Homologue
Structure similaire	Homéomorphe
Structure très similaire	Isomorphe
Très similaire	Congruent
Un	Unité

Suite page suivante ...

Suite de la page précédente.	
dépassé	*branché*
Unique condition	Singularité

5.3 Test de pureté mathématique

Pour connaître votre pureté mathématique, comptez le nombre de « oui » que vous répondez aux questions et consultez l'analyse de votre résultat plus bas.

Les questions

Avez-vous déjà :

1. Été excité par des maths ?
2. Fait un rêve excitant sur des maths ?
3. Été dégoûté à l'idée d'admettre un résultat dans un cours de mathématiques ?
4. Été dégoûté à l'idée de devoir attendre la prochaine séance pour voir la preuve d'un résultat ?
5. Été dégoûté du point précédent au point de finir la preuve vous-même ?
6. Fait des calculs mathématiques ?
7. « Prouvé » que $0 = 1$?
8. Compris qu'en vérité, les chevaux ne sont pas *vraiment* tous de la même couleur ?
9. Déjoué des pseudo-preuves mathématiques utilisant du calcul ?
10. Déjoué des pseudo-preuves mathématiques utilisant de la géométrie ?
11. Essayé de définir rigoureusement la division par 0 ?
12. Manipulé le numérateur d'une expression ?
13. Manipulé le dénominateur d'une expression ?
14. Créé votre propre problème ?
15. Créé votre propre cours ?
16. Construit $\mathbb{N}$?

17. Construit $\mathbb{R}$?
18. Pensé que les nombres au développement décimal à deux virgules pourraient être un concept intéressant ?
19. Compté autrement qu'en base 10 ?
20. Compté dans une base non entière ?
21. Comparé les mathématiques et le divin ?
22. Écrit « Le lecteur en exercice vérifiera les détails » ?
23. Travaillé sur un problème après 15h ?
24. Travaillé sur un problème toute une nuit ?
25. Travaillé sur un problème vraiment difficile ?
26. Travaillé sur un problème en continu, pendant plus de quatre heures ?
27. Écrit une démonstration de plus d'une page ?
28. Écrit une démonstration de plus de deux pages ?
29. Commencé et fini plus d'un problème en une nuit ?
30. Commencé et fini plus de trois problèmes en une nuit ?
31. Été inscrit à deux cours de maths différents à la fois ?

32. Fait au moins un problème par semaine pendant plus de quatre mois ?
33. Fait au moins un problème par nuit pendant plus d'un mois (week-ends exclus) ?
34. Fini un problème seul ?
35. Fini un problème à trois ou plus ?
36. Fini un problème à quinze ou plus ?
37. Étaient-ce des gens sans rapport entre eux ?
38. Marché par inadvertance à côté de personnes faisant un problème ?
39. Et rejoint ces gens juste après ?
40. Fini un problème dans un endroit public où vous pouviez être surpris ?
41. Été surpris en train de faire un problème ?
42. Compris que vous étiez allé trop loin dans votre délire mathématique (souvent en public) ?
43. Lu des romans de mathématiques ou des livres d'histoire des mathématiques ?
44. Lu des romans sur le Dernier Théorème de Fermat ou l'hypothèse de Riemann ?
45. Lu des livres de mathématiques sur le Dernier Théorème de Fermat ou l'hypothèse de Riemann ?
46. Lu un recueil de blagues mathématiques ou autres curiosités ?
47. Appliqué vos connaissances mathématiques à une science dure ?
48. Appliqué vos connaissances mathématiques à une science molle ?
49. Fait une intégration par parties ?
50. Fait deux intégrations par parties dans un unique problème ?
51. Essayé de dominer une fonction pour les intégrales impropres ?
52. Utilisé la méthode de Newton ?
53. Utilisé l'automorphisme de Frobenius ?
54. Utilisé le théorème des gendarmes ?
55. Utilisé le théorème des valeurs intermédiaires ?
56. Donné un nom à un de vos petits résultats ?
57. Utilisé une surface de Riemann ?
58. Fait de l'analyse dans $\mathbb{R}$?

59. Fait de l'analyse dans $\mathbb{C}$?
60. Fait de l'analyse dans un corps p-adique ?
61. Maudit un mathématicien pour avoir inventé des outils si horribles ?
62. Pour finalement l'aduler ?
63. Utilisé un objet extérieur dans un problème de mathématiques (une calculatrice ?) ?
64. Fait un programme sur la calculatrice pendant une épreuve ?
65. Utilisé un logiciel pour améliorer votre technique en mathématiques (MAXIMA, Maple) ?
66. Non utilisé des parenthèses alors qu'il aurait fallu ?
67. Intégré une fonction sur sa période ?
68. Fait un calcul dans un espace à trois dimensions ?
69. Fait un calcul dans un espace à n dimensions ?
70. Montré la continuité d'une application linéaire en dimension infinie ?
71. Utilisé le lemme de Baire ?
72. Utilisé le lemme de Baire deux fois de suite ?
73. Fait un changement de base ?
74. Fait un changement de base juste pour augmenter les coordonnées du vecteur ?
75. Travaillé entre quatre bases complètes en une seule nuit (Par exemple avec la méthode de Gram-Schmidt) ?
76. Introduit un nombre dans une équation ?
77. Calculé le résidu à un pôle ?
78. Eu un score parfait à un test de mathématiques ?
79. Assimilé tout ce qu'un professeur vous a enseigné ?
80. Réduit le nombre d'hypothèses nécessaires dans un problème ?
81. Omis volontairement des étapes importantes dans un problème ?
82. Été emporté par un test ?
83. Corrigé votre professeur dans un test ?
84. Multiplié 23 par 3 ?
85. Cherché le nombre de nombres premiers inférieurs à 100 ?
86. Cherché le nombre de nombres premiers inférieurs à 10 000 ?

87. Essayé de trouver un contre-exemple à une conjecture célèbre (Syracuse, Goldbach, Riemann...) ?
88. Essayé de résoudre une conjecture célèbre ?
89. Compris le théorème suivant : « Soit $f \in \mathbb{T}_k^0$ une forme modulaire primitive, $(a_n)_{n\geq 1}$ ses coefficients de Fourier, K_f le corps de nombres engendré par ces coefficients, λ une place finie de K_f de caractéristique résiduelle l. Alors, il existe une représentation galoisienne
$$\rho_{f,\lambda} : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathrm{Frac}(\varprojlim_n \mathscr{O}_f/(\lambda^n)))$$
continue pour les topologies profinies, irréductible, et telle que si $p \neq l$ est un nombre premier, alors $\rho_{f,\lambda}(D_p) = 1$ où D_p est le groupe de décomposition en p. De plus,
$$\det(1 - \rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p)X) = 1 - a_pX + p^{k-1}X^2. \text{ » (Deligne)}$$
90. Décelé l'erreur que j'ai introduite dans l'énoncé précédent ?

Les résultats

Sans perte de généralité, on peut supposer que vous êtes un homme : ceci ne change rien à l'interprétation des résultats.

Vous avez dit « oui » 90 fois Que... Qui êtes-vous ? Jean-Pierre Serre, Alexandre Grothendieck ? Sur mon recueil ? Je vous aime, Ô Mon Maître, vous m'avez tout appris. Félicitations, vous êtes un *dieu des mathématiques.*

Vous avez dit « oui » 88 ou 89 fois Si vous n'avez pas triché, alors chapeau. Ne trainez pas trop sur ce test, vous avez un prix Abel ou une médaille Fields à empocher. Félicitations, vous êtes une *brutasse mathématique.*

Vous avez dit « oui » entre 76 et 87 fois Je crois qu'on peut s'entendre ; tous ces extraterrestres qui se reconnaissent dans les deux résultats ci-dessus me font peur. En tout cas, cette performance laisse entendre que vous êtes un mathématicien en herbe, voire confirmé ; le revêtement universel, la cohomologie étale, les adèles, la théorie de Hodge, vous adore(re)z ça ! Par les pouvoirs qui me sont conférés, je vous adoube. Félicitations, vous êtes dorénavant un *chevalier sacré des mathématiques.*

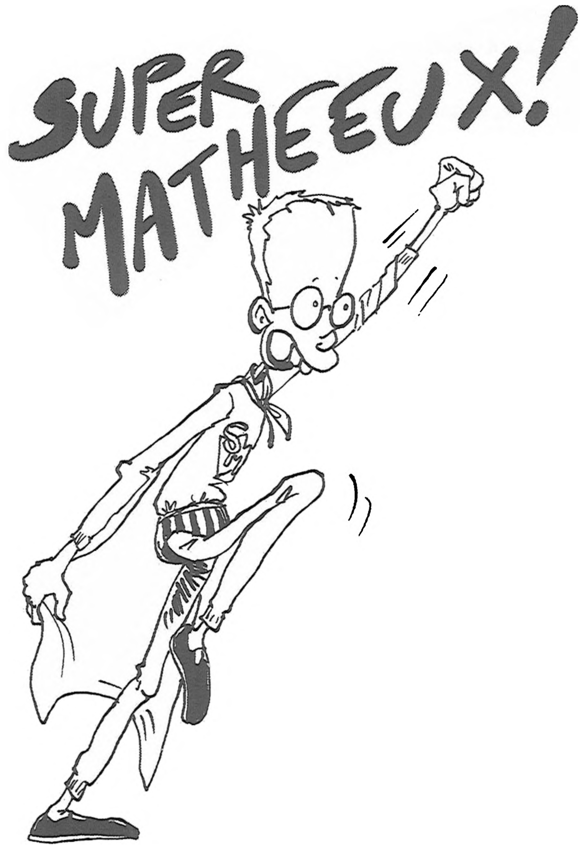
Vous avez dit « oui » entre 61 et 75 fois Vous péchez dans la finition, mais ne vous en faites pas, il ne vous manque pas grand chose. Quelques suites de Cauchy par ci, quelques quotients par là, et hop ! vous serez un mathématicien complet. En attendant, vous prêchez déjà la bonne parole dans votre entourage, qui malheureusement est peu réceptif car il jalouse votre talent mathématique. Félicitations, vous êtes un *maître des mathématiques.*

Vous avez dit « oui » entre 42 et 60 fois Vous avez encore beaucoup à apprendre, mais ce n'est pas par manque de volonté ! Vous buvez les paroles des maîtres, si bien que vous finirez par les dépasser. Peut-être n'avez-vous pas encore pris conscience du *cosmos* (κόσμος) qui est en vous ? Félicitations, vous êtes un *aspirant mathématicien.*

Vous avez dit « oui » entre 21 et 41 fois Les termes abscons apparus lors du test de pureté mathématique vous effrayent ? Pire encore, peut-être que vous vous posez régulièrement la question de l'intérêt des mathématiques poussées ? Ne vous en faites pas, ce score révèle qu'il n'y a là rien d'insurmontable pour vous, mais que des beautés des mathématiques attendent d'être bravées par l'honneur de votre esprit humain. Faites en sorte que la peur ne vous fasse pas basculer parmi les âmes égarées, voire les archennemis des mathématiques. Félicitations, vous êtes un *amateur de mathématiques.*

Vous avez dit « oui » entre 6 et 20 fois Ça alors ? Comment êtes-vous tombé ici, pour commencer ? Allez, allez, un petit effort. Félicitations, vous êtes une *âme égarée des mathématiques.*

Vous avez dit « oui » entre 0 et 5 fois Vous n'y connaissez pas grand chose en mathématiques, et vous le revendiquez. À vrai dire, vous détestez les mathématiques, et votre objectif est de leur nuire au possible. Un conseil, cependant : il vaut mieux connaître son ennemi si on veut mieux lui nuire... Faites donc des mathématiques ! Félicitations, vous êtes un *archennemi des mathématiques.*



5.4 L'amour en mathématiques

Parce que l'amour, c'est comme les mathématiques : une idée simple, mais ça peut vite se compliquer *.

5.4.1 La drague...

Je m'adresse à présent aux trois ou quatre personnes qui ont eu un regard lubrique en lisant « curiosités » dans le titre du recueil. Ils devront se contenter de techniques de drague mathématiques ! Puisqu'il faut bien savoir vendre son *beefsteak*, une preuve par quelques anecdotes

*. Les petits malins savent également que les mathématiques, c'est comme le sexe : il y a un certes un côté pratique, mais ce n'est pas pour ça qu'on en fait.

qu'on ne drague pas un mathématicien « juste comme ça », on a besoin de stratégies d'approche :

Une femme entre dans un bar pour emballer un mathématicien. Il va falloir attendre un peu avant de commander à boire, le barman entretient une discussion avec une demoiselle, un chien et une vache (il est fou lui). Bref, elle l'aborde :
« Quel âge vous me donnez ? demande-t-elle, empreinte de fausse modestie.
– Eh bien, je vous donne 18 ans pour vos yeux rayonnants, 19 pour vos joues éclatantes, 20 parce que vous avez le visage radieux, et sommer tout ça devrait être de votre ressort... »

Même en étant plus direct, ce n'est pas sûr de marcher :

Un étudiant en mathématiques, qui venait traditionnellement à pied à l'université, arrive ce jour-ci avec un nouveau vélo.
« Où t'es-tu procuré ce vélo ? demandent ses amis, curieux.
– C'est un cadeau de remerciement, explique-t-il. De la part de cette fille en première année, que j'aidais en mathématiques. Mais c'est un peu bizarre comme histoire...
– Raconte-nous !
– En fait, commence-t-il, elle m'a téléphoné hier, et informé qu'elle venait de réussir son examen de mathématiques, puis qu'elle voulait faire un saut chez moi, pour me remercier en personne. Comme d'habitude, elle est arrivée chez moi en vélo. Mais, alors que je venais de la faire entrer, elle s'est soudainement déshabillée, allongée sur mon lit, m'a souri, puis dit : “Prends tout ce que ton cœur désire !” »

Un de ses amis fait remarquer :
« Tu as fait un choix très intelligent en prenant le vélo.
– Ouais, ajoute un autre ami. Imagine de quoi tu aurais l'air, habillé avec des vêtements de fille... Et ils ne t'iraient pas, de toute façon ! »

Je vous l'avais dit, que les méthodes classiques ne fonctionnaient pas. Pour certains, la situation est même dramatique :

Théorème 20 *Tu ne connaîtras jamais l'amour.*

Preuve. Considérons l'ensemble des hommes $\mathbb{H}$, l'ensemble des femmes $\mathbb{F}$, et l'application *amour* : $\begin{cases} \mathbb{H} & \to & \mathbb{F} \\ h & \mapsto & f \end{cases}$ Cette application est clairement non bijective, en effet il y a plus de femmes que d'hommes sur terre. Quoique, rigoureusement, la polygamie existe dans certains endroits, et dans ce cas-là *amour* peut être surjective, mais non injective car les femmes trompent les hommes (autrement dit, pour deux hommes différents on peut trouver une même femme, qu'on notera $f_{coquine}$ par convention). Malgré tout, supposons qu'elle soit bijective † de $\mathbb{H}^* \to \mathbb{F}^*$. Donc pour tout homme, et pour toute femme dans $\mathbb{H}^*$ et $\mathbb{F}^*$ on peut créer un couple qui va s'aimer. Or toi tu es un gros nul, donc tu resteras seul à jamais. □

On remarquera qu'une démonstration dans l'autre sens est analogue.

Quoi qu'il en soit, je présente quelques *pick up lines*, comme on dit, des phrases qui permettent de charmer sur le coup, ou de sauver une situation désespérée. Ne négligez pas cette partie, la drague mathématique peut marcher (même sobre).

1. Voulez-vous Cauchy avec moi ?
2. Et si on engendrait un groupe libre ?
3. Ta beauté défie l'analyse réelle et complexe.
4. J'aimerais être une dérivée, pour être tangent à tes courbes.
5. J'aimerais être une intégrale, pour être sous tes courbes.
6. C'était le destin, nos vies respectives sont des suites adjacentes : nous n'avons plus qu'à converger vers un même point.
7. Ta beauté ne peut pas être décrite par une base finie de vecteurs.
8. Mon amour est comme une fonction exponentielle ; il est non borné.
9. Mon amour pour toi est comme une fractale : il continue à l'infini.
10. Toi et moi, nous nous sommons mieux qu'une somme de Riemann.
11. J'espère que tu connais la théorie des ensembles, parce que je veux m'unir et m'intersecter avec toi.
12. Nous sommes liés par un homomorphisme naturel ‡ !
13. Tu as plus de courbes qu'une triple intégrale.
14. Viens, on va calculer les coordonnées de ton point G.
15. J'aimerais être ton problème de mathématiques, parce qu'alors je serais très dur, et tu me ferais sur le bureau. §
16. Hey... belle asymptote.

†. Ce qui, à notre époque, est le cas, et on appelle cette nouvelle application *mariage*.

‡. Ou un hétéromorphisme, au choix. Je ne vous juge pas.

§. Attention, phrase « carré blanc » (ou presque) !

17. Je te pousse jusqu'à la limite du possible si tu me montres ton comportement asymptotique.
18. Tu es l'asymptote de mon cœur, j'aimerais tant me rapprocher de toi indéfiniment.

Je tiens à préciser que je ne peux être tenu responsable en cas d'échec sentimental qui ôte toute crédibilité à vie, ce n'est pas de ma faute si vous n'aviez pas l'air sûr de ce que vous disiez. Toutes ces répliques ont reçu le sceau d'approbation de *Slovenian School of "Hitting on"* en 1957[¶], vous pouvez donc avoir confiance, même si votre scepticomètre vient d'exploser.

Pour aller plus loin, vous pouvez même vous lancer dans la poésie ou la musique ; on retiendra cette très charmante performance du Klein Four Group (en anglais), ci-dessous ! Leur musique s'intitule *Finite Simple Group (of Order Two)*, et on peut les voir à l'œuvre au lien suivant :
`http://www.youtube.com/watch?v=UTby_e4-Rhg`.

Voici les paroles au contenu mathématique finement employé :
The path of love is never smooth
But mine's continuous for you
You're the upper bound in the chains of my heart
You're my Axiom of Choice, you know it's true

But lately our relation's not so well-defined
And I just can't function without you
I'll prove my proposition and I'm sure you'll find
We're a finite simple group of order two

I'm losing my identity
I'm getting tensor every day
And without loss of generality
I will assume that you feel the same way

Since every time I see you, you just quotient out
The faithful image that I map into
But when we're one-to-one you'll see what I'm about
'Cause we're a finite simple group of order two

¶. Et par là même je mets en lumière une application de la section *Comment faire une preuve* du recueil !

Our equivalence was stable,
A principal love bundle sitting deep inside
But then you drove a wedge between our two-forms
Now everything is so complexified

When we first met, we simply connected
My heart was open but too dense
Our system was already directed
To have a finite limit, in some sense

I'm living in the kernel of a rank-one map
From my domain, its image looks so blue,
'Cause all I see are zeroes, it's a cruel trap
But we're a finite simple group of order two

I'm not the smoothest operator in my class,
But we're a mirror pair, me and you,
So let's apply forgetful functors to the past
And be a finite simple group, a finite simple group,
Let's be a finite simple group of order two
(Oughter : "Why not three ?")

I've proved my proposition now, as you can see,
So let's both be associative and free
And by corollary, this shows you and I to be
Purely inseparable. *Q. E. D.*

5.4.2 La vie en couple...

Parce que le plus dur est toujours à venir (toujours). Et les mathématiciens ne sont pas toujours compris !

1. Quel est le point commun entre l'arithmétique et l'amour ?
   Réponse : Ça commence par des Bézout, s'envoie Euler dans Lagrange et finit par des Gauss.
2. Qu'offre un mathématicien à sa fiancée quand il la demande en mariage ? Un anneau polynomial !
3. Un mathématicien demande à son ami : « Es-tu fidèle ?
   – Oui, à isomorphisme près. »
4. Un médecin, un avocat et un mathématicien discutent des mérites comparés d'une épouse et d'une maîtresse.

L'avocat : « Il vaut mieux avoir une maîtresse. En cas de divorce, une épouse pose de nombreux problèmes légaux. »
Le médecin : « Il vaut mieux avoir une épouse, car le sentiment de sécurité réduit le stress, et c'est bon pour la santé. »
Le mathématicien : « Vous avez tous les deux tort. Le mieux est d'avoir les deux. Quand votre femme vous croit chez votre maîtresse, et votre maîtresse chez votre femme, vous pouvez faire des maths. »

5. Un jeune marié est découragé par l'obsession de sa femme pour les mathématiques. Effrayé à l'idée de passer au second plan après son métier, il la met finalement au pied du mur :
   « Est-ce que tu aimes les mathématiques plus que moi ?
   – Mais bien sûr que non, mon amour, je t'aime bien plus !
   – Alors, prouve-le ! dit-il, heureux mais plutôt sceptique.
   – Ok... répond-elle après quelques secondes de réflexion. Soit $(\{A_i\}_{i\in I}, \leq)$ l'ensemble des choses aimables muni d'une relation d'ordre[||]... »

6. « Le mariage de ce professeur de mathématiques tombe en ruine !
   – Tu m'étonnes ! Il est dans l'informatique... Et elle est incalculable ! »

5.4.3 La séparation...

1. « Ce n'était pas hier, ton premier anniversaire de mariage ? Qu'est-ce que ça fait d'avoir été marié à une mathématicienne pendant toute une année ?
   – Elle vient tout juste de remplir les papiers de divorce...
   – Je ne peux pas le croire ! Vous avez oublié votre jour de mariage ?
   – Non. En fait, alors que je rentrais chez moi, je me suis arrêté devant un fleuriste, et ai acheté un bouquet de roses rouges pour ma femme. Quand je suis arrivé à la maison, je lui ai donné le bouquet et ai dit : je t'aime.
   – D'accord... Et après ? !
   – Eh bien, elle a pris les roses, m'a frappé avec sur le visage, donné un coup de pied à l'aine, puis m'a jeté de l'appartement...
   – Quelle garce !
   – Non, non... Tout est de ma faute... J'aurais dû dire : je t'aime, *toi et seulement toi* ! »

||. Si vous avez immédiatement pensé au lemme de Zorn en lisant cette anecdote, je me fais du souci pour vous !

2. « Alors, quoi de neuf avec ton copain, cet étudiant en mathématiques ?
   – Ne me parle plus de ce pervers fou furieux ! On a rompu.
   – Comment peux-tu être aussi méchant à son sujet ? Il semblait être si adorable...
   – Imagine ! Il était sans répit le jour et ne pouvait pas dormir la nuit, toujours à s'efforcer de résoudre des problèmes de mathématiques. Quand il arrivait finalement à les finir, il n'était pas plus content : il se traitait d'idiot complet de ne pas avoir su résoudre ça plus vite, et jetait tous ses brouillons à la corbeille. Un jour, je ne pouvais plus supporter ça, et je lui ai dit d'arrêter les mathématiques. Tu sais ce qu'il m'a répondu ?
   – Non...
   – Il m'a dit qu'il trouvait ça jouissif ! ! ! »
3. « Comment ça se passe avec ton copain, ce très bel étudiant en mathématiques ?
   – Il n'est plus mon copain. Je l'ai pris en flagrant délit de tromperie.
   – Je ne peux pas croire qu'il t'ait trompée !
   – Pourtant, je lui ai téléphoné un soir, et il m'a dit qu'il était au lit en train de se débattre avec trois inconnues... »
4. Alors que la femme d'un professeur de mathématiques rentre à la maison après le travail, elle trouve une enveloppe sur la table du salon. Elle l'ouvre et y trouve une lettre (!) de son mari :

   Ma tendre femme,
   Nous sommes mariés depuis presque trente ans, et je t'aime toujours autant depuis le jour où je t'ai demandée en mariage. Tu dois cependant comprendre que tu as maintenant 54 ans, et n'es désormais plus capable de satisfaire quelques besoins que j'ai toujours. J'espère vraiment que tu ne vas pas être blessée en apprenant que, à l'heure où tu lis ceci, je suis dans une chambre d'hôtel avec une jeune élève de 18 ans de ma classe de calcul intégral. Je serai à la maison avant minuit.
   Ton mari, qui jamais ne cessera de t'aimer.

   Lorsque le professeur rentre de l'hôtel, peu avant minuit, il trouve également une enveloppe dans le salon. Il l'ouvre et lit :

   Mon mari chéri,
   Je me permets de te rappeler que toi aussi, tu as 54 ans et n'es plus en mesure de satisfaire certains besoins que j'ai toujours. Par conséquent, j'espère que tu ne vas pas être blessé en apprenant que, à l'heure où tu lis ceci, je suis dans une chambre d'hôtel avec le

beau maître nageur de 18 ans. Ta femme bien-aimée.
P.S : En tant que mathématicien, tu dois avoir conscience du fait que 18 entre dans 54 bien plus souvent que 54 entre dans 18. Alors, ne reste pas éveillé à m'attendre.

5.5 Philosophie (mathématique) de comptoir

Quelques-unes de ces réflexions sont fortement inspirées de [Apa]. Ce sont des phrases chics, d'une profondeur insondable, à sortir dans les grandes soirées, pour subtilement passer pour un érudit mathématique, quelqu'un qui a du recul, tout ça.

1. π est irrationnel, et vous voulez que le monde tourne rond ?
2. Classer les problèmes mathématiques en tant que linéaires et non-linéaires est comme classer les choses de l'Univers en tant que bananes et non-bananes.
3. Le propos de la théorie des catégories est de montrer que ce qui est trivial est trivialement trivial.
4. Le principe du tiers exclu est vrai ou n'est pas vrai *.
5. Il est souvent vérifié que les radicaux sont formés de l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche, n'est-ce pas ?
6. Pour un mathématicien, la vraie vie est un cas particulier.
7. J'ai cru entendre que les droites parallèles se rencontrent tout de même, mais sont très discrètes.
8. Dans les mathématiques modernes, l'algèbre a pris tant d'importance que les nombres se limiteront bientôt à un sens symbolique.
9. On utilise des symboles algébriques quand on ne sait pas de quoi on parle.
10. Il y a un avantage dans les avancées des mathématiques : on peut faire des erreurs avec plus d'exactitude.
11. Pour chaque problème, il existe une preuve d'une ligne... Si on commence suffisamment à gauche.
12. Un mathématicien est quelqu'un qui a un don pour les nombres, mais n'a pas la personnalité d'un comptable.
13. Les gens avaient-ils moins froid avant l'invention des nombres négatifs ?

