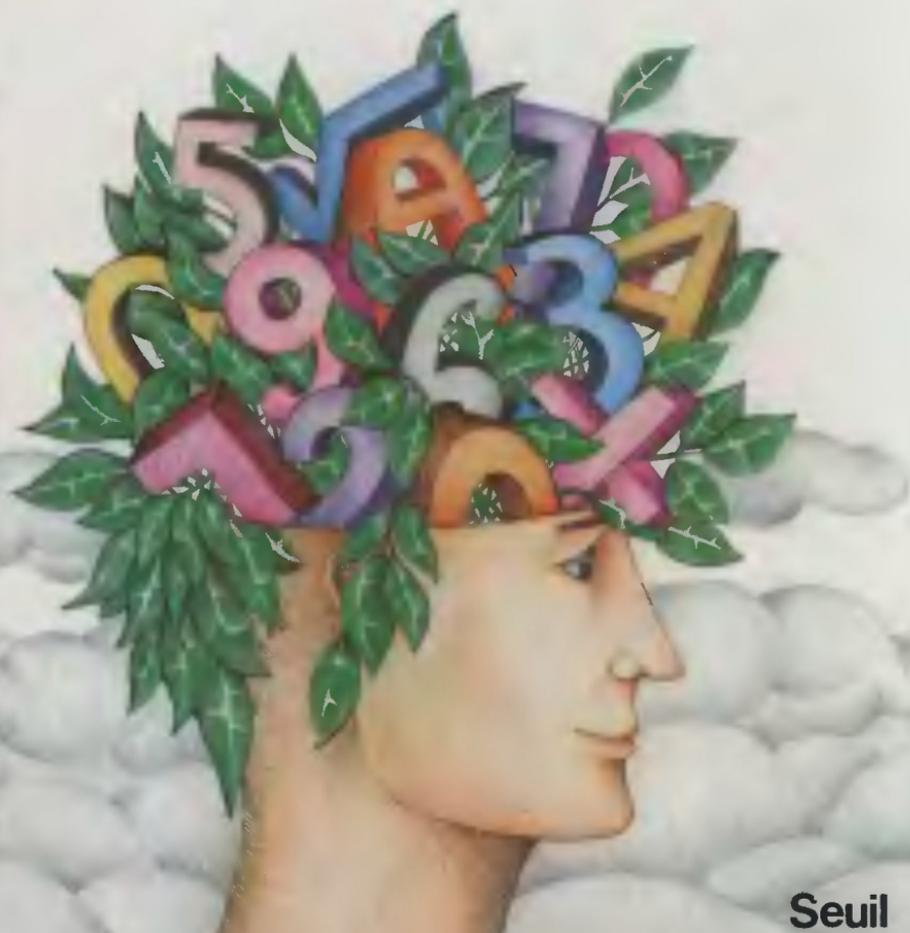


Nouveaux
jeux
de l'esprit
et divertissements
mathématiques

Jean-Pierre Alem



Seuil

Nouveaux
jeux
de l'esprit
et divertissements
mathématiques

Jean-Pierre Alem

Seuil

DU MÊME AUTEUR

AUX MÊMES ÉDITIONS

Jeux de l'esprit
et Divertissements mathématiques
1975

ISBN 2-02-005976-2

© Éditions du Seuil, 1981

Le Code de la propriété intellectuelle interdit les copies ou reproductions destinées à une utilisation collective. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

histoire d'un cercle et d'un carré

en guise d'introduction

Sur la page d'une géométrie que Comberousse avait signée, un carré et un cercle étaient couchés.

Le livre étant peu feuilleté, ils s'ennuyaient tous deux, et d'habitude ils disputaient.

— Je suis plus grand, disait le premier. Car un cercle est un carré dont les angles ont été rognés.

Le cercle répliquait :

— C'est le contraire justement. Car un cercle est un carré dans lequel on a soufflé et que l'on a gonflé.

N'ayant pu sur la surface s'accorder, ils en vinrent à parler beauté.

— Je suis, disait le carré, symbole de solidité. L'égalité de mes quatre côtés, et mes angles surtout, mes angles de quatre-vingts degrés *, confèrent à ma figure une harmonie puissante et sûre.

Le cercle répondait :

— Dans la solidité que vous vantez, je ne vois que vulgarité. Votre vigueur primaire ne me séduit guère. Je vous considère comme une mesure d'aire, sans plus.

Quant à moi, de toutes les courbes, je suis la mieux faite. Les astres ont adopté mon contour; à ma courbure toujours les

* Ce carré n'était pas fort savant.

artistes ont recours et les hommes me tournent autour, car vous le savez bien, rien n'émeut plus leur chair que le fier hémisphère d'un derrière ou d'un sein féminin.

Quant à l'utilité, si vous en voulez bien parler, ma supériorité dans ce domaine est tout à fait certaine. Je suis la roue, et il faudrait être fou, vous en conviendrez, pour ne pas admettre que la roue, c'est tout.

— Si ce n'est pas tout, c'est beaucoup, reconnu le carré. Mais je rends aussi quelques services, et suis la base, croyez-moi, des plus durables édifices.

Le cercle eut un haussement d'arc.

— Vous êtes statique, et ce qui ne se meut meurt, c'est statistique. Moi je suis mouvement, et dans ce rôle irremplaçable. Si les roues des charrettes étaient carrées, je crois, en vérité, qu'on aurait quelque mal à les faire avancer.

Ils se querellaient ainsi pendant des jours entiers. A les départager personne ne se risquait. C'eût été un problème aussi ardu qu'est vaine la quadrature du cercle.

Or un jour un enfant qui tournait les pages du livre et griffonnait au passage, mit sur l'une et l'autre figure des visages. Du carré il fit une tête austère et moustachue. Au cercle il mit des cheveux et des cils sur les yeux, et un air si gracieux, qu'il fallut d'évidence au féminin le décliner et qu'on l'appela par décence une circonférence.

Ce qui arriva par la suite est facile à deviner. La courbe ou la rigidité qui les avaient si longtemps irrités parurent pleins d'attraits à leurs sexes opposés. Pubères ils se regardèrent, puis ils s'aimèrent et se marièrent.

Au début tout alla bien. C'est naturel. La circonférence avec jouissance roulait sur les côtés de son carré et elle prenait un

plaisir évident à s'attarder aux angles durs qui chatouillaient sa courbure.

Et puis elle se lassa. Et n'étant pas bien sage, au voisinage de la page, elle découvrit des polygones moins monotones. Le rectangle d'abord la séduisit, par sa silhouette élancée. Elle eut avec lui une liaison. Puis elle admira du losange la svelte élégance, et du triangle le profil aiguisé. Avec le trapèze elle en prit à son aise, au parallélogramme, elle crut donner son âme. Il n'est pas jusqu'à l'hexagone qui ne la pénétrât, sous prétexte de vérifier son inscriptibilité.

Dans son coin le carré se morfondait. Son cocuage l'irrita, puis le chagrina, et il se demanda comment, de son épouse volage, reconquérir l'amour et les faveurs.

Il considéra ses rivaux, et comme il n'était pas sot, il conclut qu'il était trop gros.

« Trop gros, pensa-t-il, et pourquoi ne pas l'avouer, trop carré. » Il aurait bien voulu se transformer, mais ses angles, hélas, ses angles de quatre-vingts degrés — comme il le croyait — avaient été déterminés de toute éternité.

Ne pouvant se déformer, il eut un jour l'idée de se plier. Autour de sa diagonale, par une manœuvre banale, il rabattit sa moitié, et devint derechef un triangle isocèle et rectangle.

La circonférence, conquise par cet artifice hardi, reprit du goût pour son époux.

De son hypoténuse elle se fit un diamètre, et des cordes de ses côtés, qui la tenaient toute tendue, ou bien elle se réfugiait au creux de ses bissectrices où venait l'envelopper son tendre périmètre.

Bientôt, sans pour autant être plus ou moins ronde, elle se trouva enceinte. Mais ils ne voulurent pas pour enfant une

figure hybride, ni même un petit polygone, tel que les grands avec lesquels elle n'avait naguère guère eu de retenue. Ils firent le vœu qu'à son terme elle accouchât d'un théorème. C'est en effet ce qui leur vint. Ils eurent un fils grand et fort. Ils l'appelèrent Pythagore.

notations

\overline{abc} nombre écrit avec les chiffres représentés par a, b, c.

X ou. multiplié par

peu différent de

$12 = M_e 3$ 12 est multiple de 3

$13 = M_e 3 + 1$ 13 est un multiple de 3 + 1 (notation choisie, parce que plus claire, à la notation classique $13 \equiv 1 \pmod{3}$)

DIFFICULTÉ

CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES
REQUISES



facile



nulles ou rudimentaires



assez facile



élémentaires



assez difficile



assez sérieuses



difficile



sérieuses

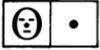
jeux



l'arquebuse du président

Vers le début de son septennat, M. Giscard d'Estaing, président de la République, s'était, au cours d'un de ses déplacements, arrêté dans une certaine ville de France. Le maire lui fit visiter les fouilles entreprises dans cette ville sur l'emplacement d'une ancienne bataille, et il lui offrit une arquebuse trouvée parmi les vestiges. Cette visite avait lieu le dernier jour d'un mois.

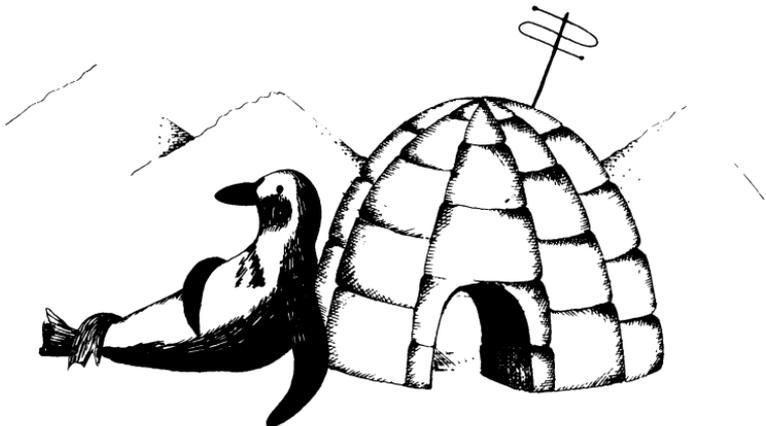
Sachant que le quantième du mois de la visite, multiplié par la différence entre les dates de cette visite et de la bataille ancienne, puis par l'âge du duc qui perdit la bataille, est 636 724, trouver la ville dans laquelle s'arrêta le président.



2

le pingouin sédentaire

Un explorateur rencontre un pingouin. Ayant vainement essayé d'engager la conversation avec cet animal taciturne, il lui tourne le dos et se met à marcher vers le nord. Il parcourt dix kilomètres en ligne droite puis, trouvant le paysage monotone, il change de direction et fait dix kilomètres vers l'ouest, puis enfin dix kilomètres en direction du sud. Au terme de sa course, il retrouve le même pingouin, qui n'a pas bougé. Où donc se trouve ce pingouin ?





3

le croquet et les deux universitaires

M. Boussardon, professeur de faculté en retraite, habite une jolie rue, et du côté chic ; le côté des numéros pairs, qui ne compte que des maisons individuelles entourées de jardins ; son voisin de droite est M. Arnolfe, professeur au lycée, avec lequel il est très lié. Ce dimanche matin, les deux universitaires, se promenant de concert, parlent retraite.

— L'avantage d'être professeur de faculté, dit Boussardon, c'est qu'on ne prend sa retraite qu'à 70 ans.

— C'est bien tard, dit Arnolfe.

— Pourquoi donc ? Je ne suis pas gâteaux ! Et voyez mon voisin de gauche, Corcoran, l'exportateur de mirlitons. Il a 75 ans et mène encore son affaire.

— Moi, dit Arnolfe, je voudrais la retraite à 50 ans. Ainsi, je pourrais, lorsque j'aurais atteint cet âge, me consacrer entièrement au croquet.

Et comme Boussardon hausse les épaules :

— Savez-vous que pour atteindre la classe internationale, un joueur de croquet doit s'entraîner cinq à six heures par jour ?

— International de croquet ! soupire Boussardon. Quelle

3

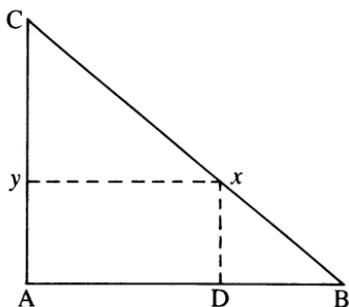
dérision... Tiens, ajoute-t-il en arrivant devant sa porte, je viens de remarquer que le produit de mon âge par le numéro de ma maison est égal au produit du numéro de votre maison par votre âge.

Quels sont les numéros des maisons des deux professeurs, et quels âges ont-ils ?



4

bataille navale



Un cargo est en A et une frégate ennemie en B. Le cargo se dirige selon AC, perpendiculaire à AB.

1) Sachant que la vitesse de la frégate est deux fois celle du cargo, quelle direction devra prendre la frégate pour

intercepter le cargo, les deux navires étant censés suivre des lignes droites — autrement dit, si C est le point de rencontre, quel est l'angle \widehat{ABC} ?

2) La portée maximum des canons de la frégate est 8,268 miles. $AB = 10$ miles.

A partir de quel point X la frégate pourra-t-elle ouvrir le feu en ayant des chances de toucher le cargo? — autrement dit calculer BX.



5

où l'escarbille de Clytemnestre pose problème

Mme Clytemnestre Clou ayant reçu une escarbille dans l'œil lors de la traversée d'un tunnel, elle en fut traumatisée et accoucha prématurément de Cléopâtre. Cette dernière garda de l'aventure la phobie des tunnels.

Or elle avait ce jour-là à prendre un train à Labegude, où un long tunnel s'ouvre juste à la sortie de la gare. Cléopâtre se demanda avec angoisse dans quel wagon elle devait monter pour être, le moins longtemps possible, exposée aux dangers de la voie souterraine.

— Ah, soupira-t-elle, si mon oncle Clovis était là, il me le dirait.

En l'absence de Clovis, auriez-vous pu la conseiller ?



6

le réservoir bigame

Un réservoir plein d'eau pèse 6 fois son poids vide. Rempli d'un autre liquide, il pèse 69 fois son poids vide. Quel est cet autre liquide ?



7

vertige arithmétique

Quel est le plus grand nombre que l'on puisse écrire avec trois chiffres identiques? Combien ce nombre a-t-il (approximativement) de chiffres?



origines des signes et vocables mathématiques

L'arithmétique est une science très ancienne, puisque les Grecs Pythagore, au VI^e siècle avant notre ère, et Diophante, au IV^e siècle de notre ère, comptent parmi ses plus brillants représentants. Mais son développement, puis celui de sa sœur cadette l'algèbre, furent entravés jusqu'à la fin de la Renaissance par le fait qu'elles ne possédaient ni le langage ni les symboles qui leur étaient nécessaires. Il suffit pour s'en convaincre de lire les auteurs anciens : l'énoncé des plus belles propriétés est d'une complication rebutante. C'est pourquoi à partir du XV^e siècle les mathématiciens créèrent des signes permettant une écriture claire et concise. Ces efforts se poursuivirent jusqu'à Descartes qui les synthétisa et donna à l'algèbre des notations à peu près définitives dans sa *Géométrie*, publiée à Leyde en 1637.

ARITHMÉTIQUE

Du grec *arithmêtikê* formé à partir de *arithmos*, nombre*.

Les signes

+ et – à l'origine des abréviations commerciales, se rencontrent pour la première fois dans *Compendium arithmetica mercatorum*, d'Eger, imprimé en 1489 à Leipzig par J. Widmann. Auparavant, et même plus tard, les mathématiciens employaient ou employèrent *et* ou *additus*, *demptus* ou *minus* (Fibo-

* Calcul vient du latin *calculus*, petit caillou; les cailloux furent en effet un des premiers instruments de calcul.

nacci, 1202), \bar{P} et \bar{m} (Nicolas Chuquet, 1484) \bar{p} et \bar{m} (Cardan XVI^e siècle).

- × signe de multiplication, apparaît chez l'Anglais William Oughtred dans *Clavis Mathematica* (Oxford, 1631). Auparavant, Michel Stiffel avait employé M (1545); François Viète, le fondateur de l'algèbre moderne écrivait : *in*.
- nouveau signe de multiplication introduit par le philosophe et mathématicien Leibniz en 1698.
- :
- ce signe de la division est également dû à Leibniz. Avant lui, l'Anglais Rahn avait, en 1659, fait usage de \div , qui est encore quelquefois employé dans les pays anglo-saxons.
- = se trouve dans *The Wehstone of Witte*, de Robert Recorde, publié à Londres en 1557. Sur le continent, jusqu'à Leibniz, on continua à écrire le signe cartésien α .
- > <
- plus grand, plus petit, a été imaginé par Thomas Harriott (*Arte Analytica praxis*, Londres, 1631).
- () la parenthèse est due au mathématicien français Girard (début du XVII^e siècle).
- ∞ symbole de l'infini se trouve chez Wallis-*Arithmetica infinitorum*, en 1655.
- $a \equiv b$
(mod c) a égal b modulo c, qui signifie que a est multiple de c plus b, a été imaginé par Gauss en 1801.
- ! le signe de la factorielle ($3! = 1 \times 2 \times 3$) a été créé par Kramp en 1808.

Exposants et radicaux

- a^3 la notation des puissances au moyen d'exposants est attribuée à Descartes qui écrivait aa, a^3 , a^4 ,

a^5 , etc. L'emploi de aa pour a^2 se poursuivit longtemps (même nombre de signes typographiques). Mais si Descartes généralisa l'emploi des exposants, il ne les inventa pas. On les a en effet découverts dans le *Triparty en la Science des nombres*, écrit en 1424 — et redécouvert en 1841 — par le médecin et mathématicien Nicolas Chuquet.

$\sqrt{\quad}$, $\sqrt{\sqrt{\quad}}$,
 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}$

la première utilisation de ces symboles pour désigner la racine carrée, la racine cubique, la racine quatrième, se trouve chez le mathématicien allemand Rudolph (*die Coss, Leipzig, 1525*); son compatriote Michel Sttiffel le vulgarisa dans *Arithmetica Universalis* (1544).

Les fractions

Les fractions étaient déjà connues des Égyptiens (fractions inverses $1/a$) et des Babyloniens. Mais la barre de fraction fut inventée par les Arabes. Au XIX^e siècle, A. de Morgan proposa a/b .

Les termes « numérateur », « dénominateur » furent créés par Nicolas Chuquet.

Les nombres décimaux furent introduits en arithmétique par le Belge Simon Stevin, dit Simon de Bruges, en 1585. Les fractions décimales purent alors, dans les calculs, être assimilées aux entiers. Les notations varièrent : en voici les différentes phases :

643 (0) 3(1) 2(2) 4(3)	Stevin (1585)
643 0 324	Bürgi (1592)
643 1 324	Viète (1598)
643 . 324	Neper (1605)
643 , 324	aujourd'hui.

ALGÈBRE

Formé des deux premiers mots du plus célèbre des traités arabes sur ce sujet, *Al djabr w'al mûkâbala*, d'Al - kwârismi, écrit au VIII^e siècle. Ce terme n'a pas toujours été employé. Au début du XV^e on lui préférait « *Arte Maggiore* », et, à la fin du XVI^e, Viète employait l'expression « *logistique spécieuse* ».

Les lettres

L'emploi des lettres a été introduit ou du moins généralisé en algèbre par François Viète (in *Artem Analyticam, Isagoge, 1591*). Il utilisait les consonnes pour représenter les quantités connues, les voyelles pour les inconnues. Descartes employa pour les quantités connues les premières lettres de l'alphabet, pour les inconnues les dernières.

$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ En 1718, le Suisse Johann Bernoulli employa $\varphi(x)$ pour représenter une fonction de la variable x .

Lagrange, à partir de 1797, généralisa l'emploi de $f(x)$, ainsi que de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour désigner les dérivées première et seconde de $f(x)$.

Le signe de l'intégration \int fut, semble-t-il, inventé par Leibniz.

C'est l'Allemand Stifel qui eut le premier l'idée de mettre tous les termes d'une équation dans un membre, et zéro dans l'autre.

Les nombres imaginaires

Ce sont les mathématiciens italiens Cardan (1545) et Bombelli (1560) qui eurent l'idée de prendre en considération les racines carrées des nombres négatifs, créant des nombres qu'ils appelèrent « *sophistiques* », et qui furent plus tard qualifiés d'« *enveloppés* », (Girard, XVII^e siècle), d'« *imaginaires* » (Descartes), et de « *complexes* » (Gauss).

C'est Euler qui choisit pour symbole des imaginaires $i = \sqrt{-1}$.

TRIGONOMÉTRIE

Mesure des triangles. Le mot a été employé pour la première fois par Viète.

Unités

Minute (d'angle) et seconde (d'angle) viennent des expressions utilisées pour définir ces divisions angulaires dans l'Europe occidentale du Moyen Age : *pars minuta prima* — *pars minuta secunda*.

Les notations ' et '' furent imaginées par les Byzantins.

Lignes

Sinus. Lors de l'introduction de la trigonométrie en Europe, à la fin du Moyen Age, on considérait comme fonction circulaire fondamentale la longueur de la corde (en latin *inscripta* : ligne inscrite); on s'aperçut ensuite que la fonction d'usage le plus commode était la demi-corde, en latin *semi-inscripta*, que l'on nota en abréviations *s. ins*. C'est cette abréviation qui fut transformée ensuite en *sinus* par adjonction d'un *u* phonétique, donnant en outre une terminaison latine (on remarquera toutefois que *sinus* a = *s. ins* 2 a.

Les Arabes employèrent le mot « *jaïb* » (fente).

Cosinus. Mot créé par l'Anglais Edmond Gunter en 1620; un siècle plus tôt l'astronome allemand Rheticus employait les termes « *sinus complementi* ». Les Arabes disaient « *tajail* ».

Tangente. Le mot *tangens* apparaît pour la première fois dans la *Geometrica Rotundi* de Thomas Fincke (1583); au XIII^e siècle, Robert l'Anglais disait « *l'ombre* », traduction du mot arabe « *dhel* » (les Arabes disaient aussi « *momas* » (qui touche).

Cotangente (?); les mathématiciens arabes disaient *taman al momas*.



la cohorte béotienne

La cohorte béotienne était formée en carré. Un général, ayant deux opérations à mener avec une seule cohorte, la divisa par un seul mouvement en deux rectangles, dont l'un comptait 36 hommes de plus que l'autre.
Quel était l'effectif de la cohorte ?

$N + 36$
N



le marquis de Touchemoulin recrute

Le marquis de Touchemoulin entre en fureur en constatant que les hommes de son vieil ennemi, le baron de Virepierre, sont entrés chez lui et ont coupé l'olivier qu'il avait ramené de Terre sainte et qui produisait des fruits sans noyaux.

Touchemoulin se jure de raser Virepierre et, pour ce faire, charge ses écuyers Réo et Mur de recruter une troupe d'hommes de main.

Quelques jours plus tard, il se rend dans l'annexe du château où les écuyers rassemblent leurs recrues. Il constate avec dépit que Réo n'a amené que les $\frac{7}{20}$ du nombre total d'hommes nécessaires et Mur moins encore, un nombre qui n'est que les $\frac{2}{5}$ de celui de Réo.

— Une semaine de passée, et vous n'avez pas encore trouvé cinquante de ces brigands, s'écrie le marquis. Si lundi je n'ai pas mon effectif au complet, je vous fais empaler!

Quel était l'effectif voulu par cet irascible aristocrate ?



10

les Clou vont à la foire

Clodomir, Clotaire et Cléobule, trois cousins Clou, vont à la foire avec leurs femmes. L'une de ces dames s'appelle Madeleine, une autre Marthe, et la troisième Martine. Chacune de ces six personnes achète un ou plusieurs objets, et paie chaque objet autant de francs qu'elle a acheté d'objets.

Clotaire achète 23 objets de plus que Madeleine, Clodomir 11 de plus que Marthe. Chaque homme a dépensé 63 F de plus que sa femme.

Quelle est la femme de chacun ?





dramatiques permutations dans la famille Clou

L'année qui suit le récit que vous venez de lire, Clodomir, Clotaire, Cléobule et leurs trois femmes retournent à la foire; chacun fait des achats, chaque objet acheté coûtant autant de francs qu'il a acheté d'objets. Dans chaque ménage, l'un des deux époux dépense 325 F de plus que l'autre. C'est Martine qui dépense le plus, après elle Clodomir. Cléobule a acheté 13 objets de plus que Marthe. Quelles sont les dramatiques permutations survenues dans la famille Clou ?





12

Clotaire est insatiable

Clotaire, hélas ! était joueur, et il perdait plus qu'à son tour. Il avait fréquemment recours à la générosité de son oncle Clovis Clou. Ce jour-là, il lui écrivit : « Je fais encore appel à vous. Pour une somme inférieure à 20 000 F mais supérieure à 10 000 F », et, voulant flatter la manie du mathématicien, il ajoutait : « Le montant de cette somme, libellé en francs, lorsqu'il est divisé par 11 donne 5, par 12 donne 7, par 13 donne 8 et par 14 donne 13. » Clovis Clou répondit :

« Mon cher Clotaire, comment peux-tu être si maladroit ? Ton père jouait aussi, mais au moins il savait tricher.

« La somme que je t'enverrai — si toutefois tu sais en calculer le montant, ce qui, j'espère, ne sera pas le cas — est inférieure à 10 000 F. Son montant, libellé en francs, lorsqu'il est divisé par 5 donne 3, par 7 donne 4, par 13 donne 10, et la somme de ses chiffres est égale à 24. »

Quelles étaient la somme demandée par le neveu et celle proposée par l'oncle ?



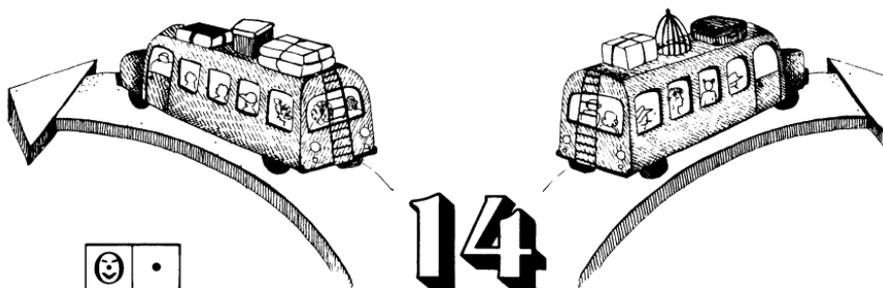
13

les bougies du sabbat

Mme Bloch allume un premier samedi une bougie de son candélabre pendant une heure, le deuxième samedi deux bougies pendant le même temps, le troisième samedi trois bougies, et ainsi de suite. Chaque bougie met quatre heures pour se consumer entièrement.

Quel doit être le nombre n des bougies pour que le n -ième samedi, cette manière de procéder aboutisse à la consommation totale des bougies ?





la Lozère enfin débloquée

Deux autobus partent en même temps de Mende et d'Alès, chacun à une vitesse uniforme, mais l'un plus lent que l'autre. Ils se croisent à 28,8 km de celle des deux villes qui est alors la plus proche.

Arrivés à leur terminus, les autobus stationnent une demi-heure pour permettre le changement de voyageurs, puis repartent en sens inverse, celui de Mende retournant à Mende, et celui d'Alès à Alès. Ils se croisent à 14,4 km de celle de deux villes qui est alors la plus proche.

Quelle est la distance des deux villes ?

(Le résultat peut être obtenu au moyen de deux opérations élémentaires.)



15

les goûters de Mme Minouflet

Mme Minouflet réunit tous les mercredis ses petits-enfants autour d'un goûter ; femme d'habitudes, elle achète à cette occasion un nombre invariable de gâteaux qu'elle distribue toujours également entre les enfants. Un mercredi, Arsène est absent, et chaque enfant reçoit deux gâteaux de plus. Le mercredi suivant, Arsène arrive avec un camarade, et chaque enfant reçoit un gâteau de moins.

Combien Mme Minouflet a-t-elle de petits-enfants ?





16

Babou et ses babouins

Babou vient de recevoir son babouin d'anniversaire. C'est une coutume familiale : on lui en a donné un le jour de sa naissance, et un à chaque anniversaire.

Mais Babou est un peu triste. Les $2/5$ du nombre des babouins qu'elle a reçus à ce jour, et qui se droguaient, sont morts d'overdose, au cours d'une malheureuse partie qui a eu lieu il y a quelques mois à peine — en octobre ou novembre 1979. Elle pense qu'il lui faudra attendre 8 ans pour reconstituer, si tout va bien, l'équipe qu'elle devrait avoir aujourd'hui.

Sachant que cet énoncé vous permet de déterminer la date exacte de l'anniversaire de Babou, quel est son âge ?



17

une créance singulière

Clovis a prêté à Cléobule une somme qu'il lui demande de lui rendre en dix ans sans intérêt, et de la manière suivante :

à la fin de la 1^{re} année, il rendra la moitié

à la fin de la 2^e année, il rendra le tiers de ce qui reste dû

à la fin de la 3^e année il rendra le quart de ce qui reste dû

à la fin de la 4^e année, il rendra le cinquième de ce qui reste dû

.....

à la fin de la 9^e année, il rendra le dixième de ce qui reste dû

à la fin de la 10^e année, il rendra le solde dû, une bagatelle de moins de 300 F.

Toutes ces opérations s'expriment en nombres entiers de francs.

Quelle somme Clovis a-t-il prêtée ?



18

le comptable défaillant des trous Clou

M. Balaquet, comptable dans la fabrique de trous C. Clou & C^o ne s'est jamais, en quarante ans, trompé dans une addition. Or ce matin, il s'aperçoit avec consternation que sa balance comptable est fautive de 54 F. Clovis Clou entre dans son bureau et, le voyant bouleversé, lui demande la cause de son émotion.

Balaquet lui explique l'affaire : il cherche l'erreur mais ne la trouve pas.

— Il vous manque 54 F ?

Clovis réfléchit un instant, puis :

— Vous avez dû inverser deux chiffres dans un nombre.

Le comptable reprend ses recherches à partir de cette indication, et il trouve l'erreur.

Comment Clovis Clou a-t-il prévu le genre d'erreur de son comptable ?



19

le bal des ardentes

42 personnes participaient à un bal. Au cours de la soirée, une dame dansa avec 7 cavaliers, une deuxième dame avec 8, une troisième avec 9, et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui dansa avec tous les hommes. Combien y avait-il de dames à ce bal ?



20

déconcertant voyage à Londres

Trois Parisiens, André, Baptiste et Charles, prennent l'avion pour Londres. L'un est avec sa femme, un autre avec sa fille, un autre avec sa filleule.

A Londres, profitant des prix avantageux, chacun achète, selon son sexe, un costume ou une robe, chaque achat coûtant le prix d'un voyage aller.

André et sa femme décident de rester à Londres. Les autres rentrent à Paris, par la même voie et au même tarif qu'à l'aller.

Pour leurs achats et leurs billets d'avion (lesquels ont coûté deux fois moins cher à André et à sa femme, puisqu'ils n'ont payé que l'aller), nos voyageurs ont dépensé au total 2 400 F.

A son retour, Charles rencontre un ami qui lui fait compliment de son costume.

— Je l'ai acheté à Londres, dit Charles. Pas cher ! 240 F. Compte tenu de ce qui précède, ce prix paraît surprenant. Pourtant Charles n'a pas menti.

Comment cela se fait-il ?

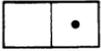


21

bombardes et pyramides

Au temps où les canons tiraient des boulets, ceux-ci étaient stockés dans les parcs d'artillerie sous forme de pyramides à base carrée, chaque côté du carré de base comptant 15 boulets.

Quel était le nombre de boulets par pyramide ?

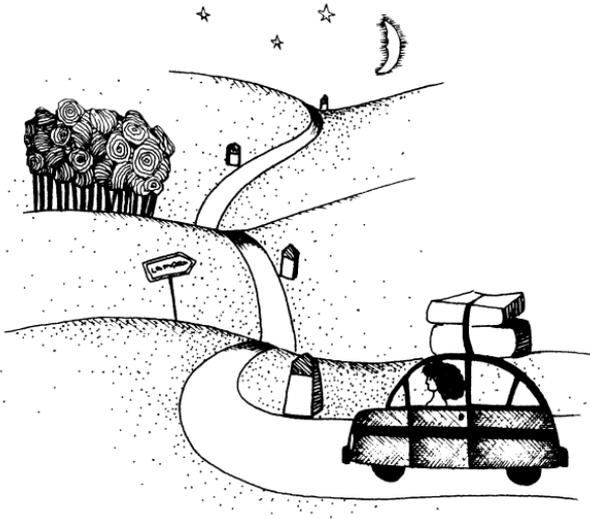


22

le bolide et les trois bornes

Une voiture passe devant une borne qui porte le nombre kilométrique $\overline{A B}$. Une heure après elle passe devant la borne $\overline{B A}$, une heure plus tard devant la borne $\overline{A O B}$ (A zéro B).

Quels nombres portent les bornes, et quelle est la vitesse (constante) de la voiture ?





23

prenez garde aux moutons

Deux frères ayant hérité d'un troupeau de moutons décident de le vendre et de se partager également la somme produite.

Chaque mouton vaut autant de francs qu'il y a de moutons. Le prix de vente est constitué par des pièces de dix francs, plus un appoint, inférieur à dix francs, en francs.

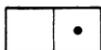
Le partage se fait ainsi : l'aîné prend une pièce de 10 F, le cadet en prend une à son tour, et ainsi de suite jusqu'à la dernière pièce de 10 F qui échoit à l'aîné, le cadet ramassant l'appoint.

— Ce n'est pas très juste, dit le cadet, j'ai eu moins que toi.

— Exact, répond l'aîné, en prenant dans sa poche quelques pièces de 1 franc qu'il donne à son frère. Maintenant les parts sont égales.

Combien de pièces l'aîné a-t-il sorties de sa poche ?

(Ce problème est intéressant, parce que la plupart des personnes à qui il a été posé ont conclu à l'indétermination. Il contient pourtant toutes les données nécessaires à sa solution.)



24

victoire de Zénobie

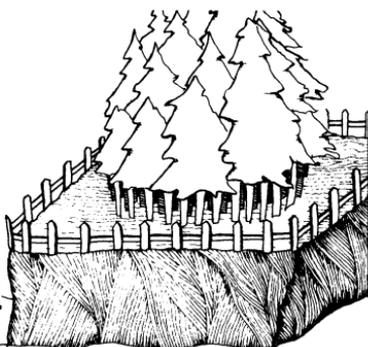
Deux caravanes partent au même moment. L'une va de Palmyre à Pétra, l'autre de Pétra à Palmyre. Lorsqu'elles se croisent, les Palmyriens ont parcouru le $\frac{1}{5}$ de la distance des deux villes de plus que les Nabatéens (de Pétra).

A partir de ce point de rencontre, les Palmyriens mettent 8 jours pour arriver à Pétra.

De combien de jours le voyage des Nabatéens excédera-t-il le voyage des Palmyriens, sachant que les vitesses des caravanes sont constantes ?



25



un rond de sapins carré

Le Paul Paris, d'Allarmont, dans les Vosges, possède un terrain d'un hectare à l'intérieur duquel il a fait une sapinière. Les arbres sont plantés régulièrement à un mètre les uns des autres et forment un carré.

Paul Paris rencontre l'Alain Cuny, instituteur de Bionville.

— Tu sais, lui dit-il, j'ai agrandi mon carré de sapins. Dans le nouveau carré j'en ai 1 351 de plus.

— Sacré nom de cul ! dit l'Alain Cuny.

— Pourquoi donc tu dis ça ?

— Parce que ce carré de sapins, ça t'en fait un rond.

Quelle est la signification de la phrase sibylline du savant instituteur ? Vous le saurez en calculant le nouveau nombre de sapins que possède le Paul Paris.

Et, au fait, quelle est la forme de son terrain ?

les anciennes machines à calculer

Le calcul est une opération ingrate et sujette à erreurs. C'est pourquoi, dès l'Antiquité, les hommes cherchèrent à créer des instruments ou des machines capables d'effectuer les opérations classiques, ou du moins de les aider dans cette tâche.

Ils réalisèrent d'abord des instruments, c'est-à-dire des appareils ne comportant aucun mécanisme tel que ressorts, comes ou engrenages. Dans ce domaine comme dans beaucoup d'autres, les Chinois furent des précurseurs, puisque ce sont eux qui imaginèrent les *abaques*, aujourd'hui disparues, et les *bouliers* (souan-oan), encore très largement utilisés, et qui permettent à des opérateurs entraînés de calculer à une vitesse stupéfiante pour le profane.

Les Occidentaux cherchèrent à perfectionner le boulier en substituant aux boules enfilées sur des axes rigides des glissières chiffrées. Ces nouveaux instruments, dont le premier fut construit par Troncet, reçurent le nom d'*arithmographe*. Les arithmographe étaient des additionneurs. Pour effectuer les multiplications, Jean Neper, l'inventeur des logarithmes, eut l'idée de rendre mobiles les colonnes dont se compose la table de Pythagore. Dans sa *Rabdologie*, publiée à Édimbourg en 1617, il donne le schéma d'un appareil multiplicateur fondé sur ce principe, qui fut appelé *bâton de Neper*.

De nombreux perfectionnements de l'arithmographe et du bâton de Neper, leur combinaison, donnèrent naissance à de nombreux instruments, dont les plus connus sont les *réglottes de Grenaille*, imaginées par un ingénieur des chemins de fer, et le *calculateur de Léon Bollée* — le futur constructeur d'automobiles.

Dans l'ensemble, ces auxiliaires du calcul furent peu employés. Ils ont depuis longtemps disparu et ne constituent plus que des

curiosités à l'exception du boulier, comme je l'ai déjà signalé, et de la classique règle à calcul. Ce dernier instrument est fondé sur un principe totalement différent ; c'est, a écrit très justement Édouard Lucas, une « table de logarithme mise en bâton ». On attribue son invention à Edmond Gunther, en 1624. Curieusement, ce remarquable instrument, plus commode et plus efficace que tous ses concurrents, est demeuré peu employé, et même peu connu jusqu'au début de notre siècle ; peut-être parce qu'il ne donne que des résultats approchés. Tout autre fut la carrière — la prodigieuse carrière — des machines à calculer. C'est à Blaise Pascal qu'on attribua longtemps l'invention de la machine à calculer. On sait aujourd'hui qu'il eut un précurseur, le Wurtembergeois Wilhelm Schickard, demeuré célèbre à la fois comme orientaliste, mathématicien, astronome, cartographe et graveur. La raison de l'obscurité qui dissimula longtemps l'*horloge à calcul* — *Rechenuhr* —, c'est qu'au début du XVII^e siècle, en Allemagne du Sud, l'Inquisition et les corporations étaient des institutions redoutées, et que Schickard craignait que son invention ne lui valût les foudres de l'une et des autres : de la première parce que sa machine pouvait passer pour diabolique, des secondes parce que l'on pouvait l'accuser d'avoir violé le monopole des horlogers. Aussi ne fit-il part de sa création qu'à son ami Kepler, dans une lettre du 20 septembre 1623 qui ne fut publiée, parmi d'autres documents, qu'en 1718.

Très illustre et excellent Maître Kepler,

... Ce que tu as réalisé sur le plan algébrique, je l'ai dernièrement tenté sous forme mécanique : j'ai conçu une machine composée de 11 roues complètes et de 6 roues mutilées ; elle calcule à partir de nombres donnés d'une manière instantanée et automatique, car elle ajoute, retranche, multiplie et divise. Cela te divertirait fort de voir par toi-même comment cette machine accumule et transporte simultanément vers les rangs de gauche une dizaine ou une centaine, et comment, au contraire, elle retranche la retenue à propos d'une soustraction.

Le 25 février 1624, Schickard faisait part à son ami de la destruction de sa machine :

... Je t'avais fait construire un exemplaire de ma machine, mais elle a péri, voici trois jours, dans un incendie nocturne éclaté à l'improviste. Cette perte m'est d'autant plus cruelle que le temps manque pour en reconstruire une autre à bref délai.

En effet, Schickard, absorbé par de multiples travaux, ne pensa plus à sa machine, et son invention aurait été perdue s'il n'avait envoyé à Kepler les croquis très précis destinés à son mécanicien Pfister. Un modèle fut construit d'après ces croquis et présenté le 25 janvier 1959 au Séminaire d'histoire des sciences de Berlin.

La découverte de Pascal est donc postérieure à celle de Schickard, mais totalement indépendante. Elle n'a pas été inspirée par la seule curiosité scientifique, mais aussi par des considérations pratiques : le père du mathématicien, Étienne, avait été envoyé à Rouen en 1639 pour réorganiser les finances de la Basse-Normandie. Il avait à effectuer des calculs d'impôts rendus très laborieux par la multiplicité et l'incohérence des unités de mesure. C'est pour aider son père que Blaise eut l'idée de construire une machine à calculer. Il en conçut le mécanisme, et en dressa les plans qu'il confia en 1642 à un horloger de Rouen : l'horloger construisit la machine, mais elle ne fonctionna pas. Pascal reprit l'étude du problème, et en 1645 — il avait alors vingt ans — il réussit à présenter un modèle en état de marche. Une quinzaine des machines de Pascal furent construites. Elles furent mises en vente chez Messire Roberval, professeur au Collège de France, pour la somme de 100 livres (4 000 F environ).

Dix d'entre elles sont conservées dans nos musées ou dans des collections.

C'est vingt-cinq ans plus tard que le grand mathématicien Leibniz fit construire, à Paris, sa machine à calculer. Il ignorait celle de Schickard, il ne s'inspira pas de celle de Pascal, sa création est donc entièrement originale ; elle présente d'ailleurs des dispositifs très ingénieux, en particulier des pignons dont les dents

ont des longueurs en progression géométrique. Leibniz destinait sa machine aux calculs astronomiques. Il la présenta en 1673 à la Société royale de Londres, puis à l'Académie des sciences de Paris. Deux exemplaires furent construits, dont l'un se trouve aujourd'hui à la bibliothèque de Hanovre.

Ce n'est pas diminuer le mérite des géniaux inventeurs de la machine à calculer que de reconnaître le médiocre fonctionnement de ces engins ; ils étaient des additionneurs, et les multiplications ne se faisaient que par additions successives du multiplicande, successions d'opérations que facilitaient quelques dispositifs ingénieux, en particulier dans la machine de Leibniz, mais qui nécessitaient de nombreux tours de manivelle.

Le modèle d'*horloge à calcul* que l'on reconstitua en 1959 eut un fonctionnement très laborieux ; les deux machines de Leibniz ne furent jamais mises en service ; seule la *Pascaline* fut utilisée en pratique, mais elle était très lente. La multiplication 3872×675 occupait 30 à 40 secondes ; c'est à peu près le temps nécessaire pour faire l'opération « à la main ».

La machine Schickard ne fut jamais imitée ; la *Pascaline* inspira quelque peu Léon Bollée, deux cent cinquante ans plus tard ; la machine de Leibniz, en revanche, eut une foule de descendantes, jusqu'à une époque récente.

De nombreux progrès de détail furent réalisés au cours du siècle et demi qui suivit, mais c'est en 1820 seulement qu'un financier de Colmar, Thomas, présenta une machine véritablement nouvelle, l'*arithmomètre*, qui fut réalisée industriellement à un grand nombre d'exemplaires. Entre autres avantages, l'*arithmomètre* permettait de faire les multiplications avec un nombre de tours de manivelle égal non plus au multiplicateur, mais à la somme de ses chiffres seulement.

La Grande Encyclopédie indique avec admiration qu'il peut effectuer la multiplication par lui-même d'un nombre composé de dix 9 en 28 secondes et ajoute : ... *un cas où la machine produit des résultats vraiment merveilleux, c'est lorsqu'on l'applique au calcul des barèmes, des tables d'escompte, à l'établissement des comptes courants...*

L'arithmomètre, dont le prix variait de 150 à 500 F selon les modèles, fut largement employé par les compagnies d'assurances et de chemins de fer, les banques, l'armée, la marine. Il eut pour successeurs l'*arithmaurel* (1849) — la machine la plus rapide du XIX^e siècle, chef-d'œuvre d'horlogerie qui était malheureusement trop coûteuse et trop délicate et ne fut construite qu'à un seul exemplaire —, la *machine de Tchebichef* (1882), la *machine Unitas*, etc.

Ce n'est qu'à la fin du XIX^e siècle, qu'apparut la véritable machine à multiplier; elle fut construite par un jeune homme de dix-huit ans, Léon Bollée, et présentée pour la première fois à l'Exposition universelle de 1889. L'invention de Bollée fut reprise et perfectionnée par l'ingénieur Otto Steiger, qui lança la « Millionnaire ». La Millionnaire, annonçait son fabricant, Hans Egli, de Zurich, « est la machine à calculer la plus efficace du monde. Elle n'exige qu'un seul tour de manivelle pour chaque chiffre du multiplicateur ».

La fin du siècle vit encore apparaître trois innovations importantes : un dispositif imprimant, réalisé sur l'*arithmotyp Erinks*; l'utilisation de l'électricité par Selling, qui construisit en 1894 une machine multipliant fonctionnant grâce à des électroaimants; enfin, et surtout, l'apparition des machines arithmologiques.

Disposant d'appareils susceptibles d'effectuer les quatre opérations classiques de l'arithmétique, les mathématiciens cherchèrent à créer de nouvelles machines capables d'exécuter une suite d'opérations sans intervention d'un opérateur humain. Ce problème fut abordé et résolu par l'Anglais Charles Babbage dès 1834. Mais, ayant fait fabriquer toutes les pièces de sa machine, Babbage mourut avant d'en avoir effectué le montage; ces pièces restèrent dans une vitrine du South Kensington Museum de Londres, où on les voit encore. Ce n'est qu'en 1889 que le fils du mathématicien publia *Calculating Engines*, dans lequel il réunit tous les documents laissés par son père. Ce n'est donc qu'à la fin du siècle que l'invention fut révélée.