*. Tout le monde est d'accord ?!

14. Si les définitions de « vrai » et de « faux » étaient échangées, alors cette phrase ne serait pas fausse...
15. L'ensemble des idiots est dense.
16. Là où le pessimiste voit un intervalle semi-fermé, l'optimiste voit un intervalle semi-ouvert !
17. Doit-on dire « Tous les nombres premiers sont impairs sauf un », ou « Tous les nombres premiers sont impairs sauf deux » ?
18. Si les droites parallèles se coupent à l'infini, il doit y avoir un désordre monstrueux à l'infini, avec toutes ces droites qui se rentrent dedans !
19. Pourquoi, quand le mathématicien Gerbert d'Aurillac est devenu le pape Sylvestre II, ne s'est-il pas plutôt nommé Pie 3,14 ?
20. Le mathématicien Denis Poisson est mort le 25 avril 1840. C'était un samedi. Ce n'était pas le jour de Poisson...
21. Au fond, Gérard Klein n'abusait-il pas un peu de la bouteille ?
22. Les spécialistes des fractales sont-ils nés dans un chou-fleur Romanesco ?

5.6 Le B. A. - BA de la recherche en mathématiques

5.6.1 Comment faire une preuve

Voici des astuces transmises de mathématiciens en mathématiciens pour éviter les foudres des correcteurs trop attentifs :

Preuve par l'exemple Vous démontrez le cas $n = 2$ et prétendez qu'il contient la plupart des idées de la preuve générale.

Preuve par généralisation « Ça marche pour 17, donc ça marche pour tout nombre réel. »

Preuve par intimidation « Trivial. »

Preuve par menace « Si cette preuve vous paraît suspecte, vous allez avoir du mal à valider ce cours... »

Preuve par interruptions Continuez d'interrompre votre audience jusqu'à ce qu'elle cesse de vous interroger.

Preuve par épuisement Un ou deux numéros de journal consacrés à la preuve sont utiles.

Preuve par omission « Les deux cent cinquante-trois autres cas sont analogues », « Le lecteur règlera facilement les détails. »

Preuve par le cours « Par théorèmes », « D'après le cours », « Par Lebesgue »

Preuve par obscurcissement Écrivez une suite longue et incohérente d'assertions syntaxiquement proches, toutes vraies et–ou sans signification.

Preuve par calcul « Cette preuve requérant du calcul, nous passons à la suite. »

Preuve par fin de l'exposé « Vue l'heure, je laisserai la preuve de ce théorème en exercice. »

Preuve par fin de l'exposé, deuxième méthode « Donc on n'a pas le temps mais EN GROS ON MAJORE LE RESTE ET PUIS VOILÀ » (écrit vite et mal).

Preuve par flemme En tendant la craie : « Quelqu'un veut venir la faire ? »

Preuve par citation souhaitée Citez, pour fonder vos assertions, la négation, la réciproque ou la généralisation d'un théorème de la littérature.

Preuve par financement Comment trois agences gouvernementales différentes pourraient-elles se tromper ?

Preuve par consensus « Tous d'accord ? »

Preuve par démocratie « Que ceux qui sont pour lèvent la main. » À utiliser seulement si la preuve par consensus est impossible.

Preuve par éminence « J'ai vu Stanley dans l'ascenseur et il a dit que c'était vrai. »

Preuve par cosmologie « La négation de l'assertion est absurde ou inimaginable. » Populaire pour prouver que Dieu existe (ou n'existe pas) ou que les ordinateurs ne peuvent pas penser.

Preuve par communication personnelle « Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers [Wiles, communication personnelle]. »

Preuve par référence à un laïus « Au congrès de Genève, Wiles a prouvé que le problème de la factorisation des nombres premiers était polynomial. »

Preuve par référence inaccessible Vous citez un corollaire simple d'un théorème démontré dans les *Proceedings* de la Société Philologique d'Islande (1883). Ça fonctionne encore mieux si l'article cité n'a jamais été traduit de l'islandais.

Preuve par référence fantôme Rien n'ayant un rapport même lointain avec le théorème cité n'apparaît dans la référence donnée. Elle se combine très bien avec la preuve par référence inaccessible.

Preuve par référence mutuelle Dans la référence A, le théorème 5 suit du théorème 3 de la référence B, prouvé par le corollaire 6.2 de la référence C, qui est une conséquence triviale du théorème 5 de la référence A.

Preuve par référence perdue « Je sais que j'ai vu la preuve quelque part, mais où ? »

Preuve par référence anticipée La référence est habituellement un de vos prochains articles, qui souvent se révèle moins prochain que prévu.

Preuve par importance De la proposition en question découle un grand nombre de corollaires utiles.

Preuve par insignifiance « Qui se soucie de ce résultat, de toute façon ? »

Preuve par désintérêt « Quelqu'un tient-il vraiment à voir cette preuve ? »

Preuve par entêtement « Quoi que vous puissiez dire, ce résultat est vrai. »

Preuve par probabilité « Une recherche longue et minutieuse n'a mis à jour aucun contre-exemple. »

Preuve par procrastination « La preuve étant longue et difficile, elle sera donnée dans l'appendice. »

Preuve par évitement C'est la limite de la preuve par procrastination pour T tendant vers l'infini.

Preuve par distraction Elle permet de rapidement changer un signe au tableau noir après avoir attiré l'attention de l'audience sur ce qui se passe au fond de la salle.

Preuve par définition « Nous définissons ceci comme vrai. »

Preuve par tautologie « Le théorème est vrai car le théorème est vrai. »

Preuve par pavage « Cette preuve est la même que la précédente. »

Preuve par science-fiction Le théorème étant manifestement faux pour les mathématiques actuelles, on construit un nouveau système logique dans lequel il est vrai.

Preuve par méta-preuve On donne une méthode pour construire la preuve souhaitée. La justesse de la méthode est prouvée par n'importe laquelle des techniques ici citées.

Preuve par dessin Une forme plus convaincante de la preuve par l'exemple. Elle se combine bien avec la preuve par omission.

Preuve par graphismes Une animation $3D$ multicolore convaincra n'importe qui que votre algorithme fonctionne. Il vaut la peine d'investir dans une bonne carte graphique.

Preuve par choix de variable intelligent « Soit A le nombre tel que cette preuve marche... »

Preuve par graphe adapté N'importe quelle courbe peut montrer le résultat désiré après transformation convenable des variables et de l'échelle des axes. C'est une preuve très commune dans le travail expérimental.

Preuve par craie invisible « Il n'y a maintenant plus qu'à intégrer sur le contour en bleu foncé. »

Preuve par assertion véhémente Il est utile d'avoir un peu d'autorité sur l'audience ; cette preuve est donc particulièrement efficace dans le cadre d'un cours.

Preuve par répétition *alias* preuve de Bellman : « Ce que je dis trois fois est vrai. »

Preuve par appel à l'intuition Plusieurs dessins en forme de nuages sont fortement recommandés.

Preuve par brassage d'air Agiter vigoureusement les bras fonctionnera très bien dans le cadre d'un cours, d'un séminaire ou d'un atelier.

Preuve par abêtissement Faites votre preuve avec de nombreux dessins très colorés et des flèches entre les dessins. La preuve paraît si enfantine que votre audience aura honte de vous questionner dessus.

Preuve par glissement sémantique Pour simplifier l'énoncé du résultat, on change quelques définitions standard mais un peu lourdes.

Preuve par notation encombrée La plus efficace utilise au moins quatre alphabets, des symboles spéciaux et la dernière version de $\LaTeX$.

Preuve par abstraction Une version de la preuve par intimidation. Vous utilisez des termes et théorèmes de mathématiques avancées, qui ont l'air très impressionnants mais dont le rapport avec le problème traité est plutôt anecdotique. Quelques tours d'algèbre par-ci, quelques groupes de cohomologie par-là et qui pourra dire si vous avez prouvé quoi que ce soit ?

Preuve par réduction au mauvais problème « Pour voir que ce problème de coloration d'un graphe en dimension infinie est décidable, on se ramène au problème de l'arrêt. »

Preuve par négation invalide « Y implique la négation de X, donc la négation de Y implique X. »

Preuve par récurrence inverse « Le théorème est vrai pour $n = 0$, et s'il est vrai pour $n + 1$ alors il est vrai pour n. »

Preuve par ordinateur « D'après l'ordinateur, ça doit être vrai. »

Preuve par énumération partielle « Il y a deux types de fonctions numériques. Les fonctions développables en série entière et les fonctions constantes. Les fonctions développables en série entière sont dérivables. Les fonctions constantes sont dérivables. Alors, toutes les fonctions numériques sont dérivables. »

Preuve par ouïe sélective Vous écrivez commodément une formule basée sur la réciprocité quadratique, bien qu'un étudiant vous ait signalé que 87 n'est pas un nombre premier.

Preuve par « C'est tellement beau que ça doit être vrai » Pratique pour montrer que les racines d'un polynôme à coefficients rationnels sont rationnelles. C'est assez proche de la preuve par bon sens ou par popularité.

Preuve par manque de place Accusez un manque de place dans le journal où vous avez publié.

Preuve par pitié Elle est souvent employée par un étudiant qui doit absolument valider un examen.

Preuve par révision sans fin Si on exhibe une erreur dans votre preuve longue et incohérente, renvoyez un manuscrit soi-disant correctif encore plus long et impénétrable.

Preuve par pause « ... et je donnerai la preuve du théorème après la pause... »
Environ un quart d'heure passe, et : « Bien ! Comme nous l'avons prouvé avant la pause, nous pouvons maintenant... »

Preuve par effacement Vous effacez le tableau immédiatement après avoir écrit.

Preuve par passion Vous faites la preuve avec beaucoup de passion, des yeux expressifs et des mouvements énergiques.

Preuve par lyrisme Si ça sonne juste, c'est juste (avec, en corollaire : tout ce qui rime est vrai).

Preuve par interdisciplinarité La forme particulière d'une équation, définition, ou technique utilisée dans une science est appliquée dans un domaine des mathématiques sans aucun rapport. C'est très bien utilisé par les très jeunes ingénieurs lors des cours de mathématiques fondamentales.

Preuve par ordre des mots Une phrase de la forme « Le X de Y » devient « Le Y de X » trois paragraphes plus tard.

Preuve par avant-goût « Votre question va au delà du cadre de ce cours. Cependant, au prochain semestre, si vous voulez explorer la question plus minutieusement... »

Preuve par erreurs compensatrices Il y a tant d'erreurs qu'elles s'annulent les unes les autres. Populaire chez les étudiants.

Preuve par quantité écrasante d'erreurs Il y a tant d'erreurs (des vraies, ou des fautes de frappe, d'étourderie...) que le lecteur n'arrive pas à dire si la conclusion est prouvée ou non, donc il est forcé d'accepter votre proposition.

5.6.2 Comment rédiger un article

Apprendre à faire une preuve est la base du métier de mathématicien. Pour aller plus loin, il faut connaître quelques « trucs » pour rédiger les articles. En effet, si vous écrivez clairement, vos lecteurs pourraient comprendre vos mathématiques, et en déduire qu'elles sont creuses. Pire encore, un rapporteur pourrait dénicher vos erreurs. Voici donc quelques astuces (qu'on doit à James Milne) pour éviter ces terribles éventualités.

1. N'expliquez jamais pourquoi vous avez besoin de toutes ces hypothèses bizarres, ni ce qu'elles signifient. Par exemple, commencez bêtement votre article avec deux pages de notations et conditions, sans expliquer qu'elles signifient que les variétés que vous considérez sont de dimension nulle. En fait, n'expliquez jamais ce que vous faites, ni pourquoi vous le faites. Le meilleur article possible est celui où le lecteur ne découvre pas ce que vous avez prouvé avant d'avoir lu tout l'article, s'il y arrive.
2. Faites référence à un autre article obscur pour toutes les définitions basiques (mais non standard) que vous utilisez, ou encore : ne les expliquez jamais. Ceci garantit presque à coup sûr que personne ne comprendra ce dont vous parlez (et la prochaine astuce sera d'autant plus facile à utiliser). En particulier, n'expliquez jamais vos conventions de signe... Si vous le faites, quelqu'un pourrait vous prouver que vos signes sont faux.
3. Quand vous avez du mal à prouver un théorème, utilisez la preuve par glissement sémantique *... On peut, dans cette optique, utiliser implicitement, dans la preuve, plus d'une définition pour un terme de l'article.
4. Utilisez c, a, b pour désigner, respectivement, des éléments des ensembles A, B, C.
5. Quand vous utilisez un résultat dans une preuve, n'établissez pas le résultat, et ne donnez pas de référence. En fait, essayez de dissimuler que vous utilisez un résultat trivial.

*. Ou une autre preuve abordée dans la section précédente, *ndla*.

6. Si, dans un moment de faiblesse, vous faites référence à un article ou un ouvrage pour un résultat, ne dites jamais où trouver le résultat dans l'article ou l'ouvrage en question. La tâche est alors d'autant plus difficile pour le lecteur qu'il est souvent presque impossible de prouver qu'un résultat n'est pas vraiment dans la source citée. Une autre possibilité, au lieu de faire référence au bon article pour un résultat, est de faire référence à un article plus ancien, qui contient seulement un résultat plus faible.
7. Dans les articles longs ou les livres plus spécialement, numérotez vos théorèmes, propositions, corollaires, définitions, remarques, *etc.*, séparément. De cette façon, aucun lecteur n'aura la patience de suivre vos références internes.
8. Écrivez $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$ quand vous pensez $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$, ou $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D$, *etc...* De même, écrivez « Si A, B, C » quand vous pensez « Si A, alors B et C », ou « Si A et B, alors C », *etc...* Bien sûr, emmêlez toujours vos quantificateurs.
9. Commencez et terminez les phrases avec des symboles dès que possible. Comme les points sont presque invisibles (et peuvent être pris pour des symboles mathématiques), la plupart des lecteurs ne remarqueront même pas que vous avez commencé une nouvelle phrase. Aussi, où c'est possible, mettez des exposants signalant des notes de pied de page aux symboles mathématiques plutôt qu'aux mots.
10. Écrivez « de sorte que » quand vous voulez dire « tel que » et « ce qui » quand vous voulez dire « qui ». Préférez les expressions ambigües aux non ambiguës, et les imprécises aux précises. C'est au lecteur de comprendre ce que vous voulez dire, ce n'est pas à vous de l'exprimer.
11. Si toutes ces approches échouent, écrivez en allemand.

Quelques notes, pour prouver par l'exemple que ces méthodes ont raison d'être :

> *« ... Elle écrit des choses techniquement profondes, dans un anglais limpide et sans jargon. Ça n'inspire pas la confiance. L'obscurité, en plus de cacher une pensée incomplète, suggère souvent que la pensée était tout à fait profonde. »*

J.K. Galbraith.

> *« Ceux qui se savent profonds s'efforcent d'être clairs. Ce qui veulent paraître profonds s'efforcent d'être obscurs. »*

Nietzsche.

> *« Les mathématiciens font toujours tout pour embrouiller leur public ; là où il n'y a pas d'incompréhension, il n'y a pas de prestige. Les mathématiques sont de la prestidigitation. »*

Carl Linderholm, *Mathematics Made Difficult*, page 10.

Au sujet du premier point :

> *« Un article récemment publié contient, presque au début, la phrase "L'objet de cet article est de prouver* blablabla *(quelque chose d'important)." On se rendait compte difficilement, et seulement vers la fin, que l'"objet' était inachevé. »*

Littlewood dans *Littlewood's Miscellany*, page 57.

Un subterfuge est d'utiliser des mots vagues. Par exemple, si vous dites que vous « attaquez le n-ième problème de Hilbert », personne ne saura si vous affirmez avoir résolu le n-ième problème de Hilbert ou non.

Au sujet du second point :

Ce stratagème a vu de nouvelles perspectives s'ouvrir à lui dans un article que j'ai récemment lu : tout au long de l'article, y compris dans la formulation de son théorème principal, l'auteur utilise un terme que même lui (après avoir été questionné) savait non défini.

Au sujet du quatrième point :

> *« On dit de Jordan que s'il avait quatre objets de même nature (comme a, b, c, d), ils apparaissaient comme a, M_3', ϵ_2, $\Pi''_{1,2}$. »*

Littlewood dans *Littlewood's miscellany*, page 60.

Au sujet du cinquième point :

> *« Il est bien connu que décrire un résultat célèbre*† *sans donner la preuve ou une référence est ni plaisant, ni un service rendu au lecteur. »*

J.W.P. Hirschfeld, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), page 331.

Au sujet du sixième point :

---

†. C'est-à-dire connu d'au moins une douzaine de personnes, et depuis plus de deux ans.

> « *Dans le livre de Krantz intitulé* A Primer of Mathematical Writing, *p. 76, il nous apprend ceci : "Ne donnez pas, dans votre texte, des références bibliographiques de la forme 'Regardez dans* Dunford et Schwartz*'*‡*. La seule façon correcte et possible de donner une référence est de citer le théorème spécifique ou la page spécifique." Dans le* Panorama, *Krantz a négligé son propre conseil : aucune de ses références bibliographiques ne donne un numéro de page. En particulier (page 18), après avoir noté que "l'analogue du théorème de Hahn-Banach pour opérateurs linéaires est faux", il conseille au lecteur avisé de regarder les détails dans* Dunford et Schwartz *! Je n'ai jamais été capable de trouver où le problème est soulevé dans Dunford et Schwartz, si c'est vraiment le cas...* »

Stacy G. Langton dans *The MAA Online book review column.*

Au sujet du septième point :

> « *Une critique concrète s'applique aussi bien à ce livre qu'à une grande partie des productions mathématiques contemporaines : les différentes propositions sont appelées par des noms différents, à savoir lemme, théorème, proposition, corollaire ; les trois premiers sont numérotés indépendamment les uns des autres, alors que les numéros associés aux corollaires sont des fonctions de plusieurs variables. En plus, les formules numérotées sont numérotées à part. L'effort imposé au lecteur par cet ordre partiel est évident, mais apparemment les lecteurs se vengent quand ils deviennent auteurs à leur tour.* »

De I. Barsotti, MR 23# A2419.

Au sujet du huitième point :

Alors qu'il témoignait devant le Comité des Appropriations de la Chambre des Représentants, le président de la société américaine de mathématiques (AMS,) Felix Browder, a dit : « Ça pose de gros problèmes mathématiques, puisque *tous les ensembles de données n'ont pas des caractéristiques similaires...* »

Le syndrome de négation des quantificateurs a encore frappé... Comparez

> *Les garçons n'aiment pas tous les mathématiques.*

avec

‡. Ça fait référence à une œuvre en trois volumes, qui totalise plus de deux mille cinq cents pages.

Tous les garçons n'aiment pas les mathématiques.

Au sujet du dixième point :

> *« ... Un emploi négligent de « qui » et « ce qui » rend floue la distinction entre les hypothèses et les remarques, l'usage de propositions participiales mène à des quantificateurs incompréhensibles, et l'usage désordonné des négations et quantificateurs peut laisser le lecteur dans une confusion totale. »*

Anthony Knapp, Notices AMS 47, numéro 11 (Décembre 2000), page 1356.

Pour un exemple d'écriture imprécise, regardez votre formulaire pour les impôts, qui dit « combinez » les lignes x et y quand il faut en fait les additionner.

Bref. Comparez

> *On appelle graphe r-régulier un graphe où r arêtes e vérifient* $\text{origine}(e) = v$ *pour tous les sommets v.*

(tiré d'une conférence authentique) avec

> *On appelle graphe r-régulier un graphe où chaque sommet est l'origine d'exactement r arêtes.*

Pour plus d'astuces, voir [Her]. Je ne peux pas en mettre plus, sinon je vais recevoir des menaces de la part de nombreux mathématiciens dont je dévoile tous les secrets de profession.

5.6.3 Un guide sur les titres des livres de mathématiques

Enfin, cette section comblera tout ce qu'il vous manque pour tout savoir de la profession de mathématicien. Elle vous guidera si vous devez un jour mettre votre nez dans des livres de mathématiques, dans l'espoir de combler des lacunes et éclairer votre perception des mathématiques – pauvres naïfs ! Le titre est souvent trompeur, et beaucoup ont dû en faire les frais...

Remplacez « (SUJET) » par le sujet de votre choix. Évidemment, la littérature mathématique est souvent anglophone, mais j'ai traduit les titres pour un public plus étendu. Saurez-vous retrouver les équivalents anglophones ?

(SUJET) pour Scientifiques et Ingénieurs

- Ce que penserait votre maman : Ah ! Pour des *scientifiques* et des *ingénieurs*, ça c'est du sérieux ! Ce doit être très difficile...
- La vérité : Les définitions sont énoncées avec les mains. Il n'y a pas la moindre preuve. Certains théorèmes sont en fait faux en toute généralité. C'est de la lecture légère.

(SUJET)

- Ce que penserait votre maman : Difficile à dire, mais il y a de grandes chances que cet ouvrage soit de difficulté moyenne, voire élevée.
- La vérité : Difficile à dire, mais il y a de grandes chances que cet ouvrage soit de difficulté moyenne, voire basse.

Sujets de (SUJET)

- Ce que penserait votre maman : De niveau moyen à facile. Ce doit être de la lecture pour passer le temps, sur un hamac.
- La vérité : Difficile. Probablement de niveau master. Il y a certainement des douzaines de questions ouvertes mêlées aux exercices.

Introduction à (SUJET)

- Ce que penserait votre maman : Introduction. Destiné aux jeunes universitaires, ou peut-être aux meilleurs élèves de lycée. Facile à l'ennui.
- La vérité : Difficile à dire, mais il y a de grandes chances que cet ouvrage vous fasse perdre tous vos cheveux, et soit si difficile que vous en agoniseriez. Une bonne méthode empirique : si la section des « préliminaires » va de la théorie naïve des ensembles à l'analyse fonctionnelle en une seule page, ça vous dépasse certainement.

Notes en (SUJET)

- Ce que penserait votre maman : Pour une lecture cursive et simple. Pas de démonstrations. Quelques définitions esquissées avec les mains. Très facile. Une bonne lecture de dernière minute avant les examens.
- La vérité : Si vous décryptez ce tome impénétrable, vous méritez un titre de docteur honoraire en mathématiques. Il y a de grands risques que la moitié de l'ouvrage soit en russe ou hongrois. Pour peu que vous fassiez la différence avec le reste !

Cours de licence en mathématiques : (SUJET)

- Ce que penserait votre maman : Oooooh, un joli petit livre jaune avec des exercices à faire à la maison, pour s'entrainer dans le cadre d'un cours !
- La vérité : Hum, on peut enlever le « licence », la plupart de ces cours sont aussi difficiles que les cours de master en mathématiques, et les chances qu'un de ces livres soit utilisé dans votre cours de licence moyen sont les mêmes que les chances que votre maman comprenne la première page.

Quelques cas particuliers méritent une attention à part :

Calcul avancé Un choix aléatoire. Ça peut être n'importe quoi. Il paraît qu'il existe un livre appelé *Advanced Calculus* et qui s'avère être un livre de cuisine afghane[§]. Du coup, ces livres peuvent faire l'objet de paris, sur le vrai thème du livre.

Algèbre moderne Un choix terriblement aléatoire. Il y a cinquante pourcent de chance que ce soit un ouvrage pour la classe de cinquième qui enseigne la résolution de $4x+7 = 2$, et cinquante pourcent de chance qu'il soit question d'algèbres de Lie dès les quinze premières pages. Certains auteurs sont encore plus audacieux ; je pense par exemple à Jacobson qui commence son cours *Basic Algebra I* par des « rappels » de théorie des catégories.

(SUJET) pour le mathématicien en exercice Contrairement à ce qu'on vous laisse présager, ce livre n'est pas adressé à qui que ce soit d'autre qu'un ermite, prêt à passer les vingt prochaines années de sa vie à le lire.

Théorie du chaos Ce livre est très rigoureux jusqu'aux exposants de Lyapunov. Puis les quatre derniers chapitres sont des pleurnicheries incessantes au sujet de la mésentente universelle quant à la bonne définition du chaos, et même s'il pouvait en soumettre une, elle irait au delà du cadre de ce livre... Oooh, attendez, de belles fractales ! Vous trouverez aussi quelques allusions à la dynamique de la météo, sans le moindre détail concret. C'est une bonne lecture si votre seul but est d'impressionner les profanes.

§. Je le cherche ! Si vous le connaissez, vous savez où me contacter.

Compte-rendu de séminaires Si les équations sont écrites à la main, perdez tout espoir de comprendre. On les trouve souvent dans les librairies de livres d'occasion. Un exemple, dans le genre, est *Groupes de Lorentz, Volume VII a* (ne me demandez pas, pour les six premiers volumes), *Lectures in Theoretical Physics, Univ. Colorado, 1964*. Il semble qu'Einstein soit sorti de cette conférence, parce qu'il en avait plein le dos. Si vous l'avez dans votre bibliothèque, il n'est pas impossible que votre maman s'en vante auprès de ses voisins. C'est super sur l'étagère, tant que personne de savant ne vous interroge à ce sujet.

Algèbres topologiques N'y pensez même pas. Balancez par terre des symboles mathématiques, réarrangez-les sur une ligne. L'équation qui en résulte sera certainement plus compréhensible que n'importe quoi dans l'ouvrage susnommé.

Bien sûr, on peut reconnaître ci-dessus les *Un premier cours en (SUJET)* et *(SUJET) élémentaire*, et bien d'autres, voire des « combos » : *Introduction à la topologie algébrique élémentaire*, *Un premier cours en algèbre moderne*, *etc...*

5.7 « Trivial. »

Trivial.

John Von Neumann.

À l'évidence, l'histoire entre les mathématiciens et la trivialité est riche. Il est nécessaire et suffisant, pour s'en rendre compte, de présenter ces trois exemples :

> *C'est une histoire dont l'authenticité se discute : un mathématicien montrait son dernier théorème à un autre. Le collègue pointait le tableau, en demandant comment le théorème se déduisait du passage d'une certaine étape à une autre. Le premier mathématicien dit que c'est trivial. Le second se dirigea alors vers un autre tableau, passa une heure à le remplir de calculs complexes, puis revint pour dire : « Vous avez raison, c'est trivial ».*

Patrick Lenon.

> *Ça vaut la peine de rappeler l'histoire du mathématicien célèbre G. H. Hardy qui, dans une conférence, disait à propos*

> *d'un détail d'une preuve : « C'est trivial. »*
> *Après une pause, il reprit : « Hum, est-ce vraiment trivial ? »*
> *Après une autre pause, il quitta la salle pour reconsidérer la question, pour finalement revenir vingt minutes avec le verdict : « Oui, j'avais vu juste, c'est trivial. »*

J.R. Partington.

> *Le mathématicien le plus célèbre du monde, Humpty Dumpty, alors qu'il parlait à des collègues mathématiciens de partout, disait : « Quand j'utilise un mot, il veut dire précisément le sens que je lui donne, ni plus ni moins ». Les mathématiciens disent toujours ce qu'ils veulent dire, même s'ils ne veulent pas toujours dire ce qu'ils disent. Trivialement.*

Dirk Laurie.

Les mathématiciens ont répondu avec empressement (et répétitivement) à la problématique : « Pourquoi seuls les mathématiciens se demandent "Pourquoi est-ce trivial ?" ».

Plus de 80 pourcent des réponses sont : « Parce que. » Quand c'est une autre réponse, c'est en général « Pourquoi pas ? »
Quelques réponses sortent du lot, pour des raisons variées :

> *Parce que les mathématiques sont le seul domaine dans lequel les pratiquants sont assez intelligents pour réaliser que tout individu en ce monde est, fondamentalement, un idiot, et qu'il a par conséquent besoin d'un peu de temps pour saisir parfaitement la trivialité.*

J.C. Jamison.

> *L'assertion est manifestement fausse. Pourquoi est-ce trivial ?*

B. Kallick.

> *Il manque une virgule. La question aurait dû être : « Pourquoi, est-ce trivial ? » C'est plus en adéquation avec l'image d'un professeur de mathématiques.*

Felix Finch.

> *Parce que les mathématiques sont le seul sujet où tout a le « droit » d'être trivial. Dans une autre science, vous devez trouver un financement, mener une expérience, écrire un article de recherche atrocement ambigu, et attendre qu'il soit revu par des pairs, publié et cité dans au moins trois ouvrages de la littérature.* Alors, *c'est trivial.*

David Lantz.

> *Ça dépend de votre définition de « est ».*

T. Rose.

> *Je pourrais vous dire pourquoi,*
> *et vous en tressailliriez.*
> *Je pourrais vous dire pourquoi,*
> *et vous en frissonneriez.*
> *« S'il vous plaît, dites-moi pourquoi,*
> *vous le feriez, vous le feriez ? »*
> *Je pourrais vous dire pourquoi,*
> *mais je dois vous supplicier.*

Ray Orrange.

5.8 10 raisons de...

5.8.1 $\ln(e^{10})$ raisons de préférer e à π

1. e est plus facile à épeler que π.
2. $\pi \simeq 3,14$, alors que $e \simeq 2,718281828459045$
3. Le caractère pour e peut être trouvé sur un clavier, mais pour π certainement pas.
4. Tout le monde se bat pour cette partie de *pie* (ne marche qu'en anglais celle-là !)...
5. $\ln(\pi)$ est un nombre absolument horrible, mais $\ln(e) = 1$.
6. e est utilisé en calcul différentiel et intégral, alors que π est utilisé pour de la géométrie « bon enfant ».
7. e est la voyelle la plus présente dans « Roue de la fortune ».
8. e veut dire « Nombre d'Euler », π ne veut rien dire.
9. On n'a pas à avoir la moindre notion de grec pour savoir utiliser e.
10. On ne peut pas confondre e avec de la bouffe (pareil, en anglais...).

5.8.2 $E(\pi^{E(\pi)}/E(\pi))$ raisons de préférer π à e

1. Il y a aucun challenge à épeler e, au contraire de π.

2. $e \simeq 2,718281828459045$, qui peut facilement être retenu jusqu'à sa milliardième décimale, alors que π nécessite des « astuces » pour être mémorisé *.
3. Le caractère e est tellement banal qu'il peut être trouvé sur n'importe quel clavier. Alors que π est spécial (on doit le chercher dans « Caractères spéciaux » dans les logiciels de traitement de texte.)
4. « pi » est le plus gros morceau de *pie.*
5. e a une définition facile à l'aide des série infinies. La définition de π en tant que limite d'une série infinie est bien plus complexe.
6. La signification de e est immédiate à comprendre, même si on l'apprend tardivement, dans les cours d'introduction au calcul différentiel et intégral. Mais π, même cinq ou six ans après l'avoir découvert, c'est toujours difficile de savoir ce que c'est vraiment.
7. Les gens confondent souvent le nombre d'Euler e avec la constante d'Euler γ. Il n'y a aucune confusion avec le seul et unique π.
8. e est nommé d'après le e du nom d'une personne, mais π se suffit à lui-même.
9. π est plus court et facile à dire que « nombre d'Euler ».
10. Pour lire π, vous n'avez pas besoin de savoir que le nom d'Euler se prononce en fait « Oiler ».

5.8.3 10 excuses pour ne pas faire ses devoirs de maths

1. J'ai accidentellement divisé par zéro et mes copies ont pris feu.
2. Je pouvais seulement m'approcher arbitrairement près de ma copie. Je ne pouvais pas l'atteindre.
3. J'avais une preuve, mais il n'y avait pas assez de place pour l'écrire dans la marge.
4. J'étais en train de regarder *The World Series* et m'étais mis en tête de prouver qu'elle convergeait.
5. J'ai une calculatrice à énergie solaire et le ciel était nuageux.
6. J'avais rangé ma copie dans mon sac mais un hyperchien de dimension 4 l'a attrapé et l'a mangé.

*. Par exemple : « Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages ! Immortel Archimède, artiste ingénieux, qui de ton jugement peut priser la valeur ? Pour moi ton problème eut de sérieux avantages... » Il existe bien plus long, et en plusieurs langues ! Il y en a aussi pour e, mais chuuuut !

7. Je ne pouvais pas trouver si j'étais le carré de -1 ou si j'étais la racine carrée de -1.
8. J'ai pris le temps de casser la croûte avec un beignet et une tasse de café, et j'ai passé le reste de la nuit à savoir lequel plonger dans l'autre.
9. J'aurais juré avoir mis mon devoir dans une bouteille de Klein, mais ce matin je ne pouvais pas la trouver.
10. Anniversaire d'Isaac Newton.

5.8.4 Pourquoi les statisticiens sont incompris

Un statisticien est un professionnel qui collecte diligemment des faits et des données, pour ensuite créer, avec attention, toutes sortes de confusions à leurs sujets.

Inconnu.

1. Ils ne parlent qu'en grec.
2. Ils ont, en général, des noms longs et menaçants, tels que Bonferonni, Chebychev, Schatzoff, Hotelling, et Godambe. Pourquoi n'y a-t-il pas de noms de statisticiens tels que Dupont ou Martin ?
3. Ils adorent les serpents, et possèdent comme animal de compagnie un grand serpent d'Amérique du sud nommé ANOCOVA.
4. Pour des raisons perverses, plutôt que de regarder une matrice droit dans les yeux, ils préfèrent l'inverser.
5. Ils sont fréquemment vus au fond de leurs jardins, lors des nuits claires, contemplant le ciel à travers de puissants télescopes amateurs, à la recherche d'étoiles lointaines dans une constellation nommée ANOVA.
6. Ils sont sûrs à 99% que le sommeil ne peut pas être induit, lors d'une introduction aux statistiques, par un cours magistral sur les scores standards.
7. Leur idée d'un délire malsain et exotique est de se lancer dans trois déviations standard au dessus de la moyenne d'une distribution normale.
8. Ils montrent beaucoup de tares psychologiques, parce que dans leur jeunesse de statisticien, beaucoup de leurs hypothèses statistiques ont été rejetées.
9. Ils expriment une frayeur profondément ancrée que la société puisse construire des tests qui permettraient à tout le monde d'avoir le

même score. Sans variations ou différences individuelles, le domaine des statistiques n'a plus vraiment raison d'être, et un statisticien devient comme une pupille de l'État sans-le-sou.

5.8.5 10 mensonges racontés par les doctorants

1. Je me fiche complètement de savoir que mon colocataire gagne 80 000$ par an à Wall Street.
2. Ce serait un honneur de pouvoir lire votre livre/chapitre/article !
3. Mon travail a beaucoup d'importance en pratique.
4. Je n'aurai jamais de rencard avec un élève de licence.
5. Votre dernier article m'a beaucoup inspiré.
6. J'ai refusé beaucoup d'emplois fantastiques pour venir ici.
7. Plus qu'un livre à lire, et je commencerai à écrire.
8. Le département me donne beaucoup de support.
9. Mes perspectives de carrière sont très optimistes.
10. Non, vraiment, je ne serai plus ici dans seulement deux ans.

CHAPITRE 6

MYSTIFICATION NUMÉRIQUE

Dans l'esprit de la première curiosité de ce recueil, il existe des calculs faux où on simplifie des chiffres, qui mènent pourtant à des résultats justes (je pense par exemple à $64/16 = 4/1$, $26/65 = 2/5$, ou $98/49 = 8/4 = 2$). On peut dire des choses intéressantes sur ces calculs ; on montre par exemple qu'en base 4, ces artifices ne marchent que pour $32/13 = 2/1$. Mais ce n'est pas l'objet de ce chapitre. Je présente ici un extrait de [Mag], qui traite de l'erreur « 7 fois 13 égale 28 ».

Il y a au moins deux manières de faire des opérations : juste ou fausse. Mais si une opération est fausse, on peut souvent s'en rendre compte en faisant les calculs « à l'envers » ; par exemple si $7 \times 13 = 28$, alors on doit aussi avoir $13 = 28/7$, et si l'une des deux opérations est fausse, l'autre l'est aussi. La situation suivante est un classique de la mystification numérique : on y « montre » la justesse de ces deux opérations (et d'autres, toutes aussi farfelues). N'hésitez pas à l'exposer à votre professeur de mathématiques : ambiance garantie.

Le chef d'un relais de poste demande à son palefrenier de répartir également 28 chevaux dans un convoi de 7 wagons pour leur visite chez le vétérinaire. Sûr de lui et voulant montrer ses connaissances mathématiques, le chef lui explique que la division est la bonne méthode : il la pose en disant « 7 va une fois dans 8, je mets le 1 au quotient et il reste 1, que je pose sous le 8. J'abaisse le 2 : 21. 7 va 3 fois dans 21 ; il faut donc mettre 13 chevaux dans le wagon. »

$$\boxed{\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 7 & \\ \cline{3-4} 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}}$$

Le palefrenier regarde successivement le troupeau et le convoi. Ayant le sens pratique, il doute du résultat obtenu par son chef. Il ne sait pas faire les divisions mais peut vérifier grâce à une addition : il la pose en disant « 3 plus 3, 6, plus 3, 9, plus 3, 12, plus 3, ..., 21, plus 1, 22, plus

1, 23, plus 1, ..., 28. C'est bon. Le chef avait raison : treize fois sept font bien 28. »

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 3 \\ + & 1 & 3 \\ + & 1 & 3 \\ + & 1 & 3 \\ + & 1 & 3 \\ + & 1 & 3 \\ + & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 8 \end{array}$$

Pour plus de sûreté, il décide de vérifier directement en faisant la multiplication, et il la pose, en disant « Sept fois trois : 21. Sept fois un : 7.

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 3 \\ \times & & 7 \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 7 \\ \hline & 2 & 8 \end{array}$$

Ça fait bien 28 (et la preuve par neuf marche, bien sûr !). »

Il s'empresse alors de remplir le premier wagon avec 13 chevaux, puis le deuxième. Il ne reste alors que 2 chevaux pour le reste des wagons. Il y avait bien une erreur quelque part !

Heureusement le palefrenier a l'esprit pratique. Il décide de se passer des opérations. Après avoir récupéré les 28 chevaux, il en fait rentrer 1 dans chaque wagon, puis il recommence jusqu'à ce qu'il ne lui reste aucun cheval. Il ne sait pas combien il y en a par wagon mais ça lui est égal... Arrive alors le chef qui veut vérifier si le palefrenier a bien exécuté ses ordres. Hélas pour lui, les portes sont déjà fermées, mais il peut voir le bas des chevaux grâce à une petite grille placée dans la partie inférieure de chaque wagon. Il compte alors le nombre de pattes : il y en a 16 par wagon et il raisonne ainsi : « Chaque cheval a 4 pattes et je vois 16 pattes, il y a donc "16 divisé par 4" chevaux par wagon, voyons si cela fait bien 13 : 4 va une fois dans 6, je mets le 1 au quotient et il reste 2 que je pose sous le 6. J'abaisse le 1 : 12. 4 va 3 fois dans 12.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 4 & \\ \cline{3-4} 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Il y a donc bien 13 chevaux par wagon. Le palefrenier a bien exécuté mes ordres, le convoi peut partir. »

Imaginez une situation analogue dans laquelle on peut ainsi se tromper en cascade. Par exemple, le même type de faux calculs « montrent » que $17 \times 6 = 48$.

CHAPITRE 7 PETITES HISTOIRES, ANECDOTES

Mon bon ami, toute théorie est sèche et l'arbre précieux de la vie est fleuri.

Méphistophélès, *Faust.*

7.1 Anecdotes sur les mathématiciens « *people* »

L'histoire concernant Niels Bohr est malheureusement, contrairement à ce que pense l'usage, fausse (elle a été écrite dans *Reader's Digest* en 1958), mais les autres sont a priori authentiques, d'où leur présence ici plutôt que dans la troisième classe d'équivalence de blagues mathématiques. On ne peut jamais en être sûr, c'est comme la classique histoire autour d'Euler et Diderot (« $\exp(i\pi) + 1 = 0$, donc Dieu existe. Répondez ! ») qui est, pour l'entendement général, vraie, alors qu'il n'en est rien. Pour la beauté de la situation, je préfère penser qu'elles sont vraies ! En tout cas, on peut parfois trouver des sources : [Kan], dont j'ai repris quelques anecdotes, [Pri], et bien d'autres.

Richard Bellman

C'est Knuth qui reporte cette anecdote : le livre *Dynamic Programming* de Richard Bellman est un ouvrage pionnier important, dans lequel des problèmes sont regroupés en fins de chapitre sous le titre *Exercises and Research Problems*, dans lesquels des questions triviales se mêlent à des problèmes profonds, voire insolubles. On laisse dire qu'un jour, on a demandé à Bellman comment différencier les exercices des problèmes de recherche, ce à quoi il a répondu :
« Si vous arrivez à résoudre la question, c'est un exercice ; sinon, c'est un problème de recherche. »

Valentin Boussinesq

Le mathématicien-mécanicien Valentin Boussinesq, grand scientifique, perdit autrefois sa femme. L'enterrement, qui avait commencé par une journée très dégagée, se termina par une pluie battante. Tout le monde fut trempé. Il se remaria et fut veuf à nouveau. Le même phénomène météorologique se reproduisit lors des obsèques. Lorsque sa troisième épouse mourut également, les funérailles se déroulèrent sous un ciel qui resta au beau fixe, mais tous les universitaires qui y assistaient avaient emporté un parapluie. Émile Borel se tourna vers György Pólya et lui dit :

« Écoutez, Pólya, n'est ce pas lamentable ? Nous sommes des universitaires, nous ne sommes pas superstitieux, je suis probabiliste, je sais pertinemment qu'il ne peut exister aucun rapport entre la pluie et l'enterrement de M^me^ Boussinesq. Et cependant j'ai apporté mon parapluie.

– Pas du tout, répondit Pólya, nous travaillons sur des faits scientifiques. Or c'est un fait scientifique avéré qu'il pleut souvent à l'enterrement de la femme de Boussinesq. »

George Dantzig

George Dantzig lui-même a confirmé l'authenticité de cette histoire, qui a certes été reprise et romancée plusieurs fois : lors de sa première année à Berkeley, il est arrivé en retard à l'un des cours de Jerzy Neyman. Il y avait au tableau deux problèmes qui, pensait Dantzig, étaient des devoirs. Il les a recopiés, et quelques jours plus tard il s'excusa auprès de Neyman pour avoir pris tant de temps à finir ces exercices : ils semblaient plus difficiles que d'habitude. Bienveillant, l'enseignant a accepté de les prendre, malgré tout.

Six semaines plus tard, un dimanche matin vers huit heures, Neyman frappa à la porte de Dantzig. Il avait les exercices de Dantzig en main, et excité, annonça : « Je viens d'écrire une introduction à l'un de vos papiers. Lisez-les, comme ça je pourrai les envoyer pour une publication. » En fait, les exercices au tableau n'étaient pas des devoirs, mais deux problèmes ouverts célèbres en statistiques. Ceci peut justifier la difficulté qu'il a eue à les faire...

Kurt Gödel

– En 1940, fuyant l'Allemagne nazie, Gödel arriva en Amérique et s'installa à Princeton. Acquérir la nationalité américaine ne devait présenter aucune difficulté ; un petit examen oral dirigé par un juge précédait la naturalisation définitive. Gödel commença donc à étudier la constitution des États-Unis. Rapidement, il remarqua que, premièrement, la constitution était truffée de contradictions logiques, et que, deuxièmement, rien n'empêchait, en toute légalité, l'avènement d'une dictature. Il fit part de ses découvertes à son ami Oskar Morgenstein qui lui confia de ne rien en dire à son examen de citoyenneté.

Le 2 avril 1948, Gödel se présenta au bureau gouvernemental de Trenton accompagné de ses témoins Einstein et Morgenstein. Sur le chemin de Trenton, Einstein n'eut cesse de raconter des anecdotes pour éloigner de l'esprit de Gödel tout problème logique concernant la constitution.

« Jusqu'ici, citoyen allemand, vous... », commença le représentant officiel. Gödel bondit et rectifia immédiatement : « J'étais autrichien, non allemand.

– Quoi qu'il en soit, poursuivit le représentant, c'était sous une dictature diabolique. Mais, fort opportunément, ceci est impossible en Amérique.
– Tout au contraire, s'écria Gödel. Je suis à même de... »

Sa diatribe s'interrompit brusquement à la suite d'un prodigieux coup de coude d'Einstein. Dès ce moment, les deux témoins purent mettre sous l'entonnoir la vindicte gödelienne et le plus grand logicien du monde devint citoyen américain.

- Un jour, Hermann Weyl, l'homme qui qualifiait le théorème d'incomplétude de Gödel de « débacle gödelienne », invita à l'institut de Princeton le mathématicien Paul Lorenzen. Ce dernier avait écrit différents articles où il essayait de colmater les brèches ouvertes par la bombe de Gödel. Ce qui rassérénait Weyl, écrivant à Lorenzen que « les portes du paradis s'ouvrent à nouveau ».
  Malheureusement, Weyl mourut avant que Lorenzen n'arrive à Princeton. Ce dernier fut alors reçu par Gödel, dont les premiers mots furent : « Je connais vos travaux, je les considère comme totalement inoffensifs. » Lorenzen, complètement mortifié, renonça à tout assaut contre la forteresse gödelienne.

Jacques Hadamard

Lors du congrès de Bologne, les dernières conférences devaient avoir lieu à Florence. Un train spécial était prévu pour conduire les congressistes. György Pólya et Jacques Hadamard se trouvaient dans un compartiment extrêmement bruyant. Fatigué et désirant faire une sieste, Hadamard se tourna vers les passagers et leur proposa un puzzle particulièrement difficile.

Chacun commença à chercher, le silence se fit et Hadamard put dormir.

G. H. Hardy et John Littlewood

Il y a beaucoup d'anecdotes sur ce duo de mathématiciens fous. En voici deux parmi bien d'autres :

- Lisant des épreuves d'un article de Hardy sur Ramanujan, Littlewood tomba sur la phrase : « Comme quelqu'un l'a déjà dit, chacun des nombres entiers était un de ses amis (en parlant de Ramanujan). »
  « Je me demande qui a bien pu dire ça ; j'aurais aimé en être l'auteur. » remarqua Littlewood à haute voix. Dans les épreuves suivantes du même article, il put lire la modification : « C'est Littlewood qui a dit que... »
  En fait, Hardy avait pris en compte cette remarque proférée sans malice en gardant un visage impassible. Plus tard, Littlewood accusa Hardy d'utiliser des procédés dignes d'un jésuite, ce à quoi Hardy répliqua : « Si je comprends bien, je devrais me comporter comme un béni-oui-oui, et dire "c'est sacrément bien" à toutes vos remarques.
  – Oui. »
- Une bonne façon de connaître le mathématicien Hardy, au delà de ses contributions mathématiques et de son œuvre *A Mathematician's Apology*, est de considérer la liste des résolutions pour la nouvelle année qu'il faisait parvenir à plusieurs de ses amis et collègues :

  1. Démontrer l'hypothèse de Riemann.
  2. Obtenir un score de 211 (le premier nombre premier après la double centaine) à la quatrième manche du dernier *test match* du championnat.
  3. Trouver une preuve de la non existence de Dieu capable de convaincre le grand public.
  4. Être le premier à arriver au sommet du mont Everest.
  5. Être proclamé premier président d'URSS, de Grande-Bretagne et d'Allemagne.
  6. Assassiner Mussolini.

  Comme le laisse entendre sa troisième résolution, il était férocement opposé à l'idée de Dieu et aux atours de la religion. Toute

sa vie durant, il livrerait bataille à Dieu, s'efforçant de démontrer son impossibilité. Mais son obsession pour ce combat l'a conduit, paradoxalement, à donner corps au personnage dont il voulait nier l'existence avec tant de véhémence. Ainsi, même quand le ciel était sans nuage, il allait à ses matchs de cricket avec plusieurs pulls, un parapluie et une liasse de documents sous le bras : il tentait de pousser Dieu à croire qu'en fait, il espérait qu'il allait pleuvoir pour pouvoir rattraper du travail en retard. En tant que pire ennemi, Dieu lui déroberait ce plaisir et lui enverrait du soleil.
Cette obstination a donné lieu à une anecdote désormais célèbre : un jour, alors que Hardy venait de repartir pour la rentrée universitaire, Bohr reçut une carte postale de lui : « Ai preuve de l'hypothèse de Riemann. Carte trop petite pour démonstration. » Bohr comprit plus tard la raison de cette carte : quand Hardy avait embarqué sur le bateau qui devait effectuer la traversée du Danemark à l'Angleterre, la mer était exceptionnellement agitée. Hardy commença alors à craindre pour sa vie, et sa méthode de survie était d'annoncer à Bohr cette découverte fictive : Hardy savait que Dieu n'allait pas le laisser mourir et faire croire à la communauté mathématique qu'il avait démontré un résultat si important en théorie des nombres.

David Hilbert

- Au début de l'un de ses cours, David Hilbert demanda à son assistant : « Je ne vois plus M. X depuis quelques semaines. Que lui est-il arrivé ?
  - Il a renoncé aux mathématiques pour poursuivre des études de poésie, répondit l'assistance, gêné.
  - C'est très bien, dit Hilbert en esquissant un sourire. J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien. »
- À la fin d'une de ses conférences, Hilbert se tourna vers le public et s'enquit de savoir s'il y avait des questions. Un doigt timide se leva : « Je n'ai pas très bien compris l'avant-dernier théorème.
  - Ce n'est pas une question, répliqua Hilbert sèchement. »
- Hilbert avait un étudiant qui vint un jour lui apporter un papier où il se proposait de démontrer l'hypothèse de Riemann. Hilbert étudia soigneusement la démonstration et fut véritablement impressionné par la profondeur de l'argument ; malheureusement, il trouva une erreur qu'il ne parvint pas à éliminer. L'année suivante l'étudiant mourut. Hilbert demande aux parents éplorés l'autori-

sation de faire une oraison funèbre.
Lors de la cérémonie, alors que la famille et les amis pleuraient autour du tombeau, Hilbert s'avança sous la pluie. Il commença par dire quelle tragédie c'était de perdre un jeune si doué avant qu'il n'ait eu l'occasion de montrer tout ce qu'il était capable d'accomplir. Mais, poursuivit-il, malgré l'erreur contenue dans la démonstration de l'hypothèse de Riemann, il était encore possible qu'un jour une solution du célèbre problème soit découverte en suivant les grandes lignes que le défunt avait tracées.
« En fait, » continua-t-il avec enthousiasme, debout sous la pluie, « considérons une fonction de la variable complexe... »

Ernst Eduard Kummer

Ernst Eduard Kummer (1810-1893), un algébriste allemand, était plutôt mauvais en arithmétique. Chaque fois qu'il avait l'occasion de faire de l'arithmétique basique en classe, ses étudiants devaient l'aider. Un jour, il devait trouver 7×9. Kummer se dit alors : « Hum... Le produit ne peut pas donner 61, parce que 61 est premier ; ça ne peut pas être 65, parce que 65 est un multiple de 5, 67 est premier, 69 est trop gros... Il ne reste que 63. »

Lev Landau

Cette anecdote est attribuée à Landau (le physicien russe Lev, pas le mathématicien de Göttingen Edmund). Le groupe de travail de Landau discutait au sujet d'une nouvelle théorie brillante, et un des collègues junior de Landau prétendait qu'il l'avait découverte indépendamment quelques années avant, mais n'a pas pris la peine de la publier.
« Je ne répéterais pas cette revendication si j'étais vous, répondit Landau : il n'y a rien de répréhensible à ne pas trouver une solution à un problème particulier. En revanche, si quelqu'un la trouve et ne la publie pas, il fait preuve d'un mauvais jugement, et d'une incapacité à comprendre ce qui est important dans la physique contemporaine. »

Henri Lebesgue

Cette histoire est racontée par Lucienne Félix. Elle discutait un jour du rôle des signes avec André Lalande, philosophe spécialiste de la méthode scientifique. Il soutenait que le signe est indispensable à la pensée : « Il est impossible d'aborder un problème de géométrie si deux points s'appellent du même nom, A par exemple. »

C'est à ce moment que Lebesgue, qui avait écouté en silence, vint appuyer Lucienne Félix de son autorité : « Mais si, continuellement, je note d'un même signe plusieurs points. Cela ne me gêne aucunement. Je possède en moi la situation et ce n'est pas sur des mots que je raisonne. »

Là-dessus, dans le cours qui suivit, par jeu, il nomma tous les points du même nom « a » : mais en précisant parfois « petit a » (a), « grand a » (A), « a majuscule » ($\mathbf{A}$), « a ronde » ($\mathcal{A}$), et même « très bel a » ($\mathscr{A}$). Cela ne gênait que pour prendre des notes ! C'est probablement à cette occasion qu'il évoqua le souvenir d'un de ses maîtres, Hermite, qui dans son cours prononça, paraît-il, gravement : « Nous allons étudier ces deux fonctions. Pour les distinguer, nous les nommerons grantêta (grand êta, H) et grantêta (grand thêta, Θ) ».