La machine de Babbage était double : elle comprenait une ana-

lytical engine où les nombres, puisés dans un magasin, étaient soumis dans le *moulin* à une suite d'opérations réglées par la seconde machine, l'*ordonnateur*, programmé par des feuilles de carton ajourées, comme celles des métiers de Jacquart. On pressent ici, dans les faits et dans les termes, la grande découverte des Temps modernes.

Le problème qu'avait en partie résolu Babbage fut abordé avec d'autres moyens par le grand mécanicien espagnol Torres Quevedo, qui avait déjà réalisé un extraordinaire automate joueur d'échecs*.

Dans un mémoire présenté en 1901 à l'Académie des sciences, Torres Quevedo démontra la possibilité de traduire mécaniquement une relation analytique, ou même un système de relations analytiques simultanées *quelconques*. En utilisant des électroaimants, il construisit un premier *arithmophore logarithmique* qui résolvait les équations $x^9 + ax^8 = b$ et $x^9 + ax^7 = b$.

D'autres chercheurs travaillèrent dans la voie ouverte par Babbage et Torres Quevedo. Leurs machines arithmologiques permirent de traiter dans des temps de plus en plus brefs des problèmes tels que la solution en nombres entiers des équations indéterminées à deux variables, ou la démonstration de la primarité d'un nombre. Lors de l'exposition du centenaire de l'arithmomètre Thomas, en 1920, le commandant Carisson présenta sa *machine à congruences* qui établit en 15 secondes que le nombre $2^{31} - 1$ (ou 2 147 483 647) était premier.

Les progrès des machines à calculer se poursuivirent jusqu'à leur mutation, qui eut lieu à la fin de la dernière guerre. Elle naquit des progrès de l'électronique, et de l'idée des ingénieurs d'employer un langage proposé par Leibniz près de trois siècles plus tôt, le langage binaire — parfaitement adapté à l'électronique, puisqu'il traduit l'alternative de base : le courant passe ou ne passe pas. De cette association naquit la machine qui a si profondément marqué notre civilisation : l'ordinateur.

* Il convient de préciser que cet automate ne jouait que des fins de partie extrêmement simples (*la Nature*, 13 juin 1914, p. 56).

Le premier ordinateur — « Eniac » — fut mis en service en 1946, dans l'université de Pennsylvanie, à Philadelphie. Il avait une mémoire de 20 mots de 10 dégâts. Au moment où j'écris ces lignes, l'ordinateur le plus puissant du monde est le Cray Number One, utilisé dans la recherche nucléaire et la météorologie, qui effectue un million d'opérations par seconde.

BIBLIOGRAPHIE

Taton, R., *Le Calcul mécanique*, Paris, P.U.F. (Que sais-je ?), 1963.

Lucas, Édouard, *Récréations mathématiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1882, réédité par A. Blanchard en 1975, t. III, p. 59 à 86.

Ocagne, Maurice d', *Vue d'ensemble sur les machines à calculer*, Paris, Gauthier-Villars.

Ocagne, Maurice d', *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Couffignal, Louis, *Les Machines à calculer*, Paris, Gauthier-Villars, 1933.

Flad, J.-P., *Les Trois Premières Machines à calculer*, Paris, Éd. du Palais de la découverte, 1963.

Joly, J., *Biographie de Thomas de Colmar*, Strasbourg, Imprimerie des dernières nouvelles de Strasbourg, 1931.

Torrès, M.-L., *Machines à calculer*, Mémoires présentés à l'Académie des sciences, t. XXXII.

Lanoge, Louis, *Description d'une machine arithmétique jusqu'ici inconnue*, Lyon, 1661 (la règle à calcul).



26

qui fit, de Li ou d'Ali, le plus de lis?

Le Chinois Li et le musulman Ali, bergers du Kouang-Si, partent vers le nord à la recherche de nouveaux pâturages. Ils marchent trois jours, mais pas à la même allure. Le premier jour, le chemin d'Ali est les $\frac{9}{11}$ de celui de Li, le deuxième jour les $\frac{11}{9}$, et, le troisième jour, les $\frac{33}{31}$. Par ailleurs, les hommes se fatiguent, de sorte que la somme des trajets qu'ils accomplissent le troisième jour est de 20 % inférieure à celle du deuxième jour, elle-même inférieure de 20 % à celle du premier jour. Dans ces conditions qui, de Li ou d'Ali, alla le plus loin ?



27

le pentagone de Sin Pan

Sin Pan avait demandé à l'empereur de Chine un terrain pour y établir une académie de géométrie ; un vaste terrain, car, dès cette époque, on avait en Chine, inventé les campus.

Voulant s'assurer qu'il avait à faire à un véritable géomètre, l'empereur dit à Sin Pan : Je dispose d'un terrain en forme de pentagone. J'ai fait marquer par cinq bornes les milieux de ses côtés. Trace les limites de ce pentagone, et il est à toi.

Comment Sin Pan procéda-t-il ?



28

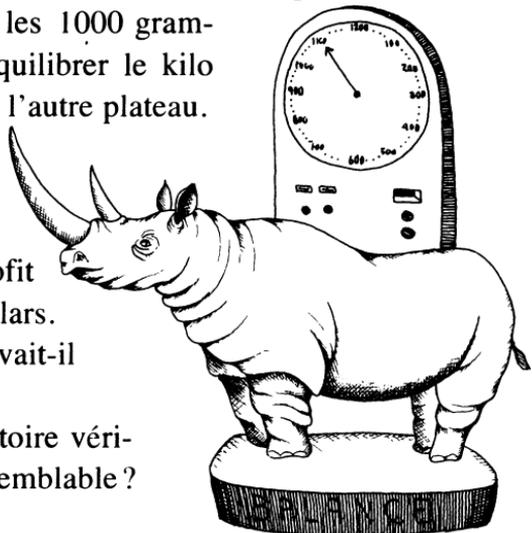
le commerce frauduleux de M. Yang

M. Yang, marchand de corne de rhinocéros, vend son produit avec une marge de 50 % par rapport au prix de son fournisseur, ce qui est beaucoup, et de plus il n'est pas très honnête : l'un des fléaux de sa balance est plus court que l'autre, de sorte que son fournisseur, lorsqu'il lui apporte de la marchandise, doit mettre 1100 grammes sur un plateau pour équilibrer le kilo que place M. Yang sur l'autre plateau. Par contre, lorsqu'un acheteur se présente, il n'a pas sur son plateau les 1000 grammes qui devraient équilibrer le kilo mis par M. Yang sur l'autre plateau.

Sur la dernière livraison qu'il a reçue, M. Yang a fait ainsi un superprofit frauduleux de 63 dollars.

Combien M. Yang avait-il payé ce lot ?

Et pourquoi cette histoire véridique est-elle invraisemblable ?





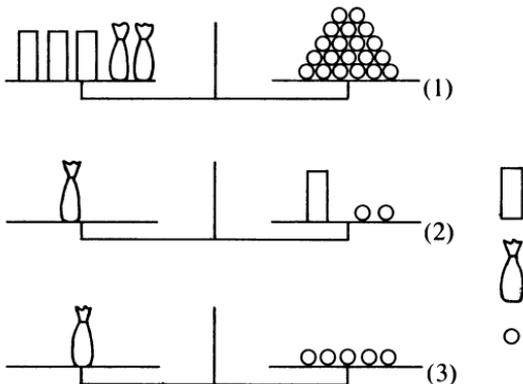
29

scandale à Macao

Lorsqu'un individu véreux s'introduit dans une communauté, si honnête soit-elle, il ne tarde pas à la pourrir.

M. Ming, qui se livrait à Macao au même négoce que M. Yang, ne tarda pas à s'apercevoir que son malhonnête concurrent avait truqué sa balance. Il s'en indigna d'abord. Puis, constatant que Yang avait pu, grâce à sa fraude, baisser ses prix, et qu'il lui prenait ses clients, il se résigna à user du même procédé.

Voici trois pesées effectuées alors par M. Ming. Pouvez-vous dire qui, de Yang ou de Ming, était désormais le plus voleur ?



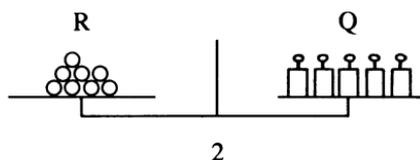
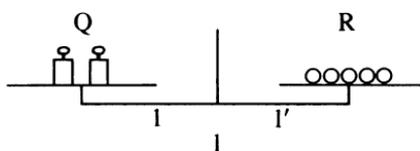


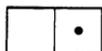
30

quousque tandem abutere, Sinensis...

Hélas! M. Tong, marchand d'épices à Macao, n'a pas tardé à remarquer les manœuvres frauduleuses de ses concurrents Yang et Ming. Et il est contraint, lui aussi, de renier sa probité traditionnelle. Mais il y va un peu fort. Jugez-en en observant ces deux pesées.

Pouvez-vous dire combien chacun des trois marchands gagne frauduleusement sur la vente d'une once de corne de rhinocéros, dont le prix de vente est 180 dollars de Macao l'once? (en admettant qu'ils n'aient pas trompé leur fournisseur à l'achat).





31

une décision contestée du gouverneur de Macao

A la suite du scandale qui avait éclaté dans la corporation des marchands d'épices par la faute de MM. Yang, Ming et Tang, et ne disposant pas d'un service de vérification des poids et mesures, le gouverneur de Macao décréta que les épices vendues seraient pesées deux fois, une fois dans le plateau de droite de la balance, une fois dans le plateau de gauche, et que le poids facturé au client serait la moyenne des deux poids obtenus.

Persuadé d'avoir pris une sage mesure, il fut très étonné de recevoir la protestation du président de la corporation qui lui reprocha de favoriser les marchands malhonnêtes, aux balances truquées.

La protestation était-elle fondée ?



32

le cheval boiteux de Sun Yat Sen

L'armée du général Pou marchait d'un pas paisible et s'étirait sur dix kilomètres. Pou était moins tranquille que ses hommes, car il devait traverser un défilé dans lequel il avait perdu ses trois précédentes armées. Aussi avait-il commandé à l'officier placé en serre-file de lui envoyer un message dès que le dernier homme serait sorti du défilé. Tout alla bien cette fois, et l'officier remit un message rassurant au cavalier qui se trouvait près de lui, et qui était justement le jeune Sun Yat Sen.

— Va porter ce billet au général Pou, en tête de l'armée, et reviens aussitôt. Et il ajouta : Presse-toi !

Sun Yat Sen accomplit sa mission. Lorsqu'il rejoignit l'arrière-garde, celle-ci se trouvait à l'endroit où passait la tête de l'armée lors de son départ.

— Tu n'as vraiment pas un cheval de course, dit le serre-file.

Quelle est la longueur du trajet parcouru par Sun Yat Sen ? (Inutile de dire que les vitesses de l'armée et de Sun Yat Sen étaient constantes.)



33

triste histoire de Pou, Lou et You

Le général Pou fait camper son armée, car il a appris que son adversaire, Tchou, disposait de 30 000 hommes, et Pou n'attaque pas lorsqu'il ne possède pas la supériorité numérique. Un jour, Lou, seigneur de la bourgade voisine, lui envoie en renfort un détachement composé d'un certain nombre de sections égales, et commandé par un capitaine.

— Je n'admets pour officiers que ceux que j'ai nommés moi-même, dit Pou au capitaine. Rentre dans le rang. Tu n'es pour moi qu'un soldat comme les autres. Puis il poursuit :

— Vous m'avez l'air de braves guerriers. Mais je ne puis vous accepter ; vos sections comptent un homme de moins que les miennes. D'autre part, vous n'êtes pas assez nombreux pour que j'ajoute l'un de vous à chacune de mes sections. Et je veux absolument que mon armée soit divisée en sections comptant toutes le même nombre d'hommes.

— Il y aurait peut-être une solution, dit You, le chef d'état-major. Ce serait de réduire d'une unité l'effectif de vos sections, en adoptant le même chiffre que nos visiteurs. Ainsi tous les soldats — les vôtres et ceux que vous

envoient Lou, pourraient peut-être se répartir exactement entre ces nouvelles sections.

— Tu es vraiment stupide, dit le général. Voici que de nouveaux soldats m'arrivent, et tu voudrais que je réduise mes sections ! De plus l'effectif par section que tu suggères est un nombre qui porte malheur. C'est un prisonnier franc qui me l'a appris. Et il avait raison, car ce nombre fut celui des coups de sabre que dut lui donner mon bourreau, en petite forme ce jour-là, pour lui trancher la tête.

— Alors, proposa You, essayons au contraire des sections d'un homme de plus.

— Je veux bien, dit le général. Ça fera manœuvrer mon armée.

Malheureusement, les soldats de Pou se trouvèrent répartis totalement entre les nouvelles sections, et les hommes de Lou furent encore en surplus.

— Essayons encore un homme de plus !

Le résultat fut exactement le même.

— Continuons, dit You avec obstination. Augmentons encore les sections d'une unité.

— Ah non ! dit le général à bout de patience. J'ai déjà perdu trop de temps à cause de ces bougres qui ne représentent même pas le centième de mon armée. Qu'on leur coupe la tête !

Les hommes de Lou n'eurent pas de chance. Car si Pou avait été moins superstitieux, ou s'il avait été plus patient et avait tenté une opération de plus, ils auraient été sauvés. Combien Pou avait-il de soldats, et combien de têtes tombèrent-elles ?



34

magie en boîtes

Trois boîtes contiennent : l'une deux boules blanches, une autre deux boules noires, la troisième une boule blanche et une boule noire. Les contenus sont indiqués sur des étiquettes B B, N N, B N, qui ont été malencontreusement collées, de sorte qu'aucune des boîtes n'est convenablement étiquetée, ce que l'on sait.

Pour restituer à chacune sa véritable étiquette, on est autorisé à entrouvrir une boîte, juste le temps d'apercevoir une boule.

Comment procéder ?





35

fâcheuse promiscuité dans un car auvergnat

Dans l'autocar qui assure la liaison Ambert-Issoire sont assises six personnes : M. Dupont, M. Martin et M. Chalus, notabilités du département, et trois mauvais garçons, l'un voleur, l'autre escroc et le troisième faussaire qui sont les homonymes des trois honorables voyageurs précités (mais que nous nous dispenserons d'appeler Monsieur).

M. Chalus habite Issoire, l'escroc à mi-chemin entre Ambert et Issoire. M. Martin a cinq enfants. Le bourgeois qui habite le plus près de l'escroc, a trois fois plus d'enfants que celui-ci.

L'homonyme de l'escroc est logé à Ambert et Dupont bat le voleur au billard.

Quels sont les noms du voleur, de l'escroc et du faussaire ?



36

une belle famille alsacienne

- J'ai autant de frères que de sœurs.
La sœur de la personne qui vient de parler déclare :
— J'ai deux fois plus de frères que de sœurs.
Combien sont-ils ?

(La scène se passe à Ribeauvillé.)





37

hôtel du Lapin Rouge

Clovis Clou participait cette année-là au célèbre séminaire de mathématiques de Pontarlier. Il était logé hôtel du Lapin Rouge, établissement dont il n'appréciait guère la nombreuse clientèle.

— Ces gens sont bruyants et vulgaires, dit-il à son vieil ennemi Gaétan d'Upont. La moitié serait à fusiller.

— Vous exagérez !

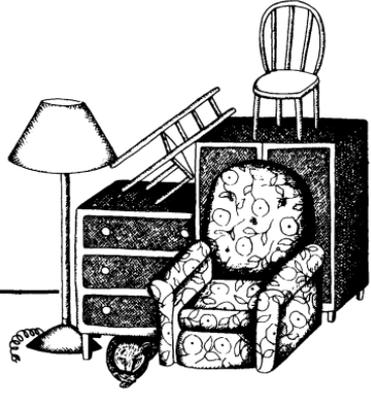
— Pas du tout ! La moitié très précisément, en nous comptant vous et moi.

Dans l'intervalle des séances du séminaire, Clovis Clou, désœuvré, joue au billard ou fait des statistiques.

Parmi les clients du Lapin Rouge, $\frac{3}{5}$ sont en pension complète, les autres en demi-pension, et parmi ces derniers, $\frac{2}{3}$ prennent le dîner, les autres le déjeuner.

Les $\frac{2}{3}$ des pensionnaires, les $\frac{3}{4}$ des demi-pensionnaires qui dînent, la moitié de ceux qui déjeunent boivent du vin.

Dans chacune des trois catégories, les $\frac{4}{5}$ des buveurs consomment du vin rouge, côtes du rhône à 17 F le litre, ou beaujolais dont le prix (un nombre entier de francs) est très légèrement inférieur au double de celui des côtes du rhône.



L'hôtel sert $\frac{1}{4}$ de litre par personne au déjeuner, $\frac{1}{2}$ litre au dîner. Au titre de ces prestations sont encaissés 1 390 F par jour.

Ayant pris tous ces renseignements, Clovis se frotte les mains.

— Maintenant, pense-t-il, je pourrais, si je ne les avais déjà comptés, calculer le nombre des clients de l'hôtel. Combien sont donc ces clients (Clovis et Gaétan compris), et quelle quantité de beaujolais consomment-ils chaque jour?



38



les électeurs pontissaliens

Le jeune maire de Pontarlier, qui avait bien voulu présider le dîner de clôture du séminaire de mathématiques organisé dans sa ville, proposa au dessert à ses savants convives le problème suivant :

« Le nombre de mes électeurs a quatre chiffres différents. Si l'on ajoute tous les nombres qu'il est possible de former avec ces quatre chiffres pris trois à trois, on obtient un total égal au carré de la somme de ces quatre chiffres, multiplié par mon âge, et au nombre de mes électeurs multiplié par $36/13$. Quel est mon âge, et combien sont mes électeurs ? »

Clovis Clou donna la réponse à cette question au bout de deux minutes. Il vous faudra sans doute un peu plus de temps pour y parvenir.



39

voyage en cinq bandes

Sur un billard de 160 centimètres de largeur, une bille est placée sur la partie inférieure droite, à 60 centimètres de chacun des bords.

Cette bille est lancée sans effet vers la partie haut-gauche, la queue faisant un angle de 45° avec le grand côté du billard.

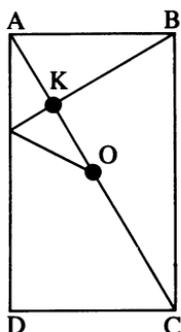
Après avoir touché cinq bandes, la bille revient à son point de départ.

Quelle est la longueur du billard ?



40

percussions de M. Clou sur un billard à trous



Sur un billard anglais $A B C D$, la boule O est au centre et la boule K au pied de la perpendiculaire abaissée de B sur $A C$. En jouant la bille O sur K , par l'intermédiaire de la bande $A D$, K est envoyée dans la poche B .

Quel est le rapport des côtés $B C$ et $A B$ du billard ?



41

réflexions de M. Clou sur un billard sans trous

Dans quelle direction faut-il frapper, sans effet, une bille, pour qu'après avoir touché les quatre bandes du billard, elle passe par son point de départ ?
Quelle sera la longueur du circuit ?



42

Clovis carambole

Une bille M est placée dans la partie supérieure droite du billard. Une bille M' est placée dans la partie inférieure, $M M'$ étant parallèle au grand côté. On donne une impulsion à M vers le haut, parallèlement à l'une des diagonales. On donne à M' une impulsion simultanée de même force vers le bas, parallèlement à l'autre diagonale.

Quelques instants après ce double départ, un même événement se produira dans la vie des deux billes.

Quoi et où ?



43

le billard circulaire

Une bille est placée sur un billard circulaire. Dans quelle direction faut-il la lancer pour qu'après deux réflexions elle passe par la position initiale ?

Ce problème a été posé et résolu pour la première fois par Ibn-al Haytham al Hazin, célèbre mathématicien arabe né à Bassora en 965.

On demande une solution *purement géométrique*.

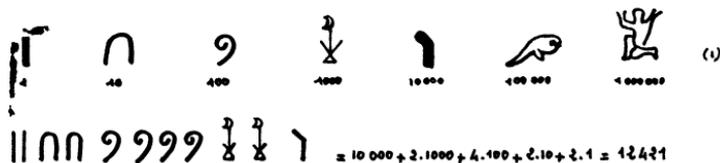
histoire des systèmes de numération et des chiffres

Pour compter, il faut des chiffres, mais aussi la manière de s'en servir. Cette dernière est constituée par les systèmes de numération. Autant de manières de se servir des chiffres que de systèmes de numération, c'est-à-dire deux — ou plus exactement deux groupes. Il existe en effet des numérations additives et des numérations de position.

1. Dans les numérations additives, chaque chiffre a une valeur intrinsèque, qui ne dépend pas de sa place, ces chiffres s'ajoutant pour former un nombre.

Exemple 133 ou 313 ou 331 = 1 + 3 + 3.

La simplicité de ce système a pour contrepartie la difficulté d'écrire de grands nombres, qui exigent la juxtaposition de symboles en quantité considérable. C'est pour pallier cet inconvénient que les numérations additives comportent des jalons, constitués par des signes qui représentent un certain nombre (la base du système), et les diverses puissances de ce nombre. Si la base est m , ces signes représenteront les nombres m , m^2 , m^3 , etc. Un exemple de ce système est fourni par la numération hiéroglyphique égyptienne, employée depuis les premières dynasties (II^e millénaire) jusqu'au II^e siècle avant notre ère, et qui avait pour base 10.



(1) Lorsque les hiéroglyphes sont verticalement dissymétriques, leur sens indique le sens de lecture. *Sens de lecture* ← →

Dans quelques numérations, le système est perfectionné par l'emploi d'une sous-base, p , diviseur de la base m , et la création de signes (ou chiffres) valant p , m , pm , m^2 , pm^2 , m^3 , pm^3 , etc. La numération grecque de Herodius (acrophonique), et la numération romaine, en usage la première à partir du VI^e siècle avant notre ère, la seconde à partir du III^e, en sont des exemples. Dans les deux cas, $m = 10$ et $p = 5$.

a.	I	∟	△	∟ [∟]	H	∟ [∟]	X	∟ [∟]	M	∟ [∟]
b.	I	∨	X	∩	⊕	⊖	⊖	⊖		
c.	I	∨	X	L	C	D	M	500	1000	5000
	1	5	10	50	100	500	1000			

- a. grec acrophonique (Attique)
 b. romain archaïque
 c. romain classique

Le romain comporte une complication (tardive) qui fait que cette numération n'est pas complètement additive: un signe placé devant un autre de plus grande valeur s'en retranche.

$$\text{HH}^{\text{∟}} \Delta \Delta \text{III} \text{CCLXXIV} = 274$$

grec romain

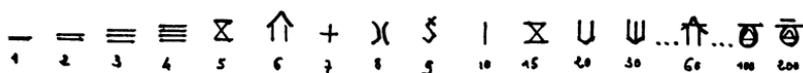
Dans le sumérien (du début du III^e millénaire au — XXVII^e siècle), la base était 60 et la sous-base 10.

a.	0, 10	10	20	30	40	50
b.	1	10	60	600	3600	36000

- sumérien a. écriture des tablettes
 b. cunéiforme

Un nouveau perfectionnement fut le choix de chiffres fondamentaux, 1, 2, 3, ... ($m - 1$), et de chiffres basiques : m , m^2 , m^3 .

On trouve des exemples de ce système dans les numérations indiennes des grottes (— II^e siècle à I^{er} siècle), dans la numération chinoise de l'époque Chang employée dans les inscriptions divinatoires sur os (— XIV^e siècle à — XI^e siècle) :



chinoise. Inscriptions divinatoires sur os

et dans les numérations alphabétiques, imaginées par les Phéniciens et adoptées par les Hébreux, les Grecs et les Arabes.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט
1	2	3	4	5	6	7	8	9
י	כ	ל	מ	נ	ס	ע	פ	צ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ק	ר	ש	ת	תק	תק	תש	תת	תתק
100	200	300	400	500	600	700	800	900

hébreu



α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	θ'
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	ο'	π'	ρ'
10	20	30	40	50	60	70	80	90
σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ϰ'	Ϡ'
100	200	300	400	500	600	700	800	900
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

L'alphabet grec ionien ne comptant que 24 lettres, et pour éviter les doublets ou triplets de l'hébreu, trois lettres sémitiques lui furent adjointes : digamma (6), koppa (90) et sampi (900).

Le souci continu de diminuer le nombre des signes amena un abandon partiel du système additif, la juxtaposition de deux chiffres correspondant parfois à leur produit.

Exemple : numération chinoise du commerce, numérotation tamoule (Inde du Sud*), numérotation maya des stèles.

𑄎	𑄑	𑄒	𑄓	𑄔	𑄕	𑄖	𑄗	𑄘	𑄙	𑄚
1	2	3	4	5	𑄛	7	8	9	𑄜	100

𑄑 𑄖	𑄒 𑄚	𑄓 𑄙	𑄔 𑄙	𑄕	= 2 3 4
2.1000	3.100	4.10	1	= 2 3 4	tamoul

*

2. Ce processus conduisit à la *numération de position*, qui est aujourd'hui la nôtre et qui fut imaginée plus de vingt siècles avant notre ère par les Babyloniens.

Dans cette numération, la base étant m , un chiffre a signifie d'après sa position : a , $a.m$, $a.m^2$, $a.m^3$, etc. Dans les numérations de position, le nombre des chiffres est réduit à m : 1, 2, 3... ($m - 1$) et zéro.

Un nouveau signe, zéro, est en effet indispensable pour indiquer les ordres d'unité absents. C'est faute d'avoir imaginé le zéro que la plupart des peuples furent si longtemps privés des immenses avantages de la numération de position.

Les Babyloniens utilisaient dans leur numération savante la base 60, qui était bien adaptée aux calculs astronomiques, mais dont l'amplitude entraînait quelques complications pratiques. C'est pourquoi cette numération fut mal comprise, même des Grecs, et disparut.

C'est au v^e siècle** de notre ère que la numération de position reparut en Inde, avec cette fois une base décimale; on ne connaît pas exactement les conditions de cette résurrection, mais il est probable qu'elle est due à une résurgence de la tradition babylonienne.

De l'Inde, ce système passa dans le monde arabe, où il fut découvert grâce à la traduction d'un traité d'astronomie, et le grand mathématicien Muhammad al-Kwârizmî la fit connaître

* Attestée au + 1^{er} siècle (inscriptions sur poteries).

** Simple hypothèse. La numération de position indienne n'a véritablement été attestée qu'en 876, date de l'inscription de Gwalior.

dans un ouvrage célèbre. Traduit en latin au début du XII^e siècle par Adélarde de Bath, sous le nom d'*Algorismus*, cet ouvrage permit l'introduction en Occident de la numération de position. Le nouveau système ne fut pas, malgré son évidente simplicité, accepté sans réticences; au XIV^e siècle, il n'avait pas encore universellement triomphé.

C'est au XVII^e siècle seulement que la Cour des comptes abandonna les chiffres romains; et nous employons encore ces mêmes chiffres dans nos inscriptions lapidaires et sur nos horloges.

La science est née et s'est développée principalement, mais non uniquement, dans le monde indo-sémitico-européen.

En Amérique centrale, un peuple, sur lequel nous ne possédons d'informations sérieuses que depuis son installation dans le Yucatan, au début du VII^e siècle, avait adopté une numération originale, d'abord additive, puis de position. La particularité — et la faiblesse — de la numération maya résidait dans sa double base, 20 au premier ordre, 18×20^n ensuite *: le nombre abcd — qui s'écrivait a — signifiait $d + c.20 + b.18.20 + a.18.20^2$.

b
c
d

Sur l'autre rive du Pacifique, les Chinois adoptèrent la plus grande base connue : 100, mais complétée par la sous-base 10. Numération savante chinoise :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 50 60 90

 — | = 14 一 一 一 一 = 77 一 〇 一 一 一 一 = 10 69 29

 chinois III.

La base 20 des peuples d'Amérique centrale fut aussi en usage dans notre pays même, chez les Celtes, et quelques vestiges en

* Il est à remarquer que $18 \times 20 = 360$, nombre aux multiples diviseurs.

ont été conservés dans notre langue : quatre-vingts, six-vingts (autrefois employé pour 120), l'Hôpital des Quinze-Vingts. On retrouve également des traces de système vicésimal en danois (*fyrretyve, tresindstyve, firsindstyve*), et en albanais.

Au cours des temps, on a proposé à plusieurs reprises de substituer à notre système dénaire d'autres systèmes dont on vantait les avantages. En 1687, Weigel publia une « arithmétique tétractique » (base 4).

Dans son *Histoire de Charles X*, Voltaire nous apprend que ce roi voulait introduire en Suède un système ayant pour base 64, qui est à la fois carré et cube ($8^2 = 4^3 = 64$). Il avait confié l'étude de cette question à Emmanuel Swedenborg. Celui-ci rédigea, en 1718, un traité dont la conclusion préconisait l'emploi de la base 8 plutôt que de la base 64. L'affaire n'eut pas de suite.

Divers mathématiciens avaient dès le Moyen Age remarqué que le système binaire, c'est-à-dire de base 2, permet la solution aisée de certains problèmes. Leibniz donne, dans ses *Mémoires de Berlin*, les règles du calcul en système binaire. De nos jours, ce système connaît une application majeure dans l'informatique, où il a été adopté parce qu'il est le plus apte à représenter les deux termes de l'alternative à laquelle est limité l'ordinateur : le courant passe ou ne passe pas.

Dans ce système, il n'existe que deux chiffres : 1 et 0. Deux s'écrit 10, quatre ou deux au carré s'écrit 100, huit ou deux au cube s'écrit 1 000, etc.

Mais c'est le système duodénaire, de base 12, qui a eu et qui conserve les plus nombreux partisans. Il permet un décompte simple des mois de l'année, des heures du jour, des degrés de la circonférence. De plus 12 possède quatre diviseurs — 10 n'en ayant que deux —, ce qui permettrait, s'il était base, d'exprimer par des nombres entiers sa moitié, son quart et son sixième. Ce système avait été proposé au début du XVII^e siècle, et pour la première fois, semble-t-il, par Simon Stevin. Auguste Comte reprit cette idée : remarquant que les quatre doigts opposés au pouce comptent douze phalanges, il imagina un procédé, qui

par opposition des pouces sur les phalanges, permettait de compter jusqu'à treize fois douze. On pourrait donc compter beaucoup plus loin sur ses phalanges en base 12 que sur ses doigts en base 10.

Ce système duodénaire a été employé dans certains commerces, et aujourd'hui encore dans celui des œufs qui se comptent, non par dizaine et centaines, mais par douzaines et par grosses ($144 = 12^2$). Il est également utilisé en typographie (1 cicéro = 12 points).

Sens de lecture des nombres

hiéroglyphique égyptien		↔
hiératique égyptien	}	←
sumérien		
hébreu		
arabe littéral		
maya	}	↓
chinois ancien		
chinois savant	}	↓
chinois moderne		
toutes les autres numérations		→

Il est à souligner que, dans les écritures glyphiques en particulier (égyptien, maya), un souci d'esthétique a souvent conduit scribes et graveurs à adopter pour les chiffres des dispositions très variées, sans rapport avec les schémas indiqués ci-dessus.

Les chiffres

J'ai naturellement employé beaucoup de chiffres dans le court historique des systèmes de numération que l'on vient de lire. Je voudrais maintenant parler des chiffres en eux-mêmes, de ces

Des chiffres indiens à nos chiffres

୧ ୨ ୩ ୪ ୫ ୬ ୭ ୮ ୯ ୦
୧ ୨ ୩ ୪ ୫ ୬ ୭ ୮ ୯ ୦
୧ ୨ ୩ ୪ ୫ ୬ ୭ ୮ ୯ ୦
୧ ୨ ୩ ୪ ୫ ୬ ୭ ୮ ୯ ୦
୧ ୨ ୩ ୪ ୫ ୬ ୭ ୮ ୯ ୦
୧ ୨ ୩ ୪ ୫ ୬ ୭ ୮ ୯ ୦

Chiffres indiens (II^os.)

chiffres indo-arabes et arabes d'Orient

Chiffres arabes gobâr (III^os)*

Apices français (IV^os)**

Chiffres gothiques (V^os)

Chiffres actuels.***

BIBLIOGRAPHIE

Beziau Pierre, *Origine des chiffres*, Angers, 1938.

Taton René, *Histoire du calcul*, Paris, 1946.

Ifrah Georges, *Le Chiffre à travers les âges et les civilisations*, Paris, 1976.

Et surtout le maître-ouvrage de Geneviève Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, 1975, avec une abondante bibliographie.

* Chiffres des Arabes occidentaux. Gobâr signifie poussière. Ces chiffres étaient utilisés par des marchands qui les traçaient sur le sable.

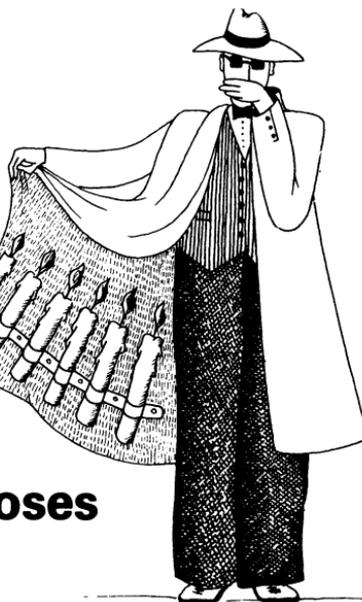
** Les apices, dont l'origine fut longtemps controversée et faussement attribuée à Pythagore, ne comportaient pas le zéro, qui ne fut introduit en Europe qu'au XII^e siècle.

*** A une ligne près, ce tableau est la reproduction de celui qui figure dans *L'Histoire du calcul*, de René Taton.



44

la base des sept chandeliers roses



La secte des sept chandeliers roses a été interdite. La police, apprenant qu'elle vient de donner un spectacle clandestin, organise une descente à sa base. A son arrivée, les spectateurs sont partis, mais elle trouve un document comptable :

26 entrées à 202 F : 5 555 F.

Les policiers sont très intrigués par cette arithmétique. Finalement le commissaire qui les dirige se frappe le front. « Ils ne font rien comme les autres, ces clients-là ! Même leur base ! » Qu'a voulu dire le savant commissaire ?



45

les filles de Mnémosyne et le diviseur obstiné

Dans un système de numération ayant n'importe quelle base supérieure ou égale à 5, le nombre écrit 40301 a un diviseur qui s'écrit toujours de la même façon.

Quel est ce diviseur ?

Si l'on prend pour base le nombre des filles de Mnémosyne, le quotient de 40301 par le diviseur précédemment trouvé s'écrit 181.

Combien étaient donc ces belles jeunes femmes ?



46

la poule et le gazomètre

Encore qu'elle ne vole guère, la poule, base du poulailler, en a x_1 , comme a la base du gazomètre pour diamètre de décimètre.

$$x_1 = 10 \quad A$$

Le x_2 , dit-on est nombre redoutable

$$x_2 = 15 \quad B$$

Ils sont x_3 s'il est rond

$$x_3 = 12 \quad C$$

Les x_4 points cardinaux

$$x_4 = 100 \quad D$$

x_5 reflets, beau chapeau

$$x_5 = 11 \quad E$$

Les x_6 muses

$$x_6 = 14 \quad F$$

Nos x_7 couleurs

$$x_7 = 11 \quad G$$

Les x_8 doigts de la main

$$x_8 = 12 \quad H$$

Fini le temps ou pour x_9 on vous en donnait $x_9 + 1$

$$x_9 = 30 \quad I$$

les x_{10} péchés capitaux

$$x_{10} = 13 \quad J$$

Ils sont x_{11} , et très impératifs

$$x_{11} = 12 \quad K$$

Bien aimé peut-être, mais fou sûrement était ce Charles
 x_{12}

$$x_{12} = 10 \quad L$$

$$D = G \quad B = K \quad C - F = J \quad L = 2 H$$

$$I. E = n. A$$

On demande la valeur de n ?



47

Zabulon et Coucoulina en vacances

Zabulon : Allons passer nos vacances en Karaounie.

Coucoulina : A ton âge !

Zabulon : Quoi, femme ! Je n'ai que trois fois ton âge !

Coucoulina : Et j'ai sept fois l'âge de mon petit frère.

Zabulon : Pourquoi me dis-tu ça ?

Coucoulina : Parce que ça peut servir.

Zabulon : Allons en Karaounie. Je ne vais pas attendre d'être centenaire pour entreprendre ce voyage.

Coucoulina : Quel intérêt trouves-tu à ce pays lointain ?

Zabulon : Son système de numération, qui fait que mon âge, comme le tien, s'y écrivent, avec les mêmes chiffres qu'ici, en France, mais dans l'ordre inverse.

Coucoulina : Vraiment ? C'est prodigieux !

Zabulon : Tu vois, ma Coucoulina ! Il faut aller à Karaoun.

Coucoulina : Je t'y suivrai, Zabulon.

Cette conversation révèle les âges de Zabulon et de son épouse Coucoulina.

Quels sont-ils ?



48

je dirai quelque jour vos naissances latentes

Compléter les séries suivantes par leur premier terme manquant (marqué par un point)

- . - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 -
- . - 5 - 5 - 5 - 5 - 10 - 11 - 12 - 101
- . - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 21 - 100 - 1001
- . - 16 - 17 - 21 - 23 - 30 - 33 - 120 - 1111
- . - 23 - 25 - 30 - 33 - 41 - 111 - 210 - 10101

Les nombres trouvés évoquent certains éléments.
Comment se nomme l'ensemble de ces éléments ?



lettre de Flaubert à sa sœur Caroline

« Puisque vous étudiez la géométrie et la trigonométrie, je vais vous soumettre un problème : Un bateau vogue sur l'Océan. Il a quitté Boston avec un chargement de laine. Il jauge 200 tonneaux. Il se dirige vers Le Havre. Le grand mât est cassé, le garçon de cabine est sur le pont, il y a douze passagers à bord. Le vent souffle ENE. L'horloge marque 3 h 1/4. On est au mois de mai. Quel est l'âge du capitaine ? »





49

l'anniversaire de Claudine

Un jour qu'il dînait avec Claudine, sa nièce préférée, Clovis Clou lui demanda : « Au fait, chère petite, quelle est la date de ton anniversaire ? »

« Avant-hier, dit Claudine, j'avais 19 ans, et l'année prochaine, j'en aurai 22.

Clovis Clou fut si enchanté de cette réponse qu'il offrit à sa nièce un diamant.

Quel était l'anniversaire de Claudine ?



50

Clodomir se remarie

L'instable Clodomir ayant divorcé une fois de plus, il tomba amoureux d'une jeune agrégée de mathématiques. Avant d'envisager un nouveau mariage, il consulta son oncle Clovis dont il appréciait la sagesse.

— La seule chose qui me gêne, dit Clodomir, c'est qu'elle a trois enfants.

— Quels sont leurs âges ?

— Elle n'a pas voulu me le dire.

— Allons la voir, dit Clovis. (La dame les reçut fort bien.)

— Monsieur, dit-elle à Clovis, je sais que vous êtes habile mathématicien. Aussi vous dirai-je seulement que le produit des âges de mes enfants exprimé en nombres d'années est 36 et que leur somme est égale au nombre de tabatières posées sur cette table. (Clovis réfléchit un instant.)

— Mais madame, il y a une ambiguïté.

— C'est vrai. L'aîné de mes enfants est à la piscine.

Clovis se tourna vers son neveu.

— Eh bien, tu es renseigné ?

— Ma foi non, dit Clodomir.

— Tu n'est pas très intelligent, soupira Clovis.

Êtes-vous plus doué que Clodomir ?



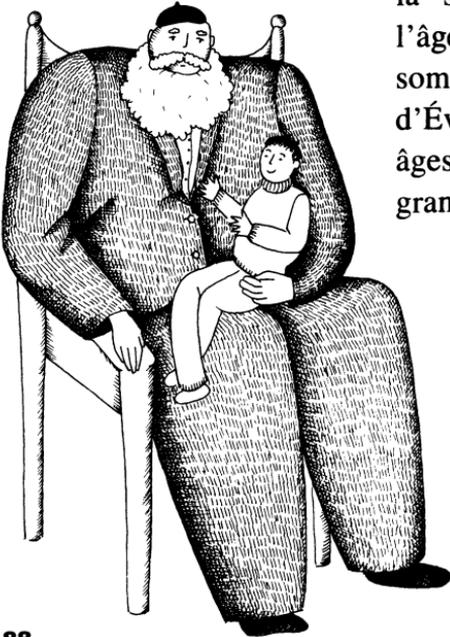
51

Évariste et son grand-père

Le grand-père d'Évariste, qui n'est pas centenaire, a 63 ans de plus qu'Évariste, qui est majeur.

Si la somme des âges du grand-père et d'Évariste est égale à la somme des chiffres de leurs âges multipliée par un certain nombre entier n , et si la différence de leurs âges est égale à ce même nombre n multiplié par la différence entre

la somme des chiffres de l'âge du grand-père et la somme des chiffres de l'âge d'Évariste, quels sont les âges d'Évariste et de son grand-père ?





52

le secret de la famille Béduche

Les Béduche (M., Mme et leur fils) considèrent leurs âges comme un secret de famille. Un jour, Clovis Clou ayant eu l'indiscrétion de questionner le fils à ce sujet, le père intervint. Croyant embarrasser le vieux mathématicien, il lui dit : « La somme de nos trois âges est inférieure à 70. J'ai 5 fois l'âge de mon fils et, dans quelques années, le rapport de mon âge à celui de mon fils sera un nombre entier égal au rapport de la somme des trois âges que nous aurons alors dans la famille à la somme des trois âges que nous avons aujourd'hui. Le tout en nombres entiers, pour vous faciliter la tâche. »

Clovis partit en haussant les épaules. Et, comme il n'était pas discret, tout l'immeuble sut bientôt pourquoi les Béduche étaient si secrets au sujet de leurs âges.

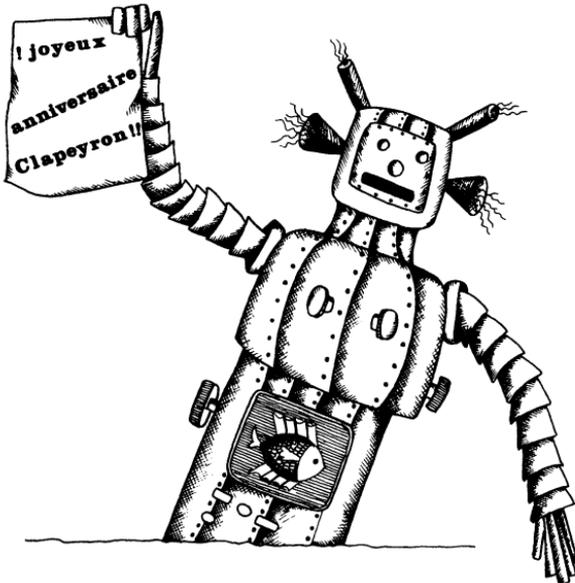
Oui, pourquoi donc ?



53

Clapeyron en l'an 2000

Quel âge Clapeyron aura-t-il en l'an 2000, sachant que cet âge sera égal à la somme des chiffres de son année de naissance ?





54

l'âge de raison

Le petit Pierre est fier d'avoir un an de plus. Il achète chez le marchand de couleurs des figurines représentant le chiffre de son âge, et il en tapisse les murs de sa chambre. Ce travail terminé il reste à Pierre cinq figurines. Avec les trois premières, il écrit son âge et celui de son grand-père. Puis, ayant fait une certaine remarque, il s'aperçoit qu'il peut aussi écrire l'âge de son arrière-grand-père avec les deux dernières.

Sur ce, la mère de Pierre entre dans la chambre, et s'indigne des collages de son fils.

— Mon petit Pierre, quand donc seras-tu raisonnable ?
Vous fondant sur la croyance populaire, pouvez-vous répondre à cette mère inquiète ?

quelques paradoxes

Un paradoxe, disent les dictionnaires, est une opinion contraire à l'opinion commune. Lorsqu'on pénètre dans le domaine de la logique et des mathématiques, cette définition doit être précisée et étendue; un paradoxe est une assertion contraire, non seulement à l'opinion commune, mais à l'évidence: la flèche qui vole est immobile ou bien $1 = 2$.

Un paradoxe, c'est aussi une proposition qui porte en elle sa contradiction, comme la phrase: je suis un menteur.

Un paradoxe, enfin, c'est la démonstration de plusieurs propositions contradictoires: $a > b$ et $a < b$.

Depuis l'Antiquité jusqu'à aujourd'hui, philosophes et mathématiciens ont énoncé d'innombrables paradoxes, dont quelques-uns sont célèbres. Ils l'ont fait quelquefois par jeu, le plus souvent pour débarrasser les définitions d'ambiguïtés ou de contradictions internes, pour approfondir certaines notions, ou pour faire apparaître des conceptions nouvelles.

*

Parmi les paradoxes les plus anciens et les plus célèbres figurent ceux qu'énonça le philosophe grec Zénon d'Élée au v^e siècle avant notre ère; d'abord celui de la flèche immobile, auquel il a été fait allusion: la divisibilité infinie de l'espace prouve l'impossibilité du mouvement; car, pour aller de A à B, un point aura dû parcourir la moitié de AB, ce qui implique qu'il aura parcouru la moitié de la moitié de AB, et auparavant la moitié de cet intervalle, et ainsi de suite; la somme d'un nombre infini d'intervalles ne peut être franchie que dans un temps infini.