Lev Loytiansky

Cette histoire est attribuée au professeur Lev Loytiansky, cela se passant lors d'un stage dans l'union soviétique, dans les années trente ou quarante. Loytiansky organisait un séminaire sur l'hydrodynamique dans son université. Parmi les participants réguliers figuraient deux hommes en uniforme, à l'évidence des ingénieurs militaires. Ils n'ont jamais parlé des problèmes sur lesquels ils travaillaient. Mais un jour ils ont demandé à Loytiansky de les aider sur un problème de mathématiques. Ils expliquaient que la solution d'une certaine équation oscillait, et demandaient comment changer les coefficients pour la rendre monotone. Loytiansky regarda l'équation et répondit : « Allongez les ailes ! »

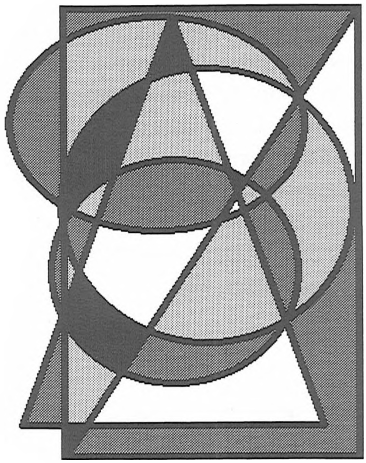
Hermann Minkowski

Donnant un cours de topologie, Minkowski évoqua le théorème des quatre couleurs – un théorème célèbre et non résolu (jusqu'en 1976), qui affirme que quatre couleurs suffisent toujours pour le coloriage de n'importe quelle carte, à la condition que deux régions adjacentes soient de couleurs différentes.

« Ce théorème n'a jamais été démontré pour la seule raison que, seuls, des mathématiciens de troisième zone se sont attaqués à lui. » fit Minkowski à la classe. Il ajouta avec une rare arrogance : « Et je crois pouvoir le prouver. »

Il se mit au travail immédiatement. À la fin de l'heure, la démonstration n'était pas achevée. Le projet fut remis à la séance suivante. Plusieurs semaines se passèrent ainsi. Finalement, par une matinée pluvieuse, Minkowski fit son entrée dans la salle de conférence, suivi par un grondement de tonnerre. Il attendit que le bruit s'apaise et tourna vers

FIGURE 7.1 – Exemple de telle coloration



les étudiants son visage potelé : « Les cieux sont en colère à cause de mon arrogance », proféra-t-il avec un profond sérieux. « Ma démonstration du théorème des quatre couleurs est erronée comme les autres. »

Il reprit alors son cours de topologie au point où il l'avait laissé plusieurs semaines auparavant.

Von Neumann

- Von Neumann était réputé pour avoir l'habitude de seulement écrire les réponses finales des devoirs à faire à la maison au tableau (la méthode étant, bien sûr, évidente), quand on lui demandait comment résoudre les problèmes. Un jour, un de ses étudiants essaya d'avoir une aide plus utile en demandant s'il y avait une autre façon de résoudre le problème. Von Neumann regarda dans le vide un petit moment, pensif, pour finalement répondre : « Oui. »
- Le problème suivant peut être résolu de deux manières, la méthode facile et la méthode difficile :
  Deux trains séparés par 200 kilomètres de distance se dirigent l'un vers l'autre ; les deux vont à une vitesse de 50 kilomètres par heure. Une mouche part du même point qu'un des deux trains, et vole d'un train à l'autre en faisant des allers et retours, à une vitesse

constante de 75 kilomètres par heure. Et ce, jusqu'à ce que les trains se rentrent dedans et pulvérisent la mouche. Quelle distance totale la mouche aura-t-elle parcouru ?
La mouche rencontre chaque train une infinité de fois avant d'être écrasée, et on pourrait donc résoudre le problème *via* une méthode difficile qui consiste à sommer une série infinie de distances. La méthode facile procède comme suit : puisque les trains sont éloignés de 200 kilomètres et que chaque train se déplace à 50 kilomètres par heure, ils se rencontrent au bout de deux heures. Ce qui signifie que la mouche a volé pendant deux heures. Comme la mouche volait à 75 kilomètres par heure, la mouche a parcouru 150 kilomètres. C'est tout.
Quand le problème fut posé à John Von Neumann, il répondit dans l'instant même : « 150 kilomètres.

- Vous connaissiez donc l'astuce, fit remarquer le questionneur. Presque tout le monde essaye de sommer la série infinie.
- Quelle astuce ? demanda Von Neumann. J'ai sommé la série infinie ! »

Bertrand Russell

Bertrand Russell déclara qu'une fois admis le postulat « $2+2=5$ », il pourrait démontrer n'importe quoi. (Ce qui est vrai d'ailleurs, vu que $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie dans le cas où P est fausse.) Aussi, un jour, un étudiant lui demanda :
« Prétendez-vous que de $2+2=5$, il s'ensuit que vous êtes le pape ? »
Bertrand Russell réfléchit un instant, puis répondit :
« Supposons que $2+2=5$. Soustrayons 2 de chaque membre de l'identité. Nous obtenons $2=3$. Par symétrie, $3=2$. Soustrayant 1 de chaque côté, il vient : $2=1$. Maintenant, le pape et moi sommes deux. Puisque $2=1$, le pape et moi sommes un. Par suite, je suis le pape. »

Norbert Wiener

- Wiener était très étourdi. L'histoire suivante tient de lui : quand ils ont déménagé de Cambridge à Newton, sa femme, sachant qu'il serait inutile pour ce déménagement, l'a envoyé s'occuper au MIT pendant qu'elle s'occupait du déménagement. Elle savait qu'il oublierait qu'ils ont déménagé, et où ils ont déménagé, et elle a donc écrit la nouvelle adresse sur un bout de papier, qu'elle lui a confié.
  Évidemment, ce jour-ci, il eut une idée en plein cours. En cher-

chant dans sa poche, il trouva un morceau de papier sur lequel il griffonna quelques notes, réfléchit, décida qu'il y avait une erreur dans cette idée, et jeta le papier.
À la fin de la journée, rentrant à la maison (à l'ancienne adresse bien sûr), il réalisa qu'ils avaient déménagé, qu'il n'avait aucune idée de la nouvelle adresse, et que le papier sur lequel elle était écrite avait disparu depuis longtemps. Heureusement il avait quelques ressources : une jeune fille traînait dans la rue et il décida de lui demander où il avait déménagé, en demandant :
« Excusez-moi, peut-être que vous me connaissez. Je suis Norbert Wiener, et ma famille vient tout juste de déménager. Est-ce que vous savez où est notre nouvelle adresse ? » Ce à quoi la jeune fille répondit : « Oui papa, maman savait que tu oublierais. »

- Toujours au sujet de Norbert Wiener, une anecdote qui semble énorme, trop énorme :
  On raconte qu'un jour, assis à une table de la bibliothèque universitaire, il semblait plongé dans une profonde réflexion. Un étudiant ayant pourtant besoin de lui poser une question s'approche, intimidé, et lui dit : « Pardon, Monsieur Wiener...
  - Merci, merci, répondit celui-ci, sortant de sa torpeur, voilà le nom que je cherchais ! »

Mesure d'un building

Provenant d'un professeur de physique du début du siècle :

J'ai reçu un coup de fil d'un collègue à propos d'un étudiant. Il estimait qu'il devait lui donner un zéro à une question de physique, alors que l'étudiant réclamait un 20.

Le professeur et l'étudiant se mirent d'accord pour choisir un arbitre impartial et je fus choisi. Je lus la question de l'examen : « Montrez comment il est possible de déterminer la hauteur d'un building à l'aide d'un baromètre. »

L'étudiant avait répondu : « On prend le baromètre en haut du building, on lui attache une corde, on le fait glisser jusqu'au sol, ensuite on le remonte et on calcule la longueur de la corde. La longueur de la corde donne la hauteur du building. »

L'étudiant avait raison vu qu'il avait répondu juste et complètement à la question. D'un autre côté, je ne pouvais pas lui mettre ses points : dans ce cas, il aurait reçu son grade de physique alors qu'il ne m'avait pas montré de connaissances en physique. J'ai proposé de donner une autre chance à l'étudiant en lui donnant six minutes pour répondre à la question avec l'avertissement que pour la réponse il devait utiliser ses connaissances en physique. Après cinq minutes, il n'avait encore rien écrit. Je lui ai demandé s'il voulait abandonner mais il répondit qu'il avait beaucoup de réponses pour ce problème et qu'il cherchait la meilleure d'entre elles.

Je me suis excusé de l'avoir interrompu et lui ai demandé de continuer. Dans la minute qui suivit, il se hâta pour me répondre : « On place le baromètre à la hauteur du toit. On le laisse tomber en calculant son temps de chute avec un chronomètre. Ensuite en utilisant la formule : $x = \frac{g \cdot t^2}{2}$, on trouve la hauteur du building. »

À ce moment, j'ai demandé à mon collègue s'il voulait abandonner. Il me répondit par l'affirmative et donna presque 20 à l'étudiant.

En quittant son bureau, j'ai rappelé l'étudiant car il avait dit qu'il avait plusieurs solutions à ce problème. « Hé bien, dit-il, il y a plusieurs façons de calculer la hauteur d'un building avec un baromètre. Par exemple, on le place dehors lorsqu'il y a du soleil. On calcule la hauteur du baromètre, la longueur de son ombre et la longueur de l'ombre du building. Ensuite, avec un simple calcul de proportions, on trouve la hauteur du building. »

Bien, lui répondis-je, et les autres ? « Il y a une méthode assez basique que vous allez apprécier. On monte les étages avec un baromètre et en même temps on marque la longueur du baromètre sur le mur. En comptant le nombre de traits, on a la hauteur du building en longueurs de baromètre. C'est une méthode très directe. Bien sûr, si vous voulez une méthode plus sophistiquée, vous pouvez prendre le baromètre à une corde, le faire balancer comme un pendule et déterminer la valeur de g au niveau de la rue et au niveau du toit. À partir de la différence de g, la hauteur de building peut être calculée.

De la même façon, on l'attache à une grande corde et en étant sur le toit, on le laisse descendre jusqu'à peu près le niveau de la rue. On le fait balancer comme un pendule et on calcule la hauteur du building à partir de la période de précession. »

Finalement, il conclut : « Il y a encore d'autres façons de résoudre ce problème. Probablement la meilleure est d'aller au sous-sol, frapper à la porte du concierge et lui dire : "J'ai pour vous un superbe baromètre si vous me dites quelle est la hauteur du building." »

J'ai ensuite demandé à l'étudiant s'il connaissait la réponse que j'attendais. Il a admis que oui mais qu'il en avait marre du collège et des professeurs qui essayaient de lui apprendre comment il devait penser.

Pour l'anecdote, l'étudiant était Niels Bohr et l'arbitre Rutherford.

7.2 Le projet de loi π de l'Indiana

Le projet de loi π de l'Indiana est le nom qu'on donne couramment au projet de loi n° 246 de l'année 1897, discuté par l'Assemblée générale de l'Indiana, et il s'agit d'une des tentatives les plus célèbres visant à établir une vérité scientifique par une autorisation législative. Mais ce nom est trompeur, puisque le résultat principal cité dans le projet de loi est une méthode pour quarrer le cercle (c'est-à-dire pour construire à la règle non graduée et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné), plutôt que l'établissement d'une certaine valeur de π. Le texte contient cependant, plus ou moins explicitement, de fausses valeurs de π, telles que 3,2.

La loi n'a jamais été adoptée, grâce à l'intervention d'un professeur de mathématiques qui était présent dans l'assemblée, presque par hasard. On sait pourtant depuis 1882, alors que c'était déjà soupçonné depuis l'antiquité, qu'il est impossible de quarrer le cercle en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas. Ceci découle de la transcendance de π, prouvée par Ferdinand von Lindemann. Enfin, de bien meilleures approximations de π que celles sous-entendues par la loi sont connues depuis très longtemps.

7.2.1 Histoire du projet

En 1897, le médecin et amateur de mathématiques Edwin J. Goodwin croyait avoir découvert une méthode effective pour quarrer le cercle. Il proposa alors un projet de loi au député de l'Indiana Taylor I. Record, que Record introduisit à la Chambre des représentants sous le titre suivant : *Une loi pour introduire une vérité mathématique et offerte comme contribution à l'éducation et utilisée uniquement par l'État de l'Indiana sans paiement de redevances, sous réserve qu'elle soit acceptée et adoptée par la session parlementaire officielle de 1897.*

Le contenu du projet consiste en une série d'affirmations mathématiques que vous pouvez voir plus bas, suivie d'un récit des différents faits d'armes de Goodwin :

> ... Ses solutions à la trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle ont été déjà été validées en tant que contribution à la science, par le *American Mathematical Monthly*... Il est bon de savoir que ces problèmes ont été qualifiés par les scientifiques de mystères insolubles et inaccessibles pour l'intellect humain.

Ces fausses déclarations sont typiques de l'hurluberlu mathématique ; on trouve beaucoup de revendications au sujet de la trisection de l'angle et de la duplication du cube dans la littérature excentrique. Selon Doron Zeilberger, un mathématicien et informaticien israélo-américain, les « solutions » de Goodwin ont effectivement été publiées dans le *American Mathematical Monthly*, avec cependant la mention qu'elles étaient « publiées à la demande de l'auteur. »

L'Assemblée générale de l'Indiana renvoya le projet de loi à diverses Commission, notamment celle sur l'éducation qui le reporta favorablement, et le projet fut accepté par la Chambre à l'unanimité... Alors que le débat touchait à sa fin, un professeur de l'université de Purdue, Clarence Abiathar Waldo, arriva à Indianapolis pour suivre l'affectation du budget de l'académie des sciences de l'Indiana. Un homme de l'assemblée lui montra le projet de loi, et lui proposa de l'introduire au génie qui en est l'auteur. Waldo refusa, disant qu'il connaissait déjà plus de fous qu'il ne le voudrait.

Le Sénat de l'Indiana n'avait pas encore tout à fait complété l'admission finale du projet de loi (ce qui était à la charge de la Commission sur la tempérance), et le professeur Waldo « briefa » suffisamment de sénateurs dans la soirée pour que le projet puisse être refoulé pour de bon.

7.2.2 Les maths, dans tout ça ?

Même si ce projet est connu comme le « projet π », son texte ne mentionne pas π une seule fois, et Goodwin semble avoir pensé au rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle comme d'un aspect secondaire de son problème de quadrature du cercle. Vers la fin de la section 2, il est écrit :

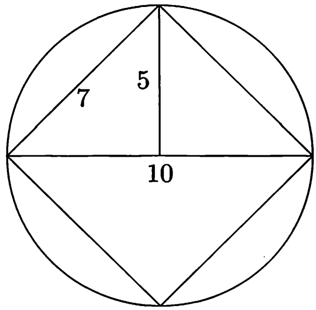
> De plus, il révèle le rapport de la corde à l'arc de quatre-vingt-dix degrés, qui est comme celui de sept à huit, et également le rapport de la diagonale à un côté du carré, qui est comme celui de dix à sept, ce qui conduit au quatrième fait important, à savoir que le rapport du diamètre à la circonférence est comme celui de cinq quarts à quatre.

On a presque affaire à l'affirmation explicite que $\pi = \frac{4}{5/4} = 3,2$, et $\sqrt{2} = \frac{10}{7} \simeq 1,429$.

Cette citation est souvent lue comme trois assertions qui se contredisent mutuellement, mais elles ont une cohérence interne si l'affirmation concernant $\sqrt{2}$ est, admettons-le, au sujet du carré inscrit (avec le diamètre du cercle comme diagonale) plutôt que d'un carré de côté de longueur le rayon du cercle (dont la diagonale serait la fameuse corde). On obtient alors le cercle décrit sur la figure, dont le diamètre est 10 dans une unité de longueur que j'ai choisie, et la circonférence est 32 ; la « corde de 90 degrés » vaudrait 7. Ces deux dernières valeurs sont, à un pourcentage près, les vraies longueurs pour un cercle de diamètre 10... Ce qui, bien sûr, ne justifie pas que Goodwin prenne ces valeurs pour exactes.

L'objectif de Goodwin n'était pas, de toute manière, de mesurer des longueurs sur le cercle, mais de le quarrer, ce qu'il interprétait littéralement comme trouver un carré de même aire que le cercle. Il savait que la formule d'Archimède donnant l'aire d'un cercle, qui demande qu'on multiplie le diamètre ($2r$) par un quart de la circonférence ($\frac{2\pi r}{4}$), n'est pas considérée comme une solution au problème antique de la quadrature du cercle. En effet, le problème est de construire cette aire *à la règle non graduée et au compas*, et Archimède ne donne pas de méthode pour construire un segment de même longueur que la circonférence. Goodwin

FIGURE 7.2 – Résumé de la situation



n'avait, à l'évidence, pas conscience de cette condition centrale ; il devait penser que le problème avec la formule d'Archimède était qu'elle ne donnait pas les bons résultats numériques, et qu'une solution à la quadrature du cercle passait par l'obtention d'une formule « correcte ». Il propose alors, sans argumenter, sa propre méthode :

> Il s'avère que l'aire du cercle est, par rapport au carré de côté de longueur celle d'un quart du cercle, comme ce que l'aire d'un rectangle équilatéral est par rapport au carré de côté de longueur un des côtés du rectangle.

On voit des contorsions inutiles, puisqu'un « rectangle équilatéral » ne peut rien être d'autre qu'un carré. Dans le reste du texte, cependant, il est clair que cette assertion est simplement que l'aire d'un cercle est la même que celle d'un carré de même périmètre... Par exemple, immédiatement après la citation ci-dessus, il continue en affirmant que :

> Utiliser le diamètre comme longueur de référence pour calculer l'aire du cercle selon la règle actuelle est complètement faux, puisqu'il représente l'aire du cercle comme valant un plus un cinquième de fois l'aire du carré dont le périmètre égale la circonférence du cercle.

Dans le cercle de la figure ci-dessus, l'aire « archimédienne » (en prenant compte des valeurs de Goodwin pour la circonférence et le diamètre) serait 80, alors que la règle proposée par Goodwin donne une aire de 64. Alors, 80 dépasse 64 d'un cinquième de 80, et Goodwin semble confondre $64 = 80 \cdot (1 - \frac{1}{5})$ avec $80 = 64 \cdot (1 + \frac{1}{5})$, une équivalence qui ne marche, approximativement, que pour des fractions bien plus petites que $\frac{1}{5}$, grâce au développement limité $\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x$ quand x est proche de 0.

L'aire trouvée grâce à la règle de Goodwin est $\pi/4$ fois la vraie aire du cercle, ce qui, dans plusieurs explications du projet de loi π, est interprété comme une affirmation de l'égalité $\pi = 4$. Cependant, il n'y a aucune preuve dans le texte du projet de loi que Goodwin avait vraiment l'intention d'affirmer ceci ; au contraire, il nia à plusieurs reprises que l'aire du cercle avait quelque chose à voir avec son diamètre.

L'erreur relative de $1 - \pi/4$ est d'environ 21 pourcent, ce qui est bien pire que les approximations des longueurs sur le cercle référence présenté plus haut. On ne sait pas ce qui pouvait laisser penser Goodwin que cette règle pouvait être juste. En général, des figures de périmètres égaux n'ont pas les mêmes aires ; il suffit pour s'en apercevoir de comparer une figure longue et fine, avec une petite aire (tendant vers zéro quand la largeur diminue), et une figure de même périmètre qui est aussi longue que large (un cercle, typiquement), et clairement de plus grande aire.

7.2.3 Texte du projet de loi

Voici, enfin, le texte de cette proposition de loi. Il est normal de ne pas tout comprendre, car le texte était écrit dans un vieux jargon mathématique, les remarques confuses de l'auteur n'aidant pas. Enfin, j'ai pu me tromper dans ma traduction.

Comme promis, il est dit que « le rapport du diamètre à la circonférence est comme celui de cinq quarts à quatre », ce qui implique que π vaut 3,2. Les anciennes valeurs de π sont ensuite critiquées, car « totalement déficientes et trompeuses. »

Proposition de loi n° 246

Une loi pour introduire une vérité mathématique et offerte comme contribution à l'éducation et utilisée uniquement par l'État de l'Indiana sans paiement de redevances, sous réserve qu'elle soit acceptée et adoptée par la session parlementaire officielle de 1897.

Section 1 Que soit adopté par l'Assemblée générale de l'État d'Indiana : il s'avère que l'aire du cercle est, par rapport au carré de côté de longueur celle d'un quart du cercle, comme ce que l'aire d'un rectangle équilatéral est par rapport au carré de côté de longueur un des côtés du rectangle. Utiliser le diamètre comme longueur de référence pour calculer l'aire du cercle selon la règle actuelle est complètement faux, puisqu'il représente l'aire du cercle comme valant un plus un cinquième de fois l'aire du carré dont le périmètre égale la circonférence du cercle. C'est parce qu'un cinquième du diamètre ne peut pas être représenté quatre fois dans la circonférence du cercle. Par exemple, si on multiplie le périmètre d'un carré par un quart de tout segment dépassant d'au moins un cinquième la longueur d'un des côtés du carré, on peut de la même manière faire apparaître l'aire du carré comme un cinquième plus grande qu'elle ne l'est vraiment, comme on peut le faire en prenant pour longueur de référence le diamètre à la place du quart de la circonférence du cercle.

Section 2 Il est impossible de calculer l'aire d'un cercle en utilisant le diamètre comme unité de mesure, sans dépasser l'aire du cercle d'un cinquième d'aire en plus que celle contenue dans la circonférence du cercle, parce qu'un carré de côté un diamètre produit le côté d'un carré qui égale neuf quand l'arc de quatre-vingt-dix degrés égale huit. En prenant un quart de la circonférence du cercle comme longueur de référence, on aboutit à la fois à la quadrature du cercle et à la rectification de la formule de la circonférence du diamètre. De plus, il révèle le rapport de la corde à l'arc de quatre-vingt-dix degrés, qui est comme celui de sept à huit, et également le rapport de la diagonale à un côté du carré, qui est comme celui de dix à sept, ce qui conduit au quatrième fait important, à savoir que le rapport du diamètre à la circonférence est comme celui de cinq quarts à quatre ; à cause de ces faits, ainsi que le fait que la règle actuelle ne fonctionne pas mathématiquement, elle devrait être rejetée car totalement déficiente et trompeuse dans ses applications pratiques.

Section 3 Pour prouver la valeur de la contribution à l'éducation et du cadeau fait à l'État d'Indiana par l'auteur, on peut citer ses solutions à la trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle, qui ont été déjà été validées en tant que contribution à la science par le *American Mathematical Monthly*, le vecteur dominant de la pensée mathématique dans ce pays. Il est bon de savoir que ces problèmes ont été qualifiés par les scientifiques de mystères insolubles et inaccessibles pour l'intellect humain.

7.3 L'humour de Nicolas Bourbaki

Sous le nom de Nicolas Bourbaki se cachent plusieurs grands mathématiciens qui ont sévi en France durant le vingtième siècle. En particulier, son œuvre didactique colossale et aride est à la base de quelques blagues du recueil sur Bourbaki. Mais pour faire preuve d'humour, Nicolas Bourbaki peut se débrouiller tout seul, puisque les savants du groupe Bourbaki ont composé quelques canulars très amusants, pour celui qui peut les comprendre. En effet, les mathématiques sous-entendues ici sont assez poussées... Par contre, le faire-part de décès semble être dû à un mathématicien écrivain de l'Oulipo, Jacques Roubaud.

7.3.1 Sonnet de Chançay

Soit une multiplicité vectorielle,
Un corps opère seul, abstrait, commutatif.
Le dual reste loin, solitaire et plaintif,
Cherchant l'isomorphie et la trouvant rebelle.

Soudain bilinéaire a jailli l'étincelle
D'où naît l'opérateur deux fois distributif.
Dans les rêts du produit tous les vecteurs captifs
Vont célébrer sans fin la structure plus belle.

Mais la base a troublé cet hymne aérien :
Les vecteurs éperdus ont des coordonnées.
Cartan ne sait que faire et n'y comprend plus rien.

Et c'est la fin. Opérateurs, vecteurs, foutus.
Une matrice immonde expire. Le corps nu
Fuit en lui-même au sein des lois qu'il s'est données.

7.3.2 Le filtre

Ô puissant, ô cruel, ô toi clair Bourbaki,
Vas-tu nous déchirer dans un accès de crise
Le Goursat filandreux, miroir de l'Analyse,
Défenseur attardé d'un passé qui a fui ?

La suite d'autrefois se croyait l'infini,
Inutile, et que sans la comprendre utilise
le maladroit conscrit, lui que Valiron grise
De son cours ténébreux qui distille l'ennui.

Ignorant les secrets de la Topologie
À l'espace infligée, et toi qui l'étudies,

Il nage dans l'erreur où son langage est pris.

Il contemple étonné, comme enivré d'un philtre,
L'adhérence, un manteau qu'il n'a jamais compris,
Que vêt sur un compact, immobile, le FILTRE.

7.3.3 Faire-part de mariage

Monsieur *Nicolas Bourbaki,*
membre canonique de l'académie royale de Poldévie,
grand maître de l'ordre des compacts,
conservateur des uniformes,
lord *protecteur des filtres,*
et Madame, née *Biunivoque,*
ont l'honneur de vous faire part du mariage de leur fille *Betti* avec
Monsieur *Hector Pétard,*
administrateur délégué de la société des structures induites,
*membre diplômé de l'*institute of class field archeologist,
secrétaire de l'œuvre du sou du lyon (?).

Monsieur *Ersatz Stanislasz Pondiczery,*
complexe de recouvrement de première classe en retraite,
président du Hom de rééducation des faiblement convergents,
chevalier des quatre U,
grand opérateur du groupe hyperbolique,
knight of the total order of the golden mean,
L.U.B., C.C., H.L.C.,
et Madame, née *Compactensoi,*
ont l'honneur de vous faire part du mariage de leur fils
Hector Pétard
avec Mademoiselle *Betti Bourbaki,*
ancienne élève des bien ordonnées de Besse.

L'isomorphisme trivial leur sera donné par le P. adique, de l'ordre des diophantiens, en la cohomologie principale de la variété universelle le 3 cartembre, an VI, à l'heure habituelle.

L'orgue sera tenu par M. Modulo, assistant simplexe de la grâce Mannienne (lemme chanté par la *schola cartanorum*). Le produit de la quête sera versé intégralement à la maison de retraite des pauvres abstraits. La convergence sera assurée.

Après la congruence, M. et Mme Bourbaki recevront dans leurs domaines fondamentaux. Sauterie avec le concours de la fanfare du 7^{e} corps quotient. Tenues canoniques, idéaux à gauche à la boutonnière, c.q.f.d.

7.3.4 Faire-part de décès

Les familles

Cantor, Hilbert, Noether,

Les familles

Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil,

Les familles

Bruhat, Dixmier, Godement, Samuel, Schwartz,

Les familles

Cartier, Grothendieck, Malgrange, Serre,

Les familles

Demazure, Douady, Giraud, Verdier,

Les familles

Filtrantes à droite et les épimorphismes stricts,

Mesdemoiselles Adèle et Idèle,

ont la douleur de vous faire part du décès de M. Nicolas Bourbaki, leur père, frère, fils, petit-fils, arrière petit-fils et petit-cousin respectivement, pieusement décédé le 11 novembre 1968 (jour anniversaire de la victoire) en son domicile de Nancago.

L'inhumation aura lieu le samedi 23 novembre 1968 à 15h au cimetière de fonctions aléatoires, métros Markov et Gödel. On se réunira devant le bar « aux produits directs » carrefour des résolutions projectives, anciennement place Koszul. Selon le vœu du défunt une messe sera célébrée en l'église Notre-Dame-des-problèmes-universels par son éminence le cardinal Alephun, en présence de toutes les classes d'équivalences et des corps (algébriquement clos) constitués. Une minute de silence sera observée par les élèves des écoles normales supérieures et des classes de Cern, car « Dieu est le compactifié d'Alexandrov de l'univers » (Grothendieck, IV, 22).

7.4 Poissons d'avril mathématiques

Rien n'échappe à la tradition des poissons d'avril... Certainement pas les mathématiciens, puisqu'il est dorénavant acquis que ce sont les êtres les plus drôles de l'univers. Voici trois exemples de poissons d'avril mathématiques qui ont défrayé la chronique.

7.4.1 Avril 1975, de Gardner

Le 1er avril 1975, Martin Gardner annonce dans une revue scientifique que le nombre

$$e^{\sqrt{163}\pi}$$

est entier. Étant données les faibles performances des calculatrices de l'époque, il fut très difficile pour le lecteur moyen de le contredire. De fait, les douze premières décimales sont des 9, de sorte que tout arrondi à moins de douze décimales près donnera un nombre entier. Il faut donc calculer au moins 13 décimales pour se rendre compte du canular, le développement décimal de ce nombre commençant par $262537412640768743,99999999999925007 2\ldots$

Ce poisson d'avril n'aurait plus aucun intérêt de nos jours, le calcul d'une vingtaine de décimales de ce nombre se faisant instantanément avec des logiciels de calcul formel.

Il est bon de savoir que ce n'est pas tout à fait un hasard si $e^{\sqrt{163}\pi}$ est « presque » un entier. La théorie des formes modulaires permet de fournir d'autres exemples, tels que

$$e^{\sqrt{232}\pi} \simeq 604729957825300084759,999992226,$$

$$e^{\sqrt{58}\pi} \simeq 24591257751,9999998222132414707,$$

et j'en passe.

7.4.2 Avril 1994, de Darmon (ou Rota ?)

Il y a un doute sur l'auteur : d'après *Le dernier théorème de Fermat* de Simon Singh, il s'agit de Darmon, tandis qu'*Internet* l'attribue majoritairement à Rota. Il vaut mieux comprendre le contexte de ce poisson d'avril avant de le lire, même si le jargon mathématique employé reste complexe. En fait, une démonstration sérieuse à un problème millénaire, le « théorème » de Fermat qui reviendra dans ce recueil, a été fournie par le mathématicien Andrew Wiles en 1993. Suite à une analyse minutieuse (le premier manuscrit faisait plus de mille pages !), une erreur a été décelée par un des quelques rapporteurs. Après avoir été protégée pendant longtemps de tous les commérages mathématiques, Wiles a admis qu'il devait retravailler la preuve pour qu'elle soit juste. C'est là que des rumeurs, ragots, propos de mauvaises langues ont proliféré, tandis que Wiles n'arrivait pas à corriger son erreur, et c'est dans cette atmosphère tendue que le *mail* suivant a été envoyé et échangé de mathématiciens en mathématiciens. Le voici :

```
>There has been a really amazing development today on
>Fermat's Last Theorem. Noam Elkies has announced a
>counterexample, so that FLT is not true after all! His
>spoke about this at the Institute today. The solution to
>Fermat that he constructs involves an incredibly large
>prime exponent (larger that 10^20), but it is constructive.
>The main idea seems to be a kind of Heegner point
>construction, combined with an really ingenious descent
>for passing from the modular curves to the Fermat curve.
>The really difficult part of the argument seems to be to
>show that the field of definition of the solution (which,
>a priori, is some ring class field of an imaginary quadratic
>field) actually descends to Q. I wasn't able to get all the
>details, which were quite intricate...
>
>So it seems that the Shimura Taniyama conjecture is not
>true after all. The experts think that it can still be
>salvaged, by extending the concept of automorphic
>representation, and introducing a notion of "anomalous
>curves" that would still give rise to a "quasi-automorphic
>representation".
>
>Henri Darmon
>Princeton University.
```

En français, ça donne :

« Il y a encore eu un développement vraiment extraordinaire dans le Dernier Théorème de Fermat.

Noam Elkies a communiqué un contre-exemple, et le Dernier Théorème de Fermat est donc faux, en fin de compte ! Elkies en a parlé aujourd'hui à l'Institut. La solution à Fermat qu'il a construite met en jeu un exposant premier incroyablement grand (supérieur à 10^{20}), mais la méthode est constructive. L'idée de base semble être une sorte de construction du point de Heegner, combinée à une descente réellement ingénieuse pour passer des courbes modulaires à la courbe de Fermat. La partie réellement difficile du raisonnement semble être la preuve que le corps de définition de la solution (qui serait *a priori* le corps de classe d'une extension quadratique imaginaire) descend en fait à $\mathbb{Q}$. Je n'ai pas pu saisir tous les détails, qui étaient assez compliqués...

Il semblerait donc qu'après tout, la conjecture de Taniyama-Shimura ne soit pas vraie. Les experts pensent qu'elle peut être sauvée en étendant le concept de représentation automorphe et en introduisant la notion de "courbes anormales" qui donneraient quand même naissance à une "représentation quasi automorphe".

Henri Darmon
Université Princeton. »

Elkies avait une certaine renommée dans le monde des contre-exemples, puisqu'il avait mis en défaut une conjecture d'Euler proche, dans sa formulation, du théorème de Fermat. Après avoir bombardé Elkies de *mails* qui, curieusement, ne laissait transpirer aucune information, les mathématiciens se sont rendu compte que c'était un poisson d'avril et, pendant quelques temps, Wiles et sa démonstration litigieuse ont été épargnés. Heureusement, l'histoire s'est bien terminée.

7.4.3 Avril 1997, de Bombieri

Cette fois-ci, le poisson d'avril concerne l'hypothèse de Riemann, dont il sera également question dans ce recueil, d'ici quelques pages. Cette année, Bombieri avait reçu un *mail* d'un ami, Doron Zeilberger, qui prétendait avoir découvert de nouvelles propriétés incroyables de π. Bombieri fut cependant assez attentif pour remarquer la date : c'était le 1er avril. Pour montrer qu'il avait compris la blague, il répondit dans la même veine, et surfa sur la vague du *hype* provoqué par les contributions de Connes dans l'étude de l'hypothèse de Riemann :

```
>Dear Doron,
>
>        There are fantastic developments to Alain Connes's
>lecture at IAS last Wednesday.  Connes gave an account of
>how to obtain a trace formula involving zeroes of
>L-functions only on the critical line, and the hope was
>that one could obtain also Weil's explicit formula in the
>same context; this would solve the Riemann hypothesis for
>all L-functions at one stroke.  Thus there cannot be even
>a single zeroe(1) off the critical line!
>
>        Well, a young physicist at the lecture saw in a
>flash that one could set the whole thing in a
>combinatorial setting using supersymmetric fermionic-
>bosonic systems (the physics corresponds to a near
>absolute zero ensemble of a mixture of anyons and
```

```
>morons with opposite spins) and, using the C-based meta-
>language MISPAR, after six days of uninterrupted work,
>computed the logdet of the resolvent Laplacian, removed
>the infinities using renormalization, and, lo and behold,
>he got the required positivity of Weil's explicit formula!
>Wow!
>
>        Regards also from Paula Cohen.
>        Please give this the highest diffusion.  Best,
>
>        Enrico
>
>
>(1) This is the correct spelling, according to
>vicepresident Dan Quayle.
```

Pour les anglophobes, on peut comprendre le message ainsi :

« Cher Doron,

La conférence d'Alain Connes, donnée mercredi dernier à l'IAS, a eu des développements fantastiques. Connes a expliqué comment obtenir une formule des traces impliquant uniquement les zéros des fonctions L sur la droite critique, en espérant qu'on pourrait obtenir la formule explicite de Weil dans le même contexte ; ceci permettrait de résoudre l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L d'un seul coup. Ainsi, il ne pourrait pas y avoir le moindre zéro en dehors de la droite critique !

Alors, un jeune physicien, présent lors de la conférence, a eu un éclair de génie, le faisant penser que tout ceci pourrait être un système combinatoire utilisant des systèmes fermioniques-bosoniques supersymétriques (ils dépeignent la physique qui correspond à un ensemble proche du zéro absolu, mixture d'anions et de morons avec des *spins* opposés) et, après six jours de travail ininterrompu à l'aide du MISPAR, un nouveau langage informatique basé sur le C, le logarithme du déterminant de la résolvante du Laplacien a été calculé, les singularités ont été effacées après renormalisation, puis, voilà ! la formule explicite de Weil a été obtenue comme voulu ! Wow ! »

Mes amitiés, de la part de Paula Cohen.

Veuillez faire circuler ce message le plus possible. Cordialement, Enrico. »

Cette annonce a pris une ampleur gigantesque, jusqu'à paraître sur le tableau électronique du congrès international à venir, si bien que tous les mathématiciens du monde pouvaient la lire. Malheureusement, quand Connes a eu vent de ce poisson d'avril, il a été assez contrarié. Cette farce semblait en effet avoir mis un terme à l'enthousiasme suscité par les travaux de Connes sur l'hypothèse de Riemann, et le calme était revenu.

À présent, vous remarquerez une transition magnifique, puisque je passe à la section...

7.5 Autour de l'hypothèse de Riemann

Cette section et la suivante tournent autour de deux grands problèmes des mathématiques contemporaines, qui ont chacun engendré leur lot de mathématiques, art, rumeurs, mysticisme, anecdotes, histoires montées par des frustrés... Mais c'est fini pour le Dernier Théorème de Fermat qui est, au grand dam des amateurs d'humour, définitivement résolu depuis 1994. Heureusement, l'hypothèse de Riemann est encore un problème ouvert qui fascine des milliers (millions ?) de mathématiciens. Du moins... Jusqu'à aujourd'hui ! J'ai l'honneur de vous présenter en exclusivité la preuve du théorème suivant :

Théorème 21 (Théorème de Riemann-Winckler) *Si* $\zeta(s) = 0$ *avec* $\Im(s) > 0$*, alors* $\Re(s) = \frac{1}{2}$*.*

Preuve. En effet, soit A l'ensemble de tous les ensembles qui n'ont jamais été considérés jusqu'à présent. Alors... Hé ! Ils ont tous disparu ! Bon, tant pis pour ma preuve...

En attendant que je peaufine ma démonstration, voici quelques conséquences de l'aventure Riemann, avec d'abord un petit rappel sur l'histoire de ζ.

7.5.1 L'histoire de l'hypothèse de Riemann en chanson

On doit la chanson qui suit à Tom Apostol, et elle est chantée par John Derbyshire, auteur de *Prime obsession* ou *La jungle des nombres premiers* en français. Elle résume très bien ce qu'est l'hypothèse de Riemann, pour ceux qui ne la connaissent pas encore, et n'ont pas le courage de se renseigner ! On peut trouver la chanson *a capella* sur le site internet

de John (ce n'est pas la chanson du siècle, certes) :
`http://www.olimu.com/RIEMANN/Song.mp3`.

Voici les paroles :

Where are the zeros of ζ of s?
G. F. B. Riemann has made a good guess,
They're all on the critical line, said he,
And their density's one over 2π log t.

This statement of Riemann's has been like trigger
And many good men, with vim and with vigor,
Have attempted to find, with mathematical rigor,
What happens to zeta as mod t gets bigger.

The efforts of Landau and Bohr and Cramer,
And Littlewood, Hardy and Titchmarsh are there,
In spite of their efforts and skill and finesse,
(In) locating the zeros there's been no success.

In 1914 G. H. Hardy did find,
An infinite number that lay on the line,
His theorem however won't rule out the case,
There might be a zero at some other place.

Let P be the function π minus li,
The order of P is not known for x high,
If square root of x times log x we could show,
Then Riemann's conjecture would surely be so.

Related to this is another enigma,
Concerning the Lindelof function $\mu(\sigma)$
Which measures the growth in the critical strip,
On the number of zeros it gives us a grip.

But nobody knows how this function behaves,
Convexity tells us it can have no waves,
Lindelof said that the shape of its graph,
Is constant when sigma is more than one-half.

Oh, where are the zeros of ζ of s?
We must know exactly, we cannot just guess,
In order to strengthen the prime number theorem,
The integral's contour must not get too near 'em.

André Weyl has improved an old Riemann's find guess
By using a fancier ζ of s
He proves that the zeros are where they should be
Provided that the characteristic is p.

There's a moral to draw from this long tale of wow,
that every young genius among you must know
If you tackle a problem and seem to get stuck
Just take it mod p and you have better luck.

7.5.2 Comment j'ai démontré l'hypothèse de Riemann

Cette histoire à l'humour très *british* a été écrite J.R. Partington en 1988, puis traduite par mes soins en 2009.

Première partie L'ennui, de nos jours, est que régulièrement, à quelques semaines d'intervalle, quelqu'un se lance dans un problème sur lequel les matheux se cassent les dents depuis des siècles, et le résout complètement. Un jour c'est le problème des quatre couleurs, à peine plus tard c'est le Dernier Théorème de Fermat, puis « Pourquoi tous les livres de théorie des graphes sont mal catalogués ? ». Vous savez ce que c'est... dans les ménages, aussi loin que s'étende le pays, la conversation suivante est lancée pendant le petit déjeuner :

« Ça y est, ça fait des années que je leur dis que ça arriverait, mais ils ne m'ont jamais cru. “Hier, il a été annoncé que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte planaire. Mme Thatcher a promis de réduire ce nombre à trois d'ici 1995. Dans la Chambre des Communes, M. Dennis Skinner a été suspendu pour avoir dit ‘caca’.”

– Oui, mon cher. Est-ce qu'ils ont expliqué la preuve du théorème ?
– Oui... “Les secrets intimes d'Appel et Haken révélés – Des sous-vêtements *sexy*, quadricolores à gagner – voir pages 6, 7, 8 et 9.” J'ai l'impression que *The Times* est légèrement sur le déclin en ce moment. »

Le temps passe, et je dois faire vite : si je veux me faire un nom, dois-je prouver la conjecture de Goldbach, ou plutôt l'hypothèse de Riemann ? Après avoir réfléchi quelques instants, je me suis décidé : je pourrais débloquer l'hypothèse de Riemann en m'y mettant sérieusement puis, si j'en viens à bout d'ici le déjeuner, je pourrais m'occuper de Goldbach pendant l'heure du thé.

L'hypothèse de Riemann a été formulée pour la première fois par Riemann, dans la marge d'un livre qu'il lisait : « Tous les zéros non triviaux de la fonction ζ sont sur la droite $\Re(s) = 1/2$. J'ai trouvé une preuve véritablement magnifique de ce résultat, mais je ne vais certainement pas l'écrire dans la marge... Je vais plutôt l'envoyer à la Société Philosophique de Cambridge. En tout cas, le livre sera en librairie demain. » Riemann a toujours soutenu que sa preuve a été perdue par la poste, et qu'il ne pouvait pas se la remémorer en détail.

Bien sûr, il n'y a plus tant d'argent à se faire dans la résolution de problèmes ouverts... Après tout, j'aurais gagné ma vie trois fois mieux si j'avais été mauvais en maths et fait quelque chose qui profite à l'humanité, comme acheter des parts de marché et les vendre à point nommé... Mais il y a toujours les produits dérivés : les t-shirts sur l'hypothèse de Riemann, la lessive fonction ζ qui « atteint les points que les autres marques ne peuvent pas atteindre ». Il est peut-être, carrément, possible d'apparaître dans le *show* de Terry Wogan, même si je pense être capable d'y échapper. Alors, je me suis décidé à sortir un crayon et du papier, j'ai gratté ma tête, fixé la fenêtre, et attendu que l'inspiration vienne.

Au début, les choses semblaient se compliquer... Après une bonne dizaine de minutes, j'ai commencé à me dire que la conjecture de Goldbach avait l'air un poil plus facile. J'en suis même arrivé à me demander s'il n'y avait pas des zéros en dehors de la droite critique, et ai vérifié avec précaution qu'il n'y avait personne derrière le classeur à tiroirs.

Puis une idée brillante de simplicité m'est venue, si ingénieuse qu'un enfant de dix ans l'aurait comprise, mais de si grande portée que les mathématiques seraient révolutionnées immédiatement.

Deuxième partie Tout le monde dit que tout ce qu'on a à faire est de prouver l'hypothèse de Riemann, et qu'alors le monde se frayerait un chemin jusqu'à notre porte. Mais les temps sont durs, et le monde peut parfois se frayer un tel chemin en se basant simplement sur l'ampleur d'une rumeur affirmant que vous songiez à prouver l'hypothèse de Riemann. Ainsi, alors que je fixais les carreaux décousus du plafond et que je dessinais des fonctions ζ sur le bureau sans me contorsionner les doigts, tout en me disant que si Riemann l'avait appelée fonction Z, j'aurais déjà fini depuis longtemps, j'entendis un martèlement sonore à la porte.

« Entrez », ripostais-je spirituellement.

Un homme élancé a alors bondi dans la salle, laissant derrière lui une trainée d'étudiants piétinés.

« Hé, bonjour ! Je suis venu me frayer un chemin jusqu'à votre porte. Soyez l'envie des autres grandes universités. Oh, désolé pour les étudiants... Ils étaient déjà sur mon chemin alors que je m'en frayais un jusqu'à votre porte.

– Oh, ce n'est pas grave. Ils devaient certainement faire la queue pour un autographe. Je peux toujours en trouver d'autres. Bref, comment puis-je vous aider ?
– Je représente un riche *consortium* et je suis là pour VOUS offrir beaucoup d'argent, et ce en faisant très peu de travail.
– Ah, comme George $* * *$?, demandais-je, nommant un membre renommé du département, qui n'a jamais rien cherché.
– En fait, pas aussi peu que ça. On attend de vous la résolution d'un problème de Hilbert occasionnellement, ou peut-être le développement d'une toute nouvelle branche des mathématiques, une fois de temps en temps. Vous serez bien payé : 100 000 *pounds* par an, avec en bonus 1 000 par lemme, 5 000 par théorème, and 2 000 par corollaire. Café gratuit, vos propres *backgammon*, piscine et masseuse.
– Le bimensuel *Private Eye* dans la salle commune ?
– Désolé, nous pouvons seulement vous offrir le bulletin bimestriel du service informatique. »

J'ai décidé de me réserver pour une meilleure offre, et mon visiteur prit le chemin du retour, se frayant un chemin jusqu'à la porte suivante du laboratoire, de laquelle un cri « *Eureka* ! » venait tout juste de retentir. Alors que je me demandais si écrire « *Eureka* » en grec était vraiment plus facile que ζ, et si j'aurais dû accepter l'éventualité de prendre des bains au travail, je suis retourné à mes recherches. Il serait peut-être plus simple de commencer par la conjecture de Goldbach ? Après tout, Euclide lui-même a décidé de prouver l'infinité des nombres premiers avant d'étudier la fonction ζ...

7.5.3 Comment d'autres ont démontré l'hypothèse de Riemann

La plupart des tentatives de démonstration de l'hypothèse de Riemann n'ont rien d'amusant, sauf quelques-unes de part leur naïveté cinglante (je ne résisterai pas à l'envie d'en faire figurer une), mais quelques démonstrations ont le mot pour rire. Je ne sais pas si elles sont l'œuvre d'un craquage total ou d'une grande légèreté vis-à-vis de l'hypothèse de Riemann, mais elles contribuent à un Art de l'hypothèse de Riemann, comme tout ce qui précède. Voici l'une de ces preuves insensées (qu'on doit à Shamik Mishra, je crois) :

Preuve. On a seulement réalisé récemment que la fonction ζ (*dzêta*) de Riemann n'est rien d'autre que la fonction « Sita Raman »... Le nom a été déformé en arrivant en Allemagne. La droite connue en Occident comme étant la droite critique était connue des Anciens Indiens comme la « Lakshman Rekha ». Cette observation, combinée au travail de Ravan* (*alias Raw one*) complète la preuve de l'hypothèse de Riemann. $\square$

On trouve d'autres preuves de tous les genres : mathématiques, théologiques, sémiotiques... En voici une mathématique complètement absurde (pour ceux qui la comprennent) qui, je l'espère, n'est pas sérieuse, et que je rédige précisément comme je l'ai trouvée.

Preuve.

$$\zeta(s) = 0 = \sum_{n=1}^{99999\ldots} n^{-s} = \sum_{n=1}^{99999\ldots} n^{-s}\cdot n^{2s-1} = \sum_{n=1}^{99999\ldots} n^{s-1} = \zeta(1-s),$$

la troisième égalité étant valable parce que $0 \leq \Re(s) < 1 \Rightarrow 2\Re(s) - 1 < 1$. Alors, $\Re(1-s) = \Re(s)$, car $f(x) = f(y)$ au delà d'un certain rang implique $x = y$, d'où $\Re(s) = \frac{1}{2}$. $\square$

Exercice. Comprendre ce que l'auteur de cette preuve a voulu dire à chaque implication.

Heureusement, quelques mathématiciens sérieux se sont mis à réfléchir sur ce problème épineux. La preuve suivante, due à Chuck Norris, est en cours de lecture ; le talent mathématique de cet homme n'est plus à prouver (ne dit-on pas qu'il sait diviser par zéro ?).

Preuve de Chuck Norris. Pour commencer, on a une fonction L, qui s'écrit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n^s}$. Quand $L = 1$, on peut montrer que tout zéro vérifie $s = \frac{1}{2}$, ce qui peut se vérifier avec la preuve élémentaire suivante :

$$\zeta(s+1) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^s}.$$

Si on pose $n = \frac{1}{2}$ dans la formule et qu'on l'arrange, on obtient

$$\zeta(s+1) - \zeta(s) = 2^s.$$

D'après la formule des compléments (qu'on appelle aussi formule symétrique), on a

$$\zeta(1-s) - \zeta(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\Gamma(s)},$$

*. Le travail de Ravan montre que Sita ne s'évanouissait qu'en passant la droite critique (voir [Val]).

et également :

$$\zeta(1-s)-\zeta(s)=\frac{\sin(\pi s)}{\Gamma(s)}.$$

D'où, évidemment, $\zeta(s+1) = \sqrt{2}+\zeta(s)$. En substituant ceci dans l'égalité précédente, on obtient $\sqrt{2} = 2^s$, d'où $s = \frac{1}{2}$. □

7.6 La preuve ultime du Dernier Théorème de Fermat

Il y a de longues années que sévit sur sci.math un « fermatiste » obstiné, James Harris, qui produit littéralement quotidiennement des démonstrations du Grand Théorème de Fermat (et parfois d'autres merveilles, comme, récemment, une méthode de calcul rapide de nombres premiers), alternant cris de victoires (et injures pour les mathématiciens orthodoxes incapables de reconnaître son génie) et messages provisoirement plus sobres, du type « Je reconnais que ma démonstration précédente était erronée, mais je l'ai réparée, et cette fois, je suis sûr de mon coup. » C'est dans ce contexte survolté que Jim Ferry publia, en 1998, le texte qui suit (adapté et traduit par Denis Feldmann).