De même Achille, malgré son agilité à la course, ne pourra jamais rattraper la tortue; supposons qu'il soit 100 mètres en

arrière de la tortue, et qu'il avance dix fois plus vite : lorsqu'il aura franchi 100 mètres, la tortue aura avancé de 10 mètres, et lorsqu'il aura franchi ces 10 mètres, la tortue aura avancé de 1 mètre, etc. Zénon ne concevait pas qu'une infinité de termes puisse avoir une somme finie, autrement dit qu'existent des séries convergentes. Dans le cas d'Achille et de la tortue, il s'agit d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{10}$, et la rencontre aura lieu à $\frac{100}{1 - \frac{1}{10}} = 111,11\dots$ M du point de départ d'Achille.

Paradoxes arithmétiques et algébriques

$$a > b, a = b$$

Soit à démontrer que a, plus grand que b, est égal à b.

Posons $a = b + c$.

Multiplions les deux termes par $a - b$.

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

et, en divisant par $a - b - c$,

$$a = b$$

$$1 = -1$$

Soit à démontrer que $1 = -1$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1} \sqrt{1} = \sqrt{-1} \sqrt{-1}$$

$$1 = -1$$

$$1 = 2$$

Soit à démontrer que $1 = 2$

On sait que, quel que soit x , $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\text{donc : } \quad (\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$$
$$\quad \cos^3 x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}$$

ajoutons 3 aux deux membres de l'identité

$$\cos^3 x + 3 = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3$$

donnons à x la valeur π ; alors $\cos x = -1$, $\sin x = 0$

$$2 = 4$$

$$1 = 2$$

Paradoxes sur les séries alternées

Désignons par A la somme, si elle existe, de la série alternée

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = A$$

nous pouvons écrire

$$A = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots =$$
$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

mais nous pouvons aussi écrire

$$A = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) \dots = 1$$

ou encore

$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - A$$

d'où : $2A = 1 \quad A = \frac{1}{2}$

nous pouvons trouver d'autres valeurs de A , à la condition de savoir faire des divisions algébriques telles que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = 1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + \dots$$

etc.

faisons $x = 1$ dans ces identités ; les seconds membres donnent tous la série alternée $1 - 1 + 1 \dots = A$. Les premiers membres deviennent $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc.

Nous avons donc trouvé pour A les valeurs $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc.

Les deux premiers résultats 1 et 0 avaient été remarqués au XVII^e siècle, et un mathématicien aussi éminent que Leibniz en avait été troublé ; il en avait tiré une proposition qui nous paraît aujourd'hui surprenante : puisque 1 et 0 sont des valeurs également probables de la limite de la série, la valeur exacte est la moyenne $\frac{1}{2}$.

Série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots = K$$

séparons les termes négatifs des termes positifs

$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1)$$

on a d'autre part évidemment

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2)$$

ajoutons membre à membre (1) et (2)

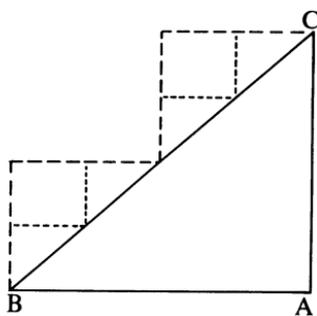
$$\begin{aligned} K &= \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots\right)\right. \\ &\quad \left.+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots\right)\right] \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots\right) \\ K &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots\right) = 0 \end{aligned}$$

On pourrait, par d'autres arrangements des termes de la série, trouver d'autres valeurs de K . En fait, n'importe quelle valeur. La série harmonique alternée qui peut être dissociée en deux séries divergentes affectées de signes contraires est dite « semi-convergente »; or le mathématicien allemand Riemann a démontré en 1854 ce théorème remarquable: « Les termes d'une série semi-convergente peuvent être combinés de telle manière que la limite de cette série soit n'importe quel nombre, positif ou négatif, fini ou infini. »

Paradoxes géométriques

On sait que la longueur d'une circonférence est la limite des périmètres des polygones réguliers inscrits dans cette circonférence, lorsque le nombre de leurs côtés augmente indéfiniment. C'est d'ailleurs cette propriété qui a permis le premier calcul du nombre π .

On peut rechercher une propriété analogue dans le triangle. Considérons un triangle rectangle isocèle dont les côtés égaux ont la valeur 1. L'hypoténuse de ce triangle est $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Construisons de B à C une ligne brisée en forme d'escalier, et désignons par L sa longueur. Nous pouvons adopter, comme hauteur des marches, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc. Si l'on double indéfiniment le nombre des marches, la ligne brisée tendra à se confondre avec l'hypoténuse, et sa longueur, L, tendra, semble-t-il, vers $\sqrt{2}$.

Or ce résultat est faux. L est toujours égale à $BA + AC = 2$

Paradoxes de la ficelle

Supposons qu'une très grande ficelle fasse le tour de la terre, assimilée à une sphère parfaite, la longueur des méridiens étant exactement 40 000 000 de mètres.

On allonge la ficelle de 1 mètre, et on la soulève au-dessus du sol, uniformément, de façon qu'elle continue à former une circonférence complète. A quelle hauteur au-dessus du sol sera la ficelle allongée ?

Si R est le rayon de la circonférence primitive que décrit la ficelle, de longueur L,

$$L = 2 \pi R$$

Si l'on donne à L un accroissement dL, il en résultera pour R un accroissement dR tel que :

$$dL = 2 \pi dR$$

$$dR = \frac{dL}{2 \pi}$$

Si $dL = 1$ m, $dR = \frac{1}{2\pi} = 0,16$ m environ.

La ficelle allongée de 1 mètre sera à 16 centimètres au-dessus du sol.

Ce résultat paraît surprenant. Il est en outre remarquable que dR ne dépende pas de R .

Le résultat serait le même si l'on enroulait la ficelle autour d'une assiette, d'une pièce de monnaie et, à la limite, d'un point. Dans le dernier cas, l'accroissement de rayon deviendrait le rayon r de la circonférence formée par la ficelle autour du point.

$$1 = 2\pi r$$
$$r = \frac{1}{2\pi} = 0,16 \text{ m environ.}$$

On peut envisager la question d'une façon un peu différente, mais tout aussi étonnante :

Considérons une assiette de 10 centimètres de rayon, et un méridien terrestre qui a pour rayon $\frac{40\,000}{2\pi} = 6\,366$ km

Augmentons de 1 mètre le rayon de l'une et de l'autre. De combien augmentera la circonférence dans chacun des deux cas ?

Cas de l'assiette. L'augmentation est, en mètres :

$$2\pi \cdot 1,10 - 2\pi \cdot 0,10 = 6,911 \text{ m}$$

Cas du méridien terrestre.

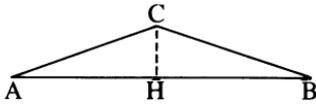
$$2\pi \cdot 6\,366\,001 - 2\pi \cdot 6\,366\,000 = 2\pi = 6,911 \text{ m}$$

L'augmentation de la circonférence est la même dans les deux cas.

*

Supposons maintenant qu'une ficelle soit tendue entre les points A et B distants de 100 mètres.

Prenons une ficelle plus longue de 1 mètre, et tirons-la perpendiculairement au milieu de AB, en HC, de façon qu'elle demeure tendue. Quelle est la valeur de HC ?



$$\begin{aligned}
 HC^2 &= AC^2 - AH^2 = 50,5^2 - 50^2 \\
 &= 50,25 \\
 HC &= 7,089 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Le fait qu'une variation de longueur de 1 mètre de la ficelle entraîne une flèche si importante — plus de 7 mètres! — est inattendu.

Mais il y a plus curieux encore. Supposons que la distance AB ne soit plus que de 10 mètres. A un égal allongement de la ficelle — 1 mètre — ne correspondra plus qu'une flèche de 2,292 m

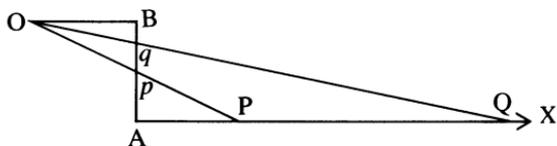
Ainsi, paradoxalement, à un même allongement de la ficelle, correspondent des flèches inversement proportionnelles aux allongements relatifs :

$$7,089 \text{ m pour } \frac{1}{100} \quad 2,292 \text{ m pour } \frac{1}{10}$$

Paradoxes sur les Ensembles

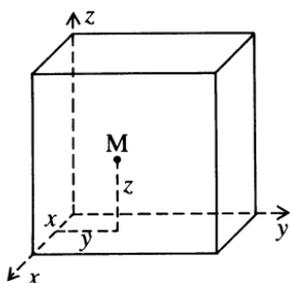
Les paradoxes de l'infini, que nous avons entrevus à travers les cogitations de Zénon d'Élée et les incohérences des séries semi-convergentes, apparaissent largement dans la théorie des ensembles. Le plus déconcertant, peut-être, est celui-ci : « Il y a un même nombre de points sur un segment de droite (si petit soit-il), sur une demi-droite, dans un carré, dans un plan, dans un cube, dans tout l'espace ». Pour « démontrer » ce paradoxe, il est nécessaire de s'appuyer sur un lemme évident.

Considérons deux collections de points. Si à tout point de la première collection on peut faire correspondre un point de la deuxième, et si, réciproquement, à tout point de la deuxième collection on peut faire correspondre un point de la première — autrement dit si on peut établir une relation bi-univoque entre les points des deux collections — alors il y a le même nombre de points dans chaque collection.



Cela dit, prenons pour première collection les points du segment AB, pour deuxième collection les points de la demi-droite AX. La figure montre qu'une correspondance bi-univoque peut être établie entre les deux ; à p correspond P, à Q correspond q. Il y a donc le même nombre de points sur AB et sur AX.

Démontrons maintenant la correspondance bi-univoque entre les points d'un cube d'arête 1 et ceux d'un segment de longueur 1. Un point M quelconque du cube a pour coordonnées :



$$\begin{aligned} X &= 0, x_1x_2x_3 \dots \\ Y &= 0, y_1y_2y_3 \dots \\ Z &= 0, z_1z_2z_3 \dots \end{aligned}$$

A ce point M du cube, nous pouvons faire correspondre un point m d'un segment ayant pour abscisse $x = 0, x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3y_3z_3 \dots$. Réciproquement, à tout point p du segment ayant pour abscisse $x = a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3 \dots$, nous pouvons faire correspondre un point P du cube ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} X &= 0, a_1b_1c_1 \dots \\ Y &= 0, a_2b_2c_2 \dots \\ Z &= 0, a_3b_3c_3 \dots \end{aligned}$$

Il y a donc le même nombre de points sur le segment et dans le cube.

Il serait facile de passer à la droite et à tout l'espace.

Lorsque Cantor, fondateur de la théorie des ensembles, eut

démontré la propriété que nous venons d'énoncer, il en fut bouleversé. Doutant de son jugement, il s'adressa à deux reprises, en juin 1877, au mathématicien Dedekind pour obtenir son avis sur cette extraordinaire proposition. Dans sa deuxième lettre, datée du 29 juin, il écrit :

« Veuillez excuser mon zèle pour cette affaire et mon appel répété à votre bonté et à votre peine : ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi si nouveau, si inattendu, si extraordinaire, que je ne pourrai retrouver ma tranquillité d'esprit avant d'avoir reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne pourrai que dire : Je le vois mais je ne le crois pas. »

Dedekind répondit le 2 juillet :

*« J'ai examiné encore une fois votre démonstration et n'y ai trouvé aucune lacune... Mais vous êtes obligé d'introduire dans la correspondance une discontinuité à donner le vertige, une discontinuité qui réduit tout en atomes... cette lettre n'a d'autre but que de vous prier de ne pas entreprendre publiquement des polémiques contre les articles de foi admis jusqu'à présent de la théorie des multiplicités avant d'avoir soumis mon objection à un examen approfondi * . »*

Aujourd'hui les raisonnements sur les ensembles sont entrés dans nos habitudes intellectuelles, et le paradoxe du continu nous apporte moins de trouble qu'à son inventeur.

La raison de ce résultat apparemment absurde est que les ensembles de points considérés ne sont pas *dénombrables*. Dire « il y a autant de points que » n'a pas de sens dans ce cas. L'énoncé correct est : les ensembles des points d'un segment de droite, d'une demi-droite, d'un plan, d'un cube, d'un espace tridimensionnel illimité, sont des ensembles équivalents, qui ont même puissance.

*

* Extraits traduits de *Briefwechsel Cantor Dedekind*, Ed. E. Noetter et J. Cavailles, Götting-Paris.

Paradoxe de Russel

Ce paradoxe est fondé sur la considération de l'ensemble O de tous les ensembles qui se contiennent eux-mêmes comme éléments, et de l'ensemble N de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

Il paraît certain qu'un ensemble quelconque appartient à O ou à N. Or on constate que N ne peut être compris ni dans O ni dans N sans violer une de nos définitions.

A ce paradoxe de Russel s'apparentent des exemples classiques. Le plus ancien remonte au VI^e siècle avant notre ère, puisqu'il est attribué au poète Epiménides, qui avait dit: «*Tous les Crétois sont des menteurs.*» Si l'on se rappelle qu'Epiménides était Crétois, on constate que cette déclaration contient une contradiction interne, et qu'elle ne permet pas de savoir si les Crétois sont menteurs, ou s'ils ne le sont pas.

Un autre exemple classique est celui du barbier qui doit raser tous les hommes de son village ne se rasant pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Il est impossible de décider s'il se rasera ou non.

Le paradoxe de Russel et ses prolongements ont conduit à exclure la notion d'« ensemble de tous les ensembles ».

Paradoxes sur les probabilités

On lance trois pièces. Quelle est la probabilité pour qu'elles tombent toutes les trois du même côté?

On peut résoudre cette question de deux façons. La première constate que, sur les trois pièces, deux tombent toujours du même côté. La probabilité pour que la troisième tombe aussi de ce côté est $\frac{1}{2}$. La réponse est $\frac{1}{2}$.

On peut aussi considérer que les probabilités pour qu'une pièce, deux pièces, trois pièces tombent du côté face sont $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

La probabilité pour que les trois pièces tombent du côté pile est de même $\frac{1}{8}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$. Quelle est la bonne réponse? C'est $\frac{1}{4}$.

Paradoxe de la boîte de Bertrand

Le mathématicien Bertrand propose dans son *Calcul des probabilités* (1889) la question suivante : Trois boîtes d'apparence identique contiennent l'une deux pièces d'or, l'une deux pièces d'argent, et l'une une pièce de chaque sorte. On prend une boîte au hasard ; quelle est la probabilité que ce soit celle qui contient des pièces différentes ?

La première réponse, qui paraît évidente, est $\frac{1}{3}$. Mais un autre raisonnement conduit à un résultat différent. Le voici : de la boîte choisie, retirons une pièce ; peu importe sa nature ; puisque l'or et l'argent jouent le même rôle dans cette affaire, il y a une chance sur deux pour que la pièce restante soit d'or, et une chance sur deux pour qu'elle soit d'argent, donc une chance sur deux pour qu'elle soit différente de celle qui a été enlevée. La réponse à la question posée est donc $\frac{1}{2}$.

La bonne réponse est $\frac{1}{3}$.

Paradoxe de Lewis Carroll

C'est à l'art du prestidigitateur que fait appel Lewis Carroll pour en arriver à présenter comme raisonnable une réponse absurde à une question simple : Dans un sac sont enfermés deux jetons dont on ne sait rien sinon que l'un et l'autre sont ou blanc ou noir ; comment connaître la couleur de ces jetons sans ouvrir le sac ?

Carroll raisonne ainsi : si un sac contient trois jetons, deux noirs et un blanc, la probabilité de tirer un noir est $\frac{2}{3}$, et aucune

autre combinaison ne peut donner cette probabilité. Dans le sac qui fait l'objet du problème, quatre combinaisons sont possibles : les deux jetons sont noirs (NN), le premier est noir et le second blanc (NB), le premier est blanc et le deuxième noir (BN), les deux sont blancs (BB). Ces quatre combinaisons sont également probables, la probabilité de chacune est donc $\frac{1}{4}$. Si l'on ajoute un jeton noir, les quatre combinaisons, toujours également probables, deviennent NNN, NNB, NBN, NBB. Si la première combinaison est réalisée, la probabilité de tirer un noir du sac est 1 ; si c'est la deuxième combinaison, $\frac{2}{3}$; si c'est la troisième, $\frac{2}{3}$; si c'est la quatrième, $\frac{1}{3}$. La probabilité globale de tirer un noir est donc :

$$1 \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

Or nous avons établi qu'à la probabilité $\frac{2}{3}$ correspondait obligatoirement la combinaison deux noirs, un blanc. Donc, avant l'adjonction dans le sac d'un jeton noir, celui-ci contenait un noir et un blanc.

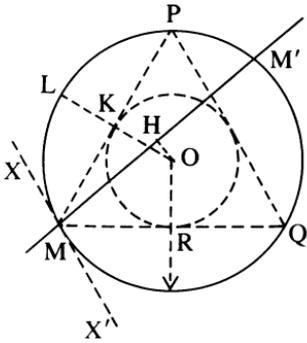
Deux n'existe pas

Le paradoxe suivant conduit à un résultat tout aussi absurde ; il est fondé sur la pétition de principe : un cas qui a la probabilité 0 de se réaliser n'existe pas. Nous savons qu'il y a une infinité de nombres premiers. Un seul parmi eux est pair. Si donc nous choisissons un nombre premier au hasard, la probabilité de tirer un premier pair est $\frac{1}{\infty} = 0$. Il n'y a donc pas de premier pair ; 2 n'existe pas.

Un véritable paradoxe

Ces pseudo-démonstrations n'ont qu'un intérêt anecdotique, et on pourrait les qualifier d'enfantines si, à une époque ou à une autre, elles n'avaient pas troublé quelques philosophes. Je voudrais terminer par un paradoxe beaucoup plus déconcertant. Il

est fondé sur la question suivante : Un cercle étant donné, on trace au hasard une droite coupant ce cercle ; quelle est la probabilité pour que le segment intercepté par le cercle sur la droite soit plus grand que le côté du triangle équilatéral inscrit ?



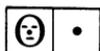
Soit MM' la droite tracée au hasard, et MPQ le triangle équilatéral inscrit ayant un sommet en M . Si MM' est intérieur à l'angle $\widehat{PMQ} = \frac{\pi}{3}$, MM' est supérieur au côté du triangle. Si MM' est intérieur aux angles \widehat{XMP} ou $\widehat{X'MQ}$, dont la somme est $\frac{2\pi}{3}$, MM' est inférieur au côté du triangle. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\frac{\pi}{3} \text{ (cas favorables)}}{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \text{ (total des cas)}} = \frac{1}{3}$$

Considérons maintenant le point H , milieu de MM' . Le segment intercepté sera plus grand que le côté du triangle si $OH < OK$, plus petit dans le cas contraire. Comme OH varie de O à R et que $OK = \frac{R}{2}$, la probabilité cherchée est $\frac{1}{2}$.

Considérons enfin le cercle inscrit dans le triangle, qui a pour rayon $OK = \frac{R}{2}$, et dont la surface est donc le quart de celle du cercle donné. Le segment intercepté sera plus grand que le côté du triangle équilatéral si son milieu K est à l'intérieur du cercle inscrit, plus petit dans le cas contraire. Le cercle inscrit étant quatre fois moins étendu que le cercle donné, la probabilité pour que K lui soit intérieur est $\frac{1}{4}$. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{4}$.

Paradoxe probabilité qui, évaluée par des méthodes également et incontestablement correctes, est $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$!



55

divagations zoologiques

Dans les premières années d'existence de l'École polytechnique, qui s'appelait alors École centrale des travaux publics, les anciens posaient un certain nombre de questions burlesques à leurs conscrits.

En voici quelques-unes :

1. *Comment feriez-vous pour vous nourrir sur une île déserte, n'ayant qu'une canne de jonc ?*

Plus classique était le théorème suivant :

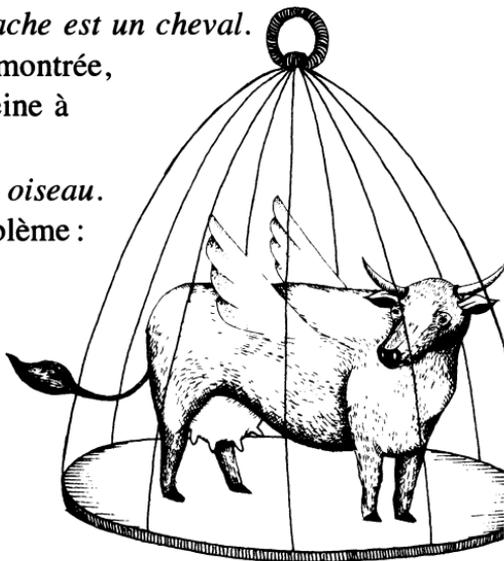
2. *Le carré d'une vache est un cheval.*

Cette proposition démontrée, on n'avait aucune peine à établir la suivante :

3. *Une vache est un oiseau.*

Et à résoudre le problème :

4. *Combien y a-t-il de mouches sur un cheval ?*





56

le marché couvert de Saint-Privat-des-Vieux

La municipalité de Saint-Privat-des-Vieux décide de faire construire un marché en pierres des Cévennes, couvert de tuiles romaines. Le marché aura 30 mètres de long, 13 mètres de large, 4 mètres de haut à la base du toit, 6 mètres de haut au faîte. Le prix de l'ensemble du bâtiment sera de 553 465 F. Combien coûtera le toit ?



57

l'arbre, la borne et le bipède

Un chemin sinueux de 1 513 mètres de long va d'un arbre à une borne. Un homme, dont le pas est de 0,85 m va de l'arbre à la borne et arrive sur le pied droit.

De quel pied est-il parti ?



les nombres littéraux

On peut imaginer un système de numération de base 26, dans lequel les lettres de l'alphabet seraient les chiffres, z figurant le zéro.

Dans un tel système, tout mot, toute phrase, toute œuvre littéraire, toute collection de livres représenteraient des nombres, et parfois des nombres gigantesques.

Prenons le cas d'un mot moyen de la langue française, c'est-à-dire d'un mot de cinq lettres (eh oui!), *arbre* par exemple.

Traduit en numération décimale le nombre arbre serait :

$$\begin{aligned} a \times 26^4 + r \times 26^3 + b \times 26^2 + r \times 26 + e = \\ 1 \times 26^4 + 18 \times 26^3 + 2 \times 26^2 + 18 \times 26 + 5 = 775\,169 \end{aligned}$$

Le nombre zéro serait pour sa part égal à

$$5 \times 26^2 + 18 \times 26 + 15 = 3\,863$$

Le nombre représenté par l'œuvre romanesque de Balzac, qui commence par a (*le Colonel Chabert*) et contient à peu près neuf millions de lettres, serait de l'ordre de

$$10^{12\,700\,000}$$

ce qui est un nombre inimaginable, n'ayant aucune représentation possible, même à l'échelle cosmique...

Certains nombres littéraux immenses pourraient être facilement mémorisés, alors que, dans notre système décimal, un individu moyen peut difficilement retenir un nombre supérieur à un milliard. Les enfants apprennent par cœur, sans grands efforts, une fable telle que *la Cigale et la Fourmi*. Dans le système de

numérotation littéral, cette fable, qui commence par *la cigale* et qui compte 464 lettres, constituerait un nombre voisin de

$$16.287 \times 10^{652}$$

On comprendra le gigantisme de ce nombre si l'on considère qu'en 1974 le rayon de l'univers connu (limite de portée des radiotélescopes) était de 10^{26} mètres...

Si un homme immortel écrivait au hasard un nombre littéral sans fin sur un livre grand comme l'univers, ce nombre comprendrait toutes les œuvres passées et futures écrites dans notre alphabet.



58

le complot des Troussequins

Lors du redoutable *complot des Troussequins*, le « numéro deux » de la conjuration écrivit à son chef, qui avait dû se réfugier à l'étranger, pour lui énumérer les villes françaises dans lesquelles il était en mesure de fomenter des troubles.

La police intercepta cette lettre, ainsi rédigée :

« Il pris ces bougres tannés aux mines navrées,
ces louves aux trous dans les canines. L'un bricole
à nouer le rotin, l'autre nage vers la rive,
ayant pour mires une cane, une lapine.

Manies! Sur la crête danse la ronde Nadine.

Les Saler? Non, dorez-les d'un lumen! »

Les policiers ne comprirent rien à cette lettre. Et pourtant les noms de 24 villes y sont dissimulés.

Pouvez-les trouver?



59

la riche Levalloise

Une dame possède dans sa ville quantité d'immeubles et d'entreprises.

Pouvez-vous exprimer cette situation par une phrase — de cinq mots — possédant la singularité de pouvoir être lue indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche.



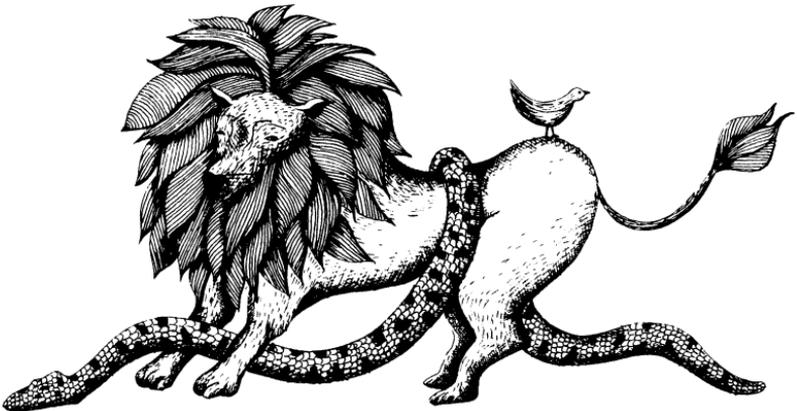
60

pas d'arnica pour les canules

On lui fait présent de canules en laque de Chine. Sans malice, sur un signe de la maid, cette tourte pose sa loupe sur l'aire torve des canules et les casse.

Sentant le roussi, la maid agile fuit au loin dans les épis. Et lui prend la sécotine.

Trouver dans ce récit, 17 noms d'animaux différents, bouleversés par ce fâcheux incident (singulier ou pluriel).





61

la musique des mots

Des sept aphorismes suivants, tirer les éléments successifs
d'un ensemble.

Delenda est Carthago

Rira bien qui rira la dernière

Maître de lui, maître chez lui.

Fais ce que dois, advienne que pourra.

Soigne le chien, saigne le goupil.

La plus belle fille du monde ne peut donner

que ce qu'elle a

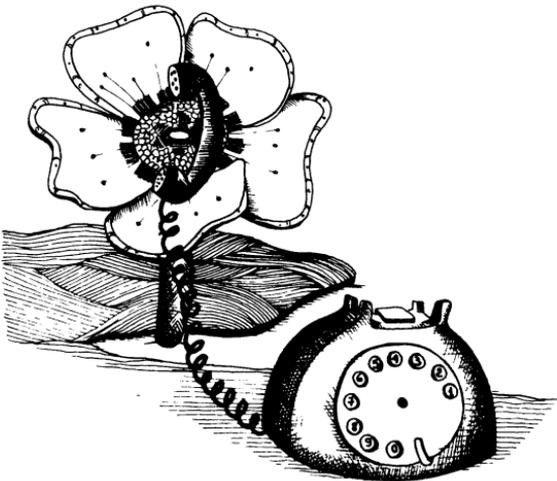
Sic transit gloria mundi



62

la cachette de la reine de Saba

- Cachait-elle ses trésors très orientaux ici ?
 - Ordinairement uniquement ici, car elle savait ta mesure occupée illégitimement.
- Ces deux répliques en cachent deux autres, qui constituent à elles seules un fascinant dialogue.
Quelles sont-elles ?



les carrés magiques

Je ne sçay guères rien de plus beau en l'arithmétique que ces nombres que quelques-uns appellent planetarios, et les autres magicos.

(Lettre de Fermat au P. Mersenne, 1^{er} avril 1640)

Ayant proposé un problème sur les carrés magiques dans la revue d'une grande école, il y a quelques années, je fus stupéfié par l'abondance du courrier que je reçus peu après. Mes interlocuteurs furent non seulement nombreux, mais révélèrent souvent une grande compétence. Par la suite, je découvris une vaste littérature, ancienne mais aussi actuelle, sur les carrés magiques. C'est pourquoi, je ne consacrerai que quelques pages à cette fantaisie arithmétique, dans la crainte d'ennuyer ceux de mes lecteurs qui posséderaient une connaissance approfondie de la question. Je me bornerai à signaler quelques curiosités qui m'ont paru particulièrement attrayantes, et dont certaines sont, je crois, inédites.

Il me faut pourtant définir le carré magique : une grille carrée dans laquelle sont inscrits des nombres choisis et disposés de telle façon que leur somme soit la même, qu'on les ajoute par ligne, par colonne, ou suivant les diagonales :

Par exemple

2	9	4
7	5	3
6	1	8

La somme commune, ici 15, est le *nombre magique*, ou la somme du carré; le carré est dit d'ordre 3, ou de module 3, parce que son côté comporte trois nombres.

Les carrés magiques sont très anciens, puisqu'ils étaient connus des Chinois et des Hindous bien avant le début de notre ère. Ils furent empruntés aux Hindous par les Arabes, transportés par ces derniers en Occident où un moine grec, Moschopoulos, les révéla aux chrétiens, au XIV^e siècle. De tout temps, des propriétés magiques furent attribuées à ces êtres mathématiques, ce qui explique leur nom; cette croyance superstitieuse n'a pas disparu à notre époque puisque, il y a quelques années, les femmes cambodgiennes traçaient de tels carrés sur leurs foulards pour se protéger des bombardements.

Des chercheurs astucieux se sont ingéniés à augmenter les difficultés en superposant à la « magie » des carrés des conditions supplémentaires. Voici quelques exemples de ces curieuses créations.

00	13	21	09	17
06	19	02	10	23
12	20	08	16	04
18	01	14	22	05
24	07	15	03	11

(A)

00	31	12	90	71
60	91	20	01	32
21	02	80	61	40
81	10	41	22	50
42	70	51	30	11

(B)

En retournant les nombres du carré magique (A), on obtient un nouveau carré magique (B)

Dans son livre *Superior Mathematical Puzzle*, (1968), l'ingénieur américain Howard Dinesman indique le carré magique

suisant, dont je laisse au lecteur le plaisir de découvrir (sans calculs) la particularité singulière :

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

Le lecteur connaît sans doute le difficile problème d'échecs qui consiste à déplacer un cavalier de manière à passer une fois et une seule sur chacune des 64 cases. Des chercheurs exigeants ont ajouté la condition qu'en numérotant de 1 à 64 les cases successivement touchées par le cavalier, on obtienne sur l'échiquier un carré magique. Frost résolut le problème en 1866. Le Dr Jules Regnault a publié l'une des solutions possibles*.

Les artistes, qui ont trouvé dans les mathématiques quelques-unes de leurs règles — le « nombre d'or » — et de leurs inspirations, ont fait appel au carré magique non seulement en l'introduisant dans leurs compositions — tel Albert Dürer dans sa célèbre gravure *Melencolia* (1514) —, mais encore en utilisant ses structures; c'est le cas de l'architecte new-yorkais Claude Bragdon.

Les carrés *panmagiques* que, depuis Edouard Lucas, on nomme en général *diaboliques*, jouissent de propriétés surprenantes : la somme des éléments pris sur les diagonales partielles en nombre égal au module du carré est, elle aussi, égale au nombre magique. De plus, si l'on découpe le carré suivant une ligne ou une colonne, et qu'on le reconstitue en disposant les morceaux différemment — mais sans intervertir lignes et colonnes — il demeure magique.

Voici un exemple d'un tel carré de module 4

* Dr Jules Regnault. Marche du cavalier bouclant la boucle aux échecs tout en inscrivant un carré semi-magique, Toulon, 1941.

2	15	5	16
9	12	6	11
14	3	17	4
13	8	10	7

Plus extraordinaires encore sont les carrés bimagiques (ou sataniques) et trimagiques (ou kabbalistiques) qui représentent de véritables tours de force arithmétiques. Les premiers restent magiques si l'on remplace les éléments par leurs carrés, les seconds si l'on remplace les éléments par leurs carrés ou leurs cubes.

Le premier carré bimagique a été indiqué par Pfefferman en 1890. Beaucoup d'autres ont été construits depuis. En voici un exemple :

38	43	61	52	26	23	1	16
10	7	17	32	54	59	45	36
47	34	56	57	19	30	12	5
3	14	28	21	63	50	40	41
24	25	15	2	44	37	51	62
60	53	35	46	8	9	31	18
29	20	6	11	33	48	58	55
49	64	42	39	13	4	22	27

A ma connaissance, le premier carré trimagique a été indiqué par G. Tarry; il avait pour côté 128.

La difficulté, dans ce domaine, est de réaliser un carré le plus petit possible.

Eutrope Cazalas en a donné un de côté 64 en appendice de son livre sur les carrés magiques. D'après *Scientific American*, un certain Captain Benson en aurait construit un de côté 32 en 1949. Ce record — s'il existe — a été égalé par M. Charles Devimeux qui a fait connaître récemment un carré de 32, dont les sommes sont :

au 1^{er} degré : 16400 - au 2^e degré : 11 201 200 - au 3^e degré : 8 606 720 000

BIBLIOGRAPHIE

Fermat, Pierre de, *Le Plus Grand Quadruple, carré magique de Pierre Fermat, pour la première fois édité sans fautes d'impression par Basile de Sidoratsky*, Paris, 1904.

La Hire, Philippe de, *Nouvelles Constructions et considérations sur les quarrés magiques*, Paris, 1706.

Bessy, Frénicle de, *Des quarrés ou tables magiques*, Paris, 1729.

Lucas, Édouard, *Les Carrés magiques de Fermat et de Frénicle*, Paris, Delagrave, 1887.

Kraitchik, Maurice, *Traité des carrés magiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1930.

Cazalas, Eutrope, *Carrés magiques au degré n*, Paris, Hermann, 1934.

Portier, B. *Le Carré diabolique de 9*, Alger, 1902.

Portier, B. *Le Carré cabalistique de 9*, Alger, 1902.



63

micromagie

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(1)

8	3	4
1	5	9
6	7	2

(2)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

(3)

6	9	2
3	5	7
8	1	4

(4)

Deux chiffres de la figure (4) ont été intervertis. Pouvez-vous les replacer correctement ?



64

la sorcière est au centre

10	5	6
3	7	11
8	9	4

(1)

8	3	10
9	x	5
4	11	6

(2)

Première question : Quel est le chiffre x dans (2)?

7	2	9
8	6	4
3	10	5

(1)

5	10	3
a	y	b
9	c	d

(2)

4	e	f
11	z	g
h	i	10

(3)

Deuxième question : a , b , c , d , e , f , g , h , i , y et z représentant des *chiffres*, quels sont les chiffres y et z ?

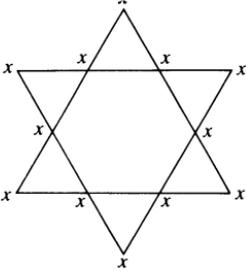


65

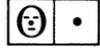
les magiciens d'Anvers

Construire un carré de module 5 avec des nombres consécutifs, de telle sorte que ce carré reste magique si, au lieu de lire les nombres de gauche à droite, on les lit de droite à gauche. (Si certains nombres ont un chiffre de moins que les autres, on les complétera par un zéro à gauche.)





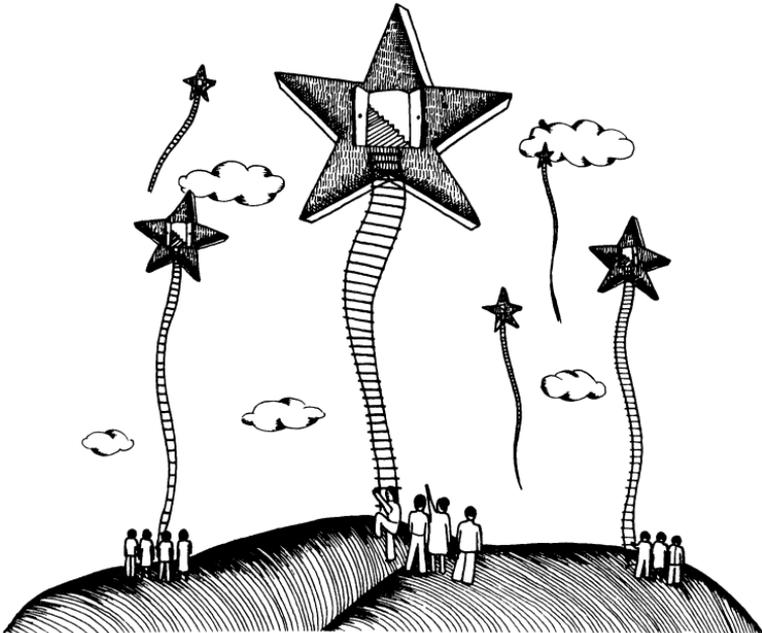
66



étoiles magiques

Avec les nombres de 1 à 12, construire une ou plusieurs étoiles magiques.

(Dans une *étoile magique*, les six sommes des quatre nombres écrits sur chacun des six côtés sont égales.)





67

évoqueries numériques

	1	2	3	4	5
I					
II					
III					
V					
V					

- I évoque une tenue soignée
- II guerre funeste
- III date familière aux écoliers
- V n^{bre} académique - utilisé dans la mesure du temps
- 1 on la dit grosse
- 2 il y en a parfois un de plus
- 3 base
- 4 fut redoutable
- 5 note peu enviable - alerte

les courbes des mathématiciens

Dans le *Dictionnaire universel*, paru en 1753, Saverien écrit, à la page 242 du tome I :

« Une ligne singulière a été inventée par M. Hudde, par laquelle il tâche d'exprimer tous les linéaments du visage d'un homme connu, et de les définir par une équation algébrique. Une idée si extraordinaire a été communiquée à M. Leibniz dans les *Actes de Leipsic*, Ann. 1700, p. 196; et il assure qu'il était en état de construire une pareille courbe. Cette construction n'a cependant jamais paru. »

Si la courbe analytique du visage de l'homme est restée le secret de M. Hudde, des centaines de courbes plus raisonnables illustrent les ouvrages d'algèbre et de géométrie ; la plupart sont harmonieuses, beaucoup sont utiles, et quelques-unes surprenantes.

Ces courbes ont été tracées par les mathématiciens lorsqu'ils cherchaient des lieux géométriques, les représentations concrètes de fonctions, ou les solutions de problèmes qu'ils ne pouvaient résoudre que par intersections graphiques. Elles sont très anciennes, puisque les Grecs de l'Antiquité construisirent les coniques, la cissoïde de Dioclès - pour la duplication du cube -, la conchoïde de Nicomède - pour la trisection de l'angle -, la spirale d'Archimède, et bien d'autres.

Descartes, en créant la géométrie analytique, provoqua une floraison nouvelle et abondante de courbes : Newton classa les cubiques en 72 classes (il en oublia 6), et Plücker répartit les quartiques entre 152 types.

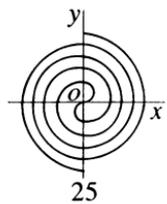
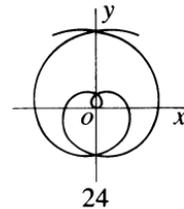
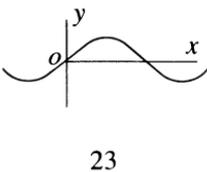
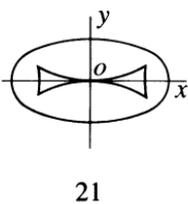
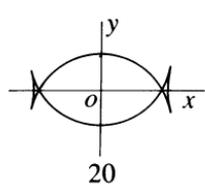
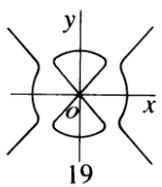
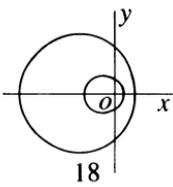
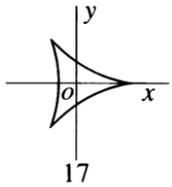
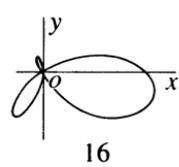
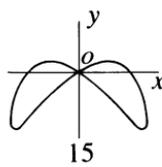
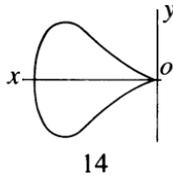
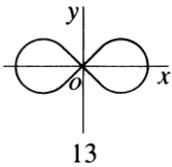
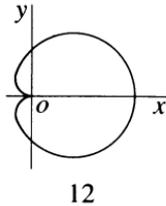
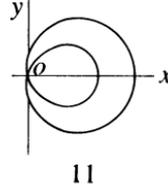
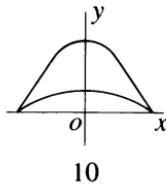
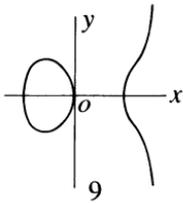
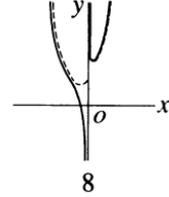
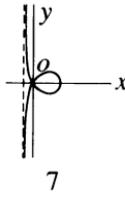
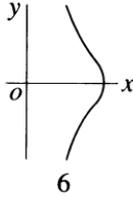
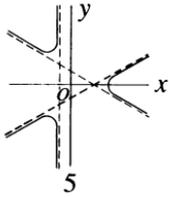
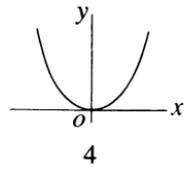
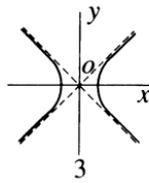
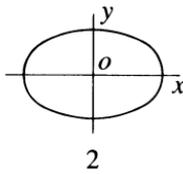
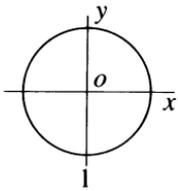
Les physiciens, les économistes, les statisticiens, firent à leur tour apparaître des courbes qui les aidèrent à visualiser ou à résoudre leurs problèmes, telles la *chaînette*, la *roulette*, la *courbe en cloche*, etc.

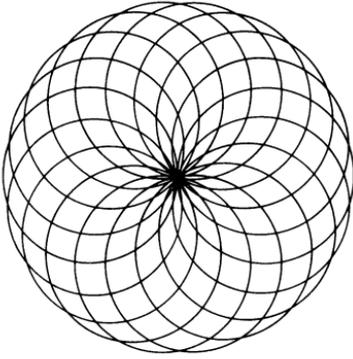
Enfin, au cours des dernières décennies, les mathématiciens imaginèrent des courbes « particulièrement monstrueuses », courbes sans tangentes, ou passant par tous les points d'un carré.

Dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens* de 1897, le géomètre Henri Brocard donne une liste partielle de courbes dont les noms attestent l'éclectisme et parfois le sens poétique de leurs parrains. La voici :

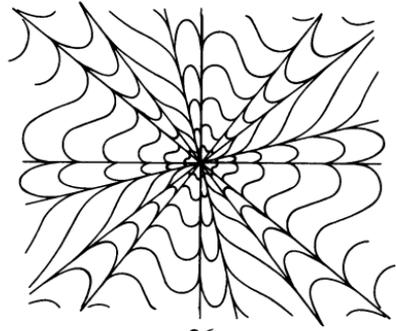
Anneaux de Newton - anse de panier - armille - astroïde - besace - bicorné - bifolium - cardioïde - catacaustique - caténaire - caustiques - cercle - chaînette - cissoïde - clélie - clothoïde - cycloïde - cycle de Carnot - doucine - ductévoluée - ellipse - ellipsimbre - épicycle - fenêtre de Viviani - figure de Lissajous - fleur de jasmin - folium de Descartes - frégate - glissette - hélice - hyperbole - hypocycloïde - isanémone - isochimère - Kampyle d'Euxode - kukumaéide - lemniscate de Bernoulli - limaçon de Pascal - lotus - loxodromie - nœud inextricable - ovale de Cassini - ovale de Descartes - parabole - perles de Sluze - radioïde - rosace à quatre feuilles - roulette - scarabée - serpentine - sinusôïde - spirale d'Archimède - strophoïde - toroïde - trident de Newton - trèfle équilatère - trifolium - trisectrice - versiera (ou sorcière d'Agnesi) - volute - zodiaque, auxquelles il faut ajouter : l'anguinée - la parabole cubique - la parabole divergente - la cubique de Chasles - la courbe de Watt - la courbe de Talbot - la courbe du diable - la courbe des forçats - la quadratrice de Dinostrate - les spirales de Galilée, de Fermat, de Poinso - la cochléoïde - la trochoïde - la courbe de Ribaucour - la lintéaire - la courbe du poisson - le collier de perles - la quartique piriforme, etc.

J'ai représenté ici un certain nombre de courbes. Les premières sont des courbes *algébriques*, représentant des fonctions algébriques de deux variables x et y , c'est-à-dire des fonctions constituées par des polynômes à coefficients rationnels ; les deuxièmes sont des courbes *transcendantes*, représentant des fonctions transcendantes, (c'est-à-dire non algébriques) telles que celles dans lesquelles les variables apparaissent dans des

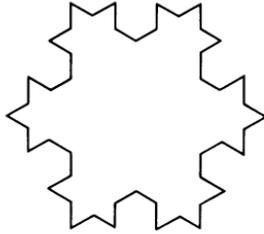




22



26



courbe cristal de Neige

9	10	27	28	45	46	63	64	81
	11	24	29	44	47	62	65	80
4								
7	12	25	30	43	48	61	66	
	13	24	31	42	49	60	67	78
6								
5	14	23	32	41	50	59	68	71
	15	22	33	40	51	58	69	76
4								
3	16	21	34	39	52	57	70	75
	17	20	35	38	53	56	71	74
2								
1	18	19	36	37	54	55	72	73

courbe de Peano

lignes trigonométriques, des exposants, des logarithmes, etc. Enfin, j'ai donné un exemple de courbes représentant une équation différentielle; l'intérêt de telles courbes — ou plus exactement de telles familles de courbes — est reconnu depuis Henri Poincaré qui leur a consacré en 1880 et 1881 plusieurs mémoires importants*. La belle courbe représentée** est extraite de « Courbes mathématiques », de M. Jean Brette, paru dans le numéro spécial de juillet 1976 de la *Revue du Palais de la découverte*. M. Jean Brette m'a autorisé à la reproduire, et je l'en remercie.