Vous qui avez travaillé sur le Grand Théorème de Fermat, vous pouvez mettre fin à vos efforts. J'ai construit une démonstration dont la simplicité ne peut être surpassée.

Théorème 22 *(Dernier Théorème de Fermat) Pour tout entier $n > 2$, il n'existe pas d'entiers non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$.*

Démonstration.

□

Oui, vous avez bien lu ! Ma démonstration est... la démonstration vide ! Cette démonstration a de nombreux avantages, quand on la compare à celles produites par d'autres auteurs :

1. Quand on prend la mesure du sens de l'humour de Fermat, on se rend compte que ceci est la preuve à laquelle il pensait. La marge trop étroite ? Ha ! La démonstration figurait dans la marge depuis le début, mais les mathématiciens, incapables de se libérer de leur vision étriquée de ce qui constitue une preuve, furent simplement incapables de la voir. (On m'a fait remarquer qu'un certain Dupin aurait construit une démonstration similaire (l'anecdote est

rapportée par E. A. Poe dans *La Lettre Volée*), mais bien entendu, l'analogie entre les deux démonstrations ne saurait être que superficielle, celle de Dupin ne concernant la théorie des nombres que dans ses rapports à la cryptographie.)

2. Elle est brève.
3. C'est (et ce sera) ma seule et unique version.
4. Il n'y a aucune lacune de raisonnement, aucun saut injustifié entre les étapes.
5. Il n'y a aucune définition inusitée ou non mathématique ; aucune tentative de reformuler l'énoncé.

Naturellement, des mathématiciens envieux ont tenté de critiquer ma démonstration. Mais aucun de leurs contre-arguments ne tient la route :

a) « Ce n'est pas une preuve. C'est tout simplement idiot. »

Ce n'est pas un contre-argument. C'est seulement une fanfaronnade. Jusqu'à ce que quelqu'un produise un contre-exemple, ou précise le point exact où ma preuve est insuffisante, je considèrerai ma démonstration comme valide. Vos attitudes émotionnelles ne peuvent pas servir de substitut à la logique.

b) « Hmm, en quoi cela est-il une démonstration du théorème de Fermat plutôt que, mettons, de n'importe quel autre théorème ? Pourquoi ne pas affirmer que vous avez démontré l'hypothèse de Riemann ? »

Qu'est-ce qui fait de n'importe quelle preuve une preuve de ce qu'elle prouve plutôt qu'une preuve d'autre chose ? Le fait qu'elle le prouve. Qu'est-ce qu'il vous faut de plus ?

c) « Ridicule. C'est même difficile de la commenter. Une démonstration doit prouver quelque chose. Une démonstration est une série d'assertions qui amènent à un résultat. Les démonstrations ont forcément un contenu sémantique. Même les démonstrations les plus insensées ont au moins un contenu syntaxique. Votre "démonstration" n'est pas plus une preuve du Grand Théorème de Fermat que ne l'est une boîte de sardines (qui, soit dit en passant, a au moins un contenu). »

Une boîte de sardines ? Encore des arguments hystériques. Encore un mathématicien qui prétend que vous trichez si vous ne respectez pas ses règles. Avez-vous produit un contre-exemple ? Avez-vous trouvé un endroit précis de ma preuve qui soit erroné ? Alors fermez-la.

Il est déjà pénible de constater que la communauté mathématique, repliée sur elle-même, refuse de reconnaître ma gloire. Mais qu'elle ajoute à cela le mépris et les insultes... Oh, je ne devrais pas me montrer surpris. Toujours la même vieille histoire : la noblesse et l'intelligence pourchassée par la meute vicieuse des ignorants. Soupir...

7.7 L'histoire de $2+2=5$

Cette histoire est de Houston Euler (traduite et adaptée par Denis Feldmann)

> *Par-dessus tout, c'était un logicien. Au moins trente-cinq années de son demi-siècle d'existence avaient été exclusivement dévouées à démontrer que deux et deux font toujours quatre, sauf dans certaines situations exceptionnelles, où ils font trois ou cinq suivant le cas.*

Jacques Futrelle, *Le Problème de la cellule 13.*

La plupart des mathématiciens sont habitués – ou du moins ont vu dans la littérature des références – à l'équation $2+2=4$. Cependant, l'équation $2+2=5$, moins connue, a elle aussi une riche et complexe histoire derrière elle. Comme toute autre quantité complexe, cette histoire a une partie réelle et une partie imaginaire ; c'est de cette dernière que nous nous occuperons exclusivement ici.

De nombreuses cultures, dans les premières étapes de leur développement mathématique, découvrirent l'équation $2+2=5$. Par exemple, la tribu des Bolbs, descendante des Incas d'Amérique du Sud, comptait en marquant des nœuds sur des cordes. Ils comprirent vite que lorsque une corde à deux nœuds est jointe à une autre corde à deux nœuds, il en résulte une corde à cinq nœuds.

De récentes découvertes indiquent que les Pythagoriciens avaient découvert une preuve de ce que $2+2=5$, mais que cette preuve ne fut jamais mise par écrit. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la non apparition de la preuve ne fut pas causée par une dissimulation analogue à celle tentée pour la découverte de l'irrationalité de racine de 2. En fait, ils ne purent tout simplement pas payer les services de scribes. Ils avaient perdu leurs subventions, à la suite des protestations d'un groupe d'activistes défenseurs des droits des bœufs, qui n'approuvaient pas la façon dont la Fraternité célébrait la découverte de théorèmes. Il en résulta que l'équation $2+2=4$ fut la seule utilisée dans les *Éléments* d'Euclide, et l'on n'entendit plus parler de $2+2=5$ durant plusieurs siècles.

Vers l'an 1200, Léonard de Pise (Fibonacci) découvrit que quelques semaines après avoir mis deux lapins mâles plus deux lapins femelles dans la même cage, il se retrouvait avec considérablement plus de quatre lapins. Craignant qu'une contradiction trop importante avec la valeur 4 donnée par Euclide soit accueillie avec hostilité, Léonard annonça prudemment que « $2 + 2$ semble plus proche de 5 que de 4. » Même cet exposé raisonnable de ses résultats fut sévèrement critiqué, et faillit mener Léonard à une condamnation pour hérésie, ses justifications maladroites à l'aide de l'équation $1 = 3$ n'ayant pas convaincu Rome. Soit dit en passant, il persista dans son habitude de sous-estimer le nombre des lapins ; son célèbre modèle de populations fait apparaître deux nouveaux lapereaux à chaque naissance, une sous-estimation grossière s'il en fut jamais une.

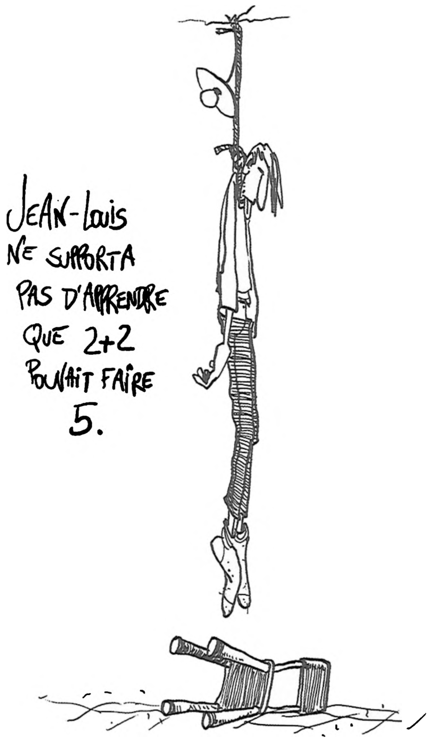
Quelque quatre cents ans plus tard, la piste fut à nouveau reprise, cette fois par les mathématiciens français. Descartes annonça : « Je pense que $2 + 2 = 5$; par conséquent cela est. » Cependant, d'autres objectèrent que son argument n'était pas complètement rigoureux. Il semble que Fermat ait eu une preuve plus solide qui devait apparaître dans l'un de ses livres, mais cette preuve, et d'autres résultats, furent supprimés par l'éditeur pour que le livre puisse être imprimé avec des marges plus larges.

Entre l'absence d'une démonstration définitive de $2 + 2 = 5$, et l'excitation créée par le développement du calcul infinitésimal, les mathématiciens, vers 1700, s'étaient à nouveau désintéressés de l'équation. En fait, la seule référence connue du XVII^e^ siècle à $2 + 2 = 5$ est due à l'évêque Berkeley qui, la découvrant dans un vieux manuscrit, eut ce commentaire ironique : « Bon, à présent je sais où toutes ces quantités évanescentes sont parties : à droite de l'équation. »

Mais au début du XIX^e^ siècle, la valeur exacte de $2 + 2$ recommença à prendre une grande importance. Riemann développa une arithmétique dans laquelle $2 + 2 = 5$, parallèle à l'arithmétique euclidienne où $2 + 2 = 4$. De plus, durant cette période, Gauss construisit une arithmétique où $2 + 2 = 3$, mais, craignant de n'être pas compris par les béotiens, il ne la publia pas, et découragea Bolyai de s'engager sur une voie analogue. Naturellement, il en résulta des décennies de grande incertitude concernant la véritable valeur de $2 + 2$. En raison des opinions changeantes à ce sujet, la preuve de Kempe, en 1880, du théorème des quatre couleurs, fut réputée, onze ans plus tard, être en fait une preuve du théorème des cinq couleurs. Dedekind entra dans ce débat avec un article intitulé *Was ist und was sollen* $2+2$?

Frege pensa avoir réglé la question alors qu'il préparait une version abrégée de son *Begriffsschrift*. Ce résumé, intitulé *Die Kleine Begriffsschrift* (le petit *Schrift*), contenait ce qu'il pensait être une preuve définitive de $2 + 2 = 5$. Mais alors qu'il était sous presse, Frege reçut une lettre de Bertrand Russell, lui rappelant que dans *Grundbeefen der Mathematik*, Frege avait lui-même démontré que $2 + 2 = 4$. Cette contradiction découragea tant Frege qu'il abandonna complètement les mathématiques pour se consacrer à l'administration universitaire.

Face à cette profonde (et troublante) question fondamentale concernant la valeur exacte de $2 + 2$, les mathématiciens suivirent la voie la plus naturelle : ils choisirent prudemment d'éviter les paradoxes ainsi créés, et se cantonnèrent au champ des mathématiques « orthodoxes », où $2+2=4$. Durant le XX^e^ siècle, il n'y eut pour ainsi dire aucune tentative de développement de l'équation rivale. Des rumeurs prétendaient que Bourbaki aurait prévu de consacrer un volume à $2+2=5$ (dont les quarante premières pages seraient occupées par l'expression symbolique du nombre cinq), mais elles n'ont jamais été confirmées. Récemment, cependant, on a entendu parler de preuves assistées par ordinateur de ce que $2+2=5$, utilisant souvent les ordinateurs de sociétés boursières. Peut-être le XXI^e^ siècle verra-t-il une nouvelle renaissance de cette équation historique.


JEAN-LOUIS
NE SUPPORTA
PAS D'APPRENDRE
QUE 2+2
POUVAIT FAIRE
5.

CHAPITRE 8

PARADOXES

Le paradoxe est le moyen le plus tranchant et le plus efficace de transmettre la vérité aux endormis et aux distraits.

Miguel de Unamuno, *Essais.*

8.1 Les paradoxes de Zénon

8.1.1 Le paradoxe de la pierre lancée sur un arbre

Le premier paradoxe de Zénon que j'expose, et peut-être bien le plus connu, concerne l'impossibilité qu'une pierre lancée contre un arbre puisse atteindre cet arbre. Il est exposé et commenté dans *La Physique* d'Aristote.

Paradoxe 1 *Zénon se tient à huit mètres d'un arbre, tenant une pierre. Il lance sa pierre dans la direction de l'arbre. Avant que la pierre ne puisse atteindre l'arbre, il doit traverser la moitié des huit mètres qui ne le séparent de l'arrivée, en un temps non nul. Une fois ce trajet effectué, elle doit parcourir la moitié du trajet restant, et ceci se fait encore une fois en un temps non nul. Et ainsi de suite : la pierre doit, au fil de sa progression, parcourir la moitié du trajet restant en un temps non nul,* ad infinitum. *Zénon en conclut que la pierre ne pourra frapper l'arbre qu'au bout d'un temps infini, c'est-à-dire jamais.*

Mathématiquement, on voit que la pierre parcourt la distance $\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots$ mètres, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) \cdot 8$ mètres, quantité qu'on note aussi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot 8$. On doit donc calculer une somme infinie.

Quand on sait, de nos jours, que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

ce paradoxe ne fait plus vraiment peur... La pierre parcourt bien huit mètres, finalement. Pour le temps qu'elle prend à parcourir cette distance, on s'en sort de la même manière ; l'idée reste qu'une somme infinie de termes positifs peut, malgré tout, être finie.

8.1.2 Le paradoxe d'Achille et de la tortue

Dans le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon * d'Élée, il est dit qu'un jour le héros grec Achille a disputé une course à pied avec le lent reptile. Comme Achille était réputé être un coureur très rapide, il avait accordé gracieusement à la tortue une avance de cent mètres.

Énoncé : Zénon d'Élée affirme alors que le rapide Achille n'a jamais pu rattraper la tortue. Je cite Aristote.

Paradoxe 2 *« Le second sophisme de Zénon, qu'on appelle l'Achille [...] consiste à prétendre que jamais un coureur plus lent, une fois qu'il est en marche, ne pourra être rejoint pas un coureur plus rapide, attendu que le poursuivant doit, de toute nécessité, passer d'abord par le point d'où est parti celui qui fuit sa poursuite, et que le plus lent conservera toujours une certaine avance, quoique fasse l'autre. Toujours entre les deux il y a une différence qui deviendra de plus en plus petite à l'infini, mais qui ne deviendra jamais nulle. Le raisonnement revient à la théorie de la divisibilité infinie, qui consiste à prendre toujours la moitié de la moitié, puis la moitié de cette moitié nouvelle, et ainsi à l'infini. La seule différence, c'est que dans l'Achille ce n'est pas par des moitiés successives que l'on procède. »*

Plus concrètement, le temps qu'Achille comble son retard de cent mètres, la tortue aura parcouru, disons, un mètre. Achille doit, pour rattraper la tortue, parcourir ce nouveau mètre, mais une fois ce mètre atteint, la tortue aura encore une fois pris un peu d'avance, et ainsi de suite. Ainsi, Achille aux pieds rapides n'aura jamais pu rattraper la tortue. Le raisonnement de Zénon paraît impeccable et irréfutable ; pourtant, nous savons tous que c'est Achille qui a gagné la fameuse course !

*. Zénon, oui, comme dans « zénophobie » (la peur des séries convergentes).

La solution ! Comme tous les autres paradoxes, il a été attaqué d'un point de vue philosophique et physique, mais on peut proposer une solution mathématique : en analyse moderne, le paradoxe est résolu en utilisant fondamentalement le fait qu'une série infinie de nombres strictement positifs peut converger vers un résultat fini.

En l'occurrence, ce paradoxe fonctionne en découpant un événement d'une durée finie (Achille rattrape la tortue) en une infinité d'événements de plus en plus brefs (Achille fait 99 pourcent de la distance manquante). Ensuite, l'erreur mathématique introduite dans le paradoxe consiste à affirmer que la somme de cette infinité d'événements de plus en plus brefs tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'Achille n'arrive jamais à rattraper la tortue.

Numériquement, chaque étape est cent fois plus brève que la précédente. Fixons les idées, et admettons que la première étape a pris 10 secondes. Alors, la suivante a pris 0,1 seconde, puis l'étape suivante a pris 0,001 seconde, *etc.* On obtient la série suivante : $10 + 0,1 + 0,001 + 0,00001 \cdots = 10,10101\ldots$ secondes. Ce paradoxe montre donc simplement qu'Achille ne peut pas rejoindre la tortue en moins de 10,100 secondes. Mathématiquement, on peut écrire la somme sous cette forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{100^n} = 10 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 10 \cdot \frac{100}{99} \simeq 10,10101.$$

8.1.3 Le paradoxe de la flèche

Enfin, toujours selon Aristote, Zénon comptait montrer que le mouvement n'est pas possible, et l'illustrait avec le paradoxe de la flèche. Ce paradoxe a connu un regain de popularité avec la physique quantique, qui montre bien une incompatibilité entre la détermination du mouvement et la détermination de la position des objets qu'elle étudie.

Paradoxe 3 *Si toute chose, disait-il, doit toujours être ou en mouvement ou en repos, et si elle est en repos quand elle est dans un espace égal à elle-même, il s'ensuit que, tout corps qui se déplace étant à chaque instant dans un espace égal à lui-même, la flèche qui nous semble voler est cependant immobile ; car, à chaque instant de sa prétendue course, elle est dans un espace égal à elle-même.*

Disons-le autrement : nous imaginons une flèche en vol. À chaque instant, la flèche se trouve à une position précise. Si l'instant est trop court, alors la flèche n'a pas le temps de se déplacer et reste au repos pendant cet instant. Maintenant, pendant les instants suivants, elle va rester immobile pour la même raison. La flèche est toujours immobile et ne peut pas se déplacer : le mouvement est impossible.

La solution ! Ce paradoxe est résolu mathématiquement comme suit : comme la vitesse de la flèche n'est pas nulle, la limite du taux de variation en un instant n'est pas nulle et donc le taux de variation entre deux instants très courts ne sera pas nul. Autrement dit, même si l'instant est très court, la flèche parcourra une certaine distance ; c'est, en substance, du calcul différentiel, et c'est le meilleur outil pour dépasser la difficulté posée par le paradoxe. En effet, le calcul d'une vitesse nécessite un déplacement dans le temps... Comment la calculer, si on « arrête » le temps ?

En fait, il y a ici confusion entre instant et moment : effectivement, la flèche est immobile à un instant donné, mais un moment n'est jamais court au point d'empêcher la flèche de se déplacer, même s'il est infinitésimal !

Il existe aussi une solution physique à ce paradoxe : après tout, suivant le même raisonnement, un objet initialement au repos ne pourrait jamais démarrer, puisque immobile ! En réalité, la capacité d'un objet à se déplacer à un instant t n'est pas liée au fait qu'il soit mobile ou non à cet instant t, mais à son énergie cinétique à cet instant. Un objet « immobile », mais doté d'une certaine énergie cinétique, se déplacera à l'instant suivant. Maintenant, comme l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la vitesse, les solutions physique et mathématique ne sont pas si éloignées l'une de l'autre...

Enfin, si on va au fond des choses, même à un instant donné, la flèche n'est pas vraiment « immobile » : n'importe quel photographe sait qu'un objet en mouvement apparaît sur une photo avec un certain flou dans la direction du mouvement, ce qui le distingue des objets véritablement immobiles. De même, la mécanique quantique nous dit qu'un objet en mouvement présente une certaine incertitude sur sa position (certes, cette incertitude est infinitésimale pour un objet d'une taille aussi grande et une vitesse aussi faible que celles d'une flèche, mais elle n'en existe pas moins), ce qui le distingue radicalement d'un objet au repos, et permet la poursuite du mouvement.

Au sujet de Zénon Bien sûr, Zénon pouvait vérifier par lui-même qu'une pierre puisse frapper un arbre, ou qu'une flèche se déplace. Il serait naïf de croire qu'il contestait que ce soit possible. En fait, si on en croit Aristote, Zénon nie fondamentalement le mouvement. Il ne nie pas son apparence, puisqu'on peut le constater par nous-mêmes, mais sa réalité. Alors, la question devient : pourquoi, alors que je vous prouve par la logique que le mouvement n'est pas possible, on peut malgré tout l'expérimenter ?

On peut aussi voir, dans ces paradoxes, un doute sur la façon de manipuler l'infini, et le divisible. Dans le cas du paradoxe d'Achille, c'est l'infiniment petit qui est en cause... Pensée également partagée par Démocrite, l'inventeur de la notion d'atome. La physique quantique va elle aussi dans ce sens en admettant l'existence d'une unité de temps et d'une unité de taille toutes deux indivisibles (approximativement 10^{-44} secondes et 10^{-33} mètres). D'un point de vue mathématique, on peut penser que Zénon souffrait tout simplement d'une insuffisance « technique » dans le traitement de ces questions, dont on ne souffre plus grâce aux techniques d'analyse dues au calcul infinitésimal... Mais c'est à avancer avec prudence : les exemples tels que le paradoxe de Banach-Tarski montrent que le monde mathématique et le monde réel présentent des différences notables ; ce paradoxe, qui dit qu'on peut dédoubler une boule (à mains nues, attention) en la découpant en cinq morceaux et en les réarrangeant, se réfute justement en rappelant que les morceaux découpés dans la preuve mathématique n'ont, *a priori*, pas d'existence physique. Notamment parce qu'ils sont tellement bizarres que la notion de volume n'aurait aucun sens...

8.2 Le paradoxe des anniversaires

On parle ici de paradoxe parce qu'il contredit l'intuition. Il est bien pratique pour gagner des paris. Par exemple, si on parie de l'argent avec notre voisin, dans une réunion de 50 personnes, que deux personnes sont nées le même jour, on est presque sûr de gagner !

Le paradoxe des anniversaires, dû à Richard von Mises, est, à l'origine, une estimation probabiliste du nombre de personnes que l'on doit réunir pour avoir une chance sur deux que deux personnes de ce groupe aient leur anniversaire le même jour.

Paradoxe 4 *Il se trouve que ce nombre est 23, ce qui choque un peu l'intuition. À partir d'un groupe de 57 personnes, la probabilité est supérieure à 99 pourcent !*

Les gens pensent en général à la probabilité que 2 personnes soient nées un même jour donné, probabilité qui est en effet très faible.

Preuve. En pratique, il est plus facile de déterminer la probabilité $\bar{p}$ (complémentaire) que chaque personne soit née un jour différent. Cette probabilité se trouve en considérant toutes les possibilités d'anniversaires distincts au sein de n personnes (cas favorables), divisé par toutes les possibilités d'anniversaires sans contraintes (il y en a 365^n, si on oublie le 29 février éventuel). Trouver les configurations où toutes les personnes sont nées un jour différent revient à chercher les façons de ranger les n dates d'anniversaire parmi les 365 dates potentielles, et nous devons alors calculer le nombre d'arrangements de n parmi 365, soit :

$$A_{365}^n = (365-0)(365-1)\cdots(365-(n-1)) = \frac{365!}{(365-n)!}.$$

Si vous ne connaissez pas cette formule donnant A_{365}^n, il suffit de procéder comme suit : on choisit la date d'anniversaire de la première personne du groupe, et il y a 365 choix possibles. Une fois ce choix fait, on choisit la date d'anniversaire de la seconde personne du groupe, et il ne lui reste que 364 choix possibles, puisque la date d'anniversaire de la première personne est exclue. Cela donne déjà $(365-0)(365-1)$ possibilités. En poursuivant le raisonnement jusqu'à la n-ième personne, on obtient la formule ci-dessus.

On a donc

$$\overline{p}(n) = \frac{365!}{(365-n)!} \cdot \frac{1}{365^n},$$

où $\overline{p}(n)$ est la probabilité de l'évènement « Un jour anniversaire différent par personne » qui est le complémentaire de « Au moins deux jours d'anniversaires identiques ». Par conséquent la probabilité recherchée est $p(n) = 1 - \overline{p}(n)$. On peut faire l'application numérique :

n	$p(n)$
10	0,12
20	0,41
30	0,71
50	0,97
100	0,9999997
366	1

8.3 L'interrogation surprise

Le paradoxe de l'interrogation surprise a été relevé par le professeur de mathématiques Lennart Ekbom. Il fut publié en 1948 dans *Mind.*

Énoncé : Un professeur annonce à ses élèves : « Il y aura une interrogation surprise la semaine prochaine. » Précisons les termes. Il faut comprendre trois choses :

1. Une interrogation aura lieu durant un « cours » soit le lundi, soit le mardi, soit le mercredi, soit le jeudi, soit le vendredi ; ces jours seront numérotés de 1 à 5 dans la suite de la section.
2. Juste avant le début de l'interrogation, l'élève ne pourra avoir la certitude que l'interrogation va avoir lieu.
3. Une unique interrogation aura lieu.