COURBES ALGÈBRIQUES

Deuxième ordre

1. Cercle. Lieu des points équidistants d'un point donné, appelé centre.
2. Ellipse. Lieu des points dont la somme des distances à deux points donnés, appelés foyers, est constante.
3. Hyperbole. Lieu des points dont la différence des distances à deux points donnés, appelés foyers, est constante (ici, hyperbole équilatère).
4. Parabole. Lieux des points dont les distances à un point donné, appelé foyer, et à une droite donnée, appelée directrice, sont égales.

Troisième ordre

5. Trèfle équilatère.
6. Cubique d'Agnesi, ou versiera, ou sorcière.

* Comptes rendus à l'Académie des sciences, 22 mars 1880, 5 décembre 1881.

** Ainsi que la courbe n° 22.

7. Trisectrice de Mac-Laurin. A servi à la solution graphique du problème de la trisection de l'angle.
8. Trident de Newton.
9. Parabole divergente.

Quatrième ordre

10. Bicorne.
11. Limaçon de Pascal, conchoïde d'un cercle donné. A été étudiée par Roberval qui lui a donné son nom en l'honneur du père du grand mathématicien.
12. Cardioïde. Lieu des projections de l'origine sur les tangentes à un cercle passant par cette origine (podaire).
13. Lemniscate de Bernoulli. Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes appelés foyers est constante.
14. Quartique piriforme.
15. Besace.
16. Trifolium.
17. Hypocycloïde à trois rebroussements. Lieu géométrique du point d'un cercle roulant à l'intérieur d'un cercle trois fois plus grand.
18. Ovale de Descartes. Lieu des points dont les distances r et r' à deux points fixes sont liées par une relation de la forme $ar + br' = c$.
19. Courbe du diable.

Sixième ordre

20. Courbe de Talbot. Antipodaire de l'ellipse.

Huitième ordre

21. Toroïde.

Trente-huitième ordre

22. Courbe de Moritz.

COURBES TRANSCENDANTES

23. Sinusoïde.

24. Spirale d'Archimède.

25. Spirale de Fermat.

REPRÉSENTATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$26. \rho \frac{d\theta}{\theta} = \operatorname{tg} (4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sin 4 \theta + \frac{\pi}{4})$$

LES COURBES MONSTRUEUSES

Au cours des dernières décennies, les mathématiciens imaginèrent des courbes que l'on qualifia de « particulièrement monstrueuses ».

Voici deux exemples de ces curiosités mathématiques.

La courbe *crystal de neige* (C) nous propose un paradoxe singulier : c'est une courbe fermée de longueur infinie qui entoure une surface finie.

Il n'est évidemment pas possible de tracer une courbe de longueur infinie, mais il est facile de la concevoir en la considérant comme limite des courbes $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, définies ci-dessous.

C_1 est un triangle équilatéral, dont on suppose que le côté a la longueur 1. On divise chaque côté de C_1 en trois parties égales et, sur le tiers médian, on construit vers l'extérieur un triangle

équilatéral, dont le côté est évidemment $\frac{1}{3}$. On obtient C_2 qui a 3×4 côtés. On divise chaque côté de C_2 en trois parties égales, et, sur le tiers médian, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral, dont le côté est évidemment $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^3-1}$, le nombre des côtés étant $3 \times 4^2 = 3 \times 4^3 - 1$. On obtient C_3 . Et l'on continue, selon le même procédé.

La courbe C_η possède $N_\eta = 3 \times 4^{\eta-1}$ côtés de longueur $\frac{1}{3^{\eta-1}}$ et son périmètre est :

$$3 \times 4^{\eta-1} \times \frac{1}{3^{\eta-1}} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{\eta-1}$$

Les périmètres des courbes successives sont les termes d'une progression géométrique de raison supérieure à 1. Lorsque η croît indéfiniment, C_η tend vers C et le périmètre vers l'infini. Quelles sont les surfaces $S_1, S_2, S_3 \dots, S$ limitées par les courbes correspondantes ?

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = S_1 + 3 \frac{S_1}{3^2} = S_1 \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$S_3 = S_2 + N_2 \frac{S_1}{(3^2)^2} = S_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_1$$

$$= S_1 \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

et, en posant $\frac{2}{3}^2 = q$

$$S_\eta = S_1 \left[1 + \frac{1}{3} (1 + q + q^2 + \dots + q^{2\eta-4})\right]$$

$1 + q + q^2 + \dots + q^{2\eta-4}$ est une progression géométrique de terme q inférieur à 1 dont la somme, lorsque η croît indéfiniment, tend vers $\frac{1}{1-q} = \frac{9}{5}$

Donc, lorsque η croît indéfiniment, S_η tend vers :

$$S = S_1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{9}{5} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

surface finie entourée par la courbe C de longueur infinie*.

Plus difficile à imaginer est la courbe étudiée par le mathématicien italien Giuseppe Peano, qui valut à son auteur les éloges d'Henri Poincaré : « J'ai la plus grande estime pour M. Peano qui a fait de très jolies choses, par exemple sa courbe qui remplit tout un carré » (*Science et Méthode*, p. 193).

Comme dans le cas précédent, la courbe de Peano sera considérée comme la limite des courbes C_1, C_2, \dots, C_η , définies ci-dessous.

La courbe C_1 est la diagonale d'un carré K de côté 1. Elle a pour longueur $d_1 = \sqrt{2}$. La courbe C_2 passe par les centres des 3^2 carrés de côtés $\frac{1}{3}$ construits à l'intérieur de K, et parallèlement; elle a pour longueur $d_2 = 3 \frac{d_1}{3}$. La courbe C_3 passe par les centres des 3^4 carrés de côtés $\frac{1}{3^2}$ construits à l'intérieur de K; elle a pour longueur $d_3 = 3^4 \frac{d_1}{3^2} = 3^2 \cdot \sqrt{2}$.

La courbe C_η passe par les centres de $3^{2\eta-2}$ carrés de côtés $\frac{1}{3^{\eta-1}}$ construits à l'intérieur de K; elle a pour longueur $3^{2\eta-2} \frac{d_1}{3^{\eta-1}} = 3^{\eta-1} \sqrt{2}$, longueur qui croît indéfiniment avec η .

Cette courbe C_η passe par les centres des carrés de coordonnées

$$x_p = \frac{2p-1}{2 \cdot 3^{\eta-1}}$$

$$p = 1, 3, \dots, 2 \cdot 3^{\eta-1}$$

$$Y_q = \frac{2q-1}{2 \cdot 3^{\eta-1}}$$

$$q = 1, 3, \dots, 2 \cdot 3^{\eta-1}$$

* Cette courbe a été étudiée dans l'ouvrage d'Edward Kasner et James Newmann, *Les Mathématiques de l'imagination*, 1950 (traduit de l'américain).

La courbe Anti-cristal de neige s'obtient en traçant les triangles successifs vers l'intérieur, et non vers l'extérieur. Sa longueur est la même que celle de la courbe « cristal de neige », la limite de sa surface est $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

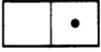
On démontre que l'on peut choisir η assez grand pour que $C\eta$ passe aussi près que l'on veut de tous les points du carré K , donc que, à la limite, C passe par tout point de K^* .

Les courbes engendrées par les « systèmes dynamiques », en particulier les courbes solutions de systèmes différentiels non linéaires, sont parfois d'une nature très différente des courbes algébriques usuelles. Beaucoup plus irrégulières, elles suggèrent, à tort, que le hasard a présidé à leur construction. Il est malheureusement difficile d'en donner des équations explicites. Les « fractals » de Benoît Mandelbrot** sont des exemples de ces courbes d'apparence chaotique, que l'on sait cependant construire par des procédés précis, et qui présentent une analogie remarquable avec bien des courbes rencontrées dans la nature.

D'autres courbes d'apparence irrégulière et souvent étrange sont les représentations des « fonctions pseudo-aléatoires » de J. Bass, pourtant construites par des méthodes mathématiques simples. Leur irrégularité est la traduction indirecte des propriétés de certains nombres irrationnels.

* Cette courbe a été étudiée dans l'ouvrage de J. Favard, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t. I.

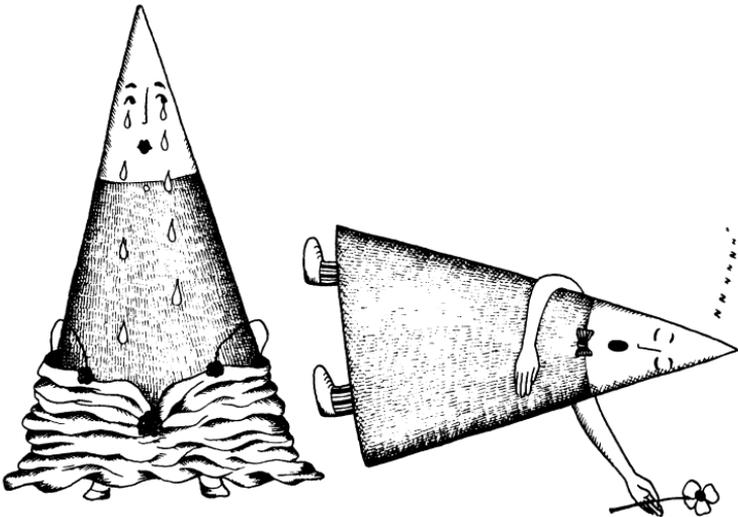
** *Les Objets fractals : forme, hasard et dimension*, Paris, Flammarion, 1975.



68

déception triangulaire

Quelle est la surface du triangle de côtés 94, 177 et 83 ?



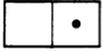


69

les sphères peintes

Un marchand de billards a pour enseigne deux sphères inégales. Elles sont pleines, faites du même bois. La grosse pèse 27 kilogrammes et la petite 8 kilogrammes. Le marchand entreprend de repeindre son enseigne. S'il lui faut 900 grammes de peinture pour la grosse sphère, combien lui en faudra-t-il pour la petite ? (la quantité de peinture nécessaire est proportionnelle à la surface à peindre).





70

les pétasophores de Saint-Saturnin

Les oiseaux appelés vulgairement pétasophores bleus (*petasophorus sylvaticus*) sont remarquables par leur propriété de toujours voler à la même vitesse, 31,006 km/h, ce qui permet de les reconnaître facilement; plus étonnant encore est le fait que ce nombre est la troisième puissance de r , ce qui prouve que les pétasophores connaissent les quatre premières décimales de ce nombre et sont donc plus savants que ne l'étaient Euclide, Pythagore et Archimède. Le village de Saint-Saturnin s'enorgueillissait de posséder deux pétasophores, et deux tours sur lesquelles les oiseaux nichaient. Les tours étaient hautes, l'une de 30 mètres, l'autre de 40 mètres, et distantes de 50 mètres. Entre elles, une fontaine.

Tous les soirs — c'était un spectacle à ne pas manquer —, les deux oiseaux partaient au même instant de leurs perchoirs, et arrivaient en même temps à la fontaine, où ils se désaltéraient longuement.

Quelle était la distance de la fontaine à la grande tour ?



71

le rendez-vous des géomètres exotiques

Trois pionniers se sont installés dans la brousse en A, B, C. Ils veulent établir un moyen de communication entre leurs établissements en construisant la plus petite longueur de pistes possible.

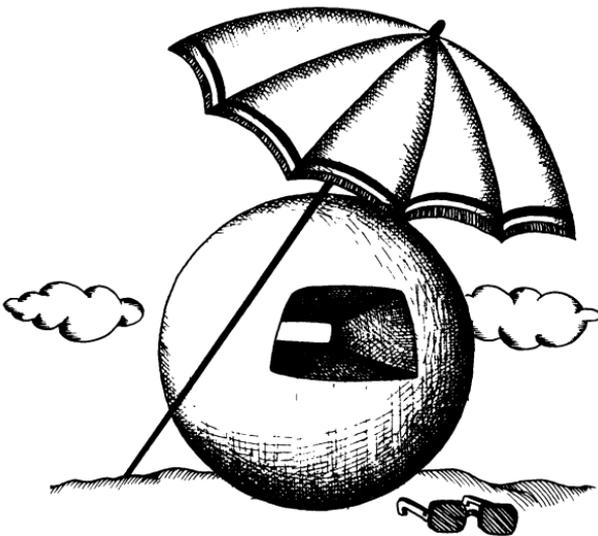
Comment procéderont-ils ?



72

étonnant comportement d'une sphère percée

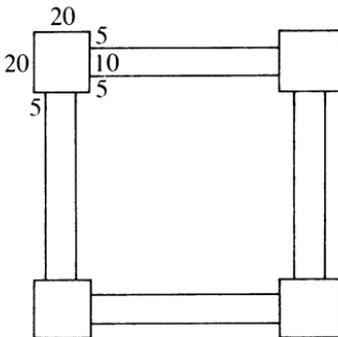
Considérons un cercle sur une sphère et le cylindre régulier qui a pour base ce cercle et des génératrices parallèles à la droite joignant le centre de la sphère au centre du cercle. Déterminer, au moyen d'une seule mesure, le volume restant de la sphère, après enlèvement de la partie traversée par le cylindre.





73

Vauban rencontre Euclide



Une citadelle de forme rectangulaire a quatre tours d'angle dont les dimensions sont indiquées dans le croquis ci-contre. La garnison est calculée pour qu'en cas d'attaque on puisse placer 50 hommes dans chaque tour, et un homme par mètre des remparts qui relient les tours.

1. Sachant que cette garnison est de 560 hommes, indiquer instantanément, sans aucun calcul, le périmètre extérieur de la citadelle.
2. Quelle doit être la forme exacte de la citadelle pour que la surface intérieure soit maximum ?
Quelle est alors la valeur de cette surface ?

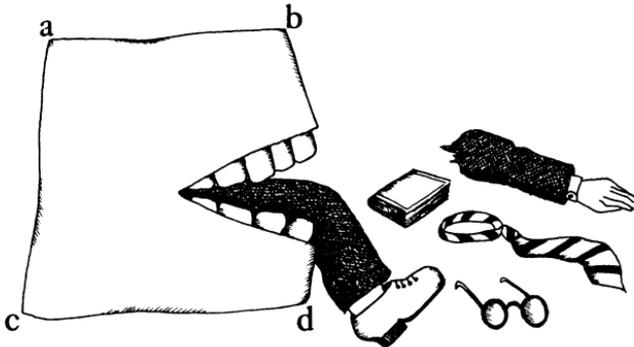


74

le carré anthropophage

Dans un premier carré de côté 2 pénètre un second carré, plus grand que la moitié du premier, de telle façon que l'un de ses sommets soit au centre du premier.

Quelle est la surface du quadrilatère commun aux deux carrés ?





75

le testament du père Trigone

Le père Trigone avait constitué un domaine triangulaire :
« C'est la forme la plus avantageuse, disait-il. Le triangle étant, de tous les polygones, celui qui a le moins de côtés, il est le moins cher à clôturer. »

M. Trigone ne savait pas la géométrie : à surface égale, le périmètre du cercle, qui peut être considéré comme un polygone d'un nombre infini de côtés, est inférieur à celui de n'importe quel triangle.

Lorsque cet ignorant mourut, on ouvrit son testament qui stipulait que son domaine serait partagé entre ses quatre fils, les quatre lots étant de même surface et de forme triangulaire.

Comment le partage fut-il opéré ?



76

le rat de Tegucigalpa

Le temple maya de Tegucigalpa a la forme d'une pyramide régulière. Les triangles isocèles qui forment ses faces ont 162 décimètres de base et 360 décimètres de hauteur. Un rat curieux décide de faire l'ascension du monument. Il part d'un des sommets du polygone de base et, marchant sur une face, se dirige perpendiculairement à l'arête opposée; passant sur la face suivante, il se dirige encore perpendiculairement à l'arête opposée, et ainsi de suite jusqu'au sommet de la pyramide. Quelle distance aura-t-il parcourue au terme de son voyage ?



77

le congrès des rats mayas

Les rats mayas ayant organisé un congrès scientifique, l'un des mathématiciens qui participait à l'assemblée et qui avait été informé de la performance ci-dessus citée de son congénère, demanda que soit établie une formule générale donnant le chemin parcouru en fonction de données plus classiques: Si un rat, dit-il, partant de l'un des sommets d'un polygone régulier de n côtés et de périmètre $2p$, qui constitue la base d'une pyramide également régulière de hauteur k , se déplace de face en face dans une direction perpendiculaire à l'arête opposée, quelle distance x aura-t-il parcourue lorsqu'il parviendra au sommet de cette pyramide?



78

considérations sur la vitesse de rotation des rats mayas

L'un des rats les plus savants du Congrès de Tegucigalpa posa, à propos de l'ascension de la pyramide, une nouvelle question dont la solution eut, comme on va le voir, des conséquences considérables.

« Nous venons, dit-il, de calculer le trajet qu'accomplit un rat en allant de la base au sommet de notre temple pyramidal, dans les conditions que nous avons précisées.

« Je voudrais, de plus, savoir combien de fois, au cours de ce trajet, le rat tourne autour de l'axe de la pyramide. »

La solution géométrique étant évidente, il est demandé de la confirmer par le calcul, en prenant comme données la base a de l'une des faces triangulaires, et son angle à la base α .





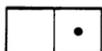
79

les cochons n'aiment pas la mirabelle

Roger et Raymond, les deux fils de Joseph Vanson, ont à se partager la terre de leur père : un rectangle de 2 000 mètres sur 1 000 mètres.

Tout autour du terrain sont plantés des mirabelliers. Ces arbres intéressent Roger, grand amateur d'alcools blancs, mais pas Raymond, qui pense surtout à nourrir ses cochons, et qui veut planter du maïs. Les deux frères décident donc de se partager également le terrain de la façon suivante : Roger aura une bande de largeur constante sur le pourtour du terrain, Raymond le rectangle central.

Quelle sera la largeur de la bande, et comment peut-on la trouver par une construction géométrique très simple ?



80

rayon des meules

Chez un grand quincaillier on trouve, au rayon des meules, deux articles différents : une grande meule de 28 centimètres de rayon qui pèse 80 kilogrammes et une petite meule de 40 kilogrammes. Les meules ont toutes même épaisseur, et le trou central a toujours 4 centimètres de rayon. Si les prix des meules sont proportionnels à leurs rayons extérieurs et si la grande vaut 357 F, combien vaudra la petite ?

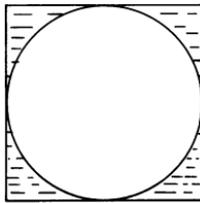


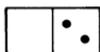
81

la sphère creuse et le géomètre avisé

Une sphère pèse 40 kilogrammes. On la place doucement dans un cylindre plein d'eau où elle s'inscrit exactement. Après cette opération, le cylindre et son contenu pèsent 20 kilogrammes de plus.

Quels sont le volume du cylindre et la densité de la sphère ?





82

l'impossible carré de cubes

On a offert au jeune Balthazar un jeu de cubes. Il essaye de les juxtaposer en carré, mais il lui en manque 7. Il tente alors un carré plus petit, il en a 10 en trop. Combien Balthazar a-t-il de cubes ?



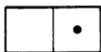


83

les angoisses du rabbin Nehemiah

Nehemiah était un rabbin qui vivait en Palestine au II^e siècle avant notre ère. Grand admirateur d'Archimède, il admettait la valeur attribuée à π par son illustre maître : $3 \frac{1}{7}$. Mais, rabbin, et de surcroît talmudiste, il ne pouvait rejeter l'affirmation de l'Ancien Testament : « Il fit la mer en fonte, qui avait dix coudées de bord à bord, un cordeau de trente coudées en mesurait le tour », qui implique la valeur 3.

Après bien des méditations, et avec beaucoup de mauvaise foi, le rabbin conclut que π était bien égal à $3 \frac{1}{7}$, mais que dix coudées étaient le diamètre extérieur de la mer de fonte, et que trente coudées étaient sa circonférence intérieure. Quelle était donc l'épaisseur de la paroi de la mer de fonte ?



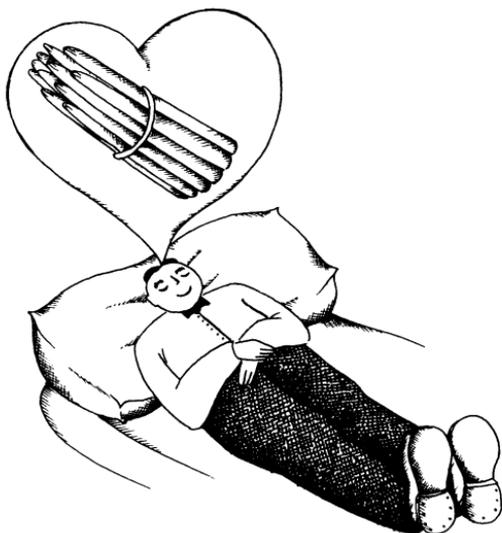
84

si vous aimez les asperges...

Une marchande de légumes avait coutume de lier ses asperges au moyen de ficelles de 30 centimètres de long, en bottes qu'elle vendait 8 francs.

Trouvant ces bottes trop petites, elle utilisa par la suite des ficelles de longueur double, et vendit, en conséquence, ses bottes 16 francs.

Cette marchande calculait-elle bien? Sinon, quel prix aurait-elle dû demander?





85

les ficelles du pharaon

Voulant récompenser ses deux géomètres Ahmès et Thoutmès, qui avaient établi le cadastre de l'empire, le pharaon leur fit remettre deux très longs fils de lin de même longueur, un à chacun, et leur dit qu'il leur donnerait le domaine de la forme qu'ils choisiraient, et qui pourrait être entouré de leur fil.

Thoutmès voulut un domaine en forme de triangle équilatéral, dont la surface se trouva être de 20 dounams. Ahmès choisit pour sa part la forme de l'hexagone régulier; quelle fut la surface de son bien ?



86

le secret du triangle des Bermudes

Si l'on prend pour unité de longueur 100 kilomètres, le triangle des Bermudes a, pour mesure de ses côtés, des nombres entiers successifs, et — c'est là son secret — son plus petit angle est la moitié de son plus grand angle. Quelles sont ses dimensions ?



87

les quatre médailles

Quatre médailles ont les particularités suivantes : leurs diamètres s'expriment en nombres entiers de millimètres dont le plus grand est égal à la somme des trois autres ; en outre, les trois plus petites peuvent être posées sur la plus grande, de telle sorte que chacune soit tangente aux trois autres. La partie non recouverte de la grande médaille est alors équivalente à un cercle inscrit dans un carré d'une surface de 4 830 millimètres carrés.

Quels sont les diamètres de ces médailles ?

les calculateurs prodiges

Périodiquement, les journaux nous rapportent la découverte, dans quelque campagne arriérée, d'un calculateur prodige, généralement inculte, qui a su effectuer en quelques secondes des opérations d'une extraordinaire complication. Ces découvertes ne sont pas récentes, puisque l'historien grec Julien nous apprend qu'au II^e siècle de notre ère, un Palestinien, Nichomakos de Gerasa, s'était déjà fait connaître par de stupéfiantes jongleries arithmétiques. Il eut de nombreux successeurs. Dans le récit qu'il fait d'un voyage effectué en Italie en 1664, le sieur Balthazar de Monconys nous parle de sa rencontre avec un enfant de huit ans, surnommé Mathieu le Coq, dont il avait constaté les dons étonnants. Au XVIII^e siècle, on cite Jededish Buxton, un ouvrier anglais illettré; Tom Fuller, esclave noir de Virginie, également illettré, et qui, par exemple, répondait en 1 minute et demie à une question telle que celle-ci : combien y a-t-il de secondes en 70 ans, 17 jours et 12 heures (2 210 500 800, sans tenir compte des années bissextiles); et la dame de Lautré, citée par Mme de Genlis, qui effectuait en quelques secondes la multiplication l'un par l'autre de deux nombres de huit chiffres; il est à signaler que cette personne est la seule femme qui appartienne à la corporation des calculateurs prodiges.

En 1837, Arago étonna beaucoup de ses collègues de l'Académie des sciences en interrogeant devant eux un pâtre sicilien de dix ans, Mangiamale, qui était aveugle, et qui, en dehors de l'arithmétique, paraissait atteint de débilité mentale. Quelques années plus tard, la même Académie s'émerveilla à nouveau à l'audition d'un jeune paysan de quatorze ans, Henri Mondeux. Ce jeune homme exploita son talent en se produisant dans plusieurs villes de France, et il montra qu'outre ses dons de calculateur, il possédait un certain esprit de répartie; un auditeur

lui ayant demandé : quel est le produit de 3 par 4?, il répondit : Mettez-vous au bout, monsieur, cela fera 120.

En 1840 se produisit en Allemagne et en Autriche l'Allemand Johann Martin Zacharias Dase qui eut, comme on va le voir, un destin un peu particulier. Il faisait de tête la multiplication de deux nombres de 8 chiffres en 54 secondes, de deux nombres de 20 chiffres en 6 minutes, de deux nombres de 100 chiffres en 8 heures et demie. Le mathématicien Strassnitzky le rencontra à Vienne, alors qu'il avait seize ans, et l'embaucha pour le calcul de tables mathématiques. Les deux hommes connurent leur plus grande réussite avec le nombre π . Strassnitzky ayant appris à son élève la formule de calcul de π au moyen des arcs tangents, ce dernier réussit l'exploit de trouver en deux mois les 205 premières décimales de π , pulvérisant le précédent record de 140 décimales établi cinquante ans plus tôt (les cinq derniers chiffres se révélèrent d'ailleurs faux). Par la suite, Dase établit une table des logarithmes à sept décimales des nombres de 1 à 1 million.

La petite histoire des mathématiques a conservé le nom de Dase à cause de son record de π , mais il ne fut jamais un mathématicien. Il appliqua seulement ses dons de calculateur aux formules qui lui étaient indiquées; il ne réussit pas à apprendre les éléments les plus simples de la géométrie, ni, d'ailleurs, à comprendre une autre langue que l'allemand.

Incontestablement, le plus célèbre des calculateurs prodiges professionnels fut Inaudi. Celui-ci était né en 1867, dans les Alpes du Piémont. Orphelin très jeune, il était devenu, avec ses frères, montreur de marmottes. Il émigra en France, fut quelque temps berger dans les Pyrénées, puis exerça divers métiers, jusqu'à ce que son talent particulier fut remarqué. On le produisit au théâtre Robert-Houdin, puis il fit diverses tournées en France, fut, comme de juste, présenté à l'Académie des sciences (1892), et enfin entreprit une carrière internationale au cours de laquelle il acquit une grande renommée. Le petit Piémontais illettré avait appris à lire, à écrire, et il présentait son numéro en cinq langues.

J'ai cité suffisamment de noms et de références pour montrer que le phénomène « calculateurs prodiges » existe bien. Le comprendre est une autre affaire. La première idée qui vint aux chercheurs fut évidemment d'interroger les intéressés ; mais les explications que certains d'entre eux consentirent à donner furent totalement inintelligibles. Inaudi écrivit bien un livre, *le Calcul rapide facile pour tous*, mais il n'y révéla que quelques trucs sans grand intérêt. Deux savants furent classés parmi les calculateurs prodiges, et l'on aurait pu espérer qu'eux, au moins, seraient en mesure d'analyser lucidement le phénomène ; malheureusement le premier, Ampère, perdit son don à l'âge de quatre ans, et ne garda aucun souvenir des procédés qu'il avait employés ; quant au second, Gauss, il ne fut pas un « prodige », mais seulement un champion de calcul mental qui utilisait les méthodes classiques.

Faute d'une information directe, on chercha une explication dans la personnalité des calculateurs ; on remarqua, comme le lecteur n'aura pas manqué de le faire, que beaucoup étaient très jeunes, et la plupart illettrés : ce point est très important ; il montre que ces calculateurs ne raisonnaient pas sur des chiffres, qu'ils ne connaissaient pas, mais sur des nombres ; ces entités abstraites, qu'ils ne savaient pas nommer, leur apparaissaient d'une certaine manière ; plusieurs d'entre eux, d'ailleurs, dirent qu'ils « voyaient les nombres ». On remarqua aussi que ces individus particuliers, d'une intelligence souvent médiocre, étaient en revanche dotés d'une très grande mémoire ; on constata également que dans plusieurs cas, leur don disparut lorsqu'on leur enseigna l'arithmétique. Il faut noter enfin que ceux de ces calculateurs qui eurent une carrière publique, employèrent des trucs qu'ils imaginaient ou qu'on leur enseigna *, et qui les aidèrent considérablement, sans pour autant expliquer complètement leurs performances ; le lecteur trouvera quelques-uns de ces trucs dans les pages qui suivent.

En conclusion, on ne sait rien du don des calculateurs prodiges,

* Comme, par exemple connaître les nombres de deux chiffres qui, seuls, peuvent terminer des carrés.

sinon que ceux-ci n'utilisent pas les méthodes de l'arithmétique classique, et que chaque problème est traité par eux comme un cas particulier. Ne pouvant expliquer le phénomène, les savants lui ont du moins trouvé un nom : les calculateurs prodiges possèdent, des nombres, « une connaissance intuitive ».

*

Je pense que l'on peut classer parmi les calculateurs prodiges les animaux qui comptent, même lorsque leurs possibilités demeurent modestes. Des observateurs patients sont arrivés à la conclusion que certains oiseaux, les pies et les corbeaux, savaient compter jusqu'à cinq. Les chimpanzés sauvages ont, semble-t-il, le même registre ; mais il est probable que, bien enseignés, ils iraient fort au-delà ; pas aussi loin toutefois que les bœufs qui, si l'on en croit Montaigne, savaient compter jusqu'à cent. C'est du moins ce que l'on peut inférer du passage suivant :

« Les bœufs qui servaient aux jardins royaux de Suse, pour les arroser et tourner certaines grandes roues à puiser de l'eau, auxquelles il y avait des bacquets attachés (comme il s'en veoid plusieurs en Languedoc), on leur avait ordonné d'en tirer par jour jusques à cent tours chacun, dont ils étaient si accoutumés à ce nombre, qu'il estait impossible, par auculne force, de leur en faire tirer un tour davantage ; et, ayants faict leur tasche, ils s'arrestoient tout court »

(Essais, livre II, chap. 12).

Si impressionnante que soit la performance des bœufs de Suse, elle aurait été dépassée, et de loin par certains chevaux. Shakespeare raconte l'histoire de l'infortuné cheval Marec, qui calculait comme un académicien, et que son maître, un sieur Bantres, voulut exhiber sur le continent ; hélas, sitôt la Manche franchie, le cheval fut arrêté par ordre de l'Inquisition, condamné pour sorcellerie et brûlé vif.

La fin prématurée de Marec ne nous a pas permis de connaître ses exploits. Nous sommes très bien renseignés, en revanche, sur ceux des chevaux d'Elberfeld. Un peu avant la fin de la

Première Guerre mondiale, un industriel d'Elberfeld, en Westphalie, M. Krall, fit savoir qu'il possédait un étalon nommé Kluge Hans (l'avisé Hans), qui savait extraire les racines carrées, cubiques et même quatrièmes. Des mathématiciens et des curieux vinrent rendre visite à Kluge Hans, auquel son propriétaire avait donné deux compagnons aussi savants que lui : deux étalons arabes, dont l'un s'appelait Mohammed (le nom du second a été perdu). Les chevaux d'Elberfeld répondirent en une minute environ aux questions suivantes :

$$\sqrt[3]{13824} \text{ réponse } 24 - \sqrt[3]{29791} \text{ réponse } 31 - \sqrt[3]{103823} \\ \text{réponse } 47.$$

Kluge Hans et ses amis indiquaient les chiffres en frappant le sol d'un de leurs sabots le nombre de fois convenable. Ils répondaient hors de la présence de leur maître, et ne se trompaient jamais, à condition qu'on leur proposât des nombres dont les racines fussent entières. Ils ne se fâchèrent qu'une fois lorsque l'écrivain belge Maeterlinck leur demanda une extraction de racine carrée qui ne remplissait pas ces conditions ; Maeterlinck, qui était moins bon mathématicien qu'entomologiste, s'excusa, disant qu'il croyait que tous les nombres étaient des carrés parfaits.

J'assure le lecteur que l'histoire des chevaux d'Elberfeld se trouve dans des ouvrages très sérieux ; leurs auteurs n'ont toutefois émis aucune hypothèse sur les sources de l'inspiration de ces remarquables animaux.

BIBLIOGRAPHIE

Borderieux, Carita, *Nouveaux Animaux pensants*, St. Amand, Impr. Clair, 1923.

Cauchy, Augustin, *Rapport fait à l'Académie des sciences sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune pâtre de Touraine*, Paris, 1841.

Regnault, Jules Dr, *Les Calculateurs prodiges*, P. Payot, 1943.



88

tubercules

Quel est le nombre dont les racines carrée et cubique diffèrent de 18 ?

(Résolu par Inaudi en une minute et cinquante secondes.)





89

trick

Trouver trois nombres a , b , c , tels que $a + b + c = 43$,
 $a^3 + b^3 + c^3 = 17\,299$.

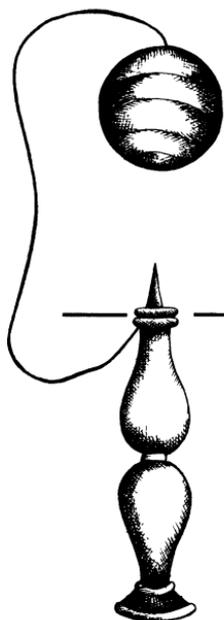
(Résolu par Inaudi en trois minutes.)



90

quarks

Décomposer 1 3 4 1 1 en quatre carrés.
(Inaudi trouva une première solution en trois minutes.)



91



bilboquet

Quel est le chiffre des unités du nombre

$$[(8\ 7\ 4\ 5\ 9\ 7)^5 - (3\ 6\ 5\ 6\ 4\ 5)^4] \cdot (8\ 9\ 3\ 1)^7?$$

(Résolu par (X) en deux secondes.)



92

rutabaga

Quel est le nombre entier dont la puissance soixante-quatrième a 20 chiffres ?

(Résolu par (X) en trois secondes.)

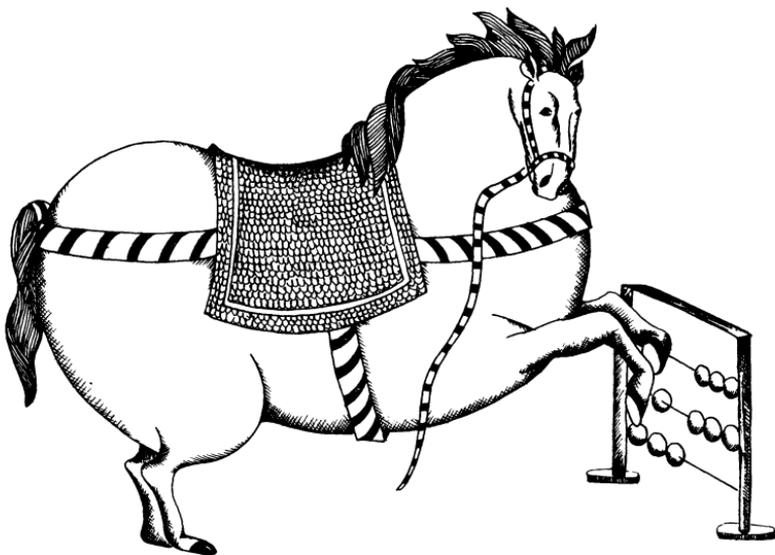


93

le cheval d'Elberfeld

Kluge Hans, l'un des chevaux d'Elberfeld, répondit en une minute à la question suivante : quelle est la racine quatrième de 7 890 481 ?

Pouvez-vous faire aussi bien ?





94

multiplication supersonique

Le jeu consiste à trouver le produit de deux nombres de neuf chiffres en quelques secondes, et si possible de tête. Naturellement, il y a un truc ; l'un des deux nombres doit être fourni par un compère, car il faut que ce soit $G = 142\ 857\ 143$.

Il suffit alors de former le nombre de 18 chiffres obtenu par la répétition du nombre autre que G , et de diviser ce nombre de 18 chiffres par 7. Le résultat est le produit cherché !

Pourquoi ?

$$\begin{aligned}\text{Exemple : } & 231\ 025\ 642 \cdot 142\ 857\ 143 \\ & = 231\ 025\ 642\ 231\ 025\ 642 : 7 \\ & = 33\ 003\ 663\ 175\ 860\ 806\end{aligned}$$



95

l'équation du solitaire

Sans opérations, trouver la valeur de x .

$$83\ 875\ 683\ 470^2 - (83\ 875\ 683\ 469 \cdot 83\ 875\ 683\ 471)$$



la cryptographie

La cryptographie est, comme l'indique son étymologie, l'art des écritures secrètes. Elle a pour objet la transformation d'un message clair en un message secret qui ne pourra, en principe, être lu que par son destinataire légitime (*chiffrement*), suivie de l'opération inverse effectuée par le destinataire (*déchiffrement*). Le rétablissement du texte clair à partir du texte chiffré sans que soit connu à l'avance le procédé de chiffrement est le *décryptement*.

Si l'on fait exception des chiffrements bibliques, discutés et discutables, le procédé cryptographique le plus anciennement connu est la scytale des Lacédémoniens, dont Plutarque nous dit qu'il fut employé à l'époque de Lycurgue (— IX^e siècle). La scytale était un bâton sur lequel s'enroulait en spirale un ruban de cuir. On écrivait le message sur ce ruban, en colonnes parallèles à l'axe du bâton. Le ruban déroulé portait un texte sans rapport apparent avec le texte initial, mais qui pouvait être lu en réenroulant ce ruban sur un bâton de même diamètre que le premier.

Les Romains employèrent un procédé très ingénieux indiqué par Aenas le Tacticien (— IV^e siècle) dans un ouvrage qui constitue le premier traité de cryptographie connu. Il consistait à enrouler un fil sur un disque comportant des encoches correspondant aux lettres de l'alphabet. Il suffisait, pour lire le message, de connaître sa première lettre. Si le courrier était capturé, il n'avait qu'à libérer le disque du fil, et le message disparaissait. Mais par la suite, ce procédé se perdit.

Nous connaissons par Suétone la façon dont Jules César chiffrait les ordres envoyés à ses généraux ; les talents du cryptographe n'égalaien pas ceux du général : il se contentait d'utiliser

un alphabet décalé de trois crans : A était remplacé par D, B par E, etc.

Aujourd'hui le chiffre utilise les techniques de l'électronique et n'a plus aucun rapport avec les procédés qui viennent d'être décrits.

*

Tous les procédés de chiffrement anciens et modernes, malgré leur diversité et leur nombre illimité, entrent dans l'une des deux catégories suivantes : transposition ou substitution. La transposition consiste à mélanger, selon une certaine loi, les lettres, chiffres, mots ou phrases du texte clair. La substitution consiste à remplacer ces éléments par d'autres lettres, d'autres chiffres, d'autres mots ou des signes quelconques.

Je propose, dans les pages qui suivent, quelques exercices de *décryptement* au lecteur. Ils sont extrêmement rudimentaires, car, dans ce domaine, on arrive très vite à des difficultés qui ne peuvent être surmontées par un amateur. Tous, sauf un, font appel à la substitution.

LA CRYPTARITHMÉTIQUE

La cryptographie est un art qui a joué un rôle important dans le déroulement de l'histoire. La cryptarithmétique n'est qu'un jeu. Je ne sais à quelle époque elle fut inventée, mais les amateurs de variétés ne commencèrent à s'y intéresser qu'au I^{er} Congrès international de récréation mathématique qui eut lieu à Bruxelles en 1935.

La cryptarithmétique consiste à remplacer les chiffres par des lettres dans la transcription d'une opération d'arithmétique classique, d'une équation. Le problème est de trouver les chiffres qui sont « sous » les lettres. Pour compliquer les choses, on peut, à certains endroits, marquer simplement la place d'un chiffre par un point ou une croix. Dans le cas extrême, dont je donnerai un exemple, il ne reste plus que des croix.

Il est aisé de voir que la cryptarithmétique est un chiffrement par substitution, la clé étant une règle mathématique.

Les énoncés de cryptarithmétique sont parfois séduisants ; leurs solutions ne présentent pas de difficultés mathématiques, mais en revanche elles nécessitent de très nombreuses hypothèses en cascade, et, par suite, des calculs longs et laborieux comportant de grands risques de confusion.

Aussi ne conseillerai-je ce genre de problèmes qu'aux lecteurs patients et minutieux.



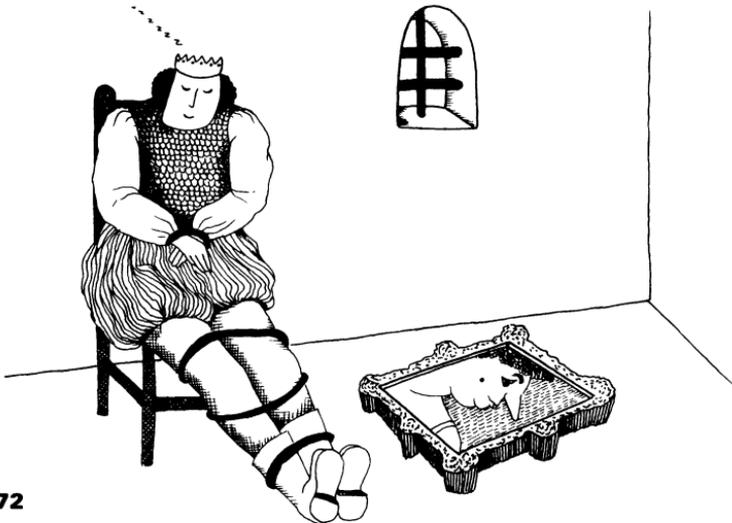
96

la belle comtesse et le prince emprisonné

En 1560, la comtesse de Saint-André fit parvenir au prince de Condé, emprisonné après la conspiration d'Amboise, le message suivant :

Croyez-moi, Prince, préparez-vous à la mort. Aussi bien vous sied-il mal de vous défendre. Qui veut vous perdre est ami de l'État. On ne peut rien voir de plus coupable que vous.

Le ton de ce message peut surprendre de la part d'une femme qui était grande amie du prince. Celui-ci, pourtant, ne s'en offusqua point; il sut l'interpréter. Comment ?





97

les animaux bouleversés par la cryptographie

Dans ce carré, les six lignes sont trois noms d'animaux, suivis chaque fois d'un anagramme (formant un mot existant).

Quels sont ces animaux ?

△	▽	▽	▽	△	▽
▽	▽	△	▽	△	▽
△	△	▽	△	▽	△
△	△	▽	△	△	▽
△	▽	△	▽	△	▽
▽	△	△	▽	△	▽



98

un certain parent de M. Joule

Les noms de huit personnages célèbres, tous de quatre lettres, ont été écrits au moyen d'un alphabet secret, comme il est indiqué ci-dessous :

1 □ ◻ ◻ ◻ ◻ 3 ◻ ◻ ◻ ◻ 5 ◻ ◻ ◻ ◻ 7 ◻ ◻ ◻ ◻
2 ◻ ◻ ◻ ◻ 4 ◻ ◻ ◻ ◻ 6 ◻ ◻ ◻ ◻ 8 ◻ ◻ ◻ ◻

Pouvez-vous dire quels sont ces personnages, sachant que 1 est un physicien écossais dont le nom est devenu une unité de mesure, 2 un philosophe allemand, 3 un poète romantique, et que les autres sont un romancier et une romancière français, un peintre espagnol, un musicien allemand et un navigateur anglais ?



99

l'empereur et le philosophe

Frédéric II de Prusse — le Grand Frédéric — et Voltaire étaient de grands amis, et l'empereur invitait souvent le philosophe dans son château de « Sans-Souci ».

De plus, les deux hommes adoraient les rébus. Aussi Voltaire ne fut-il pas surpris en recevant celui-ci :

$\frac{p}{ce\ soir}$ à $\frac{ci}{sans}$

il répondit

Ga

Pouvez-vous déchiffrer ces brefs messages ?





100

le cryptogramme du chevalier de Rohan

Voici maintenant un véritable problème de cryptographie, qui est aussi un problème historique.

Le chevalier de Rohan, accusé d'avoir voulu livrer Quillebeuf aux Hollandais, en 1674, fut arrêté et mis au secret à la Bastille.

Son complice, La Truaumont, avait été tué lors de sa capture, ce qu'il ignorait, et n'avait donc pas pu le trahir. Les amis de Rohan essayèrent de l'informer de cette circonstance, afin de lui permettre de nier, et ils lui firent passer le cryptogramme suivant qu'ils avaient écrit à l'intérieur d'une manche de chemise :

mg dulhxclgu ghj yxuj lm ct
ulgc alj

Le chevalier ne parvint pas à déchiffrer ce message. Il avoua, et fut exécuté, le 27 novembre 1674.

Malgré une motivation moins pressante, serez-vous plus habile que M. de Rohan ?