Paradoxe 5 *Un élève futé fait le raisonnement suivant : « Si jeudi soir, l'interrogation n'a pas eu lieu, alors je serai certain qu'elle est pour vendredi. Ce ne sera donc plus une surprise. L'interrogation ne peut donc avoir lieu vendredi parce c'est le dernier jour possible. Mais puisque l'interrogation ne peut avoir lieu le dernier jour, l'avant-dernier jour devient* de facto, *le dernier jour possible. Ainsi, par récurrence, on en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu. »*

Essayons de formaliser le problème. L'énoncé peut être (partiellement) interprété ainsi :

$$« \exists m \in [\![1,5]\!] : P(m) \wedge \neg(\forall i < m : \neg P(i)) \Rightarrow P(m) »,$$

où m et $i \in [\![1,5]\!]$ sont des jours de la semaine et $P(m)$ le prédicat : « Il y a une interrogation le jour m » ($\neg$ est la négation et $\wedge$ la conjonction). Or, en utilisant l'équivalence entre $\neg(a \Rightarrow b)$ et $(a \wedge \neg b)$, on voit immédiatement la contradiction :

$$\exists m : P(m) \wedge \neg P(m) \wedge \cdots$$

C'est une façon naïve de comprendre le paradoxe mathématiquement. Elle suffit pour le reste de cette section, sauf si vous voulez lire la résolution mathématique du problème, plus loin. Sinon, une formulation plus correcte serait : « la nuit avant l'interrogation surprise, vous ne pouvez pas prouver que l'interrogation est le lendemain », sinon ce ne serait pas une interrogation surprise. Ou, de façon équivalente, « pour tout i entre 1 et 5, si vous pouvez prouver, à l'aide de cette annonce, que $m \geq i$ implique $m = i$, alors $m \neq i$. »

En effet, réussir à prouver que $m \geq i$ implique $m = i$ reviendrait à dire que si le jour de l'interrogation surprise m est au plus tôt le jour i, alors elle est effectivement le jour i. Comme réussir à prouver ceci lui ôterait le statut de surprise, le raisonnement doit mener à $m \neq i$. Si on aime les formules, la formulation mathématique de l'annonce, que je note P, est alors :

$$(m \in [\![1,5]\!]) \bigwedge_{1 \leq i \leq 5} (\mathrm{Pr}(m \geq i \Rightarrow m = i) \Rightarrow (m \neq i)),$$

où $\mathrm{Pr}(m \geq i \Rightarrow m = i)$ est vraie si on peut prouver $m \geq i \Rightarrow m = i$, fausse sinon. À présent, la preuve du paradoxe est similaire : si l'interrogation n'a pas eu lieu d'ici jeudi, alors $m \geq 5$. Comme je sais que $m \in [\![1,5]\!]$, ceci impose $m = 5$, donc je sais prouver, supposant $m \geq 5$, que $m = 5$. Alors, par ce qui a été dit plus haut, $m \neq 5$. De la même façon, on peut prouver que $\mathrm{Pr}(m \geq 4 \Rightarrow m = 4)$ est vraie, donc $m \neq 4$, et ainsi de suite $m \neq 3, 2, 1$, donc P implique $m \notin [\![1,5]\!]$, et se contredit elle-même.

Annoncer la surprise, c'est ôter l'effet de surprise ? Apparemment, il ne s'agit que d'un propos fallacieux de même nature que les paradoxes sorites.

On peut cependant pousser le raisonnement plus loin : comme l'énoncé du professeur se contredit lui-même, alors on est obligés d'admettre que le professeur a menti, et il peut donc ne pas y avoir d'interrogation du tout. Une fois arrivé à ce point, le raisonnement initial ne tient plus la route, et tout est possible. Finalement, même si l'interrogation surprise a lieu le vendredi, on pourra parler de surprise. C'est d'ailleurs le point de départ de la résolution mathématique du problème, plus bas.

Ce paradoxe est en réalité inhérent au mot surprise et à la notion d'aléatoire. Si Lennart dit à Marie : « Je vais te faire une surprise », alors Marie doit s'attendre à une surprise. La surprise sera conforme à son attente ; donc non surprenante. Lennart ne peut plus surprendre Marie que par l'absence de surprise ; c'est-à-dire, en se démentant par le non-faire. En se démentant, il surprend ; donc ne se dément pas.

L'axiome du mensonge En bref, même si le raisonnement de l'élève paraît imparable au premier abord, on sait en pratique que le professeur le surprendra avec son interrogation. L'erreur de l'élève, comme l'a fait remarquer Thomas O'Beirne en 1965, se trouve dans le postulat implicite initial que « Le professeur ne pouvait mentir. »

Il faut donc considérer que la surprise est due non seulement à la date de l'interrogation, mais aussi à la non-sincérité du professeur. La sincérité du professeur ne repose que sur la possibilité du mensonge. On retrouve la première interprétation en ajoutant un méta-axiome : *Le professeur dit vrai.* En d'autres termes, les premiers axiomes sont vrais.

Une autre interprétation de la « surprise » « Annoncer la surprise, c'est ôter l'effet de surprise » est la conclusion aberrante d'un raisonnement basé sur une interprétation vicieuse (voire erronée) du mot surprise. Mais alors, quel sens faut-il donner à un « événement surprise », lorsqu'il est annoncé ?

Qu'il s'agisse d'« avoir une interrogation surprise » ou de « recevoir un cadeau surprise », il faut bien comprendre que la surprise ne peut pas être causée par la survenue de l'évènement, mais réside dans le fait que cet évènement n'est pas totalement défini : dans notre cas, il s'agit de la date de l'interrogation surprise ou de la nature du cadeau, par exemple. De tous ces évènements potentiels qui s'excluent les uns les autres, on sait qu'un seul se produira (en l'occurrence : « avoir une interrogation surprise lundi », ou mardi, *etc.*, et « recevoir un jouet », « recevoir de l'argent »...). Il faut également considérer que la surprise est synonyme d'imprévu, aussi minime soit-il. Ainsi la survenue d'un évènement incertain, mais aussi la non-survenue d'un évènement envisageable, constitueront des surprises.

Avec cette nouvelle interprétation, il est facile de démonter le raisonnement de l'élève à sa base : au jeudi soir, l'interrogation ne constituera certes pas une surprise ; mais la surprise aura déjà eu lieu répartie sur

le lundi, le mardi, le mercredi et le jeudi, et donc le professeur aura tenu parole. En réalité, la surprise survient au moins le lundi et peut se reproduire chaque jour jusqu'au jeudi au plus tard.

La formule « interrogation surprise » est raccourci de « interrogation à une date surprise » et constitue une forme d'abus de langage, qui tend à faire croire que la surprise n'a lieu que le jour de l'interrogation.

En conclusion, l'erreur est donc de considérer une surprise comme un unique évènement ; c'est une vision *a posteriori*. Une situation de surprise est constituée d'au moins deux évènements incertains (une alternative).

Parlons *maths* Le fait que l'énoncé dans un langage mathématique de « Il y aura une interrogation surprise la semaine prochaine. » se contredise lui-même fournit en fait une explication potentielle au paradoxe : l'énoncé P est, simplement, une contradiction. Alors, puisque c'est une contradiction, on peut l'utiliser pour prouver n'importe quoi : comme je le disais en parlant de Bertrand Russell dans le chapitre 6, à partir de quelque chose de faux (ou contradictoire) je peux démontrer ce que je veux ; ainsi, le mardi soir, on peut utiliser l'énoncé P pour prouver que l'examen aura lieu mercredi, par exemple, mais on ne peut pas dire pour autant qu'on sait que l'interrogation aura bien lieu mercredi, parce qu'on peut aussi prouver qu'elle aura lieu jeudi. Pour faire simple, qu'on puisse prouver quelque chose à partir de P n'implique pas qu'on *sait*, précisément parce que P est contradictoire.

Or, quand on a écrit P, on a intuitivement considéré que la notion de savoir pouvait être remplacée par la notion de preuve. Au vu de la situation, il semblerait que notre formulation mathématique de l'annonce du professeur était imprécise. Pour trouver une meilleure formulation de l'annonce, analysons la situation le mardi soir, du point de vue des élèves. Il y a trois possibilités :

- mardi soir, les élèves ne peuvent pas prouver que l'interrogation aura lieu mercredi ;
- mardi soir, les élèves peuvent prouver que l'interrogation aura lieu mercredi, tout comme ils peuvent prouver qu'elle aura lieu tout autre jour (ceci arrivant si, et seulement si le système est inconsistant, on y reviendra) ;
- mardi soir, les élèves peuvent prouver que l'interrogation aura lieu mercredi, et ne peuvent pas le prouver pour tout autre jour de la semaine.

Il semble juste de penser que la troisième possibilité est la seule qui assure que les élèves savent vraiment que l'interrogation surprise sera mercredi. Dans cette optique, il faut alors reformuler « Il y aura une interrogation surprise la semaine prochaine. » en :

« Notons $m \in [\![1, 5]\!]$ le jour de l'interrogation surprise. Pour tout i entre 1 et 5, si on peut prouver (à l'aide de cette annonce) que $m \geq i$ implique $m = i$, et qu'il n'y a pas de j différent de i pour lequel on peut prouver (à l'aide de cette annonce) que $m \geq i$ implique $m = j$, alors $m \neq i$. »

Si on préfère les formules, P devient :

$$(m \in [\![1, 5]\!]) \bigwedge\nolimits_{1 \leq i \leq 5}$$
$$\left\{\Big(\Pr(m \geq i \Rightarrow m = i) \bigwedge\nolimits_{1 \leq j \leq 5, j \neq i} \neg\Pr(m \geq i \Rightarrow m = j)\Big) \Rightarrow (m \neq i)\right\}$$

Pas de panique, c'est juste une expression formelle de ce qui a été dit plus haut. À présent, que se passe-t-il si on essaye de procéder comme dans la première formulation de l'annonce de l'interrogation surprise ? Là encore, m est un entier entre 1 et 5 qui correspond au m-ième jour de la semaine. Comme avant, si, jeudi soir, il n'y a toujours pas eu d'interrogation surprise (donc $m \geq 5$), on peut prouver que l'interrogation surprise aura lieu le lendemain, vendredi (donc $m = 5$). Par contre, on ne peut plus en déduire que $m \neq 5$: il faudrait s'assurer qu'il n'y a pas de jour j avant vendredi pour lequel on puisse prouver que $m \geq 5$ implique

$m = j$. Un tel jour ne peut arriver que si la théorie mathématique dans laquelle on raisonne (disons ZFC, pour ceux qui connaissent), à laquelle on adjoint P, n'est pas consistante, une théorie étant consistante si aucun de ses axiomes ne peut être remis en cause en raisonnant au sein même de cette théorie. Mais, par le second théorème d'incomplétude de Gödel, on ne peut pas prouver la consistance de la théorie au sein de la théorie, donc on ne peut pas en déduire que $m \neq 5$, et on ne peut pas continuer la preuve.

8.4 La vie sur Ganymède

Si l'on prend au pied de la lettre une définition ancienne de la probabilité comme rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles, on arrive à des résultats curieux.

Ainsi y a-t-il des hommes sur le satellite (de Jupiter) Ganymède ? Si nous prenons la définition de la probabilité sans précaution, nous pourrions être tentés de supposer qu'il y a une chance sur deux ! En ce cas, la probabilité qu'il n'y ait autour de Ganymède ni hommes, ni chats, ni chiens, ni poules, ni cafards, ni vers de terre, ni poissons, ni oiseaux peut être rendue aussi proche de 0 qu'on le veut, puisqu'elle est de $(1/2)^N$ où N est le nombre d'espèces considérées.

Il va de soi qu'on ne peut pas prendre le problème de cette façon. Nombre de formules se targuant de démontrer qu'il existe quasi-certainement de la vie ailleurs que sur Terre ont cependant ce type d'approche.

8.5 $2 = 1$, ou $1/0$

$2 = 1$ C'est un raisonnement fallacieux qui fait rêver la jeunesse. Soient a et b deux réels, qu'on va supposer non nuls tant qu'à faire, tels que $a = b$. Alors, en multipliant par b de chaque côté :

$$a \cdot b = b^2.$$

Soit donc, en soustrayant a^2 de chaque côté :

$$a \cdot b - a^2 = b^2 - a^2,$$

ce qu'on va s'empresser de factoriser pour avoir :

$$a \cdot (b - a) = (b - a) \cdot (b + a).$$

On simplifie, et on obtient $a = a + b$. Comme $a = b$, on conclut :

$$a = 2a,$$

soit donc

$$1 = 2.$$

C'est une « preuve » classique que je n'ai pas à expliquer ! Un indice est dans le titre de la section... Si vous la connaissiez déjà, en voici une autre, moins connue :

Soit x un entier. Par définition de la fonction carrée,

$$x^2 = \underbrace{x + \cdots + x}_{x \text{ termes}}.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$2x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x \text{ termes}} = x,$$

d'où, en simplifiant par x :

$$2 = 1.$$

L'erreur échappe beaucoup plus souvent aux gens ici. Elle provient du fait que la première égalité est valable seulement pour des points isolés (les entiers positifs), alors que la dérivation est une opération qui fait appel aux variations de la fonction, c'est-à-dire à ce qui se passe « autour du point », ce qui est clair (je crois ?) quand on écrit $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Cela n'aurait échappé à personne si j'avais effectué le même raisonnement avec $\sin(x) = \cos(x) - 1$ pour tout x multiple de 2π, pour affirmer ensuite que $\cos(x) = -\sin(x)$, ce qui est faux même pour les x multiples de 2π.

J'ai tout de même rencontré une objection au sujet de mon explication ; même si l'objection reçue, qui consistait à montrer qu'on avait en fait l'égalité de la première ligne pour tout réel et pas seulement en des points ponctuels, ne m'a pas vraiment convaincu, je peux faire remarquer que de toute manière, la formule de dérivation classique $(f+g)' = f' + g'$ ne s'applique plus quand le nombre de termes de la somme varie avec la variable x ; cet exemple peut même servir de contre-exemple, au lieu d'être un paradoxe insoluble !

Ceci dit, en voulant jouer au plus idiot, je peux tout de même rendre juste ce résultat : en appliquant $\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ au second membre de l'égalité $x^2 = \underbrace{x + \cdots + x}_{x \text{ termes}}$, j'obtiens :

$$2x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x \text{ termes}} + \underbrace{x + \cdots + x}_{1 \text{ terme}} = x + x = 2x,$$

et je n'ai pas de contradiction. Alors, hein ?

$3 = 0$ Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Ses solutions sont également celles (à l'exception de zéro) de

$$x(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x^3 = -x^2 - x.$$

Or d'après l'équation initiale :

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -x - 1.$$

Donc $x^3 = -(-x-1) - x = 1$. La seule racine réelle possible est 1, et en remplaçant x par 1 dans l'équation initiale, on obtient l'égalité $3 = 0$.

En fait, les équations $x^3 = 1$ et $x^2+x+1 = 0$ ne sont pas équivalentes, donc n'ont pas, *a priori*, les mêmes solutions. Tomber sur l'égalité $3 = 0$ permet, après l'analyse, de s'assurer que 1 n'est pas solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, et c'est tout. Ce n'est donc pas un paradoxe.

$1 = -1$ Considérons l'égalité $-1 = -1$, qui peut s'écrire sous forme de quotients :

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}.$$

Comme $-1 = i^2$, on a :

$$\frac{1}{i^2} = \frac{i^2}{1}.$$

On prend la racine carrée des deux côtés, ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{1}{i^2}} = \sqrt{\frac{i^2}{1}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{i^2}} = \frac{\sqrt{i^2}}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow \frac{1}{i} = \frac{i}{1}.$$

En multipliant par i de part et d'autre, on obtient $1 = i^2$. Et puisque $i^2 = -1$, nous avons alors :

$$1 = -1.$$

Expliquer l'erreur proprement reviendrait à discuter du sens de $\sqrt{-1}$ (on peut y donner un sens !), et on se doute bien que manipuler la racine carrée innocemment, comme pour des nombres réels positifs, ne reste pas impuni. De manière générale, manipuler des puissances non entières avec des nombres qui ne sont pas des réels positifs engendre très facilement des paradoxes : $-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \left((-1)^6\right)^{1/2} = \sqrt{1} = 1$.

$2/3 = 0$ Considérons l'intégrale $\int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t$. Par intégration en tant que monôme du second degré : $\int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$. Effectuons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $u = t^2 \Leftrightarrow \mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$t = -1 \Rightarrow u = 1, t = 1 \Rightarrow u = 1 \ .$$

D'où :

$$\int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{1}^{1} \sqrt{u} \mathrm{d}u = 0.$$

Des deux calculs de l'intégrale, on déduit : $\frac{2}{3} = 0$. Ceci est la preuve de l'importance des difféomorphismes $\mathcal{C}^1$ dans les changements de variables : l'application $t \mapsto t^2$ n'est même pas bijective de $[-1, 1]$ dans $[0, 1]$.

$4 = 3$ Supposons $a + b = c$, avec a, b et c vos nombres favoris. Ceci peut aussi s'écrire :

$$4a - 3a + 4b - 3b = 4c - 3c.$$

Après réarrangement des termes :

$$4a + 4b - 4c = 3a + 3b - 3c.$$

En factorisant et en simplifiant par $(a + b - c)$, on trouve

$$4 = 3.$$

Ceci est une simple variante de la première preuve de $2 = 1$.

Tous les entiers strictement positifs sont égaux Pour montrer cela il suffit de prouver que pour tout n, des entiers A et B tels que $\max(A, B) = n$ vérifient $A = B$. Faisons une récurrence. Pour $n = 1$, $\max(A, B) = 1$ implique forcément que $A = B = 1$. Supposons à présent que pour tout n, on ait la proposition formulée. Alors, si A et B vérifient $\max(A, B) = n + 1$, on a $\max(A - 1, B - 1) = n$, et par hypothèse de récurrence $A - 1 = B - 1$, donc $A = B$. L'erreur est quelque part dans la dernière phrase...

$1 + 1 = 2$ Soit n un entier naturel quelconque. On a $n(2n - 2) = n(2n - 2)$. Alors

$$(n - n)(2n - 2) = 0.$$

Soit donc, en développant :

$$2n(n-n) - 2(n-n) = 0.$$

En simplifiant, on obtient alors

$$n + n = 2.$$

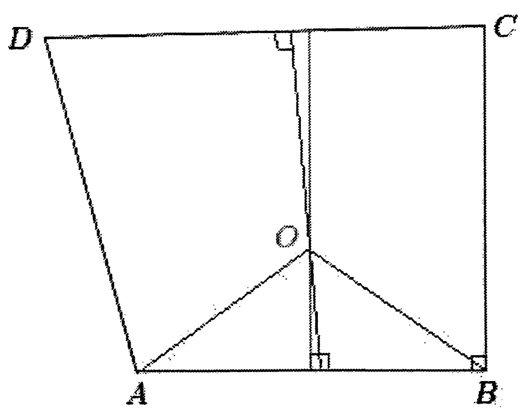
En particulier, pour $n = 1$, on a effectivement $1 + 1 = 2$.

8.6 Paradoxes à base de géométrie

Bon, je suis sûr que certains d'entre vous se sentent insultés par tous les paradoxes ci-dessus qui les trompent, alors que « ouais, c'est juste qu'on perd le contact avec la réalité avec ce formalisme à outrance ! Mais moi, les mathématiques je les vis à l'instinct, dans le monde sensible, je suis un géomètre, tu vois. »

Rien que pour eux, je propose deux paradoxes géométriques, où j'utilise même les degrés au lieu des radians pour éviter tout soupçon. Je vais quand même prouver que $90 = 110$, pour commencer.

$90 = 110$ Voici les hypothèses que j'utilise pour faire ma figure : l'angle $\widehat{CBA}$ mesure 90 degrés, l'angle $\widehat{DAB}$ mesure 110 degrés, les segments BC et AD sont égaux, et O est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$. Considérez les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{DAB}$. Il est clair que



$$\widehat{CBA} = \widehat{CBO} + \widehat{OBA},$$

et que

$$\widehat{DAB} = \widehat{DAO} + \widehat{OAB}.$$

De plus, les angles $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OAB}$ sont égaux, parce que le triangle $\widehat{AOB}$ est isocèle en O ($OA = OB$, O étant sur la médiatrice de $[AB]$).

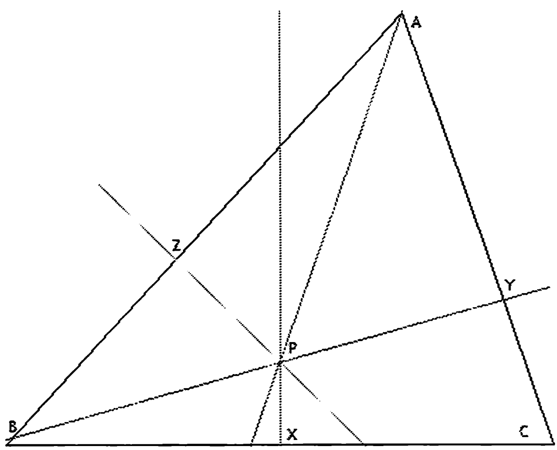
À présent, $AD = BC$ par construction, $OA = OB$ parce que O appartient à la médiatrice de $[AB]$, et $OD = OC$ parce que O appartient à la médiatrice de $[CD]$. Ceci montre que les triangles AOD et BOC sont semblables, si bien que les angles correspondants sont égaux, et on a $\widehat{CBO} = \widehat{DAO}$ en particulier.

En injectant ceci dans les égalités ci-dessus :

$$\widehat{CBA} = \widehat{CBO} + \widehat{OBA} = \widehat{DAO} + \widehat{OAB} = \widehat{DAB},$$

ce qui prouve bien que $90 = 110$.

Tous les triangles sont isocèles (donc équilatéraux) Si vous vous êtes remis du fait que $90 = 110$ contre toute attente, vous pouvez attaquer ce paradoxe :



En effet, imaginez un triangle ABC comme ci-dessus. Tracez la bissectrice en A et la médiatrice de $[BC]$. Elles se rencontrent en un point P. Tracez les perpendiculaires à $[AB]$ et $[AC]$ passant par P ; on appelle Z et Y les intersections respectives de ces perpendiculaires avec $[AB]$ et $[AC]$.

Les triangles APZ et APY sont semblables, parce qu'ils ont un côté adjacent, et on a les égalités angulaires $\widehat{AYP} = \widehat{AZP}$ et $\widehat{ZAP} = \widehat{YAP}$.

Ainsi, les côtés qui se correspondent sont proportionnels. Ainsi, $AZ = AY$ et $ZP = YP$.

Les triangles PXB et PXC sont, pour des raisons semblables, semblables (héhé). Alors, $PB = PC$. Ainsi, les triangles ZPB et YPC sont semblables : les hypoténuses sont égales, ils ont chacun un angle droit, et $BX = XC$. On en déduit que $BZ = CY$.

Bref : $BZ + ZA = CY + YA$, d'où $BA = CA$. Alors, hein ?

8.7 Le développement décimal de l'unité

Le développement décimal de l'unité est une curiosité mathématique qualifiée de paradoxe en raison de son caractère contre-intuitif. Il correspond à l'égalité entre les deux écritures du développement décimal de l'unité : $1 = 0,\overline{9}$ avec $0,\overline{9} = 0,99999\ldots$

Le côté contre-intuitif de ce raisonnement tient au fait que, dans notre esprit, l'écriture $0,\overline{9} = 0,99999\ldots$ correspond à une suite finie de 9, c'est-à-dire $0,9999\ldots9$. Ainsi la multiplication par 10 puis le résultat de la soustraction choque l'esprit et semble faux : il le serait d'ailleurs si la suite de 9 était finie. Et même parmi ceux qui ont bien compris les preuves suivantes, les explications peuvent devenir vaseuses après approfondissements, traduisant encore une incompréhension du problème. Et pour cause : on a tendance à oublier que les écritures des nombres « à virgule » sont des *représentations* de nombres (on parle de x décimale, où $x \in \{$représentation, écriture$\}$, ou de développement décimal), et non pas des nombres, si on veut être rigoureux ; alors, le paradoxe montre qu'un nombre peut avoir plusieurs représentations décimales. Sans cette remarque à l'esprit, il est effectivement gênant de voir que deux nombres visiblement différents sont en fait le même.

Preuve 1. On pose la variable x :

$$x = 0,\overline{9}.$$

En multipliant par 10, il s'ensuit que :

$$10x = 9,\overline{9}.$$

On procède à une soustraction entre les deux équations précédentes :

$$9x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9.$$

À partir de cela, on conclut que :

$$9x = 9 \Rightarrow x = 1.$$

Preuve 2. Pour une démonstration plus rigoureuse, il faut commencer par définir parfaitement ce qu'est 0,999... En écrivant $0,99999\cdots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots$, on définit $0,99999\ldots$ comme une série géométrique de premier terme $a = 0,9$ et de raison $q = 1/10$. Ainsi :

$$0,\overline{9} = 0,99999\ldots = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} 0,9 \times \frac{1}{10^i} = 0,9 \cdot \frac{1}{1-10^{-1}} = 1.$$

La deuxième preuve est plus satisfaisante, puisqu'elle précise la nature des choses, et fait apparaître la nature analytique de la représentation décimale $0,99999\ldots$, qui est une des raisons du paradoxe, même si ça n'explique pas tout. En effet, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels permet, en quelque sorte, de « compléter » l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels en considérant les nombres dont les développements décimaux ne subissent aucune restriction (dans le cas de $\mathbb{Q}$, les développements sont périodiques ou finis). Mais on peut aussi compléter $\mathbb{Q}$ en considérant le développement en base p (donc p-adique) des rationnels, où p est un nombre premier, et en s'autorisant cette fois-ci de s'autoriser tous les développements p-adiques, mais cette fois « avant la virgule » : le nombre $\cdots 101010101$ est un exemple de tel nombre en base 2. On obtient alors l'ensemble $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Cette façon de compléter « avant la virgule » peut paraître étrange, mais ce développement a la décence de toujours être unique.

Le paradoxe illustré par l'exemple de l'unité est que tout nombre décimal, c'est-à-dire admettant un développement décimal fini, admet également un développement infini, formé uniquement de 9 à partir d'un certain rang. Le développement fini est l'écriture propre, celui comportant une infinité de 9 est l'écriture impropre. Finalement, ce sont les objets apparemment les plus simples en écriture décimale qui offrent les pires complexités : on croit que 1 est plus simple à écrire en écriture décimale que π, et pourtant π admet une écriture unique, alors que 1 en admet deux !

8.8 Le paradoxe de Russell

Ce paradoxe est souvent soumis aux élèves qui découvrent la théorie des ensembles, comme un malin plaisir des enseignants à faire passer les élèves par les horreurs de la théorie, avant d'en montrer les merveilles !