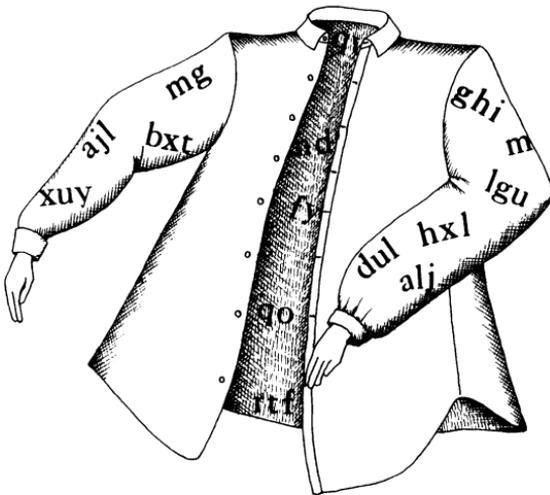


101

la soustraction d'Harpagon

$$\begin{array}{r} \text{AABB} \\ - \text{BBAA} \\ \hline \text{CDDC} \end{array}$$

Trouver, en chiffres, $\overline{\text{CDDC}}$





102

philatélie arithmétique

Trouver les chiffres qui remplacent les lettres dans l'addition suivante :

$$\begin{array}{r} \text{P A P I E R} \\ + \text{I M A G E} \\ + \text{G O M M E} \\ \hline \text{T I M B R E} \end{array}$$

Il y a quatre solutions.





103

les multiplications de Sainte-Barbe

Dans chacune des deux multiplications indiquées ci-dessous, les neuf chiffres du multiplicande, du multiplicateur et du produit sont les neuf chiffres significatifs (1 à 9).

Placer ces chiffres sur les croix

$$+ + + + . \quad + = + + + +$$

$$+ + + \quad . + + = + + + +$$

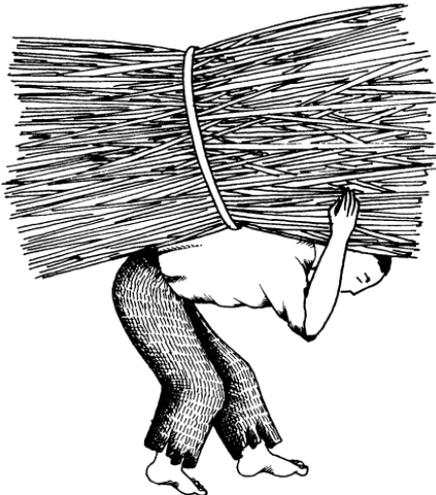
104

ni simple ni facile

Trouver les chiffres qui remplacent les lettres, dans les multiplications suivantes :

ELLE . EST = SIMPLE	
ELLE . EST = FACILE	
TU . ES = BÊTE	
UN . GRAND = TRAVAIL	

Dans chaque multiplication, à une lettre correspond un chiffre et un seul. Mais ces correspondances sont évidemment différentes pour chacune des multiplications.





105

ex nihilo

Chaque croix de la multiplication exposée ci-dessous représente un chiffre.

Les 20 croix sont deux fois chacun des chiffres 0, 1, ..., 9

Trouver multiplicande, multiplicateur et produit.

$$\begin{array}{r} \text{XXX} \\ \text{XXX} \\ \hline \text{XXX} \\ \text{XXX} \\ \text{XXX} \\ \hline \text{XXXXX} \end{array}$$



106

fidélités de la différence

Trouver un nombre de trois chiffres différents, un nombre de quatre chiffres différents, un nombre de huit chiffres différents, un nombre de neuf chiffres différents, un nombre de dix chiffres différents, chacun étant tel que, si on lui retranche le nombre inversé, la différence soit formée des mêmes chiffres.





107

joies et labeurs de l'inversion

N est un nombre écrit avec cinq chiffres différents, et N' est le nombre inversé ($N > N'$). $N + N'$ s'écrit avec les cinq chiffres de N (ou N'), $N - N'$ s'écrit avec les cinq autres chiffres.

Trouver N .

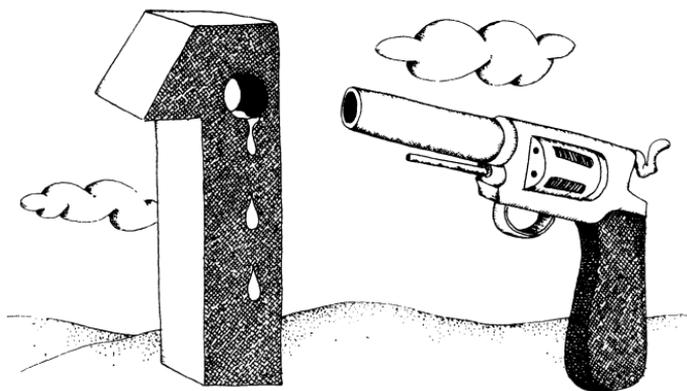
mort de « un »

A force d'être premier, UN était devenu prétentieux. DEUX fut lassé de son arrogance.

- Voulez-vous, lui dit-il, avec moi jouer?
- Je le veux bien, dit UN, puisque je gagnerai.
- Le jeu consiste à nous multiplier.
- Est-ce là tout? demanda UN avec condescendance.

Ils se multiplièrent. Et comme 1×2 égale 2, UN disparut. Et DEUX resta le seul des deux.

Moralité : Croissez, si vous voulez, mais évitez de vous multiplier.





108

un métier dangereux

Les aficionados estiment que Pedro Ramirez, le plus audacieux des toreros, a une chance sur deux d'être tué dans chaque course.

En admettant cette évaluation, quelle chance a Ramirez d'être encore en vie après dix courses ?



109

la scandaleuse soirée d'anniversaire de Clovis

Dix neveux et nièces de Clovis Clou participaient cette année-là à son dîner d'anniversaire. Clovis aimait bien ces jeunes gens, mais il leur reprochait d'être joueurs, et chose plus grave, d'être généralement mauvais mathématiciens. Il résolut donc de leur proposer un jeu qui leur donnerait une leçon, et qui aurait comme autre avantage de lui rembourser son dîner. « Voici deux dés, dit-il. Je les jette ; le résultat peut varier de 2 (2 as) à 12 (deux six). Chacun de nous va choisir un nombre compris entre 2 et 12 inclus qui sera valable pour tout le jeu. Les dés seront lancés 360 fois en tout (par n'importe qui). Chacun misera 10 francs à chaque coup ; celui qui aura le nombre indiqué par les dés empochera les mises. Comme je suis le plus vieux, je choisirai mon nombre le premier. »

A la fin de la soirée, Clovis était bien entendu le gros gagnant. Clotaire et Cléobule étaient les gros perdants.

Quels étaient les trois nombres qu'ils avaient choisis ?

Quelle somme approximative gagna Clovis ?



110

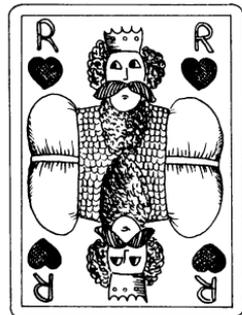
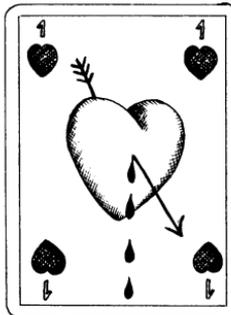
trois cartes à jouer

Trois joueurs, A, B, C, utilisent un jeu de trois cartes. Sur chacune d'elles est inscrit un nombre entier non nul,

$$p, q, r \quad p < q < r.$$

On donne une carte à chaque joueur; chacun reçoit un nombre de jetons égal au nombre inscrit sur sa carte; puis on ramasse les cartes, on les mélange, on les distribue à nouveau, et le jeu continue. Après N distributions ($N \geq 2$), les joueurs A, B, C ont respectivement reçu au total 20, 10 et 9 jetons.

Sachant que le joueur B a reçu r jetons lors de la dernière donne, quels sont les nombres p, q, r et quelles sont les différentes donnes ?





hasardeuses tribulations d'un domino

Sur un papier divisé en carreaux de 1 centimètre de côté, on trace deux cadres, l'un carré de 9 centimètres de côté, l'autre rectangulaire de côtés 11 et 7.

On choisit l'un de ces cadres, dont un carreau est enlevé au hasard. Quelle est alors la probabilité de pouvoir recouvrir la totalité des carreaux restants avec des dominos rectangulaires de 1×2 cm ?

La partie étant gagnée lorsque ce recouvrement est réussi, vaut-il mieux choisir, a priori, le cadre carré ou le cadre rectangulaire ?



112

séries jaunes

1. Traduire en d'autres nombres la série suivante
un - six - zéro - trois - quatre - dix sept - quatorze
2. Dans quel ordre les nombres suivants sont-ils rangés ?
5 - 10 - 8 - 9 - 11 - 15 - 16 - 30 - 20 - 0
3. Trouver le cinquième terme de la série :
9 - 198 - 3 087 - 41 976 - ?
4. Trouver le cinquième terme de la série, sachant qu'il a
8 chiffres
60 - 3 600 - 86 400 - 604 800 - ...
5. Trouver x et y

2 0 4	6 0 3	7 2 3	15 20 13	6 4 11
4 2 0	0 x 6	0 4 8	14 16 18	. y .
0 4 2	3 6 0	5 6 1	19 12 17	. . .

6. Quelle est la loi de formation de la série
4 - 6 - 12 - 18 - 30 - 42 - 60 - 72 - 102 - ...

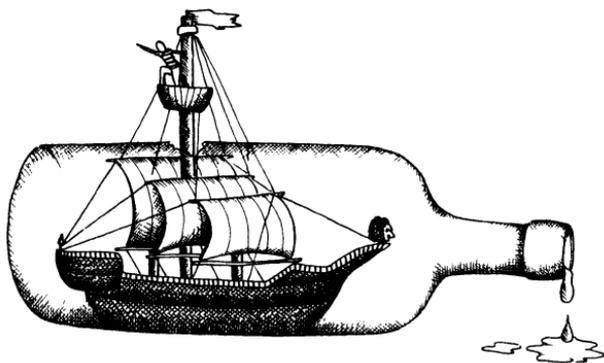


113

les paquebots d'Édouard Lucas

Édouard Lucas, connu en particulier pour un célèbre recueil de récréations mathématiques, posa le problème suivant à l'une des séances d'un très sérieux congrès de mathématiciens :

Chaque jour, à la même heure, un paquebot part du Havre pour New York, et un autre de New York pour le Havre. La traversée s'effectue, dans un sens comme dans l'autre, en sept jours. Combien l'un de ces paquebots rencontrera-t-il *en mer* de paquebots faisant route opposée ? (« en mer » exclut celui qui arrive quand il part, et celui qui part quand il arrive).





114

le centaure entravé

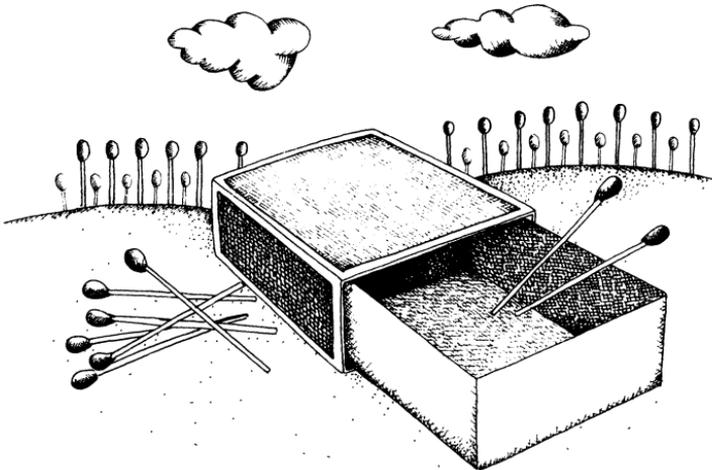
1. Écrire 100 avec neuf chiffres identiques, ne pouvant être séparés que par les symboles + — . : et ().
2. Écrire 100 avec les neuf chiffres significatifs en employant seulement, pour les séparer, + et — (plus ou moins) Combien y a-t-il de solutions ?
3. Écrire de la même façon que précédemment le nombre (— 100)
Combien de solutions ?



115

allumettarum ludus

Faire un cube avec cinq allumettes, sans les plier ni les casser.



curiosités numériques

Le nombre 142857 (S)

$$S \times 1 = 142857$$

$$S \times 2 = 285714$$

$$S \times 3 = 428571$$

$$S \times 6 = 857142$$

(permutation des chiffres de (S))

$$S \times 7 = 999999$$

.....

$$S \times 8 = 1142856$$

$$S \times 9 = 1285713$$

.....

$$S \times 14 = 1999998$$

8S, 9S, ..., 14S se déduisent de S, 2S, ..., 7S en écrivant en tête du nombre une unité prélevée sur le dernier chiffre du nombre générateur.

$$S \times 15 = 2142855$$

$$S \times 16 = 2285712$$

(deux unités prélevées à la fin des nombres S, 2S, ... passent en tête).

$$S \times 22 = 3142854$$

$$S \times 23 = 3285711$$

(trois unités prélevées à la fin des nombres S, 2S, ... passent en tête).

Etc.

Le produit de S par 326451 donne une curieuse multiplication :

$$\begin{array}{r}
 142857 \\
 \times 326451 \\
 \hline
 142857 \\
 714285 \\
 571428 \\
 857142 \\
 285714 \\
 428571 \\
 \hline
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Le nombre sans 8 (H)

$$\begin{array}{l}
 12345679 \times 9 = 11111111 \\
 12345679 \times 18 = 22222222 \\
 12345679 \times 27 = 33333333 \\
 \dots\dots\dots \\
 12345679 \times 81 = 99999999
 \end{array}$$

Lorsqu'on multiplie le nombre 12345679 par un chiffre premier avec 9 le produit s'écrit avec tous les chiffres significatifs pris une seule fois, à l'exception du chiffre égal à la différence entre 9 et le multiplicateur.

Si par exemple on prend 7 pour multiplicateur, le produit s'écrit avec tous les chiffres significatifs, sauf $2 = 9 - 7$

$$12345679 \times 7 = 86419753$$

La multiplication par 3 conduit à l'omniprésent nombre 37*

$$12345679 \times 3 = 37037037$$

Ajoutons un zéro à la gauche du nombre H.

* Sur les particularités de ce nombre 37, voir *Jeux de l'esprit...* Éd. du Seuil, 1975, p. 119.

Tous les nombres obtenus par permutation circulaire de ce dernier nombre sont multiples de H. Exemple :

$$\begin{array}{r|l} 234567901 & 12345679 \\ 111111111 & \hline 00000000 & 19 \end{array}$$

Le nombre monstre

$$526315789473684210 \text{ (M)}$$

Pour multiplier M par un chiffre n (2 à 9), on fait une coupure après le chiffre n du nombre M (lorsqu'il y a deux chiffres n dans M, on choisit celui qui est suivi du plus petit chiffre). On fait passer à droite du nombre le groupe de chiffres à gauche de la coupure, et on ajoute un zéro.

$$52631578947368 / 4210 \times 8 = 4210526315789473680$$

Si l'on forme un nombre M_1 en reportant d'une extrémité à l'autre une tranche de chiffres de M, $M + M_1$ comporte la même succession de chiffres que M, sauf à retrancher une unité qui vient à gauche du nombre lorsque $M + M_1$ comporte un chiffre de plus que M

$$\begin{array}{r} 5263157894 \quad 7368 / 4210 \\ 4210526315 \quad 7894 \quad 7368 \\ \hline \end{array}$$

$$9473684210 / 5263 \quad 1578$$

$$\begin{array}{r} 526 \quad 315789473 / 684210 \\ 684 \quad 210526315 \quad 789473 \\ \hline \end{array}$$

$$1210 / 526315789 \quad 473683$$

Si l'on fait passer le zéro qui est à la fin de M en tête du nombre, on obtient un nouveau nombre M_0 ($M_0 = \frac{1}{10} M$)

Toutes les permutations circulaires de M_0 sont divisibles par M_0 . Exemple :

$$631578947368421052 : 052631578947368421 = 12$$

Le nombre 111111101 (N)

$$N : 9 = 123456789$$

Lorsqu'on multiplie le nombre 123456789 par un chiffre premier avec 9, le produit s'écrit avec tous les chiffres significatifs pris une seule fois

$$123456789 \times 5 = 617283945$$

Lorsqu'on utilise le multiplicateur 3, on voit reparaître le nombre 37

$$123456789 \times 3 = 370370367$$

Le nombre 987654321 (P)

$$\begin{aligned} 987654321 \times 2 &= 1975308642 \\ &\times 3 = 29 \dots\dots 3 \\ &\times 4 = 39 \dots\dots 4 \\ &\times 5 = 49 \dots\dots 5 \\ &\times 6 = 59 \dots\dots 6 \\ &\times 7 = 69 \dots\dots 7 \\ &\times 8 = 79 \dots\dots 8 \end{aligned}$$

On obtient des résultats analogues en permutant les chiffres de P.

QUELQUES EXPLICATIONS

Les périodes

La plupart des égalités que je viens d'écrire ne sont curieuses qu'en apparence. D'abord elles n'expriment pas, sous la forme qui leur a été donnée, des propriétés intrinsèques des nombres * et elles ne sont exactes que dans l'écriture en base 10. Ensuite on pourrait en trouver de comparables avec une infinité de nombres. Pour comprendre le mécanisme de ces combinaisons, ou de certaines d'entre elles, il est utile de rappeler ce que sont les « périodes » des nombres fractionnaires.

Lorsqu'on traduit une fraction, ou nombre rationnel, en nombre décimal, deux cas peuvent se produire : ou bien le nombre rationnel est exactement représenté par un nombre décimal comportant un nombre fini de chiffres après la virgule — lorsque le dénominateur de la fraction ne comporte que les facteurs 2 et 5 — ou bien, le nombre de chiffres après la virgule est infini ; mais alors, dans tous les cas, une « période » apparaît dans cette suite infinie de chiffres, immédiatement si le dénominateur ne contient ni le facteur 2 ni le facteur 5 (nombre impair non terminé par 5), après un certain nombre de chiffres dans le cas contraire. Exemples :

$$\frac{3}{11} = 0,27272727\dots$$

$$\frac{7}{550} = \frac{7}{2 \cdot 5^2 \cdot 11} = 0,01272727\dots$$

Réciproquement, tout nombre entier est un nombre périodique, c'est-à-dire qu'à tout nombre entier on peut associer une fraction telle que le nombre apparaisse comme période dans l'expression décimale de la fraction.

La fraction correspondant au nombre P est $\frac{P}{9 \dots 9}$, le nombre

* Telles que : un nombre est entier, rationnel, premier, carré, etc.

de 9 du dénominateur étant égal au nombre de chiffres de P.
 Cette fraction peut ou non être réductible. Exemples :

$$14 \text{ est la période de } \frac{14}{99}$$

$$24 \text{ est la période de } \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

Inversement, à la fraction $\frac{P}{q}$ correspond le nombre périodique
 $P = 9 \dots 9 \times \frac{P}{q}$

On voit que P ne pourra exister que si le dénominateur q ne contient ni le facteur 2, ni le facteur 5 puisque ces deux nombres ne divisent pas $\overline{9 \dots 9}$. C'est la confirmation de ce qui a été indiqué plus haut. Dans ce cas, si q contient un autre facteur que 2 et 5, la fraction aura une période différée.

Si la fraction est un inverse, $\frac{1}{n}$, $P = \frac{\overline{9 \dots 9}}{n}$, si n est premier avec 10, ce qui entraîne que P est également premier avec 10.

Prenons pour n un multiple de 9 $n = a \times 9$ a premier avec 10

$$P = \frac{\overline{9 \dots 9}}{a \times 9} = \frac{\overline{1 \dots 1}}{a}$$

$$a \times P = \overline{1 \dots 1}$$

$$2 \times a \times P = \overline{2 \dots 2}$$

$$3 \times a \times P = \overline{3 \dots 3} \quad \text{Etc.}$$

Considérons la fraction $\frac{1}{27}$

$$n = 27 = 3 \times 9 \quad a = 3$$

$$\frac{1}{27} = 0,037037\dots *$$

$$P = 037 \quad a \times P = 3 \times 037 = 111$$

On retrouve la propriété « curieuse » du nombre 37.

* A noter que « réciproquement », $\frac{1}{37} = 0,027027\dots$ On a aussi $\frac{37}{27} = 1,37037037\dots$

et $\frac{27}{37} = 0,729729\dots$ avec $729 = 27^2$

Considérons la fraction $\frac{1}{81}$ $n = 81 = 9 \times 9$ $a = 9$

$$\frac{1}{81} = 0,012345679012345679\dots$$

$$P = 012345679$$

$$a \times P = 9 \times 012345679 = 111\ 111\ 111$$

On retrouve la propriété « curieuse » du nombre sans 8.

La génération des nombres en 1

Tout nombre P premier avec 10 (nombre impair ne se terminant pas par 5) est diviseur d'un nombre en 1. Il en divise même une infinité. En effet, si P divise un nombre A_p composé de p uns, il divise aussi tous les nombres constitués par juxtaposition de A_p , c'est-à-dire A_{2p} , A_{3p} , A_{4p} , etc.

Voici quelques exemples de génération de nombres en 1 par des nombres premiers avec 10. Nous venons de voir que 3 et 37 engendraient $A_3 = 111$, et donc A_6 , A_9 , ..., A_{3p} , soit le tiers des nombres en 1 (A).

11 est encore plus efficace, puisqu'il engendre A_2 , A_4 , A_6 , ..., A_{2p} , ..., soit la moitié des nombres A.

101 engendre $A_4 = 1111$, A_8 , ..., A_{4p} , ..., soit le quart des nombres A.

41 engendre A_5 , A_{10} , ..., A_{5p} , ..., soit le cinquième des nombres A.

7 et 13 engendent A_6 , A_{12} , ..., A_{6p} , ..., soit le sixième des nombres A.

239 engendre A_7 , A_{14} , ..., A_{7p} , ..., soit le septième des nombres A.

73 et 137 engendent A_8 , A_{16} , ..., A_{8p} , ..., soit le huitième des nombres A.

Etc.

On peut se demander, dans ces conditions, s'il existe des nombres A premiers. La réponse à cette question a été apportée par un mathématicien américain qui a démontré que le nombre

composé de 19 uns, et le nombre composé de 23 uns étaient premiers (A_{19} et A_{23}). Il y a probablement d'autres nombres A premiers, et peut-être une infinité.

On démontre que si a est le plus petit diviseur d'un nombre en 1, le nombre de chiffres du plus petit nombre en 1 multiple de a est $a - 1$, ou un diviseur de $a - 1$, sauf pour $a = 3$

$$3 \times 37 = 111 \text{ (trois 1)}$$

mais

$$7 \times 15873 = 111\ 111 \text{ (7 - 1 = 6 fois 1)}$$

$$19 \times 5847953216374269 = 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111$$

(19 - 1 = 18 fois 1)

$$13 \times 8547 = 111\ 111 \left(\frac{13 - 1}{2} = 6 \text{ fois 1} \right)$$

RETOUR AU « NOMBRE MONSTRE »

$$M \times 19 = 999999999999999999$$

$$M = \frac{10^{19} - 10}{19}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{10} &= \frac{10^{18} - 1}{19} = \frac{(10^9 + 1)(10^9 - 1)}{19} \\ &= \frac{[(10^3)^3 + 1][(10^3)^3 - 1]}{19} \end{aligned}$$

d'où la décomposition de M en facteurs premiers :

$$M = 2 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 5257 \times 333667$$

$$37 \times 333667 = 12345679$$

M est un multiple du nombre sans 8.

D'autre part, du produit $M \times 19$ on déduit :

$$\frac{1}{19} = \frac{M}{10^{19} - 10} = \frac{M}{10 \cdot 10^{18}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^{18}}}$$

$$= \frac{M}{10 \cdot 10^{18}} \left(1 + \frac{1}{10^{18}} + \frac{1}{10^{18 \cdot 2}} + \dots \right)$$

$$= 0,0MMM\dots$$

M est donc la période de $\frac{1}{19}$ (période : voir § précédent).
 On observe que la période de $\frac{1}{19}$ a : $(19 - 1) = 18$ chiffres.
 De même la période de $\frac{1}{29}$ a : $(29 - 1) = 28$ chiffres.

$$\frac{1}{29} = 03448275862068965517241379310\dots = OM' M'$$

La période de $\frac{1}{59}$ a : $(59 - 1) = 58$ chiffres

$$\frac{1}{59} = 0169491525423728813559322033898305084745762711$$

$$8644067796610\dots = OM'' M'' \dots$$

Le nombre de 28 chiffres M' et le nombre de 58 chiffres M'' ont les mêmes propriétés que M.

En fait il existe une infinité de « monstres » de la forme envisagée, c'est-à-dire périodes de $\frac{1}{x\dots 9}$, $\overline{X\dots 9}$ étant premier.

Les nombres circulaires

Les nombres 037, 142857, 012345679, M_0 , sont des nombres circulaires, c'est-à-dire des diviseurs de $10^n - 1 = \overline{9\dots 9}$ (n chiffres 9), les nombres étant complétés de zéros à droite pour avoir n chiffres.

$$037 = \frac{10^3 - 1}{27} = \frac{999}{27}$$

$$142857 = \frac{10^6 - 1}{7} = \frac{999999}{7}$$

$$012345679 = \frac{10^9 - 1}{81} = \frac{999999999}{81}$$

$$M_0 = \frac{10^{18} - 1}{19}$$

Une propriété intéressante et facile à démontrer de ces nombres

est que leurs permutations circulaires sont divisibles par eux-mêmes.

Ainsi, 370, 703 sont divisibles par 037.

Les permutations circulaires de $S = 142857$ sont divisibles par S , les quotients successifs étant 3, 2, 6, 4, 5.

Les permutations circulaires de 012345679 sont divisibles par ce nombre, les quotients étant les éléments de la progression arithmétique de base 10 et de raison 9 : 10, 19, 28, 37, ... etc.

On a ainsi l'explication des « curiosités » précédemment signalées.

116

quelques problèmes sur les nombres entiers

Je propose ci-dessous aux lecteurs friands d'arithmétique quelques problèmes sur les nombres entiers.

Ces problèmes sont de difficultés très variables. Certains n'ont pas encore reçu de solution.

R : le résultat est donné
NS : pas de solution indiquée
NR : problème non résolu



à



1. Trouver un carré de la forme \overline{aabb}

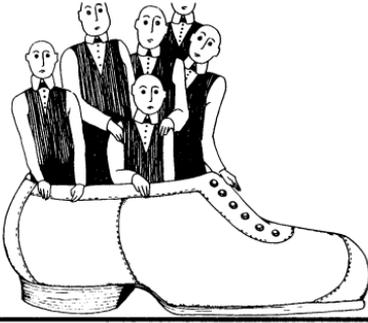
R

2. Trouver deux nombres tels que la somme de leurs carrés soit un carré

R

3. Trouver un nombre de quatre chiffres qui soit le carré du nombre formé par ses deux derniers chiffres

R



116

4. Trouver un nombre carré de six chiffres qui, lu à l'envers, soit encore un carré

R

5. Trouver trois carrés dont la somme soit un carré

R

6. Trouver trois cubes dont la somme soit un cube

R

7. Trouver un nombre égal à la somme des chiffres de ses cubes

R

8. Quel est le plus grand carré que l'on puisse écrire avec les dix chiffres, pris chacun une fois ?

R

9. Trouver trois cubes dont la somme soit le nombre formé par les trois chiffres qui constituent leurs racines cubiques. Même problème en remplaçant 3 par 4, 5, 6.

R

10. Trouver un nombre égal au cube de la somme de ses chiffres

R

11. Trouver un nombre x tel que la somme des x premiers nombres entiers s'écrive avec trois chiffres identiques

R

12. Trouver un carré qui, augmenté de 2, devienne un cube

R

13. Trouver un nombre de trois chiffres dont le double soit le nombre de chiffres de tous les nombres inférieurs ou égaux au nombre cherché

R

14. Trouver un nombre de trois chiffres égal à la somme de son premier chiffre (en partant de la gauche), du carré du second et du cube du troisième

R

15. Trouver trois entiers dont les cubes soient composés des mêmes chiffres permutés

R

16. Trouver des couples de nombres dont les carrés, et éventuellement d'autres puissances, soient composés des mêmes chiffres permutés

R

17. Trouver des nombres tels que, lorsqu'on permute leurs chiffres, leurs carrés se déduisent également les uns des autres par permutation de chiffres

R

18. Trouver des carrés formés des mêmes chiffres permutés

R

19. Existe-t-il des carrés écrits avec un seul chiffre répété plusieurs fois ?

R

20. Un nombre formé des neuf chiffres significatifs (dans un ordre quelconque) peut-il être un carré ?

R

21. Trouver deux nombres consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit une puissance quatre

R

22. Lorsqu'on forme un nombre en écrivant à la suite les nombres entiers successifs, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12..., peut-on arriver à un nombre qui soit un carré?

Ce problème, posé par le mathématicien H. Tarry en 1897, ne semble pas avoir été résolu. Mais tous les essais tentés ont été négatifs

NR

23. Trouver un nombre \overline{abc} tel que $\overline{abc} - \overline{cba}$ soit formé des trois chiffres a, b, et c

R

24. Trouver, dans les 10 000 premiers nombres, des nombres qui puissent s'écrire dans un système de numéra-

tion avec trois chiffres identiques, et, dans un autre système de numération, avec trois autres chiffres identiques

R

25. Étant donné un nombre n de quatre chiffres au plus, non tous égaux, on désigne par n' la différence entre le nombre obtenu en rangeant les chiffres de n par ordre décroissant, et le nombre obtenu en rangeant les chiffres de n par ordre croissant.

Alors n'''''' (ou n_7) est égal à 6174 quel que soit n

En outre $(6174)' = 6174$

NS

26. Soit A la somme des chiffres du nombre 4444^{4444} , et B la somme des chiffres du nombre A . Trouver la somme des chiffres du nombre B .

XVII^e Olympiades de mathématiques, Burgos (Bulgarie), 1975

R

27. Trouver un nombre de trois chiffres tel que son cube se termine par lui-même

28. Il existe des nombres G dont le quotient par un autre nombre s'obtient en supprimant dans G le chiffre de gauche, ou les deux premiers chiffres de gauche (Ex. $84 : 21 = 4$)

Le quotient obtenu est parfois lui-même un nombre G (Ex. $625 : 25 = 25$, $25 : 5 = 5$)

Trouver un nombre à partir duquel on puisse obtenir quatre quotients successifs qui soient des nombres G

R

29. Trouver le plus petit triplet de nombres entiers tels que le plus grand soit multiple du plus petit, et que leurs trois carrés soient en progression arithmétique

R

30. Trouver le plus petit nombre qui ait cent diviseurs (lui-même et l'unité compris)

R

31. Quel est le plus petit multiple de 13 qui, divisé successivement par les nombres de 2 à 12 inclus, donne toujours 1 pour reste ?

R

32. Quelle est la somme des chiffres nécessaires pour écrire tous les nombres de 1 à 1 milliard ?

R

33. Existe-t-il une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$?

NR

34. On appelle *nombre parfait* un nombre égal à la somme de ses diviseurs (1 compris)

On connaît actuellement 24 nombres parfaits :
 $6 = (1 + 2 + 3)$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, 496, 8128, 33550336, ..., $2^{19936} \cdot (2^{19937} - 1)$. Ce dernier nombre a 12 003 chiffres

Les 24 nombres parfaits sont pairs. La question est : existe-t-il un nombre parfait impair ?

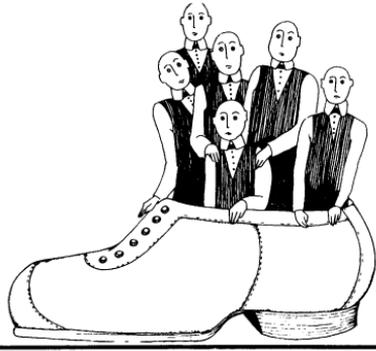
La question n'est pas encore résolue. Mais le mathématicien Bryant Tuckerman a démontré que, si un tel nombre existait, il serait supérieur à 10^{36} .

NR

35 On appelle *nombre presque parfait* un nombre égal à la somme de ses diviseurs plus 1 ou moins 1.

Trouver une famille d'une infinité de nombres presque parfaits du premier type (+ 1)

R



116

36. Trouver un *nombre presque parfait* du type $2(-1)$

NR

37. On appelle *nombre amiable* deux nombres tels que chacun soit la somme des diviseurs de l'autre (1 compris). La plus petite paire, 220 et 284, était connue des pythagoriciens. On connaît aujourd'hui plus de mille paires de nombres amiables; dans chacune de ces paires, les deux nombres sont de même parité, tous deux pairs ou tous deux impairs.

La question est : existe-t-il une paire de nombres amiables dans laquelle les deux nombres soient de parités différentes ?

NR



117

le banquet des 41

Il y a 41 personnes en un banquet, tant hommes que femmes et enfants, qui en tout dépensent 40 sous, mais chaque homme paie 4 sous, chaque femme 3 sous, chaque enfant 4 deniers (il y a 12 deniers dans un sou). Je demande combien il y a d'hommes, combien de femmes, combien d'enfants ?



118

mille sous en tout

Une troupe d'hommes, dont certains accompagnés de leur femme, a dépensé 1 000 sous dans une auberge. La dépense a été de 19 sous pour chaque homme, et de 13 sous pour chaque femme. Combien y avait-il d'hommes et combien de femmes?



119

les sept options de Thomas

Thomas dispose d'un nombre d'écus qui lui permet d'acheter, en utilisant chaque fois la somme entière :

- soit uniquement des chevaux à 31 écus l'un
- soit uniquement des bœufs à 19 écus l'un
- soit à la fois des chevaux et des bœufs, cette opération pouvant être faite selon cinq distributions différentes, et cinq seulement.

Quelle est la somme dont dispose Thomas ?



120

problème des trois objets

Certains problèmes présentent une solution si simple qu'après l'avoir trouvée on oublie souvent qu'elle peut n'être pas la seule possible. A titre d'exemple, voici un vieux problème, celui des « trois objets ».

Un acheteur dispose de la somme de 6 279 sous, et il entre dans une boutique où sont exposés des objets de trois sortes. Les objets d'une même sorte sont, bien entendu, au même prix, ce prix étant un nombre entier de sous. Les objets de différentes sortes sont à des prix différents. En dépensant exactement la somme qu'il possède, l'acheteur peut se procurer un même nombre d'objets de chacune des trois sortes, ou bien il peut consacrer son achat à une seule sorte d'objets, et n'importe laquelle.

Quels sont les prix des objets ?



121

le 5 5 2 7 1 5^e chiffre

Le mathématicien Fourrey a posé le problème suivant :
Si l'on inscrit à la suite les uns des autres, à partir de 1 et dans leur ordre naturel les nombres entiers, quel sera le 5 5 2 7 1 5^e chiffre de la liste ?



122

le chemin de fer à roulette (russe)

Lorsque les jeunes ingénieurs français Lamé et Clapeyron furent chargés par le gouvernement russe de la construction des premiers chemins de fer du pays, ils eurent à résoudre le problème suivant : étant donné des centres de production $A_1, A_2, \text{etc.}$, on veut établir, à l'intérieur du moindre polygone convexe qui les contienne tous un centre de trafic où viennent se réunir les marchandises provenant de $A_1, A_2, \text{etc.}$, pour être distribuées ensuite sur une voie ferrée destinée à passer en ce centre de trafic, lequel doit être choisi de manière à rendre minimum le prix total du transport, c'est-à-dire la somme des produits des distances qui le séparent de $A_1, A_2, \text{etc.}$, par les poids $p_1, p_2, \text{etc.}$, que fournit chacun d'eux.

Lamé et Clapeyron résolurent ce problème sans calcul, en se servant d'un plan de la région concernée sur lequel ils fixèrent un dispositif mécanique très simple.

Pouvez-vous reconstituer ce dispositif ?



123

les treize caisses d'Ali Baba

Le roi d'Ibalaba — qui se nommait Ali Baba — voulant récompenser les 728 hommes de son armée, les fit ranger par ordre de mérite croissant.

— Le premier, dit-il, aura 3 écus, le deuxième 5, le troisième 7, et ainsi de suite, chacun recevant deux écus de plus que le précédent.

Il ordonna ensuite à son trésorier Ala Bila de faire transporter les pièces d'or nécessaires pour cette distribution.

— Tu les feras répartir très exactement entre treize caisses.

Il vous est demandé de dire, sans calculs autres qu'une décomposition en facteurs premiers — et, en particulier, sans division par 13 —, si l'ordre d'Ali Baba était exécutable.

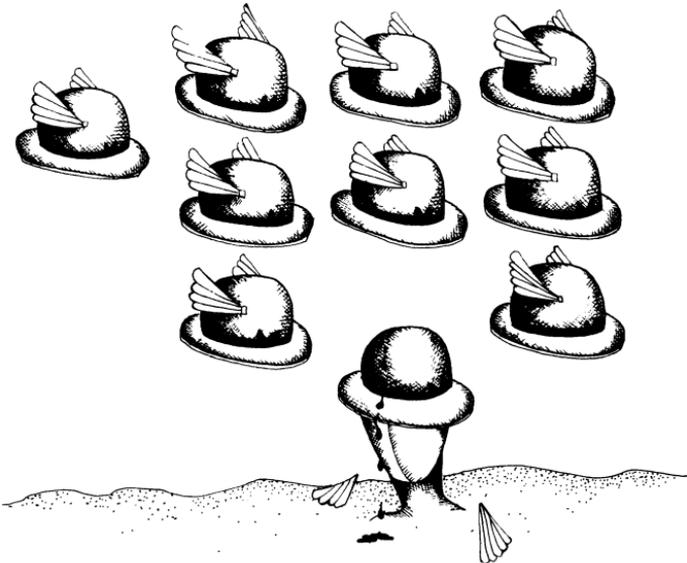


124

problème des dix chapeaux

Dix voyageurs entrent dans un restaurant et donnent leurs dix chapeaux à la dame du vestiaire. A leur sortie, cette dame peu consciencieuse leur remet les chapeaux au hasard; les voyageurs ont si bien dîné, qu'ils ne s'aperçoivent pas de cette négligence.

Quelle est la probabilité pour qu'aucun des voyageurs ne reçoive son chapeau ?





125

le sein de Mme de Maintenon

Voici deux séries de quatre questions. Écrivez à la suite de chaque question le chiffre qui constitue la réponse.

(1)

Combien y avait-il de « Merveilles du monde » ?

Quelle est en France le nombre d'années du mandat présidentiel ?

Quel est le numéro du roi de France qui régnait au temps de Jeanne d'Arc ?

Combien une mygale a-t-elle de pattes ?

(2)

Combien une mouche a-t-elle d'ailes ?

De combien de corps simples l'eau est-elle composée ?

Combien l'équation $x^2 - 3x + 2$ a-t-elle de racines ?

Combien de grains de beauté Mme de Maintenon avait-elle sur le sein gauche ?

En prenant dans l'ordre les quatre chiffres-réponses aux questions 1, vous obtiendrez un nombre de quatre chiffres. Élevez-le au carré. En prenant dans l'ordre les quatre chiffres-réponses aux questions 2, vous obtiendrez un

125

nombre de quatre chiffres. Élevez-le au carré. Retranchez le second carré du premier : vous devez obtenir un nombre formé de chiffres tous identiques.

Combien de grains de beauté paraient-ils donc le sein de Mme de Maintenon ?



126

le théorème de Fermat

Lorsque fut mort Fermat et que de son caveau la porte fut fermée, le roi qui d'arithmétique était fanatique au point qu'autour de son nombril le nombre d'or était écrit, le roi donc fit comparaître du maître le sublime théorème.

— Monsieur, dit-il, je vous veux faire duc et pair.

— Sire, répondit le théorème, je préférerais être impair, car mon père ne prisait pas les pairs, pour la raison qu'ils ne sont pas premiers.

— Et moi, dit le roi, je n'aime guère les impairs, car ces impertinents, d'impair font, parfois, imperator, ce qui me fait du tort. Vous serez donc pair!

— Alors je veux être le premier des pairs, qui est le seul premier pair, c'est-à-dire deux pair.

— Deux paires de quoi? demanda le roi.

— Deux, euh!... deux paires de demi-uns.

— Deux paires de demi-huns, cela fait deux huns, et je n'en ai pas un.

— Alors, faites-moi trois!

— Je ne puis, dit le roi, car Troyes est en Champagne, et vous êtes de Lomagne. Monsieur le théorème, vous serez donc pair, ou vous ne serez rien. Car après tout je suis bien

bon de vous offrir un blason, alors que peut-être n'êtes-vous pas bon !

— Que voulez-vous par là, s'exclama l'ombrageux théorème, dire, sire ?

— Je veux dire qu'il se pourrait, Monsieur, que vous fussiez faux. Auquel cas vous finiriez comme la foule des faussaires, à ramer sur mes galères.

Ayant ainsi parlé, le roi demanda son grand boulier, que Hua-Ko-Pin, empereur de Chine, lui avait offert pour son anniversaire. Il jouait de cet étonnant instrument le plus habilement du monde, et faisait en quelques secondes des opérations d'une incroyable complication, telles qu'additions, soustractions, divisions, accusations, acquisitions, aliénations, altercations, computations, calcinations, circoncisions, concussions, confiscations, déjections, dévastations, décollations, dilapidations, divagations, flagellations, fornications, inquisitions, lapidations, malversations, persécutions, prévarications, profanations, purgations, pollutions, réclusions, répudiations, spoliations, submersions, torréfactions, usurpations, vendications, trisections et autres abominations, par une méthode de déri-

vation, d'intégration et de fumigation des équations, où les populations voyaient l'explication de son élévation.

En quelques secondes donc, le roi sur une ligne traça les signes qu'ici bas je consigne :

$$7846^{2359637} + 5927^{2359637} = 8136^{2359637}$$

Et depuis, par l'accident d'un exposant extravagant, sur une trirème, rame sans trève le blème théorème.

Question. Pouvez-vous, en dix secondes, décider avec certitude si le théorème a été injustement condamné, autrement dit si le roi a fait une faute de calcul ?



127

la mort du maréchal de Saxe

Lors de la mort du maréchal de Saxe, un de ses admirateurs écrivit l'épithaphe, facile à compléter, que nous transcrivons ci-dessous, et qui, par une certaine addition, donnait la durée de sa vie, par excès.

Son courage l'a fait admirer de chac...

Il eut des ennemis, mais il triompha ...

Les rois qu'il défendit sont au nombre de ...

Pour Louis son grand cœur se serait mis en ...

Des victoires par an il gagna plus de ...

Il fut fort comme Hercule et beau comme Thyr...

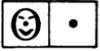
Pleurez, braves soldats, ce grand homme hic ja...

Il mourut en novembre, de ce mois le ...

Strasbourg contient son corps en un tombeau tout ...

Pour tant de *te Deum* pas un *De profun...*

Sachant que le maréchal était né dans l'été 1696, quelle fut la date de son décès?



128

le loto et les tragédies de l'histoire

Anne fut sa femme et Armand son ministre,
Joseph l'inquiéta de son ombre sinistre. A
Quel fut donc ce roi au modeste registre ?

Pour cet Henri à la férocité de bête,
deux femmes, pourtant, perdirent la tête. B
Que triste fut la fête !

Combien de Mars pour cet écuyer,
Ruzé plus que rusé, C
puisque sa tête fut coupée.

Cet Henri-là eut un bon numéro.
Il guerroya sans repos, D
et il aima la poule au pot.

De ses épouses tel fut le nombre,
infortunées que couvrit l'ombre E
de sa pilosité très sombre.

Ces cinq beaux tercets suggèrent des nombres A, B, C, D, E,
les quatre derniers n'ayant qu'un chiffre. En multipliant

128

par A le nombre \overline{BCDE} vous obtiendrez un produit remarquable.

En décomposant ce produit en facteurs premiers, vous connaîtrez les six nombres d'une grille qui peut vous faire gagner le gros lot du loto.

solutions

1. L'arquebuse du président

La décomposition de 636724 en facteurs premiers donne :

$$636724 = 2 \times 2 \times 11 \times 29 \times 499$$

Le quantième du mois, dernier jour d'un mois, ne peut-être que 29. La visite eut donc lieu en 1976, seule année bissextile du début du septennat.

L'âge du duc peut être 2×11 ou $2 \times 2 \times 11$.

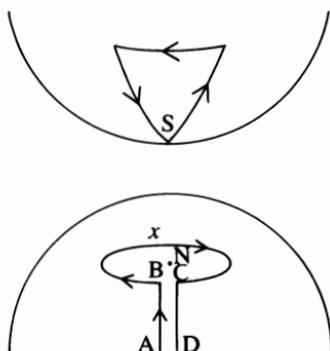
Dans le premier cas, la différence de date serait $2 \times 499 = 998$, et la bataille aurait eu lieu en $1976 - 998 = 978$. Mais à cette date l'arquebuse n'existait pas encore. Il faut donc adopter le second cas. La bataille a eu lieu en $1976 - 499 = 1477$. C'est la bataille de Nancy (elle fut perdue par Charles le Téméraire, qui périt dans le combat à l'âge de 44 ans).

La ville cherchée est donc Nancy.

2. Le pingouin sédentaire

La première solution qui vient à l'esprit est que le pingouin se trouve au pôle sud. L'explorateur aura parcouru 10 kilomètres selon un méridien, 10 kilomètres le long d'un parallèle, 10 kilomètres le long d'un méridien, et il sera ainsi revenu à son point de départ.