Paradoxe 6 *L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ? Si on répond oui, alors, comme par définition* *les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-même, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si on répond non, alors, il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction de nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend l'existence d'un tel ensemble paradoxale. Redit dans le langage formel actuel, si l'on pose* $A = \{ E \mid E \notin E \}$*, on a immédiatement que* $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$*, donc chacune des deux possibilités,* $A \in A$ *et* $A \notin A$*, mène a une contradiction.*

Le paradoxe utilise très peu des propriétés de l'appartenance, une relation binaire suffit, ce qui a permis à Bertrand Russell de l'illustrer sous la forme plus imagée, mais qui a la même structure, du paradoxe du barbier. Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ? L'étude des deux possibilités conduit de nouveau à une contradiction. On résout le problème en affirmant qu'un tel barbier ne peut exister (ou, en jouant sur les mots, qu'il est une femme), ce qui ne surprendra personne : il n'y a pas vraiment de paradoxe. Plus exactement la démonstration qui précède constitue justement une démonstration de la non-existence d'un tel barbier. Par ailleurs, ce paradoxe permet de prouver qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, ce qui ne surprendra personne, là encore : on peut le voir comme un catalogue qui référence tous les catalogues, qui ne sera pas exhaustif s'il ne se référence pas lui-même. On retrouve le contexte du paradoxe.

Pourquoi les choses ne sont-elles pas aussi simples en théorie des ensembles ? Un principe qui semble assez naturel est de considérer que toute propriété, plus précisément tout prédicat du langage, définit un ensemble : celui des objets qui vérifient cette propriété. Mais si l'on utilise ce principe, dit principe de compréhension sans restriction, on doit admettre l'existence de l'ensemble paradoxal, défini par le prédicat « ne pas appartenir à soi-même ». C'est ce que l'on a fait justement en « définissant » l'ensemble $A = \{ E \mid E \notin E \}$ – et la théorie devient contradictoire.

Un paradoxe plus amusant autour des ensembles est celui de Berry : il résulte de la considération des entiers naturels définissables en moins de quinze mots français.

Paradoxe 7 *Soit* B *cet ensemble. Il est fini, car les séquences de quinze mots français sont en nombre fini. Soit* a *le plus grand élément de* B*. Soit* b *l'entier succédant à* a*. Il n'appartient donc pas à* B*. Pourtant,* b *peut être défini en quatorze mots : « Le successeur du plus grand entier naturel définissable en moins de quinze mots français. » D'où la contradiction.*

CHAPITRE 9

CITATIONS

Pour conclure, quelques petites citations toujours bien sympathiques à connaître. Je ne fais pas part de mon opinion pour toutes ces citations, avec lesquelles je suis parfois en profond désaccord. Je ne peux dire qu'une chose : méditez là-dessus !

9.1 Celles de mathématiciens

« Tout est connaissable par le nombre et rien ne peut être connu ou même conçu sans lui. » Philolaos.
« Il y a des choses qui paraissent incroyables à la plupart des personnes qui n'ont pas étudié les mathématiques. » Archimède.

« La nature parle la langue des mathématiques : les lettres de cette langue sont les triangles, les cercles et autres figures mathématiques. » Galilée.

« La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie les nombres. » Gottfried Wilhelm Leibniz.

« Entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes. » René Descartes.

« Les géomètres qui ne sont que géomètres ont donc l'esprit droit, mais pourvu qu'on leur explique bien toutes choses par définitions et principes ; autrement ils sont faux et insupportables, car ils ne sont droits que sur les principes bien éclaircis. » Blaise Pascal.

« Si j'ai vu plus loin que d'autres, c'est parce que j'étais soutenu par les épaules de géants. » Isaac Newton *.

*. Cette citation a une origine bien plus ancienne, puisqu'elle est due à Bernard de Chartres, « pythagoricien médiéval ». Elle est aussi attribuée à Blaise Pascal, Victor Hugo...

« Les mathématiques sont une sorte de jouet que la nature nous a lancé pour nous consoler et nous divertir dans cette vallée de larmes. » Jean-Baptiste le Rond d'Alembert.

« L'imagination d'un géomètre qui crée n'agit pas moins que dans un poète qui invente. » Jean-Baptiste le Rond d'Alembert.

« Lisez Euler, c'est notre maître à tous. » Pierre Simon de Laplace.

« La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques. » Carl-Friedrich Gauss.

« Il ne faut pas confondre ce qui nous paraît improbable et non naturel avec ce qui est absolument impossible. » Carl-Friedrich Gauss.

« Les mathématiciens se soutiennent les uns les autres sur leurs épaules. » Carl-Friedrich Gauss.

« La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques. » Denis Poisson.

« Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie ; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice. » Michel Chasles.

« Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera "Je ne sais pas le reste". » Évariste Galois.

« Tous les pédagogues s'entendent sur ce point : il faut surtout pratiquer assidûment les mathématiques, parce que leur connaissance nous est de la plus grande utilité pour la vie pratique. » Félix Klein.

« En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres. » Charles Hermite.

« Nous, les mathématiciens, sommes tous un peu fous. » Lev Landau.

« Je peux assurer qu'elle est un grand mathématicien, mais que c'est une femme, je ne peux pas le jurer. † » Lev Landau.

« Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'Homme. » Léopold Kronecker.

« On peut ainsi définir les mathématiques comme étant la science dans laquelle nous ne connaissons jamais ce dont nous parlons et nous ne savons jamais si ce dont nous parlons est vrai. » Bertrand Russell.

« Certaines personnes ont un horizon de rayon zéro et l'appellent leur point de vue. » David Hilbert.

« On ne peut nier qu'une grande partie des mathématiques élémentaires est d'une utilité pratique considérable. Mais ces parties des mathématiques sont dans l'ensemble assez ennuyeuses. Ce sont justement celles qui ont la valeur esthétique la plus faible. Les "vraies" mathématiques des "vraies" mathématiciens, les mathématiques de Fermat, de Gauss, d'Abel et de Riemann sont presque totalement "inutiles". » Godfrey Harold Hardy.

« On se souviendra d'Archimède quand on aura oublié Eschyle, parce que les langues meurent, mais pas les idées mathématiques. Immortalité est sans doute un mot creux, mais un mathématicien a probablement plus de chances d'en jouir qu'un autre. » Godfrey Harold Hardy.

« L'essence des mathématiques, c'est la liberté. » Georg Cantor.

« Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes. » Henri Poincaré.

« Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? » Henri Poincaré.

« Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. » Henri Poincaré.

« Une théorie est bonne lorsqu'elle est belle. » Henri Poincaré.

« Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets. » Henri Poincaré.

« Une bonne blague mathématique est meilleure, et donne de meilleures mathématiques, que des douzaines d'articles médiocres. »

†. En parlant d'Emmy Noether.

John Edensor Littlewood.

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est compliquée. » John Von Neumann.

« Quand les lois mathématiques s'appliquent à la réalité, elles ne sont pas exactes, et quand elles sont exactes, elles ne s'appliquent pas à la réalité. » Albert Einstein.

« En sciences, nous vivons à présent le privilège unique de nous asseoir côte à côte des géants dont les épaules nous soutiennent. » Gerald Holton.

« Les mathématiciens se soutiennent les uns les autres sur leurs épaules, pendant que les informaticiens se soutiennent les uns les autres sur leurs orteils. » Richard Hamming.

« Ce n'est pas qu'en diffusant plus largement la connaissance de la méthode mathématique, on dise forcément plus de choses intelligentes, mais on dit certainement moins de sottises. » Karl Menger.

« L'histoire des sciences exactes est dominée par l'idée d'approximation. » Bertrand Russell ‡.

« Est rigoureuse toute démonstration qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. » René Thom.

« La logique est l'hygiène des mathématiques. » André Weil.

« Dieu existe, parce que les mathématiques sont cohérentes ; le diable existe, parce que nous ne pouvons pas le prouver. » André Weil.

« Dieu est un enfant et quand il a commencé à jouer, il a fait des mathématiques. C'est le plus divin des jeux entre les hommes. » V. Erath.

« Au début de ce siècle, on introduisit dans les mathématiques (surtout Hilbert) un principe démocratique autodestructeur, selon lequel tous les systèmes axiomatiques ont le même droit à l'analyse et la valeur d'un résultat mathématique n'est pas déterminée par son importance et son utilité pour d'autres disciplines, mais uniquement par sa difficulté, comme en alpinisme. Ce principe a rapidement conduit les mathématiciens à rompre avec la physique et à s'isoler de toutes les autres sciences. Aux yeux de toutes les personnes normales, ils se sont mués en une obscure caste sacerdotale... Des questions singulières, comme le problème de Fermat ou les sommes de nombres premiers, furent érigés en problèmes soi-disant centraux des mathématiques. » Vladimir Igorevitch Arnold.

« Comme le montre l'histoire des mathématiques, les idées simples arrivent en dernier. » Jacques Hadamard.

« Les bons mathématiciens voient les analogies. Les excellents mathématiciens voient les analogies entre les analogies. » Stanislaw Marcin

‡. C'est exact... Ou du moins, c'est rudement proche de la vérité !

Ulam.

« Il est difficile de faire la différence entre un mathématicien qui dort et un mathématicien qui travaille. » André Lichnerowicz.

« Les mathématiques consistent en la démonstration des faits les plus évidents par la voie la moins évidente. » György Polya.

« Un mathématicien est quelqu'un qui, prenant une tasse de thé, est capable d'en faire une théorie. » Paul Erdős.

« Un mathématicien est une machine qui transforme le café en théorèmes [§]. » Alfréd Rényi (souvent attribué à Paul Erdős).

« Cependant, pour les lemmes on utilise seulement du café peu serré. » Paul Turán.

« Les structures sont les armes du mathématicien. » Nicolas Bourbaki.

« Dans mon travail, j'ai toujours essayé d'unir la vérité et la beauté, mais quand j'avais à choisir entre les deux, je choisissais en général la beauté. » Hermann Weyl.

« La science est une équation différentielle, et la religion une condition aux limites. » Alan Turing.

« Le sexe est la sublimation de l'excitation mathématique. » Michael C. Reed.

« On entend dire que les physiciens sont soutenus par les épaules de quelqu'un d'autre. Si c'est vraiment le cas, alors les programmeurs sont soutenus par les orteils de quelqu'un d'autre, et les ingénieurs logiciels creusent leurs cercueils mutuels. » Inconnu.

9.2 Celles de non mathématiciens

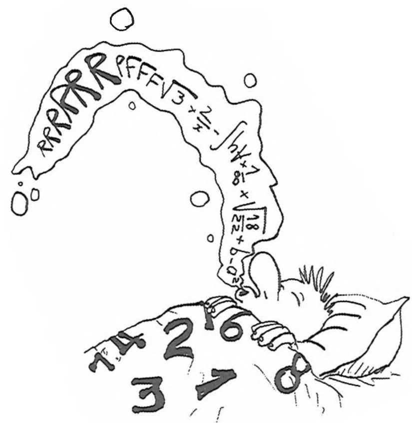
« Les mathématiques sont comme le jeu d'échecs, en ce sens qu'elles appartiennent à la jeunesse, ne sont pas trop difficiles, amusantes, et sans péril pour l'âme. » Platon.

« Celui qui peut rigoureusement définir et diviser doit être vu comme un dieu. » Platon.

« Les bons chrétiens devraient se méfier des mathématiciens et de tous ceux qui font des prophéties creuses. Le danger est d'autant plus présent que les mathématiciens ont fait un pacte avec le démon, pour assombrir l'esprit et emprisonner l'homme dans les limites de l'Enfer. » Saint Augustin [*].

§. C'est surtout vrai des théoriciens de la percolation !

*. Pour être précis, *mathematici* signifiait « astrologues », à son époque. D'où les « prophéties ».



« Si on me donne une formule dont je ne comprends pas le sens, je n'apprends rien ; mais que dire si je sais déjà ce que la formule enseigne ? » Saint Augustin.

« Lorsque nous ne pouvons approcher le divin d'aucune autre manière qu'à l'aide de symboles, nous nous servons des symboles mathématiques, les mieux adaptés, car ils possèdent une certitude indestructible. » Nicolas de Cuse.

« La connaissance du divin est inaccessible à celui qui est inculte en mathématiques. » Nicolas de Cuse.

« Voici un moyen de ne pas manquer le paradis : d'un côté un mathématicien, de l'autre un jésuite ; c'est ainsi accompagné que l'on fera son chemin ou jamais. » Frédéric II le Grand.

« De bonnes mœurs ont plus de valeur pour la société que tous les calculs de Newton. » Frédéric II le Grand.

« Dans toute théorie particulière de la nature, il n'y a de science proprement dite qu'autant qu'il s'y trouve de mathématique. » Emmanuel Kant.

« Ceux que l'on appelle les mathématiciens de profession se sont appuyés sur l'incapacité des autres personnes et ont acquis un crédit de profondeur d'esprit, qui présente une grande similitude avec celui de sainteté dont jouissent les théologiens. » Georg Christoph Lichtenberg.

« Les mathématiques sont certes une science admirable, mais les mathématiciens souvent ne valent pas le diable. Il en est des mathématiciens presque comme de la théologie. De même que ceux qui se consacrent à cette dernière, surtout quand ils exercent une fonction, prétendent à un crédit particulier de sainteté et à une parenté plus étroite avec Dieu, bien que bon nombre d'entre eux soient de véritables vauriens, le soi-disant mathématicien revendique très souvent d'être considéré comme un penseur profond, même si parmi eux se trouvent les têtes remplies du plus grand fatras que l'on puisse rencontrer, incapables de quoi que ce soit qui demande de la réflexion, dès lors qu'il n'est pas directement possible de le réaliser par cette facile combinaison de signes qui relève davantage de la routine que de la pensée. » Georg Christoph Lichtenberg.

« Je crois aussi qu'il n'y a rigoureusement pour l'homme qu'une unique science, et c'est la mathématique pure. Ici nous n'avons besoin que de notre esprit. » Georg Christoph Lichtenberg.

« On sourit aux distractions des mathématiciens. On frémit en songeant à celles que pourrait avoir un chirurgien. » Sacha Guitry.

« Les mathématiciens sont un peu comme les Français ; quand on leur parle, ils traduisent ce qu'on leur dit dans leur langue et aussitôt c'est tout autre chose. » Johann Wolfgang von Goethe.

« Il est impossible de nouer une relation sereine avec les mathématiciens. » Johann Wolfgang von Goethe.

« Il est mathématicien, donc opiniâtre. » Johann Wolfgang von Goethe.

« Comme la dévotion, les mathématiques servent à tout, mais comme elle, ne sont pas l'affaire de tout le monde. » Chr. J. Krauss.

« La force mathématique est la force d'organisation, le concept de mathématiques est le concept de science même. Toutes les sciences doivent donc devenir des mathématiques, la vie la plus élevée est mathématique, la vie des dieux est mathématiques, les mathématiques pures sont une religion. Quiconque prend un livre de mathématiques sans recueillement et ne lit pas comme la parole de Dieu, ne peut le comprendre. Tous les émissaires de Dieu doivent être des mathématiciens. » Novalis.

« Ce qui prouve que l'arithmétique est la plus basse de toutes les activités intellectuelles, c'est qu'elle est la seule qui puisse être exercée aussi à l'aide d'une machine. Or, toute *analysis finitorum et infinitorum* se ramène finalement au calcul. On peut ainsi mesurer le "profond sens mathématique". » Arthur Schopenhauer.

« Le "une fois un" ne m'est toujours pas familier. » Franz Grillparzer.

« Celui qui ne peut se représenter un point est tout simplement trop paresseux pour le faire. » Brenneke.

« $1 \times 1 = 1$, indéniablement. Mais $(1)^2$ n'est pas égal à 1, parce que le carré d'un nombre donné doit être supérieur au nombre lui-même. Logiquement, la racine de 1 ne peut être 1, parce que la racine d'un nombre doit être inférieure au nombre lui-même. Pourtant, du point de vue mathématique ou formel, $\sqrt{1} = 1$. Les mathématiques contredisent dans ce cas la logique ou le simple bon sens et c'est pourquoi les mathématiques sont irrationnelles dans le cas de ce nombre fondamental. C'est sur la base de cette absurdité, le 1, que sont ensuite construites toutes les autres valeurs et sur ces valeurs fausses repose la science mathématique, la "seule science exacte, infaillible". Mais c'est cela les mathématiques ! Un jeu sage pour gens qui n'ont rien à faire. » August Strindberg.

« Là aussi, le principe de base est une application injustifiée d'une méthode logique à des cas auxquels, à strictement parler, elle ne s'applique pas, ou une prise en considération en tant que nombres de figures qui ne sont pas de vrais nombres. Les nombres négatifs constituent une autocontradiction, comme le reconnaissent tous les mathématiciens. » Hans Vaihinger.

« Les mathématiques ne sont pas préjudiciables aux pulsions de vie. » Paul Möbius.

« Son cerveau se développe en permanence, du moins pour ce qui concerne les parties qui traitent les mathématiques. Elles ne cessent de gonfler... Sa voix n'est plus qu'un bruit de crécelle, qui suffit pour produire des formules. Il en perd le rire, sauf quand il s'agit de la découverte soudaine d'un paradoxe mathématique. Son émotion est à son comble, quand il est en train de résoudre un nouvel exercice d'arithmétique. » Herbert George Wells.

« La religion et les mathématiques ne sont que deux différentes formes d'expression de la même exactitude divine. » Michael Faulhaber.

« La majorité des gens éprouvent vis-à-vis des mathématiques des sentiments comme ceux que doit, selon Aristote, éveiller la tragédie, à savoir la pitié et la crainte. La pitié pour ceux qui sont obligés de se tourmenter avec les mathématiques et la crainte que l'on pourrait se retrouver soi-même un jour dans cette situation périlleuse. » Paul Epstein.

« En tout cas, moi je ne connais aucune explication satisfaisante concernant la raison pour laquelle tout nombre impair (à partir de 3), multiplié par lui-même, donne toujours un multiple de 8 avec un reste égal à 1. » Erich Bischoff.

« Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. » Napoléon Bonaparte.

« Celui qui ne vous a pas connues (*i.e.* les maths) est un insensé ! [...] celui qui vous connaît et vous apprécie ne veut plus rien des biens de la terre ; se contente de vos jouissances magiques ; et, porté sur vos ailes sombres, ne désire plus que de s'élever, d'un vol léger, en construisant une hélice ascendante ; vers la voûte sphérique des cieux. La terre ne lui montre que des illusions et des fantasmagories morales ; mais vous, ô mathématiques concises, par l'enchaînement rigoureux de vos propositions tenaces et la constance de vos lois de fer, vous faites luire, aux yeux éblouis, un reflet puissant de cette vérité suprême dont on remarque l'empreinte dans l'ordre de l'univers. » Comte de Lautréamont.

« Aux époques antiques et dans les temps modernes, plus d'une grande imagination humaine vit son génie [...] se [demander], penchée sur le précipice d'un point d'interrogation fatal, comment se fait-il que les mathématiques contiennent tant d'imposante grandeur et tant de vérité incontestable, tandis que, si elle les compare à l'homme, elle ne trouve en ce dernier que faux orgueil et mensonge. » Comte de Lautréamont.

« Un mathématicien est un aveugle dans une pièce sombre à la recherche d'un chat noir qui n'est pas là. » Charles Darwin.

« La médecine rend les gens malades, les mathématiques les rendent tristes et la théologie les rend iniques. » Martin Luther.

« En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un "éléphant" et une décomposition spectrale une "trompe". On peut alors démontrer un théorème suivant lequel "Tout éléphant a une trompe." Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris. » Gérald Sussman.

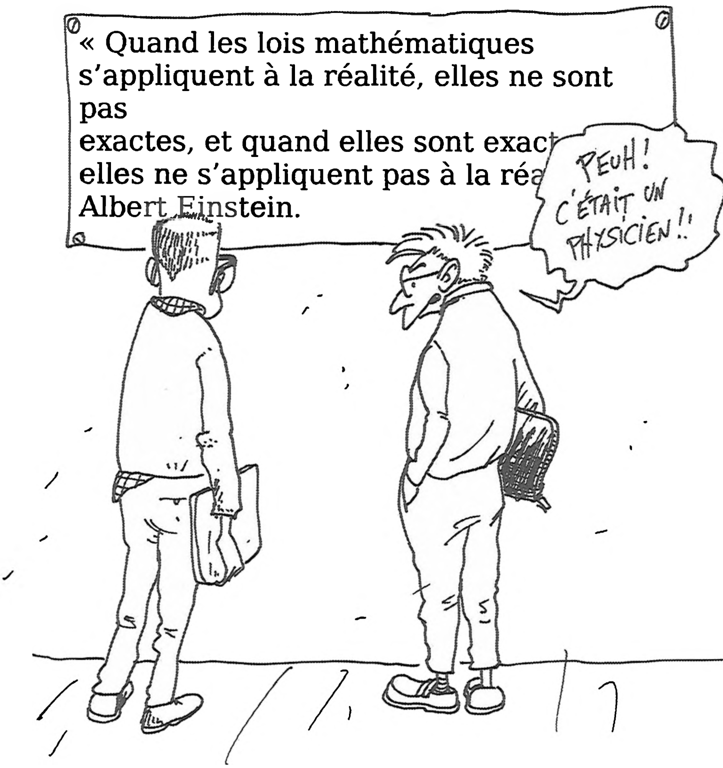
« Si je n'ai pas vu aussi loin que d'autres, c'est parce que des géants se tenaient sur mes épaules. » Hal Abelson.

« Les maths ont toujours été mon point faible. Je n'arrivais pas à convaincre mes enseignants que la plupart de mes réponses étaient ironiques. » Calvin Trillin.

« J'ai entendu dire que le gouvernement voulait taxer l'ignorance mathématique. C'est drôle, je pensais que c'était le rôle de la loterie ! » Gallagher.

« Faire des maths, c'est la seule façon socialement acceptable de se masturber en public. » Dimitri Karpov.

« $\mathbb{R}$ a été inventé pour combler les trous de $\mathbb{Q}$. » Sergey Bernikov.


« Quand les lois mathématiques
s'appliquent à la réalité, elles ne sont
pas
exactes, et quand elles sont exac
elles ne s'appliquent pas à la ré
Albert Einstein.
PEUH ! C'ÉTAIT UN PHYSICIEN !!

BIBLIOGRAPHIE

[Ada] Colin Adams, *The Knot Book*, 307 pages, American Mathematical Society, 2004.

[Ame] *The American Mathematical Monthly*, Aug.-Sept. 1938, pp. 446-447.

[Ang] Dana Angluin, *Sigact News*, Winter-Spring 1983, Volume **15** (1).

[Apa] Chen Apan, *0% de matière grise*, 64 pages, Éditions Pole (simple), 2005.

[Bet] Hans Bethe et Robert Bacher, *Reviews of Modern Physics*, volume 8, 1936.

[Beu] Albrecht Beutelspacher, *In Maths war ich immer schlecht...*, 204 pages, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2007[†].

[Had] Mark Haddon, *The Curious Incident of the Dog in the Night-Time*, 226 pages, Vintage, 2004.

[Her] Reuben Hersh, *How to do and write math research*, Math. Intelligencer, 19 n°2, 1997.

[Hob] Ernest William Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 1927, volume 1, pages 456-457.

[Int] <u>**INTERNETS**</u>, 1990-2010.

[Kan] Francis Casiro, *Les kangourous de Poincaré*, 48 pages, ACL-Éditions, 1997.

†. En fait je l'ai lu traduit en français, mais ça rend ma bibliographie plus classe comme ça...

[Kar] Dimitri Karpov, *Complements about the infinitude of composite numbers*, Inventiones mathematicae, n°954, 2011.

[KLT] Dimitri Karpov, Minos Libbouet et Roland Tridiech, *Pourquoi est-il si difficile de calculer le degré d'une blague mathématique ?*, SMF, 2010.

[Lau] Comte de Lautréamont, *Les Chants de Maldoror*, 476 pages, Flammarion, 1990.

[Mag] André Deledicq, *La magie du calcul*, 64 pages, Éditions du Kangourou, 1993.

[NUT] NUTWORKS.

[Osg] William Fogg Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vol. 1, 1928, p.748.

[Ovi] Ovide, *Les métamorphoses*, 620 pages, folio classique, 1992.

[Pól] György Pólya, *Uber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betref-. fend die Irrfahrt im Straßennetz*, Mathematische Annalen 83 (1921), 149-160.

[Pri] William Poundstone, *Prisoner's dilemma*, 294 pages, Oxford University Press, 1993.

[Rou] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, 427 pages, Éditions Cassini, 2009.

[Sau] Marcus du Sautoy, *La symphonie des nombres premiers*, 491 pages, Éditions Héloïse d'Ormesson.

[Sei] Herbert Seifert et William Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, 1934, pp. 2-3.

[Val] Valmiki, *Rama's last bow*, Ramayan II.

[Wie] Matthew P. Wiener, <11485@ucbvax>, Re : YALBJ, 1986.

[Wie2] Norbert Wiener, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, 1933, pp. 73-74.

[Win] Bruno Winckler, *Recueil de blagues mathématiques et autres curiosités*, 238 pages, 2011.

INDEX

Achevé d'imprimer en janvier 2012 par Normandie Roto Impression s.a.s., 61250 Lonrai
N° d'impression : 114761 — Dépôt légal : janvier 2012 — *Imprimé en France*

BLAGUES MATHÉMATIQUES

ET AUTRES CURIOSITÉS

Vous n'arrivez pas à convaincre vos proches que vous faites des mathématiques sous prétexte que c'est un art, la clé du monde, la beauté à l'état pur, que la philosophie n'est pas assez exacte ou que tout le monde a essayé de vous dissuader ?
Avec cet ouvrage, qui recèle des centaines de blagues sur les mathématiques et les mathématiciens accompagnées de quelques vérités croustillantes sur la profession, vous arriverez cependant à les convaincre que le monde des mathématiques est loin d'être froid, bien au contraire, mais bien vivant, voire drôle !
Avec un peu de chance, le néophyte sautera par cette fenêtre vers l'excentricité et le vertige des mathématiques, et se surprendra à savoir démontrer le théorème de Fermat dans la marge, ou qu'un éléphant peut rentrer dans un frigo.
Le contenu est accessible en grande partie au profane, et satisfera également les mathématiciens endurcis.

9 782729 864514

WW