SOLUTION 3



Malheureusement, la zoologie nous enseigne que l'Antarctique n'est pas peuplé de pingouins, mais de leurs cousins les manchots. Il nous faut donc nous diriger résolument vers le pôle nord. Le schéma ci-contre indique la solution :

N est le pôle nord. L'explorateur part de A, arrive en B, suit le parallèle B X C B, et reprend le méridien B A. Le trajet effectué le

long du parallèle est de 10 km.

$$\text{Donc } NB = \frac{10 \text{ km}}{2\pi} = 1,592 \text{ km environ.}$$

$$NA = NB + BA = 1,592 + 10 = 11,592 \text{ km environ.}$$

Mais il y a d'autres solutions. Il y en a même une infinité, car l'explorateur marchant vers l'ouest peut avoir parcouru plusieurs fois le parallèle — disons n fois. Alors $NB = \frac{10 \text{ km}}{n \cdot 2\pi} = \frac{1,592 \text{ km}}{n}$, et $NA = 10 + \frac{1,592 \text{ km}}{n}$ (n entier quelconque). Tout ce que l'on peut dire, c'est donc que le pingouin se trouve à une distance du pôle nord comprise entre 10 et 11,592 km.

3. Le croquet et les deux universitaires

Soient A, a et B, b les âges et numéros de maisons des professeurs Arnolfe et Boussardon. Puisque Arnolfe occupe la maison individuelle

voisine de celle de Boussardon, $a = b + 2$ ($B > A$, donc $a > b$)

$$\begin{aligned} A(b + 2) &= Bb \\ 2A &= b(B - A) \end{aligned}$$

Arnolfe a moins de 50 ans, et Boussardon plus de 70 ans. Donc $B - A > 20$ et $b < \frac{2A}{20}$ ou $\frac{A}{10}$

A est inférieur à 50

$$\text{Donc } b < \frac{50}{10} = 5$$

Comme b est pair, il ne peut être que 4 ou 2. Mais 2 est exclu, car Boussardon ayant un voisin à gauche (Corcoran), sa maison n'est pas la première de la rue.

$$\begin{aligned} b &= 4 \text{ et } a = 6 \\ 2A &= 4(B - A) \\ 3A &= 2B && 2 \text{ divise } A \\ B &> 70 && \text{donc } A > 46 \\ 50 &> A > 46 \end{aligned}$$

A étant pair ne peut être que 48. Alors $B = \frac{3}{2} \cdot 48 = 72$

Arnolfe a 48 ans et Boussardon 72.

$$48 \times 6 = 72 \times 4$$

4. Bataille navale

1) $A B C = 30^\circ$. En effet l'hypoténuse du triangle rectangle $A B C$ (chemin de la frégate) est le double du petit côté de l'angle droit $A C$ (chemin du cargo).

SOLUTIONS 5-7

2) Traçons XY parallèle à B A. Lorsque la frégate est en X, le cargo est en Y, car $BX = 2AY$.

$$\begin{aligned} BX &= \frac{BD}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{10 - 8,263}{\cos 30^\circ} = \frac{1,732}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot 1,732}{1,732\dots} = 2 \text{ miles environ.} \end{aligned}$$

5. Où l'escarville de Clytemnestre pose problème

Cléopâtre doit monter dans le wagon de queue. Le train prenant progressivement de la vitesse à sa sortie de la gare, le wagon de queue entrera dans le tunnel plus vite que le wagon de tête, et y restera donc moins longtemps.

6. Le réservoir bigame

Le rapport des densités du deuxième liquide et de l'eau est :

$$\frac{69 - 1}{6 - 1} = 13,6$$

Le deuxième liquide est donc du mercure.

7. Vertige arithmétique

9^9 , ou, pour éviter toute ambiguïté, $9^{(9^9)} = A$

$\log A = 9^9 \log 9 \quad 9^9 = 387\,420\,489 \quad \log 9 = 0,954\,24\dots$

$9^9 \log 9 = 369\,692\,000$ environ (les tables logarithmiques à 5 déci-

males ne permettent pas d'atteindre une précision plus grande). Le nombre de chiffres de A est égal à la partie entière de son logarithme plus un. Il est donc approximativement de :

$$369\,692\,000$$

En écriture manuscrite courante ce nombre aurait 800 à 900 kilomètres de long, et, en supposant qu'on l'écrivît à la vitesse d'un chiffre par seconde, ce travail exigerait onze ans (environ).

8. La cohorte béotienne

Soit n le nombre d'hommes par ligne (ou colonne de carré).

Dans la nouvelle formation, l'un des rectangles contient plus de lignes, et 36 hommes de plus que l'autre. 36 représente donc une ou plusieurs lignes, et est donc multiple de n .

n est supérieur à 6, car n^2 est supérieur à 36.

$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ a, comme diviseurs supérieurs à 6 : 9, 12, 18 et 36.

Si $n = 9$, le grand rectangle doit avoir $\frac{36}{9} = 4$ lignes de plus que le petit.

Mais 9 ne peut être partagé en deux nombres dont la différence soit 4. Un raisonnement semblable conduit à rejeter également les hypothèses $n = 12$ et $n = 36$.

Donc $n = 18$. La cohorte béotienne compte $18^2 = 324$ hommes.

9. Le marquis de Touchemoulin recrute

Soit x l'effectif voulu par le marquis.

Réo et Mur ont recruté $\frac{7}{20}x + \frac{2}{5}(\frac{7}{20}x) = \frac{49x}{100}$.

SOLUTION 10

Comme le nombre d'hommes recrutés est évidemment entier, et que 49 est premier avec 100, x est multiple de 100. $x = n \times 100$.
Le nombre des hommes recrutés est $\frac{49 \times n \times 100}{100} = 49n$, et il est inférieur à 50.

$$\text{Donc } n = 1 \quad x = 100$$

10. Les Clou vont à la foire

Soit x le nombre d'objets achetés par l'un des hommes, a le nombre d'objets achetés par sa femme.

$$x^2 - a^2 = 63$$

$$(x + a)(x - a) = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Il y a trois façons de décomposer 63 en un produit de deux facteurs.

$$63 = 1 \cdot 63 \quad (x + a) = 63 \quad (x - a) = 1 \quad x = 32 \quad a = 31$$

$$63 = 3 \cdot 21 \quad (x + a) = 21 \quad (x - a) = 3 \quad x = 12 \quad a = 9$$

$$63 = 9 \cdot 7 \quad (x + a) = 9 \quad (x - a) = 7 \quad x = 8 \quad a = 1$$

Parmi les six nombres trouvés, il n'y en a que deux (12 et 1) dont la différence soit 11.

Clodomir a donc acheté 12 objets (et sa femme 9), Marthe 1 objet (et son mari 8)

Il existe un seul couple de nombres (x, a) tel que $(x - a) = 23$.

$$x = 32 \quad a = 9$$

Donc c'est Clotaire qui a acheté 32 objets, et Madeleine 9.

Clotaire - ? , Clodomir - Madeleine , ? - Marthe

$$32 \quad 31 \quad 12 \quad 9 \quad 8 \quad 1$$

Les couples sont Clotaire - Martine, Clodomir - Madeleine, Cléobule - Marthe.

11. Dramatiques permutations dans la famille Clou

Soient x et y les nombres d'objets achetés par deux époux.

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 325 = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$$

$(x + y)(x - y)$ ne peut être que $325 \cdot 1$, $65 \cdot 5$ ou $25 \cdot 13$

Ces trois combinaisons possibles donnent :

$$\begin{array}{ll} x = 163 & y = 162 \\ x = 35 & y = 30 \\ x = 19 & y = 6 \end{array}$$

C'est Martine qui a dépensé le plus. C'est donc elle qui a acheté 163 objets, et son mari 162. Clodomir étant celui qui a dépensé le plus après Martine, il est son mari.

Cléobule a acheté 13 objets de plus que Marthe.

$$19 - 6 = 13$$

Cléobule est donc le mari de Marthe, Clodomir celui de Martine, et donc Clotaire celui de Madeleine.

Clodomir et Clotaire ont donc échangé leurs femmes, ou, si l'on préfère, Madeleine et Martine ont échangé leurs maris.

12. Clotaire est insatiable

Soit S la somme demandée par Clotaire $10\,000 < S < 20\,000$

$$S = \text{Me } 12 + 7 = \text{Me } 13 + 8 \quad S \text{ est impair}$$

$$S + 5 = \text{Me } 12 = \text{Me } 13 = \text{Me } 12 \times 13 = \text{Me } 156 = 156 A$$

$$64 < A \leq 128$$

$$156 A = (11 \times 14 + 2) A = \text{Me } 11 + 10$$

SOLUTION 12

$$2A - 10 = \text{Me } 11$$

$$A - 5 = \text{Me } 11 \quad A = \text{Me } 11 + 5.$$

On établira de la même manière que $A = \text{Me } 7 + 2$

Entre 64 et 128, il y a six multiples de 11: 66, 77, 88, 99, 110 et 121
88 répond seul à la question. $A = 88 + 5 = 93$, qui est $\text{Me } 7 + 2$

$$A = 93 \quad S + 5 = 156 \times 93 = 14\,508 \quad S = 14\,503$$

*

Soit T la somme proposée par Clovis $T < 10\,000$

$$T + 3 = \text{Me } 7 = \text{Me } 13 = \text{Me } 7 \times 13 = \text{Me } 91$$

$T = \text{Me } 5 + 3$ se termine par 3 ou 8 et $T + 3$ par 6 ou 1.

Dans le premier cas, la somme des chiffres de $T + 3$ est supérieure de 3 à celle des chiffres de T , et donc égale à $24 + 3 = 27$.

Dans le second cas, la somme des chiffres de $T + 3$ est inférieure de 6 à celle de T (7 unités de moins et une dizaine de plus), et donc égale à $24 - 6 = 18$.

Dans les deux cas, $T + 3$ est divisible par 9

$$T + 3 = \text{Me } 91 \times 9 = \text{Me } 819 = 819 B$$

$$T + 3 < 10\,003 \quad B \leq 12$$

puisque 819 B se termine par 1 ou 6, $B = 4$ ou 9

$$B = 4 \quad T + 3 = 819 \times 4 = 3\,276 \quad T = 3\,273$$

$$B = 9 \quad T + 3 = 819 \times 9 = 7\,371 \quad T = 7\,368$$

Seule la dernière valeur de T offre une somme de chiffres égale à 24.

$$\text{Donc } T = 7\,368$$

13. Les bougies du sabbat

Le nombre total d'heures de bougies consommées est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \frac{(n + 1)}{2}$$

Ce nombre est aussi $4n$

$$\frac{n(n + 1)}{2} = 4n$$

$$n = 7$$

14. La Lozère enfin débloquée

$$\text{P} \quad \text{A}_1 \quad \text{A}_2 \quad \text{Q}$$

Lorsqu'ils se croisent pour la première fois, en A_1 , les autobus ont parcouru à eux deux la distance PQ.

Lorsqu'ils arrivent à leur terminus, ils ont parcouru à eux deux deux fois la distance PQ.

Lorsqu'ils se croisent pour la deuxième fois, en A_2 , ils ont parcouru, toujours à eux deux, trois fois la distance PQ, c'est-à-dire trois fois la distance qu'ils avaient parcourue lors de leur première rencontre. Les autobus ayant roulé le même temps (arrêts de même durée), chacun a parcouru trois fois plus de kilomètres lors de leur deuxième rencontre que lors de la première.

Lors de la première rencontre, l'autobus le plus lent avait roulé 28,8 km.

Lors de leur deuxième rencontre il a donc roulé $28,8 \cdot 3 = 86,4$. Or le parcours $PQ A_2 = PQ + QA_2 = PQ + 14,4$

$$\text{donc } 86,4 = PQ + 14,4$$

$$PQ = 72$$

Ce que nous ne saurons malheureusement jamais, c'est lequel de ces autobus, le lozérois ou le gardois, allait le plus vite.

15. Les goûters de Mme Minouflet

Le camarade d'Arsène a reçu autant de gâteaux qu'il y avait d'enfants ordinairement, puisque la part qu'avait alors chacun a été diminuée de un. Arsène touche ce jour-là la même part que lui.

Lorsque Arsène et son camarade sont absents, les enfants restants, se partageant les gâteaux qu'auraient eus ces absents, ont chacun trois gâteaux de plus.

Donc les parts d'Arsène et de son camarade, égales à elles deux à deux fois le nombre ordinaire des enfants, sont aussi égales à ce nombre diminué de un, le résultat multiplié par trois.

Le nombre cherché est donc tel que son produit par deux est égal à lui-même moins un multiplié par trois, c'est-à-dire à son produit par trois moins trois. Donc le nombre est trois.

Mme Minouflet a trois petits enfants.

La première proposition énoncée ci-dessus montre que le nombre de gâteaux est :

$$3 \cdot (3 + 1) = 12$$

16. Babou et ses babouins

Soit x le nombre total des babouins reçus à ce jour par Babou.

Les $\frac{2}{5}x$ sont morts, et ce nombre est égal à 8 (8 anniversaires nécessaires pour combler ce vide).

$$\frac{2}{5}x = 8 \quad x = 20$$

Babou a reçu 20 babouins, dont 19 représentent des cadeaux d'anniversaire, elle a 19 ans.

Mais ce raisonnement n'est pas le bon, car il ne permet pas de déterminer la date exacte de l'anniversaire.

L'histoire se passe « quelques mois » après novembre 1979, donc en 1980, année bissextile. Supposons que l'anniversaire de Babou soit le 29 février 1980. Dans les huit ans à venir, Babou aura 2 anniversaires, donc recevra 2 babouins.

$$\frac{2}{5}x = 2 \quad x = 5$$

Babou a eu 4 anniversaires, elle a 16 ans.

17. Une créance singulière

Soit A la somme prêtée. Il n'est pas difficile de démontrer qu'à la fin de l'année n le remboursement R_n sera $\frac{A}{n(n+1)}$ et la dette restante A_n sera $\frac{A}{n+1}$.

Sans faire cette démonstration, on peut, par un calcul simple, dresser le tableau suivant :

n	R_n	A_n
1	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2}$
2	$\frac{A}{6}$	$\frac{A}{3}$
3	$\frac{A}{12}$	$\frac{A}{4}$
.....		
9	$\frac{A}{90}$	$\frac{A}{10}$

SOLUTIONS 18-19

$\frac{A}{10}$

est la somme à rembourser à la fin de la dixième année.

Tous les remboursements étant des nombres entiers de francs, d'après l'énoncé, A devra être divisible par les dénominateurs de R_n , c'est-à-dire par 2, 6, 12, ..., 90, c'est-à-dire par $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

$$A = 2520 K, K \text{ entier}$$

Puisque le dernier remboursement, $\frac{A}{10}$, est inférieur à 300 F,

$$A < 3000$$

$$K = 1 \quad A = 2520$$

18. Le comptable défaillant des trous Clou

Un nombre N quelconque est égal à un multiple de 9, plus la somme de ses chiffres (caractère de divisibilité par 9).

Si on intervertit des chiffres de N on obtient un nombre N' qui est aussi égal à un multiple de 9 plus la somme de ses chiffres (les mêmes que ceux de N). Il en résulte que $N - N'$ est un multiple de 9.

54 étant multiple de 9, il est à présumer que l'erreur comptable est une inversion de chiffres.

$$\text{Exemple : } 682 - 628 = 54$$

19. Le bal des ardentes

Le nombre de dames est égal au nombre de cavaliers moins six. Il est donc :

$$\frac{42 - 6}{2} = 18$$

20. Déconcertant voyage à Londres

240 F est le montant des achats de chacun, qui est aussi le prix du billet d'avion (aller ou retour).

Si les voyageurs étaient six à l'aller et quatre au retour, comme cela semble résulter de l'énoncé, la dépense totale serait :

$$6 \times 240 + 6 \times 240 + 4 \times 240 = 3\,840 \text{ F}$$

ce qui est contraire à l'énoncé.

$$2\,400 = 240 \times 10 = 240 (4 + 4 + 2)$$

d'où la solution : les voyageurs sont quatre ; la femme d'André est la fille de Baptiste et la filleule de Charles.

21. Bombardes et pyramides



La première couche de boules en contenait 15 par côté, c'est-à-dire 15^2 ; la seconde couche, 14 par côté, soit 14^2 ; etc.

Le nombre cherché est donc $15^2 + 14^2 + \dots + 1^2$

Une formule classique donne la somme des carrés des n premiers nombres entiers :

$$\sum_1^n p^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n^*$$

En l'appliquant à notre cas particulier, nous trouvons 1240.

* Les lecteurs qui ne connaissent pas la formule pourront l'établir facilement en partant de l'identité $(p + 1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$. Il suffit de donner à p les valeurs successives de 0 à n , d'écrire les égalités obtenues en dessous les unes des autres, et d'ajouter membre à membre.

22. Le bolide et les trois bornes

$$\begin{aligned} \overline{BA} - \overline{AB} &= \overline{AOB} - \overline{BA} \\ 10B + A - 10A - B &= 100A + B - 10B - A \\ 6A &= B \end{aligned}$$

A, différent de 0 ne peut être que 1.

$$B = 6$$

Numérotage des bornes : 16, 61, 106.

Vitesse du bolide : 45 km/heure.

23. Prenez garde aux moutons

Soit n le nombre des moutons. Le prix du troupeau est :

$$n \cdot n = n^2$$

Le nombre de pièces de dix francs reçues est impair, puisque les deux frères n'ont pu se les partager également. Soit $2p + 1$ le nombre de ces pièces et a l'appoint.

$$n^2 = (2p + 1) \cdot 10 + a \quad a < 10$$

n^2 compte donc un nombre impair de dizaines.

n peut se mettre sous la forme

$$n = x \cdot 10 + y \quad \text{avec } y < 10$$

$$n^2 = x^2 \cdot 100 + 2x \cdot 10 \cdot y + y^2 = 2 \cdot 10 (5x^2 + xy) + y^2$$

Puisque n^2 compte un nombre impair de dizaines, il doit en être de même de y^2 . Or les seuls carrés d'un nombre inférieur à 10 à dizaines impaires sont 16 et 36.

Dans tous les cas, le nombre d'unités de n^2 est 6.

$$a = 6$$

L'aîné avait pris $(10 - 6) = 4$ francs de plus que son frère. Pour égaliser les parts, il lui donne deux pièces de 1 franc.

24. Victoire de Zénobie

Lorsque les deux caravanes se croisent, les Palmyriens ont parcouru les $\frac{3}{5}$ de la distance entre Palmyre et Pétra, les Nabatéens les $\frac{2}{5}$. La vitesse des Nabatéens est donc les $\frac{2}{3}$ de celle des Palmyriens. Pour couvrir les $\frac{2}{5}$ de la distance restante, les Palmyriens marchent 8 jours. Il leur faut donc $\frac{8 \times 5}{2} = 20$ jours pour effectuer la totalité du voyage.

Les Nabatéens, dont la vitesse est inférieure, mettront $20 : \frac{2}{3} = 30$ jours, soit 10 jours de plus.

25. Un rond de sapins carré

Soient n et n' l'ancien et le nouveau nombre de sapins par ligne de carré

$$\begin{aligned} n'^2 - n^2 &= 1351 \\ (n' + n)(n' - n) &= 1.7.193 \end{aligned}$$

Deux solutions : 1) $n' + n = 7.193 = 1351$

$$n' - n = 1$$

Alors

$$n' = 676 \text{ et } n = 675$$

SOLUTION 26

Mais 675 sapins plantés à un mètre de distance formeraient le côté d'un carré de plus d'un hectare

$$\begin{aligned}2) \quad n' + n &= 193 \\ n' - n &= 7\end{aligned}$$

Alors

$$n' = 100 \text{ et } n = 93$$

$n'^2 = 10\,000$ – Paul Paris possède un *nombre rond* de sapins : 10 000. S'il a planté les arbres à 50 centimètres des clôtures, comme il est réglementaire, la nouvelle sapinière couvre exactement un hectare. Le terrain de Paul est donc carré.

26. Qui fit, de Li ou d'Ali, le plus de lis ?

Soient x_1, x_2, x_3 les longueurs des trajets parcourus par Li les premier, deuxième, troisième jours.

Les trajets correspondants d'Ali sont :

$$\frac{9}{11}x_1 \quad \frac{11}{9}x_2 \quad \frac{33}{31}x_3$$

et les sommes des trajets journaliers :

$$\frac{20}{11}x_1 \quad \frac{20}{9}x_2 \quad \frac{64}{31}x_3$$

Ces sommes diminuant de 20 % chaque jour :

$$\frac{20}{11}x_1 = \frac{10}{8} \frac{20}{9}x_2 = \left(\frac{10}{8}\right)^2 \frac{64}{31}x_3$$

d'où :

$$x_2 = x_1 \frac{36}{55} \quad x_3 = x_1 \frac{31}{55}$$

Le trajet total de Li est :

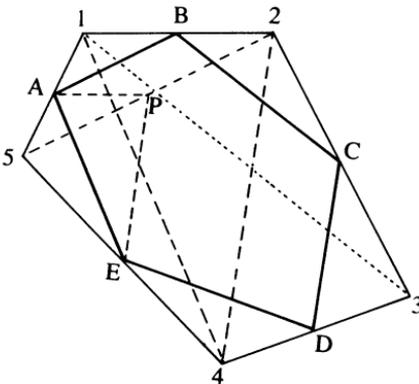
$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \frac{122}{55}$$

Le trajet total d'Ali est :

$$\frac{9}{11} x_1 + \frac{11}{9} x_2 + \frac{33}{31} x_3 = x_1 \frac{122}{55}$$

Li et Ali ont accompli le même trajet total.

27. Le pentagone de Sin Pan



Soient A, B, C, D, E les cinq bornes.

Traçons EP, équipollent à DC. Si 1, 2, 3, 4, 5 sont les sommets du pentagone cherché, les deux triangles AEP et 142 sont homothétiques, le centre d'homothétie étant 5, et le rapport deux.

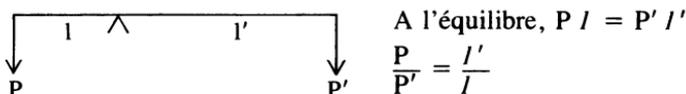
De B on mène une parallèle à AP sur laquelle on porte $B1 = B2 = AP$.

SOLUTION 28

De 1 et 2 on mène les parallèles à A E et P E qui se coupent en 4.
On trace 2 P et on le prolonge d'une longueur égale, on obtient 5. De
1 on trace une parallèle à B C sur laquelle on porte 1 3 = 2 B C.

(Lionnet et Proulet ont démontré en 1844 que tout polygone d'un nombre impair de côtés pouvait être construit si l'on connaissait les milieux des côtés.)

28. Le commerce frauduleux de M. Yang



Le rapport des poids s'équilibrant est toujours le même. A l'achat le poids reçu par M. Yang, sur le plateau A, alors qu'il a mis 1 000 g sur le plateau A' de sa balance, est 1 100 g.

$$\frac{P}{P'} = \frac{1\ 100}{1\ 000} = \frac{11}{10}$$

A la vente, M. Yang met ces 1 100 g sur le plateau A', et le poids facturé au client est $1\ 100 \times \frac{11}{10} = 1\ 210$ g.

Soient x le prix facturé à M. Yang pour 1 000 g de marchandise, et y le prix de vente affiché par M. Yang pour 1 000 g.

$$y = \frac{3}{2} x$$

Lorsque M. Yang a déboursé x , il devrait normalement recevoir y , et son profit licite serait $y - x = \frac{1}{2} x$.

En réalité, M. Yang reçoit $\frac{1210}{1000} y$, et son profit est

$$\frac{1210}{1000} y - x = \frac{1210}{1000} \frac{3}{2} x - x = \frac{163}{200} x$$

Si une mise de fonds de x procure un profit frauduleux de

$$\frac{163}{200} x - \frac{1}{2} x = \frac{63}{200} x,$$

c'est une mise de fonds de $[x : (\frac{63}{200} x)] \times 63 = 200$ qui procure un profit frauduleux de 63.

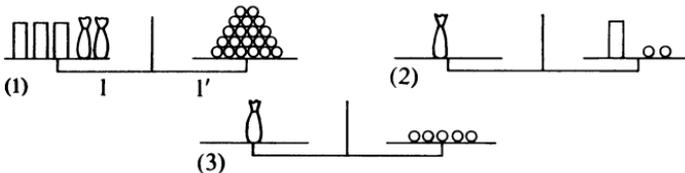
M. Yang a payé son lot de corne de rhinocéros 200 dollars.

Mais cette histoire est invraisemblable, parce que les marchands chinois sont toujours honnêtes.

29. Scandale à Macao

Soient P le paquet de poivre et son poids, C le paquet de cannelle et son poids, R le paquet de corne de rhinocéros et son poids.

$$\begin{array}{lll} 3 P + 2 C & \text{équilibrent} & 20 R \\ C & \text{équilibre} & P + 2 R \\ C & \text{équilibre} & 5 R \end{array}$$



soit x le rapport des longueurs du fléau de droite et du fléau de gauche ($x = \frac{1'}{1}$)

*

SOLUTION^s 30

$$3 P + 2 C = x \cdot 20 R \quad (1)$$

$$C = x \cdot 5 R \quad (3)$$

La comparaison des figures (2) et (3) montre que $P = 3 R$ (4)

Compte tenu de (3) et (4), (1) peut s'écrire

$$9 R + 2 \cdot x \cdot 5 R = x \cdot 20 R$$

$$9 = 10 x$$

$$x = \frac{9}{10}$$

Le rapport des fléaux de la balance de M. Yang est, lui, de $\frac{10}{11}$

Et comme $\frac{9}{10} < \frac{10}{11}$ (car $99 < 100$)

les fléaux de M. Ming sont plus inégaux que ceux de M. Yang.

M. Ming est devenu le plus voleur des deux.

30. Quousque tandem abutere, Sinensis...

Soit y le rapport des longueurs des fléaux de la balance. $y = \frac{l'}{l}$

$$2 Q = y \cdot 5 R$$

$$8 R = y \cdot 5 Q$$

En divisant les deux équations membre à membre on obtient :

$$\frac{Q}{4 R} = \frac{R}{Q} \quad Q^2 = 4 R^2 \quad Q = 2 R \quad \text{d'où } y = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} < \frac{9}{10} < \frac{10}{11}$$

M. Tong est le plus malhonnête des trois marchands.

Lorsqu'ils mettent une once de poudre de corne de rhinocéros sur le

plateau à fléau long de la balance, les résultats sont, pour les trois marchands, les suivants :

	<i>poids marqué</i>	<i>fraude en poids</i>	<i>fraude en dollars</i>
Yang	$\frac{11}{10}$ once	$\frac{1}{10}$	18
Ming	$\frac{10}{9}$ once	$\frac{1}{9}$	20
Tong	$\frac{5}{4}$ once	$\frac{1}{4}$	45

31. Une décision contestée du gouverneur de Macao

Prenons le cas de M. Ming, dont la balance a des fléaux de longueurs inégales, 9 et 10.

Dans une première pesée, il met un kilo d'épices (poids exact) du côté du fléau court. Le poids x indiqué est tel que :

$$9 \cdot 1 = 10 \cdot x \quad x = \frac{9}{10} = 0,9$$

Il met ensuite le kilo d'épices sur l'autre plateau. Le poids y indiqué est tel que :

$$9 \cdot y = 10 \cdot 1 \quad y = \frac{10}{9} = 1,1111 \dots$$

$$\frac{x + y}{2} = \frac{0,9 + 1,1111 \dots}{2} = 1,0055 \dots$$

On voit que le client paie encore pour un poids exagéré de 0,0055 soit un peu plus de 0,5 %

32. Le cheval boiteux de Sun Yat Sen

Soient V la vitesse de Sun Yat Sen et v celle de l'armée.

Le temps mis par Sun Yat Sen est le même que celui qu'il aurait mis, si, l'armée étant immobile, il avait fait à l'aller 10 km à la vitesse $V - v$, puis, au retour, 10 km à la vitesse $V + v$; ce temps total est d'autre part celui pendant lequel l'armée a avancé de 10 km.

$$\frac{10}{V - v} + \frac{10}{V + v} = \frac{10}{v}$$

Divisons par v les dénominateurs des deux membres.

$$\frac{10}{\frac{V}{v} - 1} + \frac{10}{\frac{V}{v} + 1} = 10$$

et, en posant $\frac{V}{v} = x$

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = 1 \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

La distance parcourue par Sun Yat Sen est $\frac{V}{v}$ fois, ou x fois, celle parcourue par l'armée dans le même temps soit: $10(1 + \sqrt{2}) = 24,1$ km.

33. Triste histoire de Pou, Lou et You

En diminuant d'une unité l'effectif des sections de Pou, on arrive à un nombre considéré en Occident comme maléfique: c'est 13, et les sections étaient primitivement de 14 — chiffre raisonnable pour des sections, au sens militaire du terme.

Les hommes de Pou se répartissant totalement en sections de 14, 15 et 16 hommes (puisque l'énoncé indique qu'il y eut deux essais), leur nombre P est un multiple de 14, 15 et 16.

Donc P est le plus petit commun multiple de 14, 15 et 16 ou un multiple de ce p.p.c.m.

$$P = 1\,680 \cdot p \quad p \text{ entier}$$

L'armée de Pou comptant moins de 30 000 hommes, $p \leq 17$.

Soit L le nombre des hommes de Lou. Nous savons qu'avant l'incorporation du capitaine ces hommes étaient répartis en sections comptant un homme de moins que celles de Pou, donc de 13 hommes. Le nombre des hommes de Lou, capitaine dégradé compris est, donc :

$$L = 13q + 1 \quad q \text{ entier}$$

$P + L$ est multiple de 13 et de 17, d'après la fin de l'énoncé, et, puisque 13 et 17 sont premiers entre eux, de $13 \times 17 = 221$

$$P + L = 221s \quad s \text{ entier}$$

$$1\,680p + 13q + 1 = 221s$$

$$1\,680 = 13 \cdot 129 + 3 \quad 221 = 13 \cdot 17$$

$$(13 \cdot 129 + 3)p + 13q + 1 = 13 \cdot 17 \cdot s$$

$$17s - 129p - q = \frac{3p + 1}{13} \quad (1)$$

$3p + 1$ doit être multiple de 13 d'où :

$$p = 4 \quad 3p + 1 = 13$$

$$\text{ou } p = 17 \quad 3p + 1 = 52 = 4 \cdot 13$$

Supposons $p = 4$ $P = 1\,680 \cdot 4 = 6\,720$

(1) donne d'autre part: $17s - 516 - q = 1$

$$q = 17s - 517 > 0$$

SOLUTION 34

La plus petite valeur possible de s est 31. A cette valeur correspond la plus petite valeur de q :

$$q = 17 \cdot 31 - 517 = 10 \quad L = 131$$

Mais on voit que $L > \frac{P}{100}$, ce qui est contraire à l'énoncé.

Donc $p \neq 4$

$$\text{Supposons } p = 17 \quad P = 1\,680 \cdot 17 = 28\,560$$

$$(1) \text{ donne } 17s - 2\,193 - q = 4$$

$$q = 17s - 2\,197 > 0$$

La plus petite valeur possible de s , à laquelle correspond la plus petite valeur de q , est 130

$$q = 17 \cdot 130 - 2\,197 = 13 \quad L = 170$$

Pour $s = 131$, $L = 391 > \frac{28\,560}{100}$, ce qui serait contraire à l'énoncé.

La seule solution est donc :

$$L = 170 \quad P = 28\,560$$

L'armée de Pou comptait 28 560 hommes, et les décapités furent 170.

34. Magie en boîtes

On entrouvre la boîte étiquetée B. N. Si l'on aperçoit une boule blanche, cette boîte contient deux blanches. La boîte B B ne peut contenir que deux noires, car, si elle contenait une blanche et une noire, la boîte N N serait convenablement étiquetée, ce qui est contraire à l'énoncé.

Si l'on aperçoit une boule noire, cette boîte contient deux noires, etc.

35. Fâcheuse promiscuité dans un car auvergnat

Deux des bourgeois habitent l'un Ambert, l'autre Issoire, à égale distance du domicile de l'escroc. C'est donc le troisième qui habite le plus près de chez lui. Ce n'est pas M. Chalus qui habite Issoire, ni M. Martin dont le nombre d'enfants n'est pas divisible par 3, c'est donc M. Dupont.

M. Martin habite Ambert, et l'escroc s'appelle également Martin. Le voleur ne peut donc être Martin, ni Dupont, qui le bat au billard. Il s'appelle Chalus, et le faussaire, donc, Dupont.

36. Une belle famille alsacienne

Supposons que la personne qui parle en premier soit une sœur. Alors, la sœur qui parle en second se trouverait dans la même situation qu'elle et aurait autant de frères que de sœurs, ce qui est contraire à l'énoncé.

Donc, la personne qui a parlé en premier est un frère. Le nombre des frères est supérieur de un au nombre des sœurs.

Quand une sœur parle en second, le nombre des sœurs restantes est inférieur de deux au nombre des frères et en constitue la moitié. La moitié du nombre des frères est donc deux, le nombre des frères quatre, le nombre des sœurs trois et le nombre des frères et sœurs sept.

37. Hôtel du Lapin Rouge

Soient x le nombre des clients de l'hôtel et A le nombre de litres de vin rouge consommé chaque jour.

SOLUTION 37

Les pensionnaires qui boivent du vin rouge sont :

$$x \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = x \cdot \frac{8}{25}$$

Les demi-pensionnaires qui dînent et qui boivent du vin rouge sont :

$$x \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = x \cdot \frac{4}{25}$$

Les demi-pensionnaires qui déjeunent et qui boivent du vin rouge sont :

$$x \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = x \cdot \frac{4}{75}$$

Chacune des catégories et sous-catégories doit être composée d'un nombre entier de personnes, ce qui implique que x soit multiple de 75. D'autre part, d'après l'énoncé, x est pair. Donc $x = 150p$, p étant un nombre entier.

La quantité de vin rouge consommé chaque jour est, en litres :

$$A = x \cdot \frac{8}{25} \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{4}{75} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}x = 50p$$

A est évidemment inférieur au nombre de litres que l'on obtiendrait en divisant le prix total, 1390 F, par le prix du vin le moins cher.

$$A < \frac{1390}{17} \quad A \leq 81$$

$$50p \leq 81 \text{ d'où } p = 1$$

Le nombre des clients de l'hôtel est $150 \cdot 1 = 150$

*

La plus petite quantité servie étant le quart de litre, les quantités de beaujolais et de côtes du rhône consommées, a et b , sont des nombres entiers de quarts de litre.

Soit y le prix du litre de beaujolais. $y > 17$

$$a \cdot \frac{y}{4} + b \cdot \frac{17}{4} = 1390$$

$a \cdot y + b \cdot 17 = 5560$ avec $a + b = 200$, $b = 200 - a$
d'où :

$$\begin{aligned} a(y - 17) &= 2160 \\ 2160 &= 1 \cdot 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Les diviseurs parmi lesquels il faut chercher $(y - 17)$ sont :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18...

y étant très légèrement inférieur au double de 17, c'est 16 qui convient.

$$\begin{aligned} y - 17 &= 16 \\ a &= \frac{2160}{16} = 135 \end{aligned}$$

La quantité de beaujolais consommée chaque jour est 135 quarts de litre, ou 33 litres $\frac{3}{4}$.

38. Les électeurs pontissaliens

Il y a 4 combinaisons de 4 chiffres pris 3 à 3, et en permutant 3 chiffres on peut former 6 nombres. Il y a donc $4 \cdot 6 = 24$ nombres à ajouter.

Soit \overline{abcd} le nombre des électeurs. Les permutations des 3 chiffres a, b, c , sont :

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

SOLUTION 38

$$\overline{c a b} = 100 c + 10 a + b$$

$$\overline{b c a} = 100 b + 10 c + a$$

$$\overline{a c b} = 100 a + 10 c + b$$

$$\overline{b a c} = 100 b + 10 a + c$$

$$\overline{c b a} = 100 c + 10 b + a$$

dont la somme est $222(a + b + c)$

Il s'ensuit que la somme des 24 nombres possibles sera :

$$222 [(a + b + c) + (b + c + d) + (c + d + a) + (d + a + b)] = 666(a + b + c + d)$$

Soient A l'âge du maire et N le nombre de ses électeurs.

$$666(a + b + c + d) = A(a + b + c + d)^2$$

En divisant les deux nombres par $(a + b + c + d)$, qui ne peut être nul, on trouve :

$$a + b + c + d = \frac{666}{A} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 37}{A}$$

La somme de 4 chiffres différents étant inférieure ou égale à 30, et A devant diviser cette somme, $A = 37$ ou $A = 37 \cdot 2$ (les autres valeurs possibles, supérieures à 100 étant inacceptables).

Puisque le maire est jeune, $A = 37$

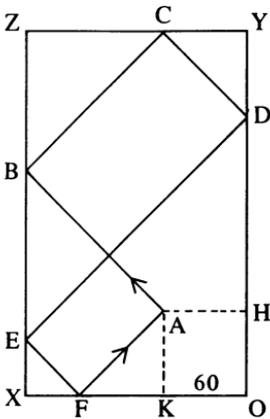
Alors $a + b + c + d = 18$

$$666(a + b + c + d) = 666 \cdot 18 = \frac{36}{13} N$$

d'où $N = 4329$

Le maire a 37 ans, et ses électeurs sont 4329.

39. Voyage en cinq bandes



La route de la bille est toujours inclinée à 45° sur l'une et l'autre bande. Donc le chemin parcouru par la bille, est toujours égal à la projection de ce chemin sur l'une ou l'autre bande multipliée par $\sqrt{2}$. Évaluons ce chemin γ , au moyen de sa projection sur l'axe OY :

$$\gamma = (HY + YO + OH) \cdot \sqrt{2} = 2 OY \cdot \sqrt{2}$$

Évaluons-le d'après sa projection sur OX :

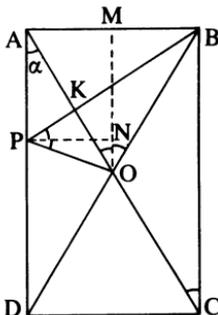
$$\begin{aligned} \gamma &= (KX + XO + OX + XK) \cdot \sqrt{2} \\ &= 2 (OX + KX) \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$OY \cdot \sqrt{2} = (OX + KX) \cdot \sqrt{2}$$

$$OY = OX + KX$$

$$= 160 + (160 - 60) = 260$$

40. Percussions de M. Clou sur un billard à trous



Soit N le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur la médiane OM du rectangle.

$$\widehat{OPN} = \widehat{KPN}$$

$$\widehat{KPN} = \widehat{PAK} \text{ (côtés perpendiculaires)} = \alpha \text{ donc}$$

$$\widehat{KPO} = 2\alpha \text{ et } \widehat{KOP} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \widehat{POB} &= \widehat{KOP} + \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \\ &+ 2\alpha = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

SOLUTION 41

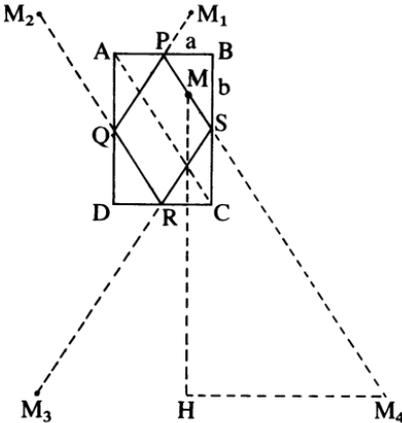
Le quadrilatère $A P O B$ est donc inscriptible et $\widehat{O A B} = \widehat{O P B} = 2 \alpha$

$$\widehat{P A B} = \widehat{P A O} + \widehat{O A B} = 3 \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{B C}{A B} = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

41. Réflexions de M. Clou sur un billard sans trous



Soient M_1 le symétrique de M par rapport à $A B$, M_2 le symétrique de M_1 par rapport à $A D$, M_3 le symétrique de M_2 par rapport à $D C$, M_4 le symétrique de M_3 par rapport à $B C$

L'égalité des angles d'incidence et de réflexion de la bille fait que celle-ci suivra les directions $M_1 P$, $M_2 Q$, $M_3 R$, $M_4 S$.

Si $M_4 S$ passe par M , il est facile de voir que les triangles $A D C$ et $M H M_4$ sont homothétiques dans le rapport 2 (rapport des côtés des angles droits). $M P$ est parallèle à l'une des diagonales du rectangle (et $P Q$ à l'autre).

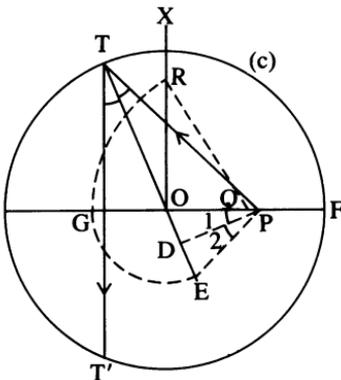
La longueur du circuit parcouru par la bille, périmètre du parallélogramme $P Q R S$, est égale à $M_4 M$, c'est-à-dire deux fois la diagonale du billard.

SOLUTION 43

$$\begin{aligned}
 \overline{EH} &= \frac{M_1 M'_1}{2} \operatorname{tg} \alpha = a - \frac{y - y'}{2} \operatorname{tg} \alpha \\
 \overline{E'E} &= \overline{E'H} - \overline{EH} = x - a + \frac{y - y'}{2} \operatorname{tg} \alpha \\
 x - a &= -\overline{NT} \frac{y - y'}{2} \operatorname{tg} \alpha = \overline{NM} \operatorname{tg} \alpha = \overline{NR} \\
 \overline{E'E} &= \overline{NR} - \overline{NT} = \overline{TR} \\
 \overline{E''E} &= \overline{M'_1 H} - \overline{M'_1 K} = \overline{EH} \cot \alpha - y' = a \cot \alpha - \frac{y + y'}{2} \\
 &= \overline{KL} - \overline{KN} = \overline{NL}
 \end{aligned}$$

43. Le billard circulaire

Supposons le problème résolu. Soit PTT' le début du trajet de la bille, D le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur TO , E le point de rencontre de TO avec la perpendiculaire élevée en P à TP ; $PO = d$; $OT = R$. Les triangles TPE , ODP sont semblables.



$$\frac{PE}{ET} = \frac{OD}{PO}$$

Les angles P_1 et P_2 étant égaux, OPE est isocèle, $PO = PE = d$

$$\text{et } OD = \frac{DE}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{d}{ET} = \frac{OE}{2d}$$

$$ET \cdot EO = (d\sqrt{2})^2.$$

Portons sur PO la longueur $OG = OE$

$$GO \cdot GF = (d\sqrt{2})^2$$

$(d\sqrt{2})^2$ est la puissance du point G par rapport au cercle de centre Q (milieu de OF), et de rayon $\frac{R}{2}$

$$(d\sqrt{2})^2 = \overline{GQ}^2 - \frac{R^2}{4}$$

$$GQ^2 = (d\sqrt{2})^2 + \frac{R^2}{4}$$

Si l'on porte sur OX la longueur

$OR = d\sqrt{2}$, on voit que $GQ = QR$. D'où le point G.

E est à l'intersection du cercle de centre O et de rayon OG, et du cercle de centre P et de rayon d .

T est à l'intersection de EO prolongé et du cercle (c).

44. La base des sept chandeliers roses

L'énoncé insiste sur le mot base. Il s'agit d'une histoire de base ; de la base de numération des chandeliers roses. Soit x cette base

$$26.202 = 5555$$

$$(2x + 6)(2x^2 + 2) = 5(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^3 - 7x^2 + x - 7 = 0$$

$$(x - 7)(x^2 + 1) = 0$$

$$x = 7$$

Les « chandeliers roses » calculent au moyen d'un système de numération de base 7.

45. Les filles de Mnémosyne et le diviseur obstiné

Soit x la base de numération.

$$40301 = 4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$$

$2x^2 + x + 1$ s'écrit 211. C'est le diviseur cherché.

Le quotient est $(2x^2 - x + 1) = x^2 + x(x - 1) + 1$, qui s'écrit $\overline{1(x-1)1}$.

$$\text{Si } \overline{1(x-1)1} = 181, x = 9$$

Les filles de Mnémosyne étaient donc 9. C'étaient les Muses.

46. La poule et le gazomètre

Bien évidemment $x_1 = 2, x_2 = 13, x_3 = 11^*, x_4 = 4, x_5 = 8, x_6 = 9, x_7 = 3, x_8 = 5, x_9 = 12, x_{10} = 7, x_{11} = 10, x_{12} = 6$.

Les valeurs indiquées pour le x sont différentes de celles que nous venons de reconnaître.

C'est donc que ces x sont écrits dans des systèmes de numération de bases différentes de 10, et qui sont :

pour x_1	2	pour x_7	2
» x_2	8	» x_8	3
» x_3	9	» x_9	4
» x_4	2	» x_{10}	4
» x_5	7	» x_{11}	8
» x_6	5	» x_{12}	6

* Les 11 joueurs d'une équipe de football.

Les quatre premières équations littérales montrent que A, B, C, L, sont égaux aux bases employées sur leurs lignes.

$$\text{Donc } I = 4 \quad E = 7 \quad A = 2 \quad \text{et } n = 14$$

47. Zabulon et Coucoulina en vacances

Coucoulina a sept fois l'âge de son frère et le tiers de l'âge de son mari, qui n'est pas centenaire.

Elle a 21 ou 28 ans, son mari 63 ou 84 ans.

Soit x la base de numération de Karaoun; si 21 et 63 répondent à l'hypothèse :

$$21 \text{ s'écrit } 12 \quad 21 = x + 2 \quad x = 19$$

Dans le système de numération de base 19, 21 s'écrit 12, et 63 s'écrit 36.

On vérifiera facilement que 84 et 28 ne conviennent pas.

Zabulon a 63 ans, et Coucoulina 21.

48. Je dirai quelque jour vos naissances latentes

Les lignes sont les transcriptions dans les systèmes de numération de bases 10, 9, 8, 7, 6, 5, 3, 2 des chiffres suivants (écrits ci-dessous en base 10)

- pour la première ligne : 1
- » deuxième » : 5
- » troisième » : 9
- » quatrième » : 15
- » cinquième » : 21

SOLUTIONS 49-50

Ces nombres qui devraient figurer en tête de chaque ligne, sont les nombres d'ordre des lettres *a, e, i, o, u*, dont l'ensemble forme les voyelles.

La réponse est donc *voyelles* (évoquées par un vers du sonnet célèbre de Rimbaud)

49. L'anniversaire de Claudine

Le dîner a lieu le premier janvier, et l'anniversaire de Claudine est le 31 décembre. Le 30 décembre passé elle avait 19 ans. Elle aura 21 ans le 31 décembre de la présente année, et 22 ans à la fin de l'année prochaine.

50. Clodomir se remarie

$$36 = 1.2.2.3.3$$

Les trois âges peuvent être :

1	1	1	1	2	2	3
2	3	4	6	2	3	3
18	12	9	6	9	6	4

somme : 21 16 14 13 13 11 10

Puisqu'il y a une ambiguïté après indication de la somme, c'est qu'il y a treize tabatières sur la table.

Il y a un aîné, et non pas des aînés jumeaux.

Les âges sont donc 9, 2 et 2.

51. Évariste et son grand-père

Soient $\overline{a b}$ et $\overline{c d}$ les âges d'Évariste et de son grand-père.

$$10 a + b = 10 c + d + 63 \quad (1)$$

$$10 a + b + 10 c + d = n (a + b + c + d) \quad (2)$$

$$63 = n (a + b - c - d) \quad (3)$$

(1) montre que $b - d = 3$ $a - c = 6$ (A)

ou $d - b = 7$ $a - c = 7$ (B)

hypothèse (A)

(3) donne $n = 7$

d'où l'on déduit rapidement

$$a = 8$$

$$b = 4$$

$$c = 2$$

$$d = 1$$

hypothèse (B)

(3) donne : $63 = n \cdot 0$, ce qui est impossible.

Il n'y a donc qu'une solution : le grand-père a 84 ans et Évariste 21.

52. Le secret de la famille Bédouche

Soient P, M, E, A, x, y, les âges du père, de la mère, du fils, la somme de ces trois âges, les « quelques années » dont parle le père, la valeur des rapports communs. Ces nombres sont tous entiers.

$$P + M + E = A \quad P = 5 E$$

$$\frac{P + x}{E + x} = \frac{5E + x}{E + x} = y \quad (1)$$

SOLUTION 52

$$\frac{A + 3x}{A} = y \quad (2)$$

$$(2) \text{ donne : } x = \frac{A(y-1)}{3}$$

Portant cette valeur de x en (1), on obtient :

$$E = \frac{A(y-1)^2}{15-3y}, \text{ puis } P = \frac{5A(y-1)^2}{15-3y} \quad (3)$$

$$\text{et } M = A - P - E = \frac{A(-2y^2 + 3y + 3)}{5-y} \quad (4)$$

y est évidemment différent de 5, et ne peut être supérieur. En effet, si $y \geq 6$, d'après (2) on aurait $x \geq \frac{5A}{3}$, ce qui ne correspondrait pas à l'expression « quelques années » énoncée par le père. D'autre part, y est différent de 1, valeur pour laquelle on aurait $E = P = 0$. y ne peut être que 2, 3 ou 4, et il est facile de voir que 2 est la seule valeur raisonnable. Mais ceci peut être démontré.

En effet, M et $5 - y$ étant positifs, on doit avoir (4) :

$$\begin{aligned} -2y^2 + 3y + 3 &> 0 \\ 2y^2 - 3y - 3 &< 0 \end{aligned}$$

y doit être compris entre les racines de l'équation

$$2y^2 - 3y - 3 = 0$$

qui sont

$$\frac{3 - \sqrt{33}}{4} \text{ et } \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$$

La première racine est négative, la seconde égale à 2, 12... y doit être inférieur à 2, 12... Comme y est entier et différent de 1, il ne peut être qu'égal à 2.

y étant égal à 2, on a, d'après (3) et (4) :

$$E = \frac{A}{9} \quad P = \frac{5A}{9} \quad M = \frac{A}{3}$$

E étant entier, A est multiple de 9. Le plus grand multiple de 9 inférieur à 70 est 63.

$$\text{Si } A = 63, E = 7, P = 35, M = 21, M - E = 14$$

Si l'on prenait pour A un multiple de 9 inférieur à 63, $M - E$, différence entre les âges de la mère et du fils, serait trop petit pour être acceptable. Mme Bédouche a eu son fils à 14 ans, avant d'être mariée. C'est là le secret de la famille.

53. Clapeyron en l'an 2000

Soit x l'âge de Clapeyron en l'an 2000, $\overline{19ab}$ son année de naissance.

$$\begin{aligned} x &= 2000 - \overline{19ab} = 1 + 9 + a + b \\ 2000 - 1900 - 10a - b &= 1 + 9 + a + b \\ 90 &= 11a + 2b \\ 2b &= 90 - 11a \end{aligned}$$

$2b$, pair et inférieur à 20, ne peut être que 2

$$b = 1 \quad a = 8$$

Clapeyron, né en 1981, aura 19 ans en l'an 2000.

54. L'âge de raison

Pierre a 6 ans, son grand-père 66, son arrière-grand-père 99 ans.

Si l'on en croit le dicton qui fixe à 7 ans l'âge de raison, Pierre sera un enfant sage dans un an.

55. Divagations zoologiques

1. A la première question il fallait répondre :

« Je décrirais une circonférence ayant la canne pour rayon, j'aurais ainsi deux pigeons » (2π . jonc).

2. Considérons cheval comme un produit de facteurs. On peut intervertir ces facteurs.

c.h.e.v.a.l. = v.a.c.h.e. $l = \text{vache} \cdot \text{elle} = \text{vache} \cdot \text{vache} = (\text{vache})^2$

3. Vache = bête à pi = $\beta\pi$. Mais pie = bête à aile $\pi = \beta l$

d'où vache = $\beta \cdot \beta l = \beta^2 l =$ bête à deux ailes, ou oiseau.

$$4. \frac{\text{Mouche}}{\text{cheval}} = \frac{\beta l}{\text{vache} \cdot l} = \frac{\beta l}{\beta \pi \cdot l} = \frac{1}{\pi} = 0,318$$

Il y a environ 0,318 mouche sur un cheval.

56. Le marché couvert de Saint-Privat-des-Vieux

Le toit ne coûtera rien. Il sera construit « par-dessus le marché ».

57. L'arbre, la borne et le bipède

Il est parti du pied de l'arbre.

(Pour les lecteurs qui trouveraient cette solution cavalière, on peut aussi dire que $\frac{1513}{0,85}$ étant égal à 1780, le promeneur a fait un nombre pair de pas, c'est-à-dire qu'il est parti et arrivé sur le même pied.)

58. Le complot des Troussequins

Le texte de la lettre contient les anagrammes de : PARIS - BOURGES - NANTES - NÎMES - SAVERNE - VESOUL - TOURS - ANCENIS - CORBEIL - ROUEN - NIORT - AGEN - VIRE - REIMS - CAEN - ÉPINAL - AMIENS - CERET - SEDAN - REDON - DENAIN - ARLES - RODEZ - MELUN.

59. La riche Levalloise

« Elle a Laval à elle. »

Une telle phrase est un *palindrome* (du grec *palin*, nouveau et *dromos*, course), un groupe de mots qui peut être lu indifféremment et identiquement de gauche à droite ou de droite à gauche. On dit encore un *anacycle*.

Le jeu des palindromes est fort ancien, puisque Quintilien, Pline, Ausone le pratiquèrent, en latin bien sûr. Parmi nos contemporains, Charles Cros, Pierre Bailly, David P. Massot, Michel Laclos s'y livrèrent ou s'y livrent.

R. Cornaille a écrit ce distique :

Esopo reste ici et se repose
Élu par cette crapule

et Louise de Vilmorin, ce quatrain :

Eh ! Ça va, la vache ?
A l'étape, épate-la
Suce ses écus
L'ami naturel, le rut animal.

Mais le champion du genre est incontestablement Georges Perec, qui a écrit un palindrome de plus de 5 000 lettres.

SOLUTIONS 60-62

*

Un jeu voisin est celui qui consiste à composer des phrases pouvant être lues dans les deux sens, non plus lettre à lettre, mais mot à mot. Les deux versions ont alors des sens différents.

Par exemple, de David P. Massot :

Tu tiens le bonheur ce matin.
Mâtin, ce bonheur, le tiens-tu ?

Bibliographie : Michel Laclos, *Jeux de lettres, jeux d'esprit*.
Martin Gardner, « Des coïncidences numériques aux jeux de mots de l'Oulipo, » *Pour la science*, novembre 1979.

60. Pas d'arnica pour les canules

On trouve dans le récit qui constitue l'énoncé les anagrammes de : canari, lucanes, serpent, squal, chien, limace, singe, daim, tortue, poule, raie, orvet, souris, aigle, lion, pies, cétoines.

61. La musique des mots

Les premières et dernières lettres de chaque aphorisme donnent : *do, ré, mi, fa, sol, la, si*.

62. La cachette de la reine de Saba

En prenant la première lettre de chaque mot :

— C'est toi ?

— Oui, c'est moi.

63. Micromagie

(1), (2), (3) sont des carrés magiques; (4) doit l'être aussi.

Il faut pour qu'il remplisse cette condition, intervertir les chiffres 6 et 4.

64. La sorcière est au centre

Première question : il est à présumer que (2) est, comme (1), un carré magique. Il est très facile de démontrer que dans un carré d'ordre 3, l'élément central est le tiers de la constante (somme commune).

$$\text{Donc } x = \frac{8 + 3 + 10}{3} = 7$$

Deuxième question : L'application de la propriété précédente aux carrés magiques (2) et (3) montre que $y = 6$ et que $z = 7$.

65. Les magiciens d'Anvers

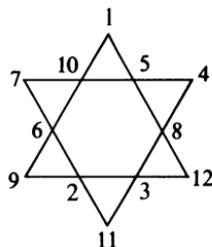
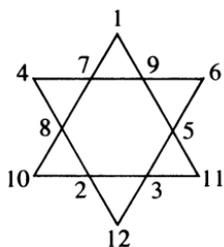
Voici deux exemples de tels carrés de module 5.

00	13	21	09	17
06	19	02	10	23
12	20	08	16	04
18	01	14	22	05
24	07	15	03	11

05	18	26	14	22
11	24	07	15	28
17	25	13	21	09
23	06	19	27	10
29	12	20	08	16

SOLUTIONS 66-69

66. Étoiles magiques



67. Évocations numériques

	3	1		0
	6		7	0
1	5	1	5	
4		0		2
4	0		1	2

68. Déception triangulaire

La surface est : zéro.

69. Les sphères peintes

Les volumes, et donc les poids, sont proportionnels aux cubes des rayons ; les surfaces, et donc les quantités de peinture, aux carrés des rayons.

Soient R et r les rayons des deux sphères, x le poids en grammes de la peinture nécessaire pour la petite sphère

$$\frac{r^3}{R^3} = \frac{8}{27} \text{ donc } \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

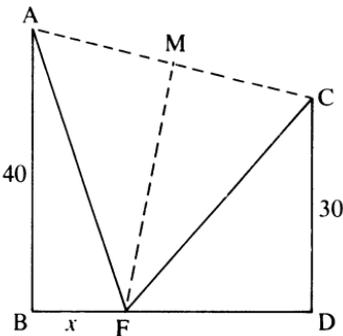
$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{x}{900} = \frac{4}{9}$$

$$x = 400 \text{ grammes.}$$

70. Les pétasophores de Saint-Saturnin

Soient $A B$ et $C D$ les deux tours, F la fontaine.

Il faut déterminer $B F = x$ de telle manière que $A F = C F$



$$A F^2 = 40^2 + x^2 \quad C F^2 = 30^2 + F D^2 = 30^2 + (50 - x)^2$$

$$40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$$

$$x = 18$$

Construction géométrique : le triangle $A F C$ est isocèle.

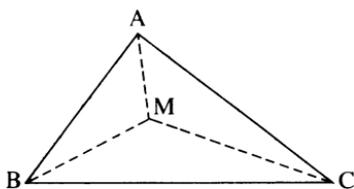
F à l'intersection de $B D$ avec la médiatrice de $A C$.

71. Le rendez-vous des géomètres exotiques

Supposons le problème résolu, et soit M le point où se rencontrent les trois pistes. Considérons l'ellipse de foyers B et C passant par M . Pour

SOLUTION 72

tous les points de cette ellipse, $MB + MC$ est constant : M sera donc le point de l'ellipse le plus près de A , c'est-à-dire le point situé sur la normale à l'ellipse menée de A . Une propriété classique de cette normale est d'être bissectrice de \widehat{BMC} .



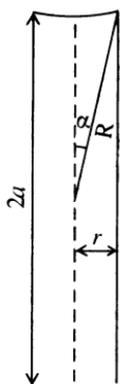
Pour les mêmes raisons, BM sera bissectrice de \widehat{AMC} et CM bissectrice de \widehat{BMA} .

La considération des angles en M montre que, dans ces conditions,

$$\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^\circ$$

Le point M , d'où l'on voit les trois côtés du triangle sous le même angle (120°) est facile à construire.

72. Étonnant comportement d'une sphère percée



Soient r le rayon du cercle, R celui de la sphère, $2a$ la longueur du trou.

La surface latérale du trou cylindrique est $2\pi r \cdot 2a$.

Enveloppons le cylindre d'un autre cylindre ayant pour rayon $r + dr$. La partie de la sphère comprise entre les deux cylindres aura pour volume :

$$(2\pi r \cdot 2a) dr$$

Le volume de la partie restante de la sphère est

$$V = \int_r^R 2\pi r \cdot 2a dr$$

$$r = R \sin \alpha \quad a = R \cos \alpha \quad dr = R \cos \alpha \, d\alpha$$

En prenant α comme variable, le volume cherché est :

$$V = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} 4 \pi R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha$$

L'intégrale de $\sin \alpha \cos^2 \alpha$ est

$$-\frac{1}{3} \cos^3 \alpha$$

$$V =, \left[-\frac{4}{3} \pi R^3 \cos^3 \alpha \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^3 \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{R} \text{ d'où } V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

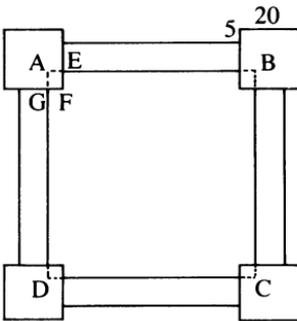
Pour déterminer V , il suffit de mesurer a .

V est égal au volume d'une sphère de rayon a . Il est a priori surprenant que ni r , ni R n'interviennent dans sa mesure.

(Ce problème a paru pour la première fois, à ma connaissance, dans *Mathematical Nuts* de Samuel I. Jones, en 1932. Il a été repris depuis par plusieurs auteurs avec des solutions variées.)

SOLUTION 73

73. Vauban rencontre Euclide



1) Chaque tour participe au périmètre extérieur pour $20 + 20 + 5 + 5 = 50$ m, et elle est occupée par 50 hommes.

Tout le long du périmètre extérieur il y a donc un homme par mètre, ce périmètre est 560 m.

2) La surface intérieure est celle du rectangle ABCD moins celles de quatre carrés tels que A E F G, de 5 m de côté, donc :

$$S. A B C D - 100 \text{ m}^2.$$

La surface intérieure sera maximum en même temps que celle de ABCD, c'est-à-dire en même temps que $A B \cdot B C$

D'autre part, le périmètre du rectangle ABCD est égal au périmètre extérieur moins $4(20 \cdot 2) \text{ m}$, c'est-à-dire $560 - 160 = 400$ m. Il est déterminé, et sa moitié, $A B + B C$ l'est aussi.

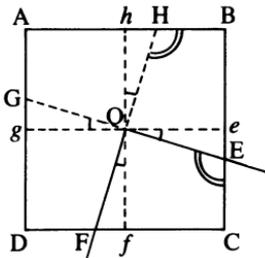
Pour que le produit des deux nombres ($A B \cdot B C$) dont la somme est donnée soit maximum, il faut que ces nombres soient égaux.

Donc $A B = B C$, la citadelle doit être carrée.

$$\text{Alors } A B = 100 \text{ m, } S. A B C D = 100 \cdot 100 = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$\text{Surface intérieure} = 100\,000 - 100 = 9\,900 \text{ m}^2.$$

74. Le carré anthropophage



Prolongeons les côtés du second carré en $O G, O H$.

Les quatre quadrilatères $E O C F, H O E B, G O H A, F O G D$, sont égaux.

Cette égalité résulte de celle des triangles rectangles $E O e, H O h, G O g, F O f$, qui ont un côté et l'angle adjacent égaux

(angles opposés par le sommet ou de côtés perpendiculaires).

La surface du quadrilatère commun $E O F C$ est donc le quart de celle du premier carré, c'est-à-dire $\frac{2^2}{4} = 1$.

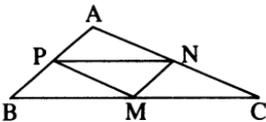
Cette surface ne change pas lorsque le second carré tourne autour de O .

Pour que l'on se trouve dans le cas de figure envisagé, il faut que le côté du second carré soit supérieur ou égal à $O C = \frac{A B \sqrt{2}}{2}$,

donc que sa surface soit supérieure (ou égale) à $\left(\frac{A B \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{A B^2}{2}$.

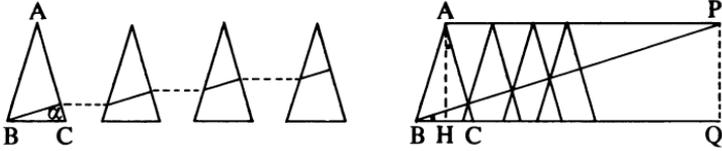
(D'après Charles W. Trigg, dans *Mathematical Quickies*.)

75. Le testament du père Trigone



En joignant les milieux M, N, P , des côtés du triangle $A B C$, on divise celui-ci en quatre triangles égaux.

76. Le rat de Tegucigalpa



La distance parcourue est B P.

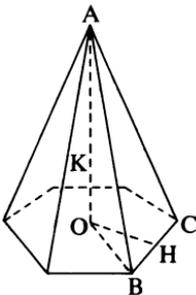
Les triangles B P Q et A C H sont semblables (rectangles; $\widehat{H A C} = \widehat{Q B P}$ comme ayant leurs côtés perpendiculaires)

$$\frac{B P}{A C} = \frac{P Q}{H C} \quad P Q = A H$$

$$B P = \frac{A C \cdot P Q}{H C} = \frac{\sqrt{\left(\frac{B C}{2}\right)^2 + A H^2} \cdot A H}{\frac{B C}{2}} = 1640 \text{ décimètres}$$

77. Le congrès des rats mayas

On a vu dans le problème précédent que



$$x = \frac{A H \cdot \sqrt{\left(\frac{B C}{2}\right)^2 + A H^2}}{\frac{B C}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{B C}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 p}{n} = \frac{p}{n}$$

Si O est le pied de la hauteur de la pyramide :

$$A H^2 = A O^2 + O H^2 = K^2 + O H^2$$

$$OH = \frac{BC}{2} \cot \widehat{HOB} \text{ et } \widehat{HOB} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\text{d'où } OH = \frac{p}{n} \cot \frac{\pi}{n} \quad AH^2 = K^2 + \frac{p^2}{n^2} \cot^2 \frac{\pi}{n}$$

En portant les valeurs de $\frac{BC}{2}$ et de AH dans (1) il vient : $x =$

$$\frac{n}{p} \sqrt{k^4 + k^2 \frac{p^2}{n^2} (1 + 2 \cot^2 \frac{\pi}{n}) + \frac{p^4}{n^4} \cot^2 \frac{\pi}{n} (1 + \cot^2 \frac{\pi}{n})} \quad (2)$$

*

Supposons que, dans le problème précédent, la base de la pyramide soit un carré :

$$n = 4 \quad 2p = 162 \cdot 4 \quad \frac{p}{n} = 81 \quad \cot \frac{\pi}{4} = 1 \quad k^2 = 360^2 - 81^2$$

En reportant ces valeurs dans (2) on retrouve bien 1640.

On retrouverait encore ce résultat en supposant que la base est n'importe quel polygone régulier de moins de 15 côtés (avec les données adoptées), mais les calculs seraient plus laborieux.

*

Supposons que k et $2p$ restant constants, le nombre de côtés du polygone de base, n , tende vers l'infini. Alors BC tend vers 0, et la formule (1) montre que x tend vers l'infini.

La formule (2) conduit bien entendu au même résultat :

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{\pi}{n} \rightarrow 0 \quad \cot \frac{\pi}{n} \rightarrow \infty$$

Pour n infiniment grand,

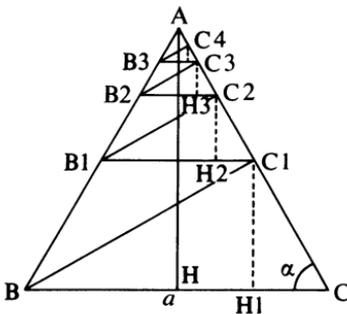
$$x \text{ est équivalent à } \cot \frac{\pi}{n} \sqrt{2K^2 + \frac{b^2}{n^2} \cot^2 \frac{\pi}{n}}$$

SOLUTION 78

équivalent à $\cot \frac{\pi}{n} \sqrt{2k^2 + \frac{p^2}{\pi^2}}$ qui tend vers l'infini en même temps que n .

Lorsque n devient infini, le polygone de base devient un cercle, et la pyramide un cône. D'où la conclusion du Congrès de Tegucigalpa : si les Mayas avaient construit des temples coniques, les rats ne seraient jamais parvenus à leur faite.

78. Considérations sur la vitesse de rotation des rats mayas



En superposant les triangles isocèles égaux qui constituent les faces de la pyramide, on peut figurer le trajet du rat grimpeur sur un seul triangle.

Ce sera $B C_1 + B_1 C_2 + B_2 C_3 + \dots$, $B_n C_{n+1}$ étant perpendiculaires à $A C$.

Sur la première face, le rat s'élèvera de $H_1 C_1 = h_1$

$$h_1 = C C_1 \sin \alpha = a \cos \alpha \sin \alpha$$

par raison de similitude, $\frac{h_2}{B_1 C_1} = \frac{h_1}{a}$

On calcule alors que $B_1 C_1 = - a \cos 2 \alpha$, donc $\frac{h_2}{h_1} = - \cos 2 \alpha$
 (On ne doit pas s'étonner du signe $-$. En effet $\alpha > 45^\circ$, donc $2 \alpha > 90^\circ$ a un cosinus négatif. Si α était inférieur à 45° , l'angle A serait obtus, et le problème tel que nous l'avons posé n'aurait pas de sens.)

Chaque hauteur partielle, $h_2, h_3, \dots, h_{2n}, h_{2n+1}$ se déduit de la

précédente en la multipliant par $(-\cos 2\alpha)$, et l'on obtient la série :

$$\begin{aligned} h_1 &= a \cos \alpha \sin \alpha \\ h_2 &= -a \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ h_3 &= a \cos \alpha \sin \alpha (\cos 2\alpha)^2 \\ &\dots\dots\dots \\ h_{2n-1} &= a \cos \alpha \sin \alpha (\cos 2\alpha)^{2n-2} \\ h_{2n} &= -a \cos \alpha \sin \alpha (\cos 2\alpha)^{2n-1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Cette série est convergente, c'est une progression géométrique de premier terme $a \cos \alpha \sin \alpha$, et de raison $(-\cos 2\alpha)$. Sa somme S est $a \cos \alpha \sin \alpha \cdot \frac{1}{1 + \cos 2\alpha}$

Remarquons que $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, et que, par conséquent, $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

$$\text{d'où } S = \frac{a \cos \alpha \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

$\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ est la valeur de la hauteur AH du triangle, donc le rat finira bien par arriver en A , c'est-à-dire au sommet de la pyramide. Mais cette valeur AH , limite de la série, ne pourra être obtenue que par l'addition d'une infinité de termes. Il s'ensuit que le rat n'arrivera en A qu'après avoir traversé une infinité de triangles AB_nC_n , c'est-à-dire qu'il fera une infinité de tours autour de l'axe de la pyramide.

*

J'ai fait remarquer que α ne pouvait être inférieur à 45° . Mais il peut égaler cette valeur. Alors, $\cos 2\alpha = \cos 90^\circ$ étant nul, la série h_n se réduit à son premier terme $h_1 = \frac{a}{2} = h$.

Dans ce cas, le triangle BAC est rectangle et isocèle. Le trajet du rat se limite à l'arête BA , sur une seule face.

SOLUTION 78

Une pyramide régulière dont les angles au sommet sont droits ne peut avoir pour base qu'un triangle équilatéral. (Ceci est facile à démontrer en partant du fait que, si O est le centre de la base,

$$\widehat{BAC} < \widehat{BOC}.)$$

Un mobile allant de B à C tourne alors de un tiers de tour autour de l'axe de la pyramide, et un mobile allant de B en A d'un sixième de tour.

On voit donc que, si l'angle α est égal à 45° ce qui implique une pyramide à base triangulaire, le rat ascensionniste tournera de $\frac{1}{6}$ de tour autour de l'axe de la pyramide, dans tous les autres cas il tournera d'une infinité de tours.

*

Il est facile de constater que les pyramides mayas n'ont pas des bases triangulaires. C'est par conséquent la seconde hypothèse qui est à considérer.

Dans ce cas, comme le trajet accompli est :

$$\Sigma B_{n-1} C_n = \Sigma \left(h_n \cdot \frac{B_{n-1} C_n}{h_n} \right) = \Sigma \left(h_n \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \frac{a \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha}$$

donc fini, donc parcouru en un temps fini, on arrive à la conclusion que le rat fait une infinité de tours en un temps fini.

Ce fut là le résultat le plus remarquable obtenu au Congrès de Tegucigalpa : les rats mayas peuvent tourner sur eux-mêmes avec une vitesse de rotation infinie.

79. Les cochons n'aiment pas la mirabelle

Soient n et $2n$ la largeur et la longueur du terrain, x la largeur de la bande.

Supposons que l'on place en ligne droite les quatre segments de la bande. Leur largeur sera :

$$2n + 2n + (n - 2x) + (n - 2x) = 6n - 4x$$

La surface de la bande :

$$(6n - 4x) \cdot x = \frac{1}{2}(n \cdot 2n) = n^2$$

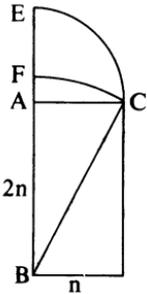
d'où :

$$4x^2 - 6nx + n^2 = 0$$

équation qui a pour solution :

$$n \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } n \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

La première solution est à éliminer, car $n \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ est supérieur à n , donc la bande déborderait du rectangle.

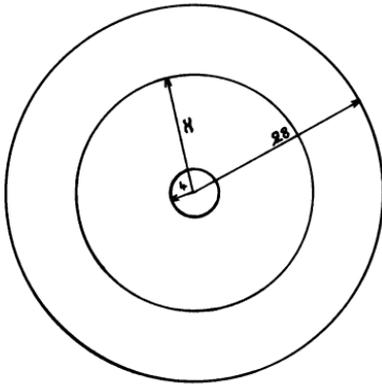


$$x = n \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 1000 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 190\text{m}, 9$$

Remarquons que $3n$ est le demi-périmètre du rectangle, et $n\sqrt{5}$ sa diagonale.

La largeur de la bande est donc le quart de FE

80. Rayon des meules



La petite meule pesant deux fois moins que la grande a un volume moitié moindre. Les épaisseurs étant les mêmes, la surface latérale de la petite meule est moitié de la surface latérale de la grande.

Soit x le rayon de la petite meule :
Sa surface latérale est $\pi x^2 - \pi 4^2 = \pi (x^2 - 16)$

La surface latérale de la grande meule est $\pi \cdot 28^2 - \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot 768$

$$\pi \cdot 768 = 2\pi (x^2 - 16)$$

$$768 = 2 (x^2 - 16)$$

$$x^2 = 400$$

$$x = 20$$

Le prix de la petite meule sera $357 \cdot \frac{20}{28} = 357 \cdot \frac{5}{7} = 255$ F.

81. La sphère creuse et le géomètre avisé

Le volume d'une sphère est les $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre de révolution dans lequel elle peut s'inscrire :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} (2\pi R^3)$$

Lorsque la sphère est plongée dans le cylindre, elle en chasse les $\frac{2}{3}$ de l'eau qui y est contenue. L'augmentation de poids est donc le poids de la sphère (40 kg), moins les deux tiers du poids de l'eau initiale-

ment contenue dans le cylindre, ce qui, en kilos, est égal aux deux tiers du volume du cylindre, V , exprimé en décimètres cubes.

$$20 = 40 - \frac{2}{3} V$$

$$V = 30 \text{ dm}^3$$

Le volume de la sphère est $V' = \frac{2}{3} V = 20 \text{ dm}^3$, et sa densité est : $\frac{40}{V'} = 2$

82. L'impossible carré de cubes

$7 + 10 = 17$ est la différence de deux carrés

$$17 = n^2 - p^2 = (n + p)(n - p) = 1.17$$

$$\text{D'où } n + p = 17 \quad n - p = 1 \quad n = 9 \quad p = 8$$

Balthazar a $9^2 - 7 = 74$ cubes.

83. Les angoisses du rabbin Nehemiah

Soit x l'épaisseur cherchée (en coudées).

$$\left(3 + \frac{1}{7}\right) \cdot (10 - 2x) = 30$$

$$\text{d'où } x = \frac{10}{44} \text{ coudée.}$$

Mais l'interprétation de Nehemiah est incompatible avec le texte : le cordeau de trente coudées était évidemment appliqué à l'extérieur de la mer de fonte. Elle est même en contradiction avec la précision que l'on trouve dans I Rois VII, 26 : « son épaisseur était d'un palme ». Or la coudée valait 6 palmes. Donc,

$$\frac{10}{44} \text{ coudée} = \frac{15}{11} \text{ palme} = 1,37 \text{ palme}$$

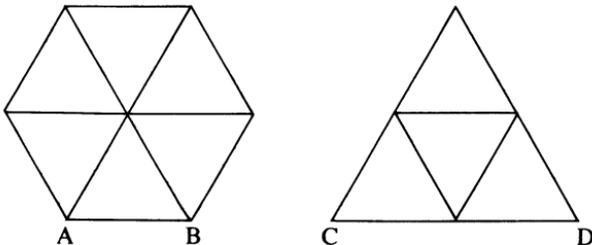
84. Si vous aimez les asperges...

La quantité d'asperges de la botte est approximativement proportionnelle à la surface du cercle formé par la ficelle.

Lorsque la longueur de la ficelle double, le rayon du cercle double, et la surface de ce cercle est multipliée par 4 ($S = \pi R^2$).

Les nouvelles bottes contiennent donc 4 fois plus d'asperges, leurs prix devrait être $8 \times 4 = 32$ F.

85. Les ficelles du pharaon

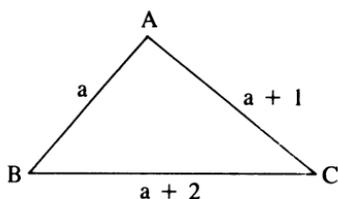


Considérons un hexagone régulier de côté AB et un triangle équilatéral de côté $CD = 2 AB$

Ces deux polygones ont évidemment des périmètres égaux. Si maintenant nous joignons les milieux des côtés du triangle M, N, P , nous divisons le triangle en quatre triangles égaux.

Il y a six de ces triangles dans l'hexagone, dont la surface est donc $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ de celle du triangle.

Ahmès reçut $20 \cdot \frac{3}{2} = 30$ dounams

86. Le secret du triangle des Bermudes

$$\hat{A} = 2 \hat{C}$$

Le double de la surface du triangle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (a + 1)(a + 2) \sin \hat{C} &= a(a + 1) \sin \hat{A} \\ &= 2a(a + 1) \sin \hat{C} \cos \hat{C} \\ \text{d'où : } \cos \hat{C} &= \frac{a + 2}{2a} \end{aligned}$$

Une formule classique permet de calculer le côté AB

$$\overline{AB}^2 = a^2 = (a + 1)^2 + (a + 2)^2 - 2(a + 1)(a + 2) \cos \hat{C}$$

En remplaçant $\cos \hat{C}$ par la valeur précédemment obtenue, il vient :

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

d'où

$$a = 4$$

Les côtés du triangle sont : 4, 5 et 6.

87. Les quatre médailles

Soient X, A, B, C, x, a, b, c les centres et les diamètres (en millimètres) de la grande et des petites médailles. x, a, b, c, sont des nombres entiers, et

$$x = a + b + c \quad (1)$$

Nous pouvons supposer $a \geq c \geq b$

Lorsque les médailles sont disposées tangentiellement, leurs centres

SOLUTION 87

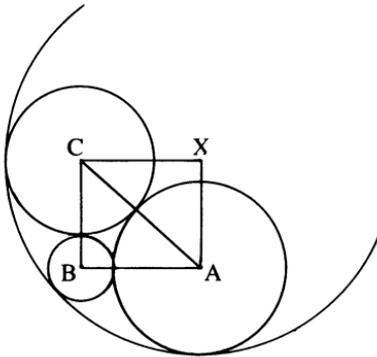
forment un quadrilatère $X A B C$ qui est un rectangle, car ses côtés opposés sont égaux, et ses diagonales aussi.

En effet :

$$X A = \frac{x}{2} - \frac{a}{2} \quad B C = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$

$$X A = B C \text{ d'après (1)}$$

De même $X C = A B$, $A C = X B$.



$$A B^2 + B C^2 = A C^2$$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)^2$$

$$\text{D'où (2) } a c - b(a + c) = b^2 \text{ (2)}$$

D'autre part : la surface de la grande médaille non couverte par les petites médailles est équivalente à un cercle dont le carré du diamètre est 4830, et la surface, donc, $\pi \cdot \frac{4830}{4}$

$$\pi \cdot \frac{4830}{4} = \pi \frac{x^2}{4} - \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right)$$

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 4830 \quad (3)$$

Élevons au carré les deux membres de l'égalité (1)

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \quad (4)$$

De la comparaison de (3) et (4) résulte

$$ac + bc(a + c) = 2415 \quad (5)$$

(2) et (5) permettent de calculer ac et $b(a + c)$ en fonction de b^2

$$ac = \frac{2415 + b^2}{2} \quad (6)$$

$$b(a + c) = \frac{2415 - b^2}{2} \quad (7)$$

D'après (7): $2b(a + c) + b^2 = 2415 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23$

avec $b^2 < 2415$ ou $b < 50$

b est l'un des diviseurs de 2415 inférieurs à 50, qui sont :

1, 3, 5, 7, 15, 21, 23, 35

On peut alors dresser le tableau suivant :

b	1	3	5	7	15	21	23	35
b^2	1	9	25	49	225	441	529	1225
ac	1208	1212	1220	1232	1320	1428	1472	1820
$b(a + c)$	1207	1203	1195	1183	1095	987	943	595
$a + c$	1207	401	239	169	73	47	41	17

a et c sont racines de l'équation $X^2 - (a + c)X + ac = 0$

Cette équation n'a pas de racines pour les valeurs de $a + c$ et ac correspondant à $b = 21, 23$ ou 35 (déterminant négatif).

D'autre part, a et c étant des nombres entiers, le déterminant de l'équation doit être un carré parfait. Seules les valeurs de $(a + c)$ et ac correspondant à $b = 15$ conviennent. Les deux racines sont alors 40 et 33.

Le problème ne comporte donc qu'une solution :

$$b = 15 \quad a = 40 \quad c = 33 \quad x = 88$$

88. Tubercules

$$\sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a} = 18$$

Posons $\sqrt[3]{a} = \alpha$ $\alpha\sqrt{\alpha} - \alpha = 18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

α divise 18, qui a pour diviseurs 1, 2, 3, 6, 9, 18.

D'autre part α doit être un carré ($\sqrt{\alpha}$ entier). $\alpha = 1$ ne convient pas, donc $\alpha = 9$

$$a = \alpha^3 = 9^3 = 729 = (\alpha\sqrt{\alpha})^2 = 27^2$$

$$27 - 9 = 18$$

89. Trick

La racine cubique de 17 299 est 25,86... (extraction qui ne demandait que quelques secondes à Inaudi).

Le plus grand des nombres a , b , c est donc inférieur ou égal à 25.

Essayons 25.

$$a = 25 \quad a^3 = 25^3 = 15\,625$$

$$b^3 + c^3 = 17\,299 - 15\,625 = 1\,674$$

$$\text{avec } b + c = 43 - 25 = 18$$

Essayons $b = 10$ alors $c = 8$ $b^3 + c^3 = 1512$

On trouve pour $b^3 + c^3$ un nombre trop petit, donc la différence entre b et c doit être plus grande.

Essayons $b = 11$ $c = 7$ $b^3 + c^3 = 1674$

Les trois nombres sont donc : 25, 11 et 7.

90. Quarks

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 13411$$

$$\sqrt{13411} = 115, \dots$$

Le plus grand nombre a , est donc égal ou inférieur à 115

Essayons $a = 115$

$$a^2 = 13225 \quad b^2 + c^2 + d^2 = 186$$

$$\sqrt{186} = 13, \dots$$

b , le plus grand des nombres b, c, d , est donc inférieur ou égal à 13.

Essayons $b = 13$

$$b^2 = 169 \quad c^2 + d^2 = 186 - 169 = 17$$

$$\text{d'où } c = 4, d = 1$$

$$115^2 + 13^2 + 4^2 + 1^2 = 13411$$

Inaudi trouva une minute plus tard une deuxième solution : 113, 25, 4, 1 et trois minutes plus tard une troisième solution : 113, 23, 8, 7

91. Bilboquet

La puissance 5 d'un nombre a même chiffre des unités que le nombre lui-même.

$$N^5 - N = N(N^4 - 1) = N(N + 1)(N - 1)(N^2 + 1)$$

SOLUTIONS 92-93

$N^5 - N$ est évidemment pair. Il est facile de démontrer d'après les égalités ci-dessus que le nombre est divisible par 5. Donc $N^5 - N$ est divisible par $2 \cdot 5 = 10$, se termine par 0, ce qui montre que N^5 et N ont même chiffre des unités.

(X) connaissait cette propriété.

Les puissances quelconques d'un nombre terminé par 5 — multiples de 5 impairs — se terminent par 5.

Les puissances quelconques d'un nombre terminé par 1 se terminent par 1. Le chiffre des unités cherché est donc :

$$(7 - 5) \cdot 1 = 2$$

92. Rutabaga

$$1^{64} = 1$$

$$3^{64} = (3^8)^8 = (81 \cdot 81)^8 > 6400^8 > 6^8 \cdot (10^3)^8 = 6^8 \cdot 10^{24}$$

3^{64} a plus de 20 chiffres.

La seule puissance 64^e qui puisse avoir 20 chiffres est celle de 2

(X) ne résolut pas la question de cette façon, mais de la manière suivante. Il pensa que 2 pouvait être solution, et vérifia ainsi :

$$\log 2^{64} = 64 \log 2 = 64 \cdot 0,30103 = 19, \dots$$

2^{64} a donc $(19 + 1)$ 20 chiffres.

Le fait que (X) ait su par cœur la valeur de $\log 2$ n'a rien d'étonnant. Tous les anciens taupins, par exemple, connaissent ce logarithme.

93. Le cheval d'Elberfeld

$$x^4 = 7\,890\,481$$

Situons x

$$10^4 = 10\,000$$

$$100^4 = 100\,000\,000$$

$$50^4 = 6\,250\,000$$

x est compris entre 50 et 100, proche de 50.

$$x^4 = x^2 \cdot x^2$$

x^4 se terminant par 1, x^2 se termine par 1 ou par 9

Si x^2 se termine par 1, x se termine par 1 ou par 9

x peut être 51 (sans doute trop faible) ou 59, trop fort.

Si x^2 se termine par 9, x se termine par 3 ou par 7

x peut être 53 ou 57, sans doute trop fort. La solution est 53.

$$53^4 = 7\,890\,481$$

Un calculateur un peu entraîné peut faire aussi bien que le cheval d'Elberfeld.

94. Multiplication supersonique

$$G = 1\,000\,000\,001 : 7 = (10^9 + 1) : 7$$

$$\begin{aligned} G \cdot \overline{abc\,def\,ghi} &= (10^9 \cdot \overline{abc\,def\,ghi} + \overline{abc\,def\,ghi}) : 7 \\ &= \overline{abc\,def\,ghi\,abc\,def\,ghi} : 7 \end{aligned}$$

*

Pour multiplier G par un nombre P de moins de 9 chiffres — de p chiffres par exemple — il suffit d'écrire le nombre formé de P suivi de $(9 - p)$ zéros, suivi de P , et de diviser le nombre ainsi obtenu par 7.

95. L'équation du solitaire

$$a^2 - (a - 1)(a + 1) = a^2 - (a^2 - 1) = 1$$
$$x = 1$$

96. La belle comtesse et le prince emprisonné

Il n'était pas besoin d'être cryptographe pour obtenir, en lisant une ligne sur deux :

« Croyez-moi prince, préparez-vous à vous défendre,
qui veut vous perdre est plus coupable que vous. »

La comtesse avertissait Condé que son accusateur était lui-même un conjuré, et qu'il n'insisterait pas s'il se sentait soupçonné. Condé n'avoua rien, et l'accusation fut retirée.

Le procédé peut se rapprocher d'une transposition (enfantine).

97. Les animaux bouleversés par la cryptographie



l i m a c e
m a l i c e
s o u r i s
r o u s s i
c a n a r i
a r n i c a

L'alphabet employé ici est le vieil alphabet secret des Templiers. La clef de cet alphabet, au moyen de laquelle il pourra être reconstitué facilement, est la croix des Templiers.

98. Un certain parent de M. Joule

Watt, Kant, Hugo, Zola, Sand, Dali, Bach, Cook.

(L'alphabet utilisé est l'« alphabet des francs-maçons » qui date du Moyen Age.)

99. L'empereur et le philosophe

— Souper ce soir à Sans-Souci.

— J'ai grand appétit (G grand a petit)

Le rébus peut être considéré comme un procédé de chiffrement par substitution.

100. Le cryptogramme du chevalier de Rohan

La découpeure du message fait penser à une substitution simple.

Les lettres les plus fréquentes sont *c, g, l*, que l'on rencontre quatre fois. L'une d'elles est probablement *e*, la lettre la plus commune de la langue française.

ghj qui en clair est susceptible de contenir *e*, pourrait être « est », le trigramme le plus fréquent. d'où :

.e ...s...e. est ...te. .t

Dans le chiffré *mg = .e*, *m* représente probablement *l*. Alors, dans *lm = .l*, *l* est probablement *i*.

Le *..is...ie. est ...t il .. .ie. .it*

« est » doit être suivi d'un adjectif, en chiffré *y x u j*, en clair...*t* . Cet

SOLUTIONS 101-102

adjectif de quatre lettres se terminant par t , ne contenant ni e , ni i , ni s , ni l , doit être « mort » ou « fort ».

Supposons « mort »

Le .riso..ier est mort il .. rie. .it
rie. est rien, donc $c = n$

Le prisonnier est mort il n'a rien dit.

Si l'on avait choisi fort au lieu de mort, on aurait eu :

Le prisonnier est fort il n'a rien dit

Le sens que l'on aurait voulu donner au message aurait été le même.

(Cité par Lange et Soudart, *Traité de cryptographie, d'après Josse, La Cryptographie et ses Applications à l'art militaire.*)

101. La soustraction d'Harpagon

On trouve facilement $D = C - 1$ $C = A - B$ $A - B = 5$

D'où $C = 5$, $D = 4$.

$$\overline{CDDC} = 5445$$

102. Philatélie arithmétique

747019	848173	878064	606582
02451	10457	05726	54098
53221	52007	21556	93448
—	—	—	—
802691	910637	905346	754128

103. Les multiplications de Sainte-Barbe

$$1\ 738 \cdot 4 = 6\ 952$$

$$483 \cdot 12 = 5\ 796$$

La solution était facilitée si l'on se rappelait la date de la fête de la Sainte-Barbe : 4 décembre, ou 4 - 12.

104. Ni simple ni facile

$$2552 \cdot 276 = 704\ 352$$

$$2332 \cdot 201 = 468\ 732$$

$$46 \cdot 27 = 1\ 242$$

$$45 \cdot 72658 = 3\ 269\ 610$$

105. Ex nihilo

$$\begin{array}{r} 179 \\ 224 \\ \hline 716 \\ 358 \\ 358 \\ \hline 40\ 096 \end{array}$$

106. Fidélités de la différence

Soit à résoudre le problème dans le cas d'un nombre de trois chiffres, \overline{abc}

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c) \quad a > c$$

SOLUTION 107

La soustraction se présente ainsi :

$$\begin{array}{r} a b c \\ c b a \\ \hline (a - c - 1) 9 (a + 10 - a) \end{array} \quad a > c$$

Donc $a = 9$ ou $b = 9$. Supposons $a = 9$

$$\begin{array}{r} 9 b c \\ c b 9 \\ \hline 8 - c 9 c + 1 \end{array}$$

d'où $8 - c = c \quad c = 4 \quad b = c + 1 = 5$

$$954 - 459 = 495$$

Il n'y a pas d'autre solution. En effet, $b = 9$ conduit à une impossibilité

La solution unique est donc $954 - 459 = 495$

*

Avec quatre chiffres, on trouve : $9\ 108 - 8\ 019 = 1\ 089$

Avec huit chiffres : $98\ 754\ 210 - 01\ 245\ 789 = 97\ 508\ 421$

Avec neuf chiffres : $987\ 654\ 321 - 123\ 456\ 789 = 864\ 197\ 532$

Avec dix chiffres : $9\ 876\ 543\ 210 - 0\ 123\ 456\ 789 = 9\ 753\ 086\ 421$

Il n'y a pas de solution avec les nombres de un, deux, cinq, six, sept chiffres.

107. Joies et labours de l'inversion

$$N = \overline{abcde} \quad a > e$$

$$N - N' = 9999 (a - e) + 990 (b - d) = 99 [101 (a - e) + 10 (b - d)] = 99 P.$$

$$01234 \leq N - N' \leq 97531 \quad 012 < P \leq 985$$

On multipliera par 99 les nombres de 13 à 985 et l'on retiendra ceux des produits composés de cinq chiffres différents. Cela fait 972 multiplications, mais on peut en réduire beaucoup le nombre en étudiant la structure de P.

$$P = 100(a - e) + 10(b - d) + a - e$$

Supposons $b > d$. Alors P s'écrira

$$\overline{(a - e)(b - d)(a - e)} = \overline{\alpha \beta \alpha}, \text{ forme (1)}$$

Supposons $b < d$. Alors P s'écrira

$$\overline{(a - e - 1)[10 - (d - b)](a - e)} = \overline{(\alpha - 1) \beta \alpha}, \text{ forme (2)}$$

Des nombres de 012 à 985 on ne retiendra que ceux qui ont la forme (1) ou (2); ils sont 188. Diverses remarques permettent d'en éliminer une bonne partie.

Finalement :

$$\begin{array}{r} N = 72891 \quad \text{forme (2)} \\ 72891 \quad 72891 \\ + 19827 \quad - 19827 \\ \hline 92718 \quad 53064 = 99.536 \end{array}$$

108. Un métier dangereux

La probabilité pour que Ramirez soit en vie après la première course est $1 - \frac{1}{2}$

Après la deuxième course : $(1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{2})$ ou $(1 - \frac{1}{2})^2$

Après la dixième course : $(1 - \frac{1}{2})^{10} = (\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$

Soit moins d'une chance sur mille.

Pauvre Ramirez!

109. La scandaleuse soirée d'anniversaire de Clovis

Il y a six façons de faire 7 avec deux dés (1,6 - 6,1 - 2,5 - 5,2 - 3,4 - 4,3), il n'y en a qu'une de faire 2 ou 12.

Clovis avait choisi 7, Clotaire et Cléobule 2 et 12.

Le nombre de combinaisons possibles étant 36, la possibilité de voir sortir 7 est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Sur 360 coups, nombre assez élevé pour que joue approximativement la loi des grands nombres, Clovis a gagné 60 fois environ.

Son gain final, mises déduites, a donc été voisin de

$$60 \cdot 11 \cdot 10 - 360 \cdot 10 = 3000 \text{ F}$$

C'est beaucoup plus que ne lui avait coûté le dîner offert à ses neveux et nièces.

(Clotaire et Cléobule ont perdu environ 2500 F chacun.)

110. Trois cartes à jouer

A chaque donne, $p + q + r$ jetons sont distribués, donc en N donnes :

$$N(p + q + r) = 20 + 10 + 9 = 39 = 3 \cdot 13$$

3 et 13 sont premiers, $N = 3$ ou 13, $(p + q + r) = 13$ ou 3

$(p + q + r)$ est plus grand que 3, puisque $r > q > p$, donc $p + q + r = 13$ et $N = 3$

B ayant reçu r jetons à la dernière donne, a forcément reçu p jetons lors de chacune des deux premières. Il n'a pas pu en effet recevoir $p + q + r$ ou $q + q + r$, et encore moins $r + r + p$, toutes ces donnes étant supérieures à 10.

D'où :

	A	B	C
(1)	.	p	.
(2)	.	p	.
(3)	.	r	.
	20	10	9

Pour la même raison, C ne peut avoir reçu r jetons à aucune donne, donc il a reçu q et q jetons lors des deux premières.

D'autre part, A n'a pu recevoir p jetons à la dernière donne, car on aurait $2r + p = 20$ (gain de A) et $2p + r = 10$ (gain de B), ce qui entraînerait $p = 0$.

La distribution globale a donc été la suivante :

	A	B	C
(1)	r	p	q
(2)	r	p	q
(3)	q	r	p
	$2r + q$	$2p + r$	$2q + p$
	20	10	9

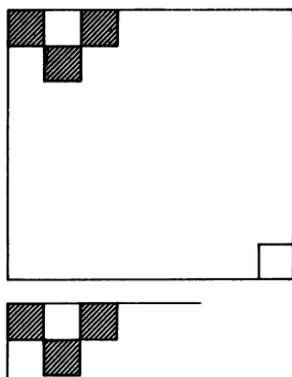
$$2r + q = 20 \quad q = 20 - 2r$$

$$2p + r = 10 \quad p = 5 - \frac{r}{2}$$

$2q + p = 9$ et, en remplaçant p et q par leurs valeurs en fonction de r :

$$r = 8 \quad \text{d'où } p = 1 \quad q = 4$$

111. Hasardeuses tribulations d'un domino



Colorons alternativement les carreaux des cadres en blanc et en noir, comme sur un damier. Dans chaque cadre, le nombre des carreaux est impair, les carreaux les plus nombreux, d'une unité, étant ceux de la couleur de celui qui est en haut et à gauche (ici, les noirs). Chaque domino recouvre un carreau blanc et un carreau noir. Le recouvrement ne sera donc possible

que s'il reste à l'intérieur du cadre, après enlèvement d'un carreau, autant de carreaux noirs que de carreaux blancs, donc si on a enlevé un carreau noir.

Dans le cadre carré, il y a 81 carreaux, dont 41 noirs. La probabilité d'enlever un noir, en prenant un carreau au hasard est donc de $\frac{41}{81}$.

Dans le cadre rectangulaire, il y a 77 carreaux dont 39 noirs. La probabilité d'enlever un noir est donc de $\frac{39}{77}$

$$\frac{39}{77} > \frac{41}{81}$$

Il y a donc intérêt à choisir le cadre rectangulaire.

112. Séries jaunes

- 1) Les nombres indiqués ont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lettres.
- 2) Dans l'ordre alphabétique.

3) Les termes sont les différences entre les nombres composés à partir de 1, de 2, 3, 4, 5 chiffres consécutifs, et les nombres inversés.

$$? = 654\,321 - 123\,456 = 530\,865$$

4) Les termes sont les nombres de secondes d'une minute, d'une heure, d'un jour, d'une semaine... et d'une année.

Le terme manquant est $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 31\,536\,000$

5) Les éléments de la figure sont des carrés magiques, il est évident que $x = 3$

en ce qui concerne y : l'élément central d'un carré magique de module 3 est le tiers de la somme commune

$$y = \frac{1}{3} (4 + 11 + 6) = 7$$

6) Les termes sont les nombres intercalés entre les doublets successifs de nombres premiers (nombres premiers différant de 2).

113. Les paquebots d'Édouard Lucas

Un paquebot venant du Havre rencontrera évidemment les six paquebots venant de New York en mer lors de son départ, et celui qui part en même temps que lui : soit 7.

Il rencontrera ensuite les paquebots partis de New York un jour, deux jours, ... six jours après son propre départ.

Celui qui part sept jours après son départ, il le rencontrera à son arrivée dans le port de New York ; il ne fait donc pas partie de notre compte. Le nombre demandé est

$$7 + 6 = 13$$

SOLUTIONS 114-115

114. Le centaure entravé

$$\begin{aligned} 1) \quad 100 &= 22 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + (2 \cdot 2 \cdot 2) + 2 \\ &= 333:3 - (3 \cdot 3) - 3 + (3:3) \\ &= 444:4 - 4 - 4 - 4 + (4:4) \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 - (5 \cdot 5) + 5 - 5 + 5 - 5 \\ &= 66 + (6 \cdot 6) - [(6 + 6):6 \cdot 6:6] \\ &= 7 \cdot 7 \cdot (7 + 7):7 + (7:7) + (7:7) \\ &= 88 + 8 + [8 \cdot 8 \cdot 8:8:(8 + 8)] \\ &= (99 + 99):(9 + 9) \cdot 9 + (9:9) \end{aligned}$$

2) Il y a 11 solutions

$$\begin{aligned} 100 &= 123 - 45 - 67 + 89 \\ &= 123 + 45 - 67 + 8 - 9 \\ &= 123 + 4 - 5 + 67 - 89 \\ &= 123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 \\ &= 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ &= 12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 \\ &= 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 \\ &= 1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 \\ &= 1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 \\ &= 1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 \\ &= 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 \end{aligned}$$

$$3)-100 = 1 - 2 + 3 - 4 - 5 - 6 - 78 - 9$$

115. Allumettarum ludus

 (8 = 2³)

116. Quelques problèmes sur les nombres entiers

(1) $\overline{aa\ bb} = 11(100a + b) = 11^2 \cdot n^2 \quad a = 7 \quad b = 4$

(2) $M^2 + N^2 = P^2$

On part de l'identité

$$(A^2 - B^2)^2 + (2A \cdot B)^2 = (A^2 + B^2)^2$$

Faisons $M = A^2 - B^2$, $N = 2AB$, alors $P = A^2 + B^2$

Une infinité de solutions de plusieurs types :

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 8^2 + 15^2 = 17^2,$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2, \text{ etc.}$$

(3) $5\ 776 = 76^2$, solution unique.

(4) Si un nombre est divisible par 9, ou par 11, le nombre écrit à l'envers est aussi divisible par 9, ou par 11.

Cette remarque conduit aux deux solutions :

$$108\ 900 = 330^2 \quad 009\ 801 = 99^2$$

$$698\ 896 = 836^2$$

(5) $2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2 \quad 5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2, \text{ etc.}$$

Une infinité de solutions.

(6) Par exemple : $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

Une infinité de solutions.

(7) Il y a cinq solutions :

$$8, \text{ car } 8^3 = 512 \text{ et } 5 + 1 + 2 = 8$$

$$18, \text{ car } 18^3 = 5832 \text{ et } 5 + 8 + 3 + 2 = 18$$

$$17, \text{ car } 17^3 = 4913 \text{ et } 4 + 9 + 1 + 3 = 17$$

$$27, \text{ car } 27^3 = 19683 \text{ et } 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$$

$$26, \text{ car } 26^3 = 17576 \text{ et } 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$$

SOLUTION 116

(8) $9\ 814\ 072\ 356 = 99\ 066^2$

La racine 99066 n'est pas altérée si on la lit sur la feuille retournée.

(9) Quatre solutions :

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153 \quad \text{pour } n = 4$$

$$3^3 + 7^3 + 0^3 = 370 \quad 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8\ 208$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371 \quad \text{pour } n = 5$$

$$5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5 = 54\ 748$$

$$4^3 + 0^3 + 7^3 = 407 \quad \text{pour } n = 6$$

$$5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6 = 548\ 834$$

(10) Six solutions :

$$1 = 1^3$$

$$512 = (5 + 1 + 2)^3$$

$$4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3$$

$$5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3$$

$$17576 = (1 + 7 + 5 + 7 + 6)^3$$

$$19683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3$$

(11) $x \frac{(x+1)}{2} = \frac{\text{---}}{a a a} = 3 \cdot 37 \cdot a$

d'où $a = 6$ et $x = 36$

La somme des 36 premiers nombres est 666.

(12) $5^2 + 2 = 3^3$

Fermat a démontré que la solution était unique.

(13) Soit n le nombre cherché

$$2n = 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot (n - 99)$$

$$n = 108$$

(14) $\overline{abc} = a + b^2 + c^3 \quad c^3 - c = b(10 - b) + 99a \quad c > 4$

Quatre solutions :

$$175 = 1 + 7^2 + 5^3 \quad 518 = 5 + 1^2 + 8^3$$

$$135 = 1 + 3^2 + 5^3 \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3$$

(15) $405^3 = 66\,430\,125$

$384^3 = 56\,623\,104$, par exemple.

$345^3 = 41\,063\,625$

(16) $12^2 = 144$ et $21^2 = 441$

$32^2 = 1\,024$ et $49^2 = 2\,401$

$32^4 = 1\,048\,576$ et $49^4 = 5\,764\,801$

$101^2 = 10\,201$ et $110^2 = 12\,100$

$101^3 = 1\,030\,301$ et $110^3 = 1\,331\,000$

$101^4 = 104\,060\,401$ et $110^4 = 146\,410\,000$

$178^2 = 31\,684$ et $196^2 = 38\,416$

$178^3 = 5\,639\,752$ et $196^3 = 7\,529\,536$, etc.

(17) $144 = 12^2$ $169 = 13^2$

$441 = 21^2$ $961 = 31^2$, par exemple.

(18) 144 et 441 - 169 , 961 et 196 -

256 (ou 16^2) et 625 (ou 25^2)

1024 (ou 24^2) et 2401 (ou 49^2)

1296 (ou 36^2), 2916 (ou 54^2), 9216 (ou 96^2)

(19) Non dans notre système de numération de base 10. Mais il en existe dans d'autres systèmes de numération. Par exemple :

en base 3: $11 = 2^2$ $11\,111 = 102^2$

en base 7: 22 , $1\,111$, $4\,444$

en base 8: 44

SOLUTION 116

(20) Oui, par exemple :

$$152\,843\,769 = 12\,363^2$$

$$157\,326\,849 = 12\,543^2$$

$$215\,384\,976 = 14\,676^2$$

(21) La plus petite solution est :

$$119^2 + 120^2 = 13^4$$

(23) $\overline{abc} - \overline{cba} = 9 \cdot 11 \cdot (a - c)$

$$\overline{abc} = 954$$

$$954 - 459 = 495$$

(24) 273, qui s'écrit 111 en base 16 et 333 en base 9

9 114, qui s'écrit 222 en base 67 et $\overline{(14)(14)(14)}$ en base 25, par exemple.

(26) $4\,444^{4\,444} - A = \text{Me } 9$, d'après le caractère de divisibilité par 9

$$A - B = \text{Me } 9$$

$$\text{D'où } 4\,444^{4\,444} - B = \text{Me } 9 \quad (1)$$

$$\text{Considérons le nombre } 4\,444^{4\,444} - 4\,444 =$$

$$4\,444(4\,444^{4\,443} - 1)$$

$$\text{Je dis que } 4\,444^{4\,443} - 1 = \text{Me } 9$$

$$\text{En effet : } 4\,444 = \text{Me } 9 + 7$$

$$4\,444^{4\,443} = (\text{Me } 9 + 7)^{4\,443} = \text{Me } 9 + 7^{4\,443}$$

$$= \text{Me } 9 + (7^3)^{1\,481} = \text{Me } 9 + (\text{Me } 9 + 1)^{1\,481} = \text{Me } 9 + 1$$

$$\text{Donc } 4\,444^{4\,444} - 4\,444 = \text{Me } 9 \quad (2)$$

(1) et (2) donnent :

$$4\,444 - B = \text{Me } 9$$

$$B = 9 + 7$$

$$4\,444 < 10^4 \quad 4\,444^{4\,444} < 10^{17\,776}$$

Le nombre $4\,444^{4\,444}$ a au plus 17 776 chiffres, donc $A \leq 17\,776 \times 9 = 159\,984$

A a donc au plus 6 chiffres, et $B \leq 6 \times 9 = 54$

Les nombres B, multiples de 9 plus 7, et inférieurs à 54 sont :

07 16 25 34 43 52

Pour chacun de ces nombres B, la somme des chiffres est 7

(27) Treize solutions :

$$N = 125 \quad N^3 = 1\,953\,125 \quad \text{et } N' = 875$$

$$N'^3 = 669\,921\,875 \quad 875 = 1\,000 - 125$$

$$N = 249 \quad N^3 = 15\,438\,249 \quad \text{et } N' = 751$$

$$N'^3 = 423\,564\,751 \quad 751 = 1\,000 - 249$$

$$N = 251 \quad N^3 = 15\,813\,251 \quad \text{et } N' = 749$$

$$N'^3 = 420\,189\,749 \quad 749 = 1\,000 - 251$$

$$N = 375 \quad N^3 = 52\,734\,375 \quad \text{et } N' = 625$$

$$N'^3 = 244\,140\,625 \quad 625 = 1\,000 - 375$$

$$N = 376 \quad N^3 = 53\,157\,376 \quad \text{et } N' = 624$$

$$N'^3 = 242\,970\,624 \quad 624 = 1\,000 - 376$$

$$N = 499 \quad N^3 = 124\,251\,499 \quad \text{et } N' = 501$$

$$N'^3 = 125\,751\,501 \quad 501 = 1\,000 - 499$$

$$N = 999 \quad N^3 = 997\,002\,999$$

(28) $90\,703\,125 : 129 = 703\,125$

$$703\,125 : 225 = 3\,125$$

$$3\,125 : 25 = 125$$

$$125 : 5 = 25$$

$$25 : 5 = 5$$

SOLUTION 116

(29) 1, 5, 7

(30) Décomposons le nombre A en facteurs premiers

$A = a^m \cdot b^n \cdot c^p \cdot d^q \dots$, a, b, c, d étant différents de 1

Le nombre des diviseurs de A est $N = (m + 1)(n + 1)$

$(p + 1)(q + 1) = 100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$.

D'où $N = a^4 \cdot b^4 \cdot c \cdot d$

Le plus petit nombre N est :

$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45\,360$

(31) 83 161

(32) Imaginons les nombres de 0 à 999 999 999 écrits sur deux colonnes, de la façon suivante :

0	999 999 999
1	999 999 998
.....
499 999 999	500 000 000

Dans chacune des 500 000 000 de lignes, la somme des chiffres est 81.

La somme des chiffres cherchée est donc $500\,000\,000 \times 81 + 1$ correspondant au nombre un milliard, non écrit sur les lignes $500\,000\,000 \times 81 + 1 = 40\,500\,000\,001$

(Le nombre de chiffres à utiliser — autre question — est 8 888 888 899).

(35) Toutes les puissances de 2 sont des nombres presque parfaits du type 1.

2^n a pour diviseurs 1, 2, 2^2 , ..., 2^{n-1} qui forment une pro-

gression géométrique de somme $S_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$

Donc $2^n = S_n + 1$

On ne sait pas s'il existe des *nombre presque parfaits* de type 1 en dehors des nombres 2^n .

117. Le banquet des 41

Soient h, f, e les nombres d'hommes, de femmes, d'enfants

$$h + f + e = 41 \quad (1)$$

$$4h + 3f + \frac{1}{3}e = 40, \text{ ou } 12h + 9f + e = 120 \quad (2)$$

Retranchons (1) de (2)

$$11h + 8f = 79 \text{ d'où } h \leq 6$$

$$3h + 8h + 8f = 8 \cdot 9 + 7$$

$$3h = 8 + 7 = 15$$

$$h = 5$$

et, puisque $h \leq 6$ $h = 5$ d'où $f = 3$ $e = 33$

Ce problème avait été étudié par Luca Pacioli, Tartaglia, Bachet de Méziriac.

118. Mille sous en tout

Soient h et f les nombres d'hommes et de femmes

$$h > f$$

$$1000 = 19h + 13f$$

$$19h = 1000 - 13f \quad (1)$$

$$6h + 13h = 13 \cdot 76 + 12 - 13f$$

SOLUTION 119

$$6h = 13 + 12$$

$$h = 13 + 2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ montre que } 19h < 1000 - 13 \quad h \leq 51$$

et, puisque $h > f$

$$19h > 1000 - 13h$$

$$32h > 1000 \quad h > 31$$

Dans ces conditions, d'après (2)

$$h = 3 \cdot 13 + 2 = 41$$

$$\text{d'où } f = 17$$

Ce problème a été proposé par Euler.

119. Les sept options de Thomas

Soient c le nombre des chevaux achetés dans la première opération, x et y les nombres de bœufs et chevaux achetés dans une opération quelconque.

Lorsque Thomas achète x bœufs, il dépense $x \cdot 19$ de plus que dans la première opération ; cette dépense supplémentaire doit être compensée en achetant moins de chevaux, y au lieu de c . Donc

$$x \cdot 19 = (c - y) \cdot 31$$

31 étant premier avec 19 divise x . On peut poser $x = 31p$, p étant entier.

$$\text{alors } 19p = c - y \quad y = c - 19p$$

Thomas peut faire sept opérations. Il faut donc donner à p sept valeurs, dont zéro, puisque dans la première opération $x = 0$.

<i>p</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>somme dépensée</i>
0	0	<i>c</i>	<i>c</i> . 31
1	31	<i>c</i> — 19	31 . 19 + (<i>c</i> — 19) 31 = <i>c</i> . 31
2	62	<i>c</i> — 38	62 . 19 + (<i>c</i> — 38) 31 = <i>c</i> . 31
3	93	<i>c</i> — 57	<i>c</i> . 31
4	124	<i>c</i> — 76	<i>c</i> . 31
5	155	<i>c</i> — 95	<i>c</i> . 31
6	186	<i>c</i> — 114	<i>c</i> . 31

La dernière ligne du tableau, correspondant à l'opération où Thomas n'achète que des bœufs, montre que $c = 114$. La somme dont dispose Thomas est donc :

$$114 \cdot 31 = 3\,534 \text{ écus}$$

On ne doit donner à p que les valeurs 0, 1, ...6. Si on en adoptait d'autres le nombre des solutions dépasserait sept (2 + 5).

120. Problème des trois objets

Soient x, y, z les prix des objets.

L'acheteur peut se procurer N lots composés avec un objet de chaque sorte ou A objets à x sous, ou B à y , ou C à z .

$$N(x + y + z) = Ax = By = Cz = 6\,279$$

6279 doit pouvoir être divisé par x , par y , par z , et par leur somme

$$\text{or } 6\,279 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$$

$$\text{et } 3 + 7 + 13 = 23$$

Les prix des objets sont donc 3,7 et 13 sous

*

SOLUTION 121

En réalité ce problème comporte 9 solutions, car il y a 9 manières de choisir 4 diviseurs de 6 279 dont l'un soit la somme des 3 autres

$$6\,279 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$$

6 279 a 16 diviseurs qui sont :

1, 3, 7, 13, 21, 23, 39, 69, 91, 161, 273, 299, 483, 897, 2093, (6 279)
et

$$1 + 7 + 13 = 21$$

$$3 + 7 + 13 = 23$$

$$3 + 13 + 23 = 39$$

$$7 + 23 + 39 = 69$$

$$69 + 21 + 1 = 91$$

$$91 + 69 + 1 = 161$$

$$161 + 91 + 21 = 273$$

$$3 + 23 + 273 = 299$$

$$299 + 161 + 23 = 483$$

121. Le 552 715^e chiffre

Les nombres de 1 chiffre 1, 2... 9, comptent au total 9 chiffres
ceux de 2 chiffres, 10, 11, ... 99, comptent $90 \cdot 2 = 180$ chiffres
ceux de 3 chiffres, 100, 101... 999, comptent $900 \cdot 3 = 2\,700$ chiffres
ceux de 4 chiffres 1 000, 1 001... 9 999, comptent $9\,000 \cdot 4 = 36\,000$ chiffres

Les nombres de 5 chiffres 10 000, 10 001... 99 999 comptent au total $90\,000 \cdot 5 = 450\,000$ chiffres.

Les nombres de 6 chiffres : 100 000, 100 001... 999 999 comptent au total $900\,000 \cdot 6 = 5\,400\,000$ chiffres

L'ensemble des nombres de 1, 2, 3, 4, 5 chiffres compte

$$9 + 180 + 2\,700 + 36\,000 + 450\,000 = 488\,889 \text{ chiffres}$$

L'ensemble des nombres de 1, 2, 3, 4, 5, 6 chiffres compte

$$488\,889 + 5\,400\,000 = 5\,888\,889 \text{ chiffres}$$

Le 552 715^e chiffre se situe donc dans les nombres de 6 chiffres et, dans cette suite, il est le $552\,715 - 488\,889 = 63\,826^{\text{e}}$ chiffre

$$63\,826 = 10\,637 \cdot 6 + 4$$

Le chiffre cherché est donc le 4^e du 10 638^e nombre de 6 chiffres, c'est-à-dire de $100\,000 + 10\,637 = 110\,637$

c'est donc 6.

122. Le chemin de fer à roulette (russe)

Il s'agit bien de roulettes, ou plutôt de poulies.

On reporte A_1, A_2, \dots , sur une planchette et l'on fixe en chacun de ces points une poulie sur laquelle se tend un fil chargé d'un poids proportionnel au trafic correspondant; tous les fils sont attachés à un même anneau représentant le centre du trafic; on laisse l'appareil prendre son état d'équilibre; la position où se fixe l'anneau est le lieu cherché, les fils donnant les directions et les longueurs des routes à établir pour les communications.

Si la voie sur laquelle doit se trouver le centre de trafic était déjà tracée, on matérialiserait cette voie sur la planchette par un fil de fer aux contours semblables, on engagerait l'anneau dans ce fil de fer, et l'on choisirait, comme précédemment, la position d'équilibre.

SOLUTION 123

123. Les treize caisses d'Ali Baba

$$728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 = 28 \cdot 26$$

Les hommes étant rangés dans l'ordre indiqué, on peut les classer en 26 tranches de 28.

Si l'on associe maintenant les tranches deux à deux : 1 et 26, 2 et 25, 3 et 24, etc., on obtient 13 associations. Il est facile de voir que, dans chacune de ces treize associations, le même nombre de pièces a été distribué. Le nombre total des pièces est donc divisible par 13.

D'une façon beaucoup plus savante — et pour le plaisir de compliquer les choses — on peut aussi raisonner ainsi :

La somme des n premiers nombres impairs

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \text{ est égale à } n^2$$

(somme d'une progression arithmétique de premier terme 1 et de raison 2)

$$1 + 3 + 5 \dots + (2 \cdot 729 - 1) = 729^2$$

729 nombres

Retranchons 1 de cette somme. Nous obtiendrons 728 nombres dont la somme représentera le total des pièces nécessaires à la distribution.

$$\begin{aligned} 3 + 5 + \dots + (2 \cdot 729 - 1) &= 729^2 - 1 \\ 729^2 - 1 &= (3^6)^2 - 1 = 3^{12} - 1 \end{aligned}$$

D'après l'un des théorèmes de Fermat, $a^p - 1 - 1$ est divisible par p si p est premier.

$$3^{12} - 1 = 3^{13-1} - 1 \text{ est donc divisible par } 13.$$

124. Problème des dix chapeaux

Soient n le nombre des voyageurs, p_n la probabilité cherchée, f_n le nombre total des cas favorables (aucun voyageur n'a son chapeau), t_n le nombre des cas possibles. t_n est évidemment égal au nombre de permutations possibles des n chapeaux, donc à $n!$

$$p_n = \frac{f_n}{n!}$$

Calculons f_n en donnant à n des valeurs successives à partir de 1
On constatera ou établira facilement que

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 1 \quad f_3 = 2$$

Calculons f_4 . Soient A, B, C, D, les quatre voyageurs et a, b, c, d , leurs chapeaux

Supposons que A ait reçu le chapeau b et soit f_{Ab} le nombre de cas favorables correspondant à cette hypothèse

1) B a reçu le chapeau a — $f_{Ab Ba}$ cas favorables

$f_{Ab Ba}$ est égal au nombre de cas favorables dans la répartition de c et d entre C et D. C'est f_2

2) B a reçu l'un des chapeaux c ou d

$$f_{Ab Bc d} = 2 f_{Ab Bc}$$

et l'on constate facilement que $f_{Ab Bc} = 1$

Donc

$$f_{Ab} = f_2 + 2 \cdot 1$$

On peut recevoir les chapeaux c et d dans les mêmes conditions que b , donc $f_4 = 3 f_{Ab} = 3 (f_2 + 2 \cdot 1) = 3 f_2 + 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De la même manière on calculera f_5

$$f_5 = 4 f_3 + 4 \cdot 3 \cdot f_2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

SOLUTION 124

La loi de formation de f_n apparaît. Si le lecteur ne la discerne pas encore complètement, il pourra calculer f_6

$$f_6 = 5f_4 + 5 \cdot 4 \cdot f_3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot f_2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

d'où la formule générale :

$$f_n = (n-1)f_{n-2} + (n-1)(n-2)f_{n-3} \\ \dots + (n-1)(n-2)\dots 3 \cdot f_2 + (n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Pour résoudre le cas particulier proposé, on calculera successivement au moyen de la formule générale ci-dessus :

$$f_2 = 1 \quad f_3 = 2 \quad f_4 = 9 \quad f_5 = 244 \quad f_6 = 265 \quad f_7 = 1854 \\ f_8 = 14\,833 \quad \dots \quad f_{10} = 1\,334\,961$$

$$p_{10} = \frac{1\,334\,961}{10!} = \frac{3^4 \cdot 16\,481}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{16\,481}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10} = 0,367$$

*

On démontre par des procédés moins élémentaires que p_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes du développement en série de

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

Lorsque n varie, les probabilités sont alternativement inférieures et supérieures à $\frac{1}{e}$. Lorsque n tend vers l'infini, p_n tend vers $\frac{1}{e}$

Pour $n = 10$, p_{10} ne diffère de $\frac{1}{e}$ que de deux dix-millionièmes environ.

$$p_{10} = 0,3678794 \dots \frac{1}{e} = 0,3678796 \dots$$

*

Ce problème est un cas particulier du très classique « problème des rencontres », qui a fait l'objet de nombreux travaux. Avec un peu de patience et d'attention, il est néanmoins possible de le résoudre en n'utilisant que des outils mathématiques rudimentaires.

125. Le sein de Mme de Maintenon

Les réponses correctes à (I) donnent : 7 778

$$7\,778^2 = 60\,497\,284$$

Les réponses correctes à (II) donnent : $222x$

Supposons $x = 0$

$$2\,220^2 = 4\,928\,400$$

$$60\,497\,284 - 4\,928\,400 = 55\,568\,884$$

Le chiffre unique de la réponse correcte est 5, car la variation du nombre d'unités x sera sans influence sur le chiffre des dizaines de millions du résultat.

Pour que le chiffre des unités de la différence des carrés soit 5, il faut que $x = 3$, car $8^2 - 3^2$ se termine par 5

$$7\,778^2 - 2\,223^2 = 60\,497\,284 - 4\,941\,729 = 55\,555\,555$$

Le sein gauche de Mme de Maintenon portait 3 grains de beauté.

126. Le théorème de Fermat

Le roi a fait une faute de calcul, car une puissance quelconque d'un nombre pair est paire, et une puissance quelconque d'un nombre impair est impaire.

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair ne peut être paire.

SOLUTIONS 127-128

127. La mort du maréchal de Saxe

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Le maréchal mourut dans sa 55^e année, le 8 novembre 1750.

128. Le loto et les tragédies de l'histoire

$$A = 13 \quad B = 8 \quad C = 5 \text{ (Cinq-Mars)}$$

$$D = 4 \quad E = 7 \text{ (les sept femmes de Barbe-Bleue)}$$

$$13 \times 8547 = 111\,111$$

$$111\,111 = 1 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

Bibliographie des traités anciens

Les jeux mathématiques sont presque aussi anciens que les mathématiques, et l'on a vu, par quelques exemples, que les Chaldéens et les Grecs de l'Antiquité s'y étaient adonnés. Mais ils ne proposèrent que des problèmes isolés.

Le premier, ou l'un des premiers livres uniquement consacré aux récréations mathématiques, semble être celui que l'Hindou Lilawâti écrivit pour sa fille au XII^e siècle.

En France, le premier recueil de récréations mathématiques, *Jeux et Esbatemens*, se trouve inclus dans un manuscrit de Nicolas Chuquet, écrit en 1484, qui est aussi le premier traité d'algèbre en français. Ce manuscrit, dont les savants connaissaient seulement l'existence, fut retrouvé en 1880 à la Bibliothèque nationale (n° 1346).

La partie qui nous intéresse a été imprimée pour la première fois en annexe à notre livre *Jeux de l'esprit et Divertissements mathématiques* (Seuil, 1975).

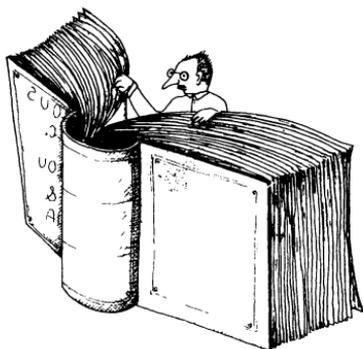
Un autre manuscrit consacré aux jeux mathématiques fut écrit au XV^e siècle à Pamiers, en langue du Pays de Foix : « Lart De Lalgoris » (anonyme, Bibliothèque nationale, Fonds français, NAF n° 4 140).

Par la suite, d'illustres savants se livrèrent aux jeux mathématiques (Fermat, Mersenne, Euler, Bernoulli) et les traités sur ce sujet se multiplièrent. Ils sont devenus si nombreux que nous nous sommes borné à indiquer ceux qui ont paru antérieurement à notre siècle.

En voici la liste :

Estienne de la Roche, dict Villefranche, *Larismétique et géométrie de Maistre Estienne de la Roche*, chez Constantin Fradin, Lyon, 1520.
Réédition en 1538.

Chauvet, Jacques, *Methodiques institutions de la vraye et parfaite arithmétique de Jacques Chauvet*, chez C. Royer, Paris, 1585.
Rééditions en 1606, 1619, 1631, 1636, 1640, 1645, 1648, 1671.



Trenchant Jean, *L'Arithmétique de Jean Trenchant, déparée en trois livres. Ensemble un petit discours des changes, avec l'art de calculer aux getons*, chez M. Jove, Lyon, 1561. Rééditions en 1588, 1602, 1610, 1617, 1618, 1632, 1643, 1647.

Monatheuil, Henri de, *Ludus iastromathematicus*, Paris, 1597.

Bachet de Meziriac, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, chez P. Rigaud, Lyon, 1612. Réédité par A. Blanchard, Paris, 1959.

Henriou, Denis, *Deux cens questions ingénieuses et récréatives, extraictes des œuvres mathématiques de Valentin Menher, Allemand, avec quelques annotations de Michel Coignet sur aucune d'icelles questions*, Paris, 1620.

Leurechon, Jean (dit Van Etten), *Récréations mathématiques composées de plusieurs problèmes plaisants et facétieux*, au Pont-à-Mousson, 1626.

Père Marin Mersenne, *Questions inouyes, ou Récréation des sçavans*, chez J. Villery, Paris, 1634.

Mydorge, Claude, *Examen du livre des Récréations mathématiques* (du P. J. Leurechon), chez Robinot, Paris, 1630.

Bettinus, Marius, *Recreationum mathematicarum*, Franciscus Tedeschius, Bononioe (Bologne), 1660.

Schwenter, *Delectiae physico-mathematicae*, Nuremberg, 1651. Réédité en 1677.

Ozanam, Jacques, *Récréations mathématiques et physiques*, chez J. Jombert, Paris, 1694, 4 vol. Nombreuses rééditions jusqu'en 1778.

Guyot, *Nouvelles Récréations physiques et mathématiques*, chez Gueffier, Paris, 1769, 4 vol.

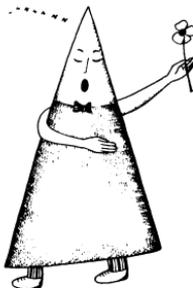
Hooper, *Rational Recreations*, L. Davis, Londres, 1774, 4 vol. ; Lackington, Londres, 1802, 2 vol.



- Luya, *Amusements arithmétiques et algébriques de la campagne*, chez Du Villard fils, Genève, 1779.
- Anonyme, *Passe-temps mathématique, ou récréation à l'Île Sainte-Hélène*, chez Briquet, Genève, 1817.
- Jackson, John, *Rational Amusements for Winter Evenings*, Londres, 1821.
- Anonyme, *The Magician's Own Book*, Dick and Fitzgerald, 1857.
- Lucas, Édouard, *Récréations mathématiques*, Gauthier Villars, Paris, 1882-1894, 4 vol. Réédité par A. Blanchard, Paris, 1960, 2 vol.
- Lucas, Édouard, *Récréations mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1882-1894, 4 vol. Réédité par A. Blanchard, Paris, 1960, 2 vol.
- Lucas, Édouard, *L'Arithmétique amusante*, Gauthier-Villars, Paris, 1895. Réédité par A. Blanchard, Paris, 1974.
- Lagarrigue, Ferdinand, *Curiosités arithmétiques*, P. Dupont, Paris, 1866.
- Lagarrigue, Ferdinand, *Récréations scientifiques*, P. Dupont, Paris, 1867.
- Augustus de Morgan, *A Budget of Paradoxes*, Longmans Green and Co., Londres, 1872.
- Dodgson, Charles L. (dit Lewis Carroll), *Curiosa mathematica, II, Problems thought out during wakeful hours*, Londres, 1893.
- Dodgson, Charles L., *Pillow Problems*, Mac Millan, Londres, 1894.
- Maupin, Georges, *Opinions et curiosités touchant la mathématique, d'après les ouvrages français des XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles*, chez G. Carré et C. Naud, Paris, 1898-1902.

J'adresse mes bien vifs remerciements aux personnes et publications qui m'ont adressé des problèmes, ou des communications intéressantes, et qui m'ont autorisé à les reproduire: MM. Jean Wozniak (problème n° 104), Paul Bresson (problème n° 111), Jean Cazalet (problème n° 116, question 25), Marcel Lemoigne (problème n° 116, question 27, complément à la solution), Georges Vidal (problème n° 116, question 32), Jean Chevrier, professeur honoraire à la Faculté des sciences de Lyon (courbe cristal de neige et courbe de Peano), la *Revue des ingénieurs des Écoles nationales supérieures des Mines*, septembre 1978 (solution du problème n° 72) et la revue des anciens élèves de l'École polytechnique, *La Jaune et la Rouge*. J.-P. A.

L'illustration de cet ouvrage
a été réalisée par
SILVIA MADDONNI



table

	jeux	solutions
1 L'arquebuse du président	11	231
2 Le pingouin sédentaire	12	231
3 Le croquet et les deux universitaires	13	232
4 Bataille navale	15	233
5 Où l'escarville de Clytemnestre pose problème	16	234
6 Le réservoir bigame	17	234
7 Vertige arithmétique	18	234
8 La cohorte béotienne	24	235
9 Le marquis de Touchemoulin recrute	25	235
10 Les Clou vont à la foire	26	236
11 Dramatiques permutations dans la famille Clou	27	237
12 Clotaire est insatiable	28	237
13 Les bougies du sabbat	29	239
14 La Lozère enfin débloquée	30	239
15 Les goûters de Mme Minouflet	31	240
16 Babou et ses babouins	32	240
17 Une créance singulière	33	241
18 Le comptable défaillant des trous Clou	34	242
19 Le bal des ardentes	35	242
20 Déconcertant voyage à Londres	36	243
21 Bombardes et pyramides	37	243
22 Le bolide et les trois bornes	38	244
23 Prenez garde aux moutons	39	244
24 Victoire de Zénobie	40	245
25 Un rond de sapins carré	41	245
26 Qui fit, de Li ou d'Ali, le plus de lis?	49	246
27 Le pentagone de Sin-Pan	50	247
28 Le commerce frauduleux de M. Yang	51	248
29 Scandale à Macao	52	249
30 Quousque tandem abutere, Sinensis...	53	250
31 Une décision contestée du gouverneur de Macao	54	251
32 Le cheval boiteux de Sun Yat Sen	55	252
33 Triste histoire de Pou, Lou et You	56	252
34 Magie en boîtes	59	254
35 Fâcheuse promiscuité dans un car auvergnat	60	255
36 Une belle famille alsacienne	61	255

	jeux	solutions
37 Hôtel du Lapin Rouge	62	255
38 Les électeurs pontissaliens	64	257
39 Voyage en cinq bandes	65	259
40 Percussions de M. Clou sur un billard à trous	66	259
41 Réflexions de M. Clou sur un billard sans trous	67	260
42 Clovis carambole	68	261
43 Le billard circulaire	69	262
44 La base des sept chandeliers roses	79	263
45 Les filles de Mnémosyne et le diviseur obstiné	80	264
46 La poule et le gazomètre	81	264
47 Zabulon et Coucoulina en vacances	83	265
48 Je dirai quelque jour vos naissances latentes	84	265
49 L'anniversaire de Claudine	86	266
50 Clodomir se remarie	87	266
51 Évariste et son grand-père	88	267
52 Le secret de la famille Bédouche	89	267
53 Clapeyron en l'an 2000	90	269
54 L'âge de raison	91	269
 <i>Problèmes absurdes</i>		
55 Divagations zoologiques	106	270
56 Le marché couvert de Saint-Privat-des-Vieux	107	270
57 L'arbre, la borne et le bipède	108	270
 <i>Jeux de lettres et de mots</i>		
58 Le complot des Troussequins	111	271
59 La riche Levalloise	112	271
60 Pas d'arnica pour les canules	113	272
61 La musique des mots	114	272
62 La cachette de la reine de Saba	115	272
63 Micromagie	121	273
64 La sorcière est au centre	122	273
65 Les magiciens d'Anvers	123	273
66 Étoiles magiques	124	274

	jeux	solutions
67 Évocations numériques	125	274
68 Déception triangulaire	136	274
69 Les sphères peintes	137	274
70 Les pétasophores de Saint-Saturnin	138	275
71 Le rendez-vous des géomètres exotiques	139	275
72 Étonnant comportement d'une sphère percée	140	276
73 Vauban rencontre Euclide	141	278
74 Le carré anthropophage	142	279
75 Le testament du père Trigone	143	279
76 Le rat de Tegucigalpa	144	280
77 Le congrès des rats mayas	145	280
78 Considérations sur la vitesse de rotation des rats mayas	146	282
79 Les cochons n'aiment pas la mirabelle	147	285
80 Rayon des meules	148	286
81 La sphère creuse et le géomètre avisé	149	286
82 L'impossible carré de cubes	150	287
83 Les angoisses du rabbin Nehemiah	151	287
84 Si vous aimez les asperges...	152	288
85 Les ficelles du pharaon	153	288
86 Le secret du triangle des Bermudes	154	289
87 Les quatre médailles	155	289
88 Tubercules	161	292
89 Trick	162	292
90 Quarks	163	293
91 Bilboquet	164	293
92 Rutabaga	165	294
93 Le cheval d'Elberfeld	166	294
94 Multiplication supersonique	167	295
95 L'équation du solitaire	168	296
96 La belle comtesse et le prince emprisonné	172	296
97 Les animaux bouleversés par la cryptographie	173	296
98 Un certain parent de M. Joule	174	297
99 L'empereur et le philosophe	175	297
100 Le cryptogramme du chevalier de Rohan	176	297
101 La soustraction d'Harpagon	177	298

	jeux	solutions
102 Philatélie arithmétique	178	298
103 Les multiplications de Sainte-Barbe	179	299
104 Ni simple ni facile	180	299
105 Ex nihilo	181	299
106 Fidélités de la différence	182	299
107 Joies et labeurs de l'inversion	183	300
108 Un métier dangereux	185	301
109 La scandaleuse soirée d'anniversaire de Clovis	186	302
110 Trois cartes à jouer	187	302
111 Hasardeuses tribulations d'un domino	188	304
112 Séries jaunes	189	304
113 Les paquebots d'Édouard Lucas	190	305
114 Le centaure entravé	191	306
115 Allumettarum ludus	192	306
116 Quelques problèmes sur les nombres entiers	203	307

Problèmes de l'Antiquité et problèmes anciens

117 Le banquet des 41	214	313
118 Mille sous en tout	215	313
119 Les sept options de Thomas	216	314
120 Problème des trois objets	217	315
121 Le 552 715° chiffre	218	316
122 Le chemin de fer à roulette (russe)	219	317
123 Les treize caisses d'Ali Baba	220	318
124 Problème des dix chapeaux	221	319
125 Le sein de Mme de Maintenon	222	321
126 Le théorème de Fermat	224	321
127 La mort du maréchal de Saxe	227	322
128 Le loto et les tragédies de l'histoire	228	322

En marge

Origine des signes et vocables mathématiques	19
Les anciennes machines à calculer	42
Histoire des systèmes de numération et des chiffres	70
Lettre de Flaubert à sa sœur Caroline	85
Quelques paradoxes	92
Les nombres littéraux	109
Les carrés magiques	116
Les courbes des mathématiciens	126
Les calculateurs prodiges	156
La cryptographie	169
Mort de «un»	184
Curiosités numériques	193

Bibliographie des traités anciens	323
--	------------



Nouveaux jeux de l'esprit et divertissements mathématiques

Les "récréations mathématiques" sont aussi anciennes que notre histoire. Flavius Josèphe les pratiqua, comme, plus tard, Charlemagne, Leibniz et Flaubert. Le nouveau recueil de Jean-Pierre Alem propose cent vingt-huit problèmes en forme de jeux. Problèmes de mathématiques, mais où les mathématiques se mêlent parfois étroitement à la linguistique, à la lexicologie, à la logique particulière des jeux ou de la cryptographie, et même à la fantaisie. C'est pourquoi la plupart de ces problèmes peuvent être résolus par des personnes n'ayant pas une formation scientifique approfondie, ce qui ne veut pas dire qu'ils soient sans difficulté.

Comme dans son précédent recueil de jeux publié au Seuil, l'auteur s'est efforcé de présenter chacune de ses énigmes de façon insolite ou pittoresque, toujours attrayante. Il a inséré entre elles de nombreuses notes relatives à des curiosités mathématiques ou à l'histoire des notions et formules utilisées, qui fournissent une série de clés et contiennent des données historiques inédites. Ainsi sont dévoilées les divagations métaphysiques attachées à la quadrature du cercle ; proposés des assemblages numériques qui font inévitablement penser à une sorcellerie sous-jacente ; exposés des paradoxes inédits dont quelques-uns défient véritablement la raison ; présentée la succession des étranges machines qui, du boulier chinois, conduisirent à l'ordinateur ; suggérée la transformation de l'œuvre de Balzac en un nombre vertigineux.



9 782020 059